RAYMOND DUVAL

DÉCRIRE, VISUALISER OU RAISONNER : QUELS "APPRENTISSAGES PREMIERS" DE L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE ?

Abstract. The observation of phenomena, the recording of new data, and their description play a major role in any scientific work, for knowledge first depends on the spread of a field of observations and on the degree of their discrimination. By highlighting the role of "conceptions", "explanations" and "validation", do the teaching of sciences tend to underestimate the real time and the decisive role of the work of observation and description, which sciences learning requires? This is the issue that we intend to argue about, by focusing on an area in which the observation of phenomena is beyond any perception: mathematics. With this aim in view, we will analyse the kind of problems teaching provides for learning and, in order to understand the activity is truly required of students in problem solving, we must distinguish the backward analysis from the forward analysis.

The problems given for a learning purpose have a common striking feature: they arise from the (variable) gap between the complete description of some situation and one of the different minimal descriptions that can be derived from it. And the kind of required activity consists in understanding the description of the given of the problem and, sometimes, in producing new data in order to supplement the description. We will find that the same kind of activity must support other mathematical processes such as generalisation, search for counter-example...

Forward analysis, which is the classical one in didactics, involves analysing the (semiotic) production of students: both verbal data, including the deep variation from oral mode to the writing one, and visual creation (drawings, diagrams, schemata.....) There the analysis of students's productions meets the analysis of descriptions of observations within other sciences. We will show the necessity of taking into account several levels into the articulation of meaning, both in speech and in semiotic visualisation. Otherwise students's productions cannot be interpreted in a relevant way.

Annales de didactique et sciences cognitives, volume 8, p. 13 – 62.

Résumé. L'observation des phénomènes, l'enregistrement de données nouvelles et leur description joue un rôle primordial dans le travail scientifique. Car les connaissances dépendent d'abord de l'extension du champ des observations qui peuvent être effectuées et du degré de leur discrimination. En insistant sur les “conceptions”, les “explications”, leur “validation”, l'enseignement des sciences ne tend-il pas sous-estimer le temps et l'importance du travail d'observation et de description nécessaire pour l'apprentissage ? C'est cette question que nous nous proposons d'aborder dans cet article, en nous centrant plus particulièrement sur un domaine où l'observation des phénomènes échappe à la perception, celui des mathématiques. Pour cela nous analyserons les problèmes mathématiques proposés dans l'enseignement à des fins d'apprentissage, en distinguant deux types d'analyse : l'analyse en amont et l'analyse en aval.

Ces problèmes présentent une caractéristique commune : ils résultent de l'écart entre la description complète d'une situation et l'une des différentes descriptions minimales que l'on peut en dériver. Et l'activité requise pour les résoudre consiste dans la compréhension de la description donnée par l'énoncé et dans la production de données nouvelles pour compléter la description de l'énoncé. Et nous verrons que ce même type d'activité est requis pour d'autres démarches mathématiques : la généralisation, la recherche de contre-exemples...

L'analyse en aval, la plus classique, implique l'analyse des productions d'élèves : à la fois les productions verbales, avec la variation considérable des modalités orales et écrites ainsi que clés productions de visualisation (dessins, schémas....)Ici l'analyse des productions rejoint l'analyse des descriptions faites d'observations systématiques dans le domaine des autres sciences. Nous verrons la nécessité de prendre en compte plusieurs niveaux d'articulation du sens, aussi bien dans le discours des élèves que dans leurs productions de schémas ou de figures.

L'importance des tâches de description dans l'apprentissage ne tient pas seulement au fait qu'elles sont intrinsèques à l'observation des phénomènes, base de toute connaissance, mais qu'elles consistent également en une activité de représentation qui implique la mobilisation d'un ou plusieurs registres sémiotiques et qui dépend de leur maîtrise par les élèves. Mais ce fait que toute description soit une démarche de représentation soulève plusieurs questions décisives pour les recherches sur l'apprentissage des mathématiques.

Mots Clés : Analyse des représentations, analyse en amont et analyse en aval (de problèmes), contre-exemple, description complète, description minimale, désignation individualisante, désignation catégorielle, désignation fonctionnelle, droite munie de repères, explication, niveau d'articulation du sens, observation, opération discursive, problème et énoncé de problème, question, questionnement, visualisation iconique, visualisation non iconique, représentation sémiotique, système producteur de représentation, synergie et coordination

---

Trois mots phares semblent avoir guidé la recherche en didactique des mathématiques, ces dernières décennies, ou tout au moins en condenser les conceptions fondamentales : concept, problème, argumentation. Ils ont d'emblée été utilisés comme des indicateurs caractéristiques à la fois de ce qu'est l'activité mathématique et des conditions de son apprentissage. “Concept”, parce que ce terme renvoie à des propriétés et à une activité mentale de compréhension. “Problème”, parce que l'activité de recherche et de résolution constitue le travail mathématique et qu'un problème place les élèves dans une situation où ils doivent eux-mêmes faire et construire quelque chose. “Argumentation”, parce que l'exigence de “validation” ou de preuve y constitue l'exigence rationnelle et scientifique.

En prononçant d'emblée le verbe “décrire” et en mettant les démarches de description au premier plan des apprentissages mathématiques, nous semblons donc nous situer aux antipodes des problématiques didactiques de l'apprentissage des mathématiques. Pourtant les choses ne sont pas aussi tranchées. Tout d'abord dans la mesure où l'activité de description constitue comme l'autre face de toute activité d'observation systématique, les démarches de description sont fondamentales pour l'acquisition des connaissances scientifiques : elles contribuent à l'apport ou à la découverte de données nouvelles, base de tout développement de la connaissance. Ensuite, les démarches de description mobilisent des processus cognitifs de représentation qui sont hétérogènes, et elles requièrent, en outre, leur coordination. Ce qui renvoie à des processus d'apprentissages complexes et souvent longs à résoudre, processus que l'on retrouve dans des disciplines très différentes ainsi qu'on peut le vérifier quotidiennement au niveau de l'enseignement primaire. Enfin, les descriptions sont soumises à des exigences d'acceptabilité spécifiques : elles doivent permettre de reconnaître ce qui est décrit. Non seulement ces exigences sont aussi essentielles que celles de validité ou de validation, mais elles leur sont cognitivement préalables. Tout cela conduit donc à nous interroger sur la place réelle, et trop souvent sous-estimée, des démarches de description dans les premières étapes des apprentissages mathématiques, cela indépendamment et avant même toute forme de raisonnement.

C'est dans cette perspective que nous allons donc nous intéresser tout particulièrement à ce qui est mis en avant dans les apprentissages mathématiques : les problèmes. Quand on analyse les caractéristiques et la structure des problèmes mathématiques proposés aux élèves à des fins didactiques, on est frappé que par le fait qu'il s'agit le plus souvent d'un jeu très particulier de pure description. Et si l'on regarde l'activité permettant de mettre sur la voie d'une résolution, il s'agit simplement soit de décrypter une description minimale proposée, soit, dans le cas d'un “véritable problème” de se constituer une base locale d'observations pour amorcer la résolution. Et si, oubliant l'activité de résolution de problèmes, on regarde des démarches considérées comme fondamentales pour l'activité mathématique, telles que généraliser, produire des contre-exemples, définir... on s'aperçoit aussi qu'elles ne peuvent se développer que sur la base d'un réel travail préalable de description.

On ne peut pas souligner l'importance des descriptions, dans l'acquisition des connaissances scientifiques comme dans les premières étapes des apprentissages mathématiques, sans aborder une autre question fondamentale aussi bien pour la recherche que pour les enseignants : l'analyse des productions des élèves. Car c'est dans le cadre des démarches de description que l'on obtient les productions les plus personnelles et les plus diversifiées, puisqu'elles peuvent se faire aussi bien verbalement qu'à l'aide de dessins, de schémas... Il s'agit là, pour la recherche, d'une question méthodologique et, pour les enseignants, d'une question de diagnostic. Nous verrons que toute analyse des productions des élèves requiert que l'on distingue soigneusement dans toute production sémiotique, discursive ou non discursive, plusieurs niveaux d'articulation du sens, qui ne relèvent pas des mêmes opérations.

Enfin, d'un strict point de vue cognitif, toute démarche de description est, intrinsèquement, une activité de représentation. Mais dès que l'on prononce ce mot, s'ouvre immédiatement une alternative : représentation mentale et intérieure ou représentation sémiotique et matérielle ? Opposition classique que l'on retrouve dans presque toute la littérature didactique et qui, en réalité, repose sur une double confusion. La méconnaissance de l'importance des démarches de description n'est peut-être que le syndrome de cette double confusion concernant les représentations.

Telles sont les questions, concernant l'étude des “apprentissages premiers” en mathématiques, que nous nous proposons d'examiner en abordant successivement les points suivants :

1. Le fonctionnement cognitif des démarches de description,
2. la dimension heuristique d'une démarche de description : le cas de la “résolution de problème”,
3. le rôle des descriptions dans le développement d'autres démarches cognitives,
4. comment analyser la complexité des rapports entre discours et visualisation ?
5 descriptions et représentations : quelques questions décisives pour les recherches sur l'apprentissage des mathématiques.

1. Le fonctionnement cognitif des démarches de description

Pour avoir un premier aperçu de tout ce que l'activité de description recouvre, prenons deux exemples en dehors des mathématiques. Cela nous permettra de voir la complexité cognitive de cette activité, sa fonction décisive pour le développement des connaissances ainsi que la variété des tâches auxquelles elle donne lieu.

1.1. Deux exemples en dehors des mathématiques

Le premier exemple est classique : quelqu'un vous demande, ou vous demandez à quelqu'un d' “expliquer la route à suivre pour aller à...”. L' “explication” peut être seulement verbale, avec quelques gestes de la main pour matérialiser les directions. Elle peut aussi se faire par un dessin griffonné sur un bout de papier (en l'absence d'un plan de la ville ou d'une carte.) Naturellement, si la description est purement verbale, il faut que celui qui écoute puisse la convertir en images des lieux ou des bâtiments repères évoqués. Car comprendre une description verbale, c'est *visualiser* ce qui est décrit. Et qu'elle soit visuelle ou graphique, une description doit permette de reconnaître sur le terrain l'itinéraire décrit. Sinon, elle n'est pas utilisable. On voit donc qu'une démarche de description, même familière, requiert la mise en circuit de trois pôles

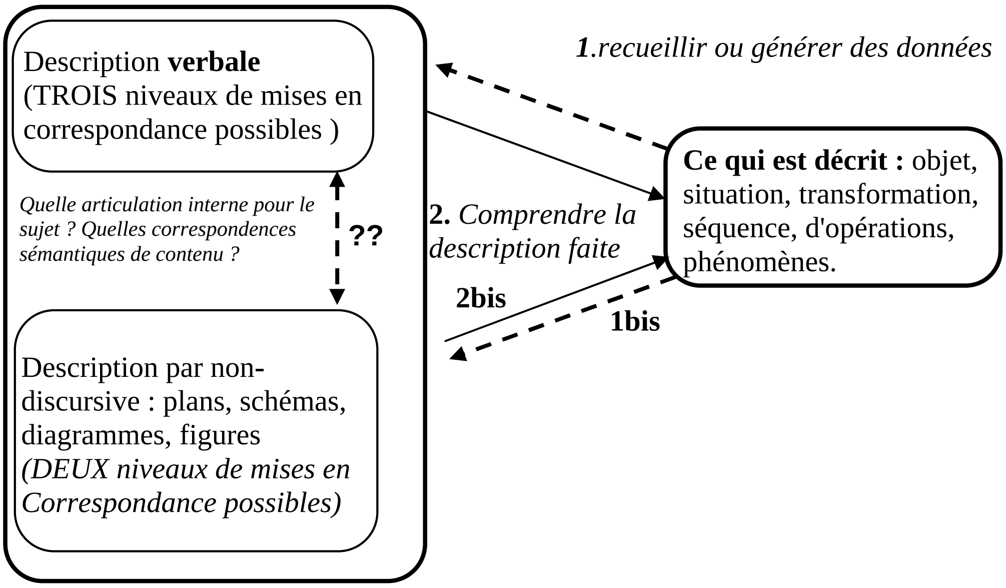


Figure 1 : Le fonctionnement cognitif d'une démarche de description selon les deux positions possibles : produire soi-même la description (1 et/ou 1bis) ou comprendre la description faite par un autre (2 et/ou 2bis.)

Ce schéma permet de voir les trois facteurs de variation cognitive qui jouent sur la compréhension ou la production d'une description : (1) le sujet a ou n'a pas déjà “rencontré” ce qui est décrit, (2) la capacité du sujet à articuler ou non les différents registres de représentation dans lesquels la description peut être faite, (3) la possibilité ou non d'un accès aux objets indépendamment des représentations qui peuvent en être faites.

Le deuxième exemple est différent. Comment faire découvrir à des élèves de 7-8 ans, l'existence physique de l'air et ses propriétés (l'air occupe un volume), sachant que ses propriétés physiques **ne sont pas perceptibles** : l'air est incolore, inodore, impalpable, de masse très faible. D'où la nécessité d' observations à travers des manipulations qui peuvent être très simples. Par exemple, on prend une bouteille en plastique vide et on fixe à son embouchure un ballon gonflable, comme ceux distribués dans les fêtes : on comprime la bouteille et le volume du ballon s'accroît. Dans cette situation d'observation, il y a un point crucial pour l'activité même de découverte : *l'observation du phénomène à des fins d'interprétation ou d'explication, implique la description de la manipulation*. Cette description peut être verbale (oralement ou consignée par écrit) mais elle peut aussi se faire aussi à l'aide d'un dessin dit “d'observation”. La fonction de cette description est à la fois de centrer l'attention sur les deux données observables de cette manipulation et de les enregistrer : la diminution du volume de la bouteille et l'augmentation du volume du ballon.

On voit donc que l'activité de description recouvre aussi bien des situations de transmission d'informations que des situations d'observation et qu'elle mobilise deux registres de représentations différents. D'ailleurs pour le mot “décrire”, les dictionnaires mentionnent deux significations : exposer par le détail et dessiner. Cette première analyse peut paraître triviale. Elle permet cependant d'attirer l'attention sur la complexité cognitive d'une démarche de description et d'attirer l'attention sur deux variables cognitives et didactiques dont la différence de nature est souvent négligée.

1.1.1. Deux variables cognitives, et didactiques, dans les activités de description

Tout d'abord, il ne faut confondre ce que nous appellerons une tâche “réelle” de description et une tâche “purement formelle” de description.

Une tâche de description est réelle quand elle requiert une observation de l'objet ou de la situation à décrire (Figure 1 *supra* : les flèches (1) ou (1bis)) : par exemple, établir un plan ou une carte à partir de relevés sur le terrain, ou encore effectuer des manipulations à l'aide d'un dispositif pour découvrir les propriétés physique de l'air. Ici, l'élève a un accès à chacun des deux éléments du couple {objet, représentation de l'objet}, indépendamment l'un de l'autre. Au contraire une tâche de description est purement formelle quand elle se limite à un simple changement de registre de représentation : description verbale à partir d'un dessin ou d'une “image” ou inversement. L'élève n'a plus un accès indépendant à l'objet représenté. Les descriptions formelles sont alors des tâches de conversion qui cherchent à respecter l'invariance de ce qui représenté ou, de manière plus ou moins laxiste : par exemple, des tâches de verbalisation libre sur une image, un schéma, des photos, ou plus rarement des tâches d'illustration d'un énoncé.

L'enseignement des sciences au niveau primaire se trouve souvent pris entre deux exigences contradictoires : d'une part nécessité de descriptions réelles c'est-à-dire engagées dans des démarches d'observation (“La main à la pâte”), en dehors desquelles il est difficile sinon impossible d'entrer dans une démarche scientifique, et d'autre part impossibilité de descriptions réelles pour beaucoup de phénomènes: *d'où le repli sur la consultation et la lecture de documents* (Gouanelle & Schneeberger, 1996) ! On notera qu'en géométrie les tâches demandant le programme de construction d'une figure (du moins à l'aide des instruments classiques) dans le cadre d'une transmission de message, sont plus des tâches formelles que des tâches réelles de description.

Ensuite, il faut prendre en compte la situation du sujet. En effet, ce qui est décrit, ou à décrire, peut être déjà familier. Cela veut dire que les données pertinentes ou utiles pour la description lui sont déjà disponibles et mobilisables. Il en est ainsi lorsqu'on explique un itinéraire à quelqu'un qui demande sa route et qui connaît un peu la ville ou le quartier. Mais cela n'est pas toujours le cas. Il faut alors d'abord chercher et recueillir les données importantes, et ensuite les organiser : c'est le cas de toute connaissance qui se fonde sur des observations comme, par exemple, en physique, en géologie, en astronomie....Ici l'acquisition de connaissances ne peut pas faire l'économie d'un travail de description réelle. La démarche de description apparaît alors dans toute sa complexité : indissociable d'un relevé de données et de leur organisation, elle impose que l'on distingue plusieurs niveaux de correspondance, entre la description verbale ou graphique (plan, schéma, figure...) et les phénomènes décrits (*infra* III 4, IV1.) Et il n'est pas inutile de rappeler ici combien les tâches de description se révèlent difficiles pour les élèves, même lorsqu'il s'agit d'une simple situation de transmission d'informations pour décrire ce qu'ils connaissent déjà.

1.2. Comprendre une description

C'est dans cette position (Figure 1 : flèches (2) et (2bis)) que l'enseignement place le plus souvent les élèves, y en compris en mathématiques. Et cela non seulement avec tous les documents écrits qui servent de référence, mais également avec les problèmes, du moins avec cette catégorie d'énoncés de problèmes qui semblent largement répandus au niveau de l'enseignement primaire, les problèmes d'application à la vie “concrète” (infra II 4.) Naturellement, pour que la compréhension ne soulève pas de difficultés majeures, les descriptions présentées aux élèves le sont généralement avec un double souci. On veille à ce que la description verbale :

- renvoie à quelque chose que l'on pense être déjà connu des élèves,
- soit accompagnée d'une illustration ou d'un schéma.

Deux raisons semblent justifier ces choix. En premier lieu, si comprendre une description c'est visualiser ce qui est décrit, on doit comprendre plus facilement un texte, ou un énoncé, si on a déjà vu ou manipulé l'objet décrit. *Il n'est plus alors nécessaire de lire tout l'énoncé ou d'examiner le dessin descriptif avec beaucoup d'attention.* On peut se référer aux souvenirs ou à l'expérience que l'on en a. Mais, évidemment, vouloir se ramener systématiquement à ce cas de figure présente un inconvénient didactique : on n'apprend pas à comprendre des descriptions d'objets *qui d'une manière ou d'une autre ne sont pas déjà familiers.* En second lieu, on suppose qu'un schéma, un graphe ou une figure seraient plus directement accessibles qu'une description verbale. Ne serait-ce que parce qu'on identifie immédiatement ce qu'ils représentent et que l'on y verrait clairement les relations. D'où le fait que dans les documents didactiques ou dans les textes de vulgarisation, les descriptions verbales soient très souvent doublées d'"“images”. Mais cela fait souvent oublier que comprendre une description par visualisation ce n'est pas seulement reconnaître l'objet décrit mais *c'est aussi pouvoir mettre en correspondance les unités du dessins et les traits de l'objet décrit* (par exemple des repères d'orientation pour un plan.) Et là, des difficultés de “lecture” ou d'analyse des représentations visuelles proposées apparaissent très souvent.

Le problème de la compréhension des descriptions n'est donc pas de savoir si un type de présentation visuelle (flèche 2bis) est préférable à l'autre (flèche 2) ou s'il doit l'accompagner comme un deuxième “support”, mais bien celui des correspondances entre une description verbale et un des différents types de description par visualisation (Figure 1 : double flèche en pointillés.) Ce problème recouvre trois questions. *Toutes les représentations visuelles ou toutes les “images” montrent-elles de la même manière ?* L'articulation entre une description visuelle et une description verbale va-t-elle de soi ou ne requiert-elle pas un long apprentissage ? Et lorsqu'un description vient en accompagner une autre, quelle fonction remplit-elle réellement ?

Arrêtons nous à la première de ces trois questions. Pour en voir la difficulté, il suffit de comparer deux images différentes de ce qu'on pense être une même chose. Prenons, par exemple, des représentations de l'“espace”. On voit tout de suite des équivoques surgir. Ainsi, regarde-t-on une figure géométrique comme on regarde un plan du quartier ou la carte d'une région ? Regarde-t-on le patron d'un solide comme on regarde la représentation en perspective du même solide (Duval 2000b) ? Ou regarde-t-on un plan de quartier comme on regarde un schéma de circuit électrique ? Ou encore regarde-t-on le schéma de coupe d'un volcan ou le dessin d'un stade du développement embryonnaire comme on regarde des personnages sur les images d'une bande dessinée ? Ces questions, qui débordent le champ didactique, n'ont rien d'arbitraire, *puisque cette diversité de représentations visuelles (“support” dit-on) est proposée à tous les élèves dès le primaire***.** Et il suffit de se limiter à l'exemple des représentations de “l'espace” pour voir le fossé considérable entre le fonctionnement cognitif de représentation requis pour la “lecture” d'un plan et celui requis pour la “lecture” d'une “figure géométrique. On ne peut donc pas se contenter de l'opposition rhétorique entre langage et image ou entre espace pratique et espace géométrique, **il faut distinguer deux types de visualisation :** la visualisation iconique, fondée sur des critères de ressemblance entre des éléments de la représentation et l'objet de représenté, et la visualisation non iconique exclusivement fondée sur des contraintes d'organisation interne (Duval 2002b.) Ainsi un plan ou un patron relèvent d'une visualisation iconique tandis que les figures géométriques relèvent d'une visualisation non iconique. Non seulement les fonctionnements représentationnels de ces deux types de visualisation sont hétérogènes, mais ils n'offrent pas les mêmes prises ou les mêmes appuis à la description verbale et au raisonnement (*infra* IV.)

2. La dimension heuristique d'une démarche de description : le cas de la “résolution de problème”

Pour percevoir l'importance des démarches de description, il suffit de rappeler leur rôle heuristique dans le développement des connaissances scientifiques. Toute découverte, en effet, dépend de la détection ou du rassemblement de données nouvelles concernant les phénomènes (astronomiques, physiques, géologiques, biologiques...) que l'on étudie. La constitution ou l'élargissement d'un corpus de données est une phase décisive dans la “construction” des connaissances scientifiques. Et ce corpus reste une base de référence dont les connaissances ne peuvent jamais être complètement détachées. Or, c'est seulement dans les démarches d'observation et d'exploration, instrumentalisées ou non, que l'on peut accéder à des données nouvelles ou élargir le corpus de données dont on dispose. Et toute démarche d'observation implique nécessairement des tâches de production de descriptions.

En va-t-il de même en mathématiques ? La réponse n'est pas d'emblée évidente car les objets mathématiques ne sont pas phénoménologiquement et instrumentalement accessibles, comme ceux des autres champs scientifiques. Cela d'ailleurs a souvent conduit à relativiser, dans le cadre de l'enseignement, l'importance des tâches de description, du moins celles de description verbale, au détriment des activités de raisonnement à des fins de justification ou de preuve ! La seule exception, peut-être, concerne l'enseignement de la géométrie avec l'introduction, vers le milieu des années 1970-1980, de tâches de description de construction de figures en situation de transmission de message. Et cela parce qu'après une approche trop axiomatique on découvrait qu'il fallait faire prendre conscience aux élèves à la fois de la nécessité de dénominations précises et de l'existence des contraintes figurales internes aux figures géométriques.

Pourtant si l'on regarde ce qui est considéré comme la voie royale de l'apprentissage des mathématiques, la résolution de problème, force est de constater que les activités cognitives mobilisées consistent pour l'essentiel en des tâches de compréhension et de production de description : compréhension de l'énoncé et recueil de données pour la résolution. Il suffit pour s'en convaincre d'analyser les problèmes proposés aux élèves dans le domaine numérique.

2.1. Caractéristiques et structure d'un énoncé de problème

Dans leur très grande majorité, les énoncés de problème proposés au élèves, au niveau primaire ou au niveau du collège, consistent en **la description partielle** d'une situation, de manière à ce que les informations données permettent de retrouver les informations manquantes ou omises. La situation ainsi décrite peut être un traitement instancié, une configuration géométrique, une procédure, un jeu, etc. Une question vient généralement indiquer la (ou les) information(s) manquantes à retrouver. On peut ainsi donner une définition procédurale d'un énoncé de problème : **on obtient un énoncé de problème EN AMPUTANT LA DESCRIPTION COMPLÈTE d'une situation et, cognitivement, il y a autant de types d'énoncés différents qu'il y a de manières différentes de supprimer des données dans une description complète pour obtenir UNE DESCRIPTION MINIMALE,** (c'est-à-dire une description permettant de reconstituer la description complète.) Autrement dit, l'énoncé change d'abord en fonction des données supprimées.

Un deuxième facteur intervient souvent dans la fabrication des problèmes : le décor. Soit on s'en tient au domaine des objets et des opérations mathématiques, soit le plus souvent on évoque une situation “concrète” du monde environnant, pour montrer que les mathématiques “sont utiles”, qu'elles “servent” ou pour “donner du sens” (!) Cette évocation constitue une deuxième description qui se superpose à la première. Évidemment la distinction entre description partielle et description complète ne concerne pas cette évocation. Car cette deuxième description est neutre par rapport à la première : on peut changer le décor évoqué par cette deuxième description sans changer le problème posé par la description partielle.

DESCRIPTION

COMPLETE
Toutes les informations sont données.
Pas d'énoncé de problème possible.

Les variations de description conservent le même contenu : ce ne sont que des variations de surface.

MINIMALE
Certaines informations seulement.
Un énoncé de problème possible.

Il y a plusieurs descriptions minimales possibles, NON ÉQUIVALENTES, d'une même situation : elles ne conservent pas le même contenu.
Différents types de problème.

Une description *problème de mathématiques*

Superposition de deux descriptions hétérogènes :
problèmes d'application.
word problems.

Générer des données nouvelles par rapport à celles explicitées dans l'énoncé

On se limite aux données fournies.

Figure 2 : Analyse en amont des énoncés de problèmes “didactiques”.

Les analyses didactiques centrées sur la résolution ne considèrent que le passage de l'énoncé donné à ses différents traitements possibles (analyse en aval) et négligent le passage d'une description complète à une description minimale ainsi que les procédure pour discriminer la superposition des descriptions. Il est pourtant décisif si l'on veut faire entrer les élèves dans ce jeu si particulier que constitue la fabrication de problèmes mathématiques didactiques et, par suite, leur résolution.

Prenons l'exemple prototype des problèmes additifs, ceux qui demeurent les premiers problèmes et qui sont toujours massivement proposés aux élèves dans le primaire, quels que soient les changements de programme et les réformes ! Ainsi, pour une opération numérique donnée, il y a trois énoncés possibles correspondant à une question sur l'état (ou sur la transformation) initial, intermédiaire ou final : (4 + 3 = ...), (4 ..... = 7), (.... + 3 = 7). Mais une démarche analogue peut être faite avec des configurations géométriques. Ainsi, on peut proposer aux élèves des tâches de reconstitution ou de **restauration** de figures qui ont été endommagées, en jouant, en outre, sur la nature des instruments utilisables pour reconstituer ou reproduire la figure : la complexité de la tâche dépend de ce qui aura été supprimé dans la figure à restaurer (Perrin et Gaudin, 2002.)

Naturellement l'exemple des problèmes additifs nous renvoient à une catégorie particulière de problèmes, les problèmes d'application à une situation non mathématique (G. Vergnaud 1976 ; 1990 p.149-158.) Or la particularité de tous ces types d'énoncés est de SUPERPOSER DEUX DESCRIPTIONS HÉTÉROGÈNES : d'une part celle d'un traitement instancié comme nous venons de le voir et d'autre part celle de la situation “concrète” d'application choisie pour “donner du sens”. C'est cette deuxième description superposée qui associe aux nombres de l'opération à trou une valeur sémantique d'état ou de transformation ainsi que, pour les valeurs de transformation, l'une des deux valeurs opératoires d'un couple d'antonymes (“gagner/perdre” pour les situations de jeu, “monter/ descendre” pour les déplacements verticaux, “vendre/acheter“pour les situations commerciales....) *Et c'est en fonction de cette association avec une valeur sémantique que les nombres en viennent à désigner des quantités.* Les énoncés de problèmes de mise en équation ou en système d'équations, comme tous les problèmes d'application, sont des énoncés qui superposent deux descriptions hétérogènes.

Cependant si l'on ne regarde plus les problèmes par rapport aux énoncés, ceux-ci plaçant les élèves dans la position de devoir comprendre des descriptions faites par quelqu'un d'autre (descriptions dont le principe de production est toujours passé sous silence, comme pour les tours de prestidigitation), mais par rapport à la résolution, il nous faut introduire une troisième distinction. Il y a les problèmes dont la résolution requiert que l'on génère des nouvelles données (par exemple la recherche d'objets répondant à une ou à deux conditions fixées (R. Douady, 1986, p. 13-20) et ceux pour lesquels on peut se limiter aux seules données de l'énoncé (les problèmes additifs évoqués et plus généralement tous les problèmes d'application.) Or devoir générer des données nouvelles place en position de devoir soi-même produire une description et cela dans un travail d'observation. On peut alors voir l'hétérogénéité cognitive des tâches que peut recouvrir l'expression, trop globalisante, de “résolution de problème”.

2.2. Les différentes tâches impliquées dans la résolution d'un problème

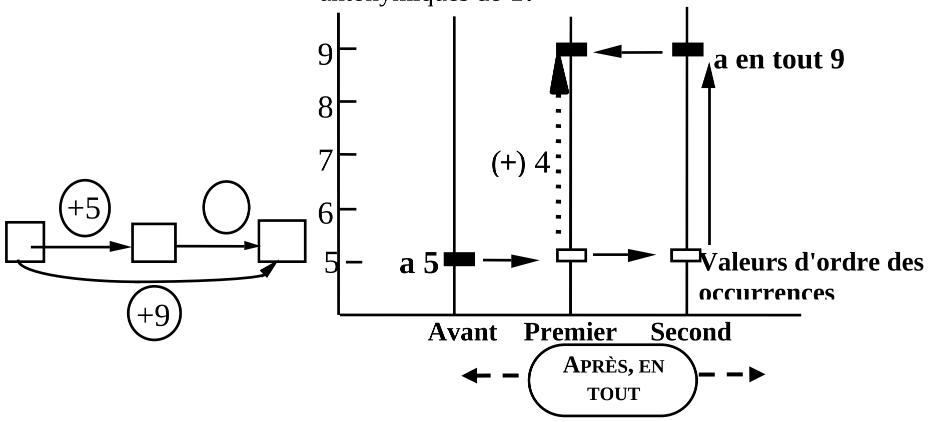
Pour analyser et évaluer la complexité d'un problème, on ne peut pas se référer seulement aux notions mathématiques ou aux procédures mathématiques que sa résolution mobilise, il faut aussi tenir compte du fait que le problème posé tient à la description partielle minimale choisie et de ce que l'énoncé y superpose une seconde description et, enfin, de la nécessité ou non de produire de nouvelles données en vue de sa résolution.

2.2.1 La compréhension de l'énoncé

C'est évidemment la première tâche. On voit tout de suite qu'il peut y avoir une différence considérable entre comprendre un énoncé à une seule description et comprendre un énoncé à double description. Arrêtons sur la compréhension des énoncés à double description : l'une étant la description minimale d'un traitement arithmétique, ou algébrique, instancié, et l'autre l'évocation stéréotypée d'un scénario censé être familier aux élèves.

Tout d'abord comprendre ce type d'énoncé, c'est être en mesure de “sélectionner les informations pertinentes ou utiles” pour résoudre le problème. On trouve cette formulation dans toute la bonne littérature. Oui, mais comment un élève peut-il faire cette sélection ? Presque tout le monde sent alors la nécessité de faire appel à des “représentations”. Oui encore, mais lesquelles ? Et là se trouve le point aveugle dans beaucoup de recherches ou de propositions didactiques : *à quelles conditions doivent répondre ces représentations auxiliaires — et transitionnelles— pour que les élèves puissent non seulement comprendre — et donc résoudre— le problème particulier qui leur est posé mais aussi tous les autres problèmes possibles de ce type ?* Ainsi, dans le cas de l'exemple prototypique des problèmes additifs, faut-il recourir à des représentations de type unidimensionnel, comme le schéma de calcul relationnel (Vergnaud 1976, 41-42; 1990,150-157) comme on le retrouve aujourd'hui dans tous les manuels à l'intention des enseignants, ou à des représentations de type bi-dimensionnel (Damm 1992) mais peu utiles d'un strict point de vue mathématique ?

Valeurs quantitatives E ou T : le sens des fléches, sur les valeurs antonymiques de cet axe, marque les valeurs antonymiques de **T.**



Les rectangles noirs correspondent aux données de l'énoncé.

Figure 3 : Lequel de ces deux types de représentation peut faire entrer les élèves dans la compréhension d'un problème additif ? Celui, unidimensionnel, à gauche ou celui bi-dimensionnel à droite ? Les deux schémas sont ici instanciés pour des énoncés du type : “Pierre a (ou “a gagné” ou “a perdu”) 5 billes. Il joue une partie (ou il “joue une deuxième partie”.) En tout il a 9 billes (ou “a gagné”, ou “a perdu”)”.

On voit tout de suite que le schéma de calcul relationnel est congruent à l'une des trois opérations à trou possibles pour une addition donnée (5+4 =9), tandis que le schéma bi-dimensionnel est congruent à la double description de l'énoncé *et il permet de séparer les deux descriptions.* En effet, ce que l'on appelle les “informations pertinentes” de l'énoncé, celles que l'élève doit “sélectionner”, correspondent chacune au CROISEMENT DE DEUX DÉTERMINATIONS SÉMANTIQUES DIFFÉRENTES (marquées ici par deux axes différents.) C'est la prise en compte *du croisement de deux déterminations sémantiques* différentes qui permet de repérer *une information* et c'est cette prise en compte qui différencie radicalement la lecture d'un énoncé mathématique et celle d'un énoncé ordinaire ! On peut évidemment s'arranger pour court-circuiter cet aspect dans la résolution de quelques particuliers de ce genre. Mais alors faut-il s'étonner que la grande majorité des élèves traîneront des difficultés insurmontables, y compris sur certains problèmes additifs jusqu'à BAC + 3 (Delègue et Roussel , 2000) ?

2.2.2. Générer des données : l'inventaire de cas possibles pour examen

Dans la plupart des problèmes d'application, il n'y a pas à générer de nouvelles données pour résoudre, il y a simplement à **convertir** celles qui sont indiquées dans l'énoncé. La tâche de résolution se réduit alors à la tâche de compréhension de l'énoncé, comme pour les problèmes additifs évoqués ci-dessus. D'ailleurs, la réponse peut être immédiatement trouvée à la seule lecture de l'énoncé ou même à sa simple écoute. Ainsi la résolution des problèmes additifs ne requiert en rien le recours à l'écriture ou à la production de traces écrites formant ensuite une base d'observation (Duval 2000a p. 147.) La seule difficulté consiste à *discriminer la superposition de deux descriptions et le croisement de deux déterminations sémantiques*. C'est pourquoi ce type de problème est souvent opposé aux “vrais” problèmes, c'est-à-dire à ceux demandant une recherche.

Ainsi, dans le problème de la recherche d'un rectangle de demi-périmétre égal à 41 cm et d'aire 402 cm2, la première phase de résolution consiste à générer une liste plus ou moins longue de “couples (a,b) dont la somme est égale à 41” et dont on regarde que “le produit voudra bien être proche de 402” (Douady 1986, p.22.) Les élèves peuvent ainsi produire des listes d'additions et de multiplications de deux entiers, en variant ces deux entiers. Ces listes peuvent aller du couple (20, 21) à (16,25), et parfois au delà. Leur examen permet de remarquer des variations d'approximation en raison de la variation des écarts entre les deux nombres. Il peut aussi conduire à la recherche d'un deuxième nombre qui ne soit plus un entier. Il peut aussi arriver que, dans la génération de la liste des couples, la centration sur le nombre 402 jouant un rôle privilégié de repère, fasse oublier la deuxième condition d'où la production de couples tels que (19,21.) Dans ce cas, l'examen des données produites permet un feed-back sur la compréhension de l'énoncé, c'est-à-*dire ici le repérage des deux contraintes.*

La génération de données consiste donc en la production d'une première description dont l'adéquation à la description détaillée demandée (ici le rectangle partiellement décrit, la longueur des côtés n'étant pas donnée) peut ensuite être contrôlé. Deux autres exemples illustrent parfaitement l'importance de cette démarche de description. Il y a tout d'abord le célèbre problème de la course à 20 ! Deux joueurs, A et B, peuvent chacun avancer au choix de 1, 2 ou 3 cases. A jouant en premier, qui peut, à coup sûr, arriver le premier à la case 20 ? Comme dans l'exemple précédent, il faut commencer par générer des données, c'est-à-dire envisager un ou deux enchaînements de coups possibles. Mais, ici, un autre aspect des démarches de description apparaît : l'organisation spatiale des données générées permet de mettre en évidence la régularité de la progression du joueur B et donc de remarquer **un effet de "**quelque chose" à identifier sur l'évolution de la partie. En outre, *la focalisation de l'attention peut se faire dans deux directions très différentes :* soit sur la manière de jouer de B en réponse au choix de A, soit sur les données de la progression numérique de B. Enfin, la progression numérique des positions successives de B peut donner lieu à deux descriptions verbales différentes également pertinentes : l'une additive (+4) et l'autre multiplicative (x 3.) Ce qui, au passage permet de soulever la question : à quelle description verbale, implicite ou explicite, renvoie l'emploi d'un terme de propriété ?

	A : coup n	**B : coup n+1**	
description *forward* ↓	1 ou 2 ou 3		
		4	
	. . .	. . .	
		12	
	13 ou 14 ou 15		
		16	
	17 ou 18 ou 19		↑ description *backward*
		20	

Figure 4 : Description des déroulements possibles de la partie.

Un dernier exemple montrera que la description ne consiste pas uniquement en la génération de données numériques. C'est le problème de l'escargot. Il doit franchir un mur de 10 m : le jour il monte de 3 m mais, la nuit, il glisse et descend de 2 m. Combien de jours lui sont nécessaires pour parvenir au haut du mur. Il suffit d'énoncer ce problème pour obtenir rapidement, même avec des Professeurs des écoles, la réponse 10 avec le refus d'aller au-delà. Or, ici, la compréhension de la description faite implique ici que le lecteur pense à distinguer la position le matin et celle atteinte le soir du même jour. Et une organisation des données numériques, analogue à celle de la figure 5, devient alors possible.

Il y a, bien évidemment d'autres tâches de résolution, dont certaines seront indirectement évoquées dans la section suivante. Nous nous sommes limités ici aux deux tâches d'amorçage de la solution : la compréhension de l'énoncé et la génération de données, c'est-à-dire la compréhension d'une description particulière (parmi différentes descriptions minimales possibles) faite par quelqu'un d'autre et la production de données permettant l'examen de la situation décrite. **Car c'est sur ces deux tâches d'amorçage que butent la majorité des élèves.**

On voit donc l'intérêt de s'attarder sur les démarches de description : cela ne permet pas seulement de remettre au premier plan une certaine parenté dans le rôle heuristique de l'observation pour les mathématiques et pour les autres sciences, cela montre l'urgence d'une réelle analyse cognitive des problèmes qui sont élaborés à des fins didactiques. Or, le plus souvent, les explications ou commentaires didactiques se contentent d'une référence aux notions très générales de “conception” ou de “conceptualisation”. D'où la tentation d'expliquer par un même schéma d'analyse les démarches de résolution des problèmes à description unique et ceux à double description.

3. Le rôle des descriptions dans le développement d'autres démarches cognitives

On ne saurait trop so0546gn'hes

3.1. Description et questionnement : *"Madame, comment on fait pour poser une question ?"*

On ne saurait souligner l'importance, dans l'acquisition des connaissances scientifiques, du fait de **SE poser** des questions : il s'agit, là aussi, d'une condition nécessaire pour le développement de la compréhension dans les apprentissages. Mais, bien évidemment, les questions sont peut-être ce qu'il y a de plus difficile à communiquer, dans la mesure où une question posée ne se transforme pratiquement jamais en une question que l'on se pose. Car une question déborde toujours le contenu des connaissances qu'elle paraît mobiliser : elle a des effets de résonance sur tout ce qu'un individu croit savoir ou ne pas savoir. Aussi, pour bien distinguer les questions que l'on se pose et celles qui nous sont posées par quelqu'un d'autre, préférerons nous parler dans le premier cas de "questionnement", le second cas ne dépassant pas souvent le sentiment d'obligation généré par une demande. Or l'un des indices du questionnement n'est pas seulement l'attitude de recherche qu'il déclenche mais la compréhension du "pourquoi la question se pose".

Pour susciter le questionnement, on recourt toujours (Platon s'y référait déjà : *République,* 524d) au même ressort : la "contradiction", soit entre ce à quoi le sujet pouvait s'attendre et ce qui se produit effectivement, soit entre des avis divergents dans le cadre d'une confrontation-débat. La première voie requiert principalement que l'on puisse faire des observations dans le cadre de mini-manipulations ou de montages : ce qui est relativement naturel s'il s'agit de découvrir l'existence de l'air et de ses propriétés physique ou de découvrir le fonctionnement d'un circuit électrique... En mathématiques, un travail sur les configurations géométriques à l'aide instruments (classiques ou informatiques, ou même purement bricolés comme des bouts de papier déchirés n'importe comment) nous rapproche de ces conditions. Mais, en dehors de ce champ, cela semble difficile à mettre en oeuvre. C'est pourquoi on privilégie, le plus souvent, la seconde voie, celle des confrontations-débats, laquelle pourtant présente une double limitation :

- elle subordonne le questionnement à la validation, ce qui induit d'ailleurs une réduction des questions à la formulation de conjectures (mathématiques) ou d'hypothèses (dans les autres sciences),
- elle se heurte à l'inaccessibilité perceptive et instrumentale des données, puisque les objets mathématiques ne sont accessibles que sémiotiquement. D'ailleurs cette inaccessibilité perceptive et instrumentale des données en mathématiques, traduit le fait qu'elles sont toujours relatives à un ensemble de cas possibles.

On voit donc la divergence entre les deux voies pouvant conduire à un questionnement : *la première s'ouvre avec la dynamique des démarches de* *description tandis que la seconde ne commence qu'avec une exigence de validation*, et donc avec les contradictions potentielles d'une argumentation ! Or la difficulté de susciter un questionnement s'accroît si l'on tient compte du fait que, dans l'enseignement des mathématiques, les questions sont liées et subordonnées à la “résolution de problème”. Nous venons de voir, en effet, *le caractère relatif et conventionnel des questions des problèmes mathématiques élaborés à des fins didactiques* : il tient au choix de la description minimale. Or l'impasse faite, dans l'enseignement, sur la cette scène primitive de la fabrication des problèmes didactiques est pour le moins surprenante, alors qu'avec la plupart des élèves se posent des questions sur ce “ce qu'on demande”, “par où commencer pour “réfléchir”, “qu'est-ce qu'il faut prendre en compte pour…” .

Une observation, banale, faite il y a peu de temps en fin d'année scolaire dans une classe de CE1 où un certain nombre d'élèves étaient déjà en “grande difficulté”, nous aidera à mieux cerner ce problème cognitif et didactique du questionnement. Le but de l'enseignante était de faire découvrir aux élèves ce qu'avait de particulier un énoncé de problème par rapport à d'autres énoncés. Cet objectif prenait d'ailleurs place dans le cadre plus global d'un projet de travail sur la lecture. L'enseignante avait proposé le texte suivant avec la consigne de le compléter par une question que l'on pouvait poser pour que cet énoncé devienne un problème :

Pour l'anniversaire de Sarah, maman a acheté 3 paquets de 5 gâteaux. Chaque paquet coûte 4 francs.

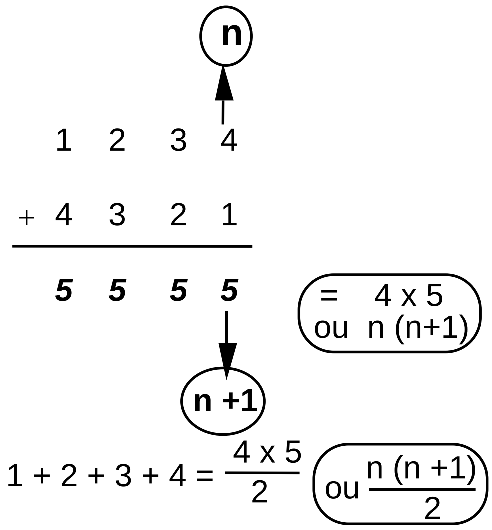
On remarquera que ce texte est déjà une description minimale puisque la description complète du scénario évoqué (“Sarah a acheté”) requiert que la somme payée à la caisse soit indiquée (“et elle en a eu pour 12 francs.”.) Or cette tâche avait plongé une partie des élèves dans l'embarras, les autres écrivant quelque chose qui, soit n'était pas une question, soit ne correspondait pas à une question transformant l'énoncé en “problème”. Ajoutons que ceux qui avaient posé la question “combien a-t-elle payé ?” proposaient comme solution 3x5 ! Mais le plus révélateur fut l'interrogation de l'un de ceux que cette tâche embarrassait : “*Madame, comment on fait pour poser une question ?*”. Or une telle interrogation, souvent refoulée dans des classes moins “difficiles” ou moins “hétérogènes”, est l'un des points clés pour faire entrer la grande majorité des élèves dans la compréhension de ce qu'est un problème et pour leur faire explorer les variations de solutions pour des variations d'énoncés qui souvent linguistiquement insignifiantes.

C'est pour répondre à cette question d'élève, souvent refoulée, qu'il est parfois proposé aux élèves de “fabriquer” eux-mêmes des énoncés de problème. C'est une activité pédagogiquement stimulante (puisque les élèves sont conduits à changer de position : produire une description et non plus seulement comprendre celle qui a été produite par un autre), mais didactiquement stérile (puisque les élèves reproduisent des stéréotypes d'énoncés *sans prendre conscience des variations possibles de descriptions minimales et donc d'énoncés*) parce que, cognitivement, d'une naïveté surprenante (puisqu'elle ne fournit *aucun outil pertinent pour cette tâche*) !

Pour faire entrer les élèves dans la dynamique, très particulière, du questionnement générant les problèmes mathématiques de nature “didactique”, il est nécessaire de les faire d'abord travailler sur la description complète d'une situation et ensuite de leur faire *inventorier les différentes manières d'amputer cette description complète pour obtenir des descriptions minimales*. Cela relève de ce que nous avons appelé **une analyse en amont,** et non pas **en aval,** des problèmes (Duval, 2002 p. 98-100.) Naturellement le critère d'une description minimale consiste dans la possibilité de retrouver la donnée supprimée à partir des données conservées : cela implique donc que l'on analyse aussi les opérations permettant de passer d'une donnée à une autre. Autrement dit, c'est en travaillant sur le passage d'une description complète à une description minimale possible d'un objet ou d'une situation que les élèves peuvent entrer dans la compréhension d'un énoncé de problème. Sans un tel travail, les énoncés de problèmes, c'est-à-dire des descriptions minimales particulières, restent une activité aveugle et aléatoire pour la grande majorité des élèves. Et, finalement, la résolution d'un problème reste aussi idiosyncrasique, aussi fragmentaire que le remplissage d'une grille de mots croisés. Il suffit de changer un mot pour que tout à nouveau s'embrouille “dans la tête”. Et nous ajouterions qu'un tel travail serait aussi peut-être nécessaire pour les futurs enseignants. Et cela d'autant plus que la description complète devient plus riche ou plus complexe (voir Annexe I.)

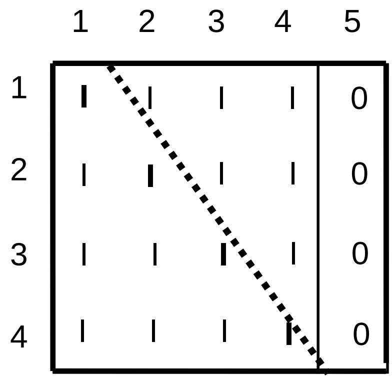
3.2. Description et généralisation

D'un point de vue cognitif, une généralisation se fait toujours sur la base d'une description. Le passage de valeurs numériques particulières à une écriture littérale des nombres permettant d'expliciter la généralité de propriétés observables est un des passages cruciaux dans l'enseignement des mathématiques. Pour l'illustrer nous allons reprendre un problème célèbre : calculer la somme des 100 premiers nombres entiers. Voici en parallèle la solution donnée par Gauss alors jeune élève et une représentation dont on peut se demander si elle est vraiment géométrique.



La solution du jeune Gauss.

Solution pythagoricienne.



Pour voir la correspondance entre cette représentation et la formule littérale, il est important de bien discerner : (1) la disposition **triangulaire** des “I” à droite (ceux, diagonaux, en gras représentent le nombre 4 dans la suite des nombres), (2) la disposition **rectangulaire** incluant les “0”, partagée par la “diagonale” qui divise ce rectangle en un nombre égal de cases.

Figure 6 : Sur laquelle des deux représentations (remplissant une fonction de description) “voit-on” le mieux ?

Regardons la solution du jeune Gauss. Il y a d'abord l'astuce de l'inversion de la suite des nombres pour effectuer la somme de chacun des termes de la suite directe avec ceux de la suite inversée. Les données ainsi générées font apparaître l'invariance du résultat des sommes. La suite invariante de ces résultats permet alors d'introduire une procédure multiplicative pour effectuer leur somme. Il n'y a plus enfin qu'à neutraliser l'effet dû au détour initial par l'inversion de la suite des nombres.

La généralisation consiste évidemment en une description de la solution qui ne se limite plus aux données particulières de l'exemple (ici de petits nombres, d'où la possibilité d'une représentation “géométrique” !.) **Or généraliser requiert que l'on passe dans un registre discursif, car cela repose** sur des opérations discursives de désignation des objets ou, plus exactement, **sur des opérations de redésignation des objets déjà désignés** (Duval 2001a.) Car il s'agit de transformer les références à des objets particuliers (les nombres 4 et 5) en référence à des objets quelconques.

Cela commence avec une “qualification” des nombres : 4 est le “dernier nombre” de la suite et 5 est le “résultat invariant de chaque somme des termes…”. Remarquons qu'une telle qualification fait passer d'un niveau de *DÉSIGNATION INDIVIDUALISANTE* à un niveau de *DÉSIGNATION CATÉGORIELLE* plus indéterminé. Peu importe que cela se fasse de manière explicite ou implicite, cela traduit le moment nécessaire où le sujet remarque des caractéristiques sur une liste de désignations individualisantes et homogènes. Cependant cette qualification n'est pas opératoire. D'où la substitution conventionnelle de lettres qui rendent possible la *DÉSIGNATION FONCTIONNELLE*, spécifique aux écritures littérales. Si le “dernier nombre” de la suite est redésigné par “n”, le “résultat invariant…” peut alors être désigné par “n +1”. Or **ces substitutions successives de désignations de nature différente constituent une révolution cognitive par rapport aux opérations ordinaires de désignation des objets.** Elles représentent un seuil qui peut être très long et délicat à franchir pour beaucoup d'élèves, à la fin du primaire ou au Collège. Et cela peut être d'autant plus difficile que l'enseignement, aussi bien en mathématiques qu'en français, accorde plus d'importance au vocabulaire qu'aux différentes opérations de référence qui permettent de désigner des objets, même et surtout avec un lexique restreint (Duval 2002c.) Cognitivement, pour l'apprentissage, ce n'est pas le vocabulaire qui importe, mais les différentes opérations discursives possibles pour désigner un même objet, opérations que l’on explicite avec les deux variables que sont la réduction de la taille du lexique et lechangement de registre.

Naturellement l'écriture littérale de la formule exige une autre opération propre au second niveau d’articulation du sens (*infra* 4) : désigner la relation entre les objets que l'on vient de redésigner.

Regardons maintenant la visualisation bi-dimensionnelle à droite sur la figure 6 : elle souvent présentée comme interprétation “géométrique” de la formule, c'est-à-dire selon le sens *formule visualisation* et *non pas dans le sens inverse* comme pour la solution de Gauss. Est-elle vraiment plus simple ou plus facile à voir ? On peut faire tout de suite deux remarques :

- l'articulation entre la formule et la visualisation suppose *une double discrimination visuelle dans la figure :* d'une part les emboîtements de dispositions triangulaires de “I”, lesquels visualisent la progression arithmétique de la suite, et d'autre part la configuration rectangulaire laquelle visualise la transformation d'une procédure additive en procédure multiplicative !!!
- le double jeu de la visualisation : elle mobilise la reconnaissance d'une figure géométrique comme un “*objet continu*” et sa lecture comme tableau à double entrée c'est-à-dire comme “*ensemble discontinu*” d'éléments, car

la “diagonale” doit partager la forme rectangle en un nombre de cases égales. Autrement dit, *la visualisation devient très “formelle”* selon le sens que Piaget donnait à ce terme : “toute différence entre les opérations infralogiques (c'est-à-dire portant sur un objet continu) et logico-mathématiques (c'est-à-dire portant sur une ensemble discret) disparaît” (Piaget 1973, p.119.)

Cette visualisation s'avère donc très coûteuse à “lire”. Et, par rapport à l'écriture littérale de la formule, elle ne remplit qu'une fonction d'illustration et non pas une fonction heuristique.

3.3. Description et contre-exemple

La notion de contre-exemple est associée, de manière quasi-réflexe, à celle de raisonnement. Et cela en raison des situations où le recours à un contre-exemple est décisif. Tout d'abord, sur le mode de la réplique dans une discussion, il constitue la réfutation d'une déclaration trop générale. Ensuite, la résistance au contre-exemple est un test d'acceptabilité pour les définitions ou les relations d'implication. Ainsi, pour déterminer si “$x^2= 9$ implique $x=3$” ou si c'est seulement l'implication réciproque qui est vraie, il faut évidemment penser à ce que non seulement $(3)^2$donne 9 mais aussi $(—3)^2$. Avec les contre-exemples, on glisserait donc sur le versant “logique” du langage, c'est-à-dire là où comptent uniquement les mécanismes de quantification, directement liés aux opérations discursives de référence à des “objets”, et les mécanismes de négation comme de réciprocation des termes, qui, eux, sont liés aux opérations discursives de la construction énonciative des propositions. Un tel glissement exige d'ailleurs un changement complet de point de vue sur ce que l'on dit ou sur ce qui est dit : il faut neutraliser la compréhension *de re*, qui est de nature associative, pour ne s'en tenir qu'au *de dicto*, lequel renvoie à des formes d'expression et à des règles et, donc, à des possibilités de substitution déductive valide (Duval 2000a 148-150, 157.)

Cependant, d'un point de vue cognitif, le contre-exemple n'est pas fondamentalement une affaire de raisonnement (Duval 1995 p. 297-300.) Et cela en raison des conditions nécessaires de sa production. En effet, la capacité d'un individu à produire un contre-exemple dans un domaine de connaissance dépend de la base de données dont il dispose en ce domaine, ou de son degré de familiarité avec ce domaine. Ce qui nous renvoie aux démarches préalables d'observation et de description qu’il a eu ou non l’occasion de pratiquer dans le domaine où les définitions comme les conjectures à tester sont avancées. D'ailleurs, rechercher un contre-exemple équivaut à faire la démarche inverse de celle de généralisation évoquée ci-dessus. Par exemple, lorsqu'il s'agit d'implications concernant les propriétés de nombres ou de fonctions, la généralisation se fait par le recours à une écriture littérale ou à l'utilisation de variables. Or l'incapacité, souvent constatée dans des questionnaires de logique, à penser à des contre-exemples pour tester l'acceptabilité d'implications proposées, révèle en réalité une déficience préalable d'un travail de description. Tout se passe comme si les étudiants ne disposaient pas de la base de données nécessaire pour trouver un exemple qui aille contre. Déficience qui n'est pas à imputer aux étudiants mais à l'enseignement.

3.4. Les descriptions verbales en sciences : définitions et dénominations, ou la codification interprétative des données observables

Rappelons, tout d'abord, que tout discours (ou toute “production langagière”), articule au moins **trois niveaux de sens,** chacun de ces niveaux renvoyant à des opérations discursives et à des processus cognitifs très différents (Duval 1995 p. 88-94, 2000a.) Or, généralement, quand on parle de “description” ou d' “explication”, on se limite au troisième niveau (figure 7, ci-dessous), les deux premiers étant laissés à la charge des élèves ou étant souvent compactés sous les termes commodes et rarement explicités de “conception” ou de “conceptualisation”. Cet écrasement des trois niveaux de sens en un seul revient à oublier deux choses. Dans les sciences, le travail des description, qui conditionne celui d'interprétation, commence dès le choix des termes ou des expressions que l'on emploie pour qualifier les données observées. *Et l'accès à la maîtrise du langage ne se fait pas au troisième niveau mais au second.* Il suffit d'ailleurs de regarder comment des enfants décrivent, oralement ou sur leurs cahiers, les résultats des observations faites dans le cadre d'une manipulation ou dans celui de la construction d'une figure géométrique qu'ils viennent de réaliser, pour le constater.

Niveaux d'articulation du sens	*OPÉRATIONS DISCURSIVES (dépendantes du système sémiotique utilisé)*	*Processus cognitifs mobilisés*	*Types d'expressions produites*
I. Fonction référentielle	- choix d'un élément dans un lexique - composition de plusieurs éléments d'un lexique (désignation indirecte par une description définie ou par une désignation fonctionnelle)	- associations déjà automatisées de "mots" et de "choses" - discrimination des objets composant un processus ou une situation et désignation directe ou indirecte de ces objets	**Dénominations** par un nom propre - un syntagme nominal, -des lettres, ...
II. Fonction apophantique	- Choix d'un objet d'ancrage (le sujet grammatical) - Quantification - Liaison entre une désignation d'objet (s) et une désignation de propriété ou de relation	Focalisation - sur un objet - une relation entre des objets ou entre deux types de variation	**Propositions prenant un statut** de - définition, - constat - conjecture, - théorème, etc....
III. Fonction d'expansion discursive	Convergence des références successivement effectuées (Cohérence et continuité thématiques)	Choix d'un référentiel ou d'une perspective et intégration de chaque observation locale dans un ensemble (contexte, connaissances acquise...)	- relevés énumératifs (organisés ou non) de données, Ñ " explication"

Figure 7 : Les trois niveaux d'articulations du sens.

L'analyse cognitive du discours se fait à partir des opérations discursives et non à partir des marques de surface ou des formulations produites. Elle se contrôle par la conversion du discours analysé dans un autre registre. C'est de cette manière que l'analyse cognitive diffère de l'analyse linguistique. Plus généralement, le développement de la "maîtrise de la langue" se fait à partir de la prise de conscience des opérations discursives (Cons. Op.) et non pas à partir de la connaissance des règles ou des régularités grammaticales du discours, ou du vocabulaire (Gr. & Vo.) ou encore de simples activités de communication (Comm..) Ce que l'on peut traduire par l'hypothèse fondamentale pour l'apprentissage de la langue : (Cons. Op.) $\Rightarrow$ (Gr. &Vo) ou (Com.m.)), la réciproque étant fausse. Cela est fondamental pour comprendre l'apport de l'enseignement des sciences et des mathématiques à l'enseignement de la langue.

On remarquera, en ce qui concerne le premier niveau d'articulation du sens, **l'antagonisme** entre des associations déjà automatisées de mots et de choses et l'exigence d'une dénomination indirecte par un syntagme nominal. Or, presque toujours, la description d'observations conduisant à la découverte de phénomènes non perceptibles exige le passage d'une dénomination directe à une démnomination indirecte.

Par exemple, pour découvrir les propriétés physiques de l'air, c'est-à-dire qu'il se conserve, qu'il a un volume..., des enfants de 8-9ans avaient pu observer ce qui se produisait lorsqu'ils comprimaient une bouteille de plastique avec un ballon fixé à son goulot. Ce qui est perceptible, et donc descriptible dans le cadre d'une telle manipulation, c'est la diminution de la place “vide” dans la bouteille avec l'augmentation du volume du ballon. Or les mots “vide” ou “rien” sont spontanément employés pour qualifier un récipient non rempli de quelque chose de visible, comme du liquide, une poudre... Et ce *codage lexical quasi-automatique*, qui commande aussi bien le discours intérieur que le discours oral, a continué de fonctionner lorsqu'il s'agissait de dire ce qui est observé dans le cadre de la manipulation. Il y a eu ainsi, au cours de toute la séquence d'enseignement, des différences importantes de progression entre les élèves qui se contentaient de dire l'“**l'air”** et ceux qui, au contraire, essayaient de préciser : “**la place** vide” ou “**la place** de l'air **dans...”,** après avoir dit que “l'air n'avait plus de place dans le ballon”. On voit ainsi le piège et l'erreur de toute assimilation du recours au langage comme à une “mise en mots”. Elle conduit à méconnaître la diversité des opérations discursives qui permettent de désigner un phénomène ou un objet et à oublier l'obstacle des associations verbales automatiques qui sont prédominantes dans la spontanéité de l’expression orale. En réalité, la remise en cause d'une telle prédominance ne peut se faire qu'en travaillant au second niveau d'articulation du sens, sur une “mise en propositions”. D'où une question importante pour les apprentissages dans les domaines scientifiques : *dans quelle mesure un travail sur les ancrages (c'est-à-dire sur la manière de désigner les phénomènes observés) dans l'expression des propositions entraîne-t-il une plus grande discrimination dans les observations pratiquées ?*

On ne peut pas oublier cependant la connotation négative du mot “description”. Il évoque l’ennui des descriptions “littéraires”, et surtout toute description verbale va à l'encontre du principe d'économie dans la mesure où sa compréhension implique la conversion en une représentation permettant de visualiser (*supra* I b)[1]. Plus généralement, il y a l'idée que toute compréhension d'un discours doit pouvoir se traduire en une reformulation plus brève, comme on peut le voir dans les étranges pratiques de résumé ou de contraction de texte, voire dans l'extraction de mots-clés. *D'où l'illusion que toute expression serait contractable à souhait* (et, donc, inversement extensible ?), comme si, finalement, un texte, une phrase ou même seulement un mot pouvaient remplir indifféremment les mêmes fonctions discursives et contenir la même information. C'est l'illusion de Joubert : “tourmenté par la maudite ambition de mettre toujours tout un livre dans une page, toute une page dans une phrase et cette phrase dans un mot. C'est “moi”” (Joubert, Carnets, vol. II, Gallimard 1994.) Cette illusion, caractéristique de **l'entropie propre à la communication verbale,** revient à “débrancher” les descriptions verbales des bases de données, ou des d'observations, qui les ont générées et qu'elles organisent.

Aussi, pour ce troisième niveau d'articulation du sens, devrions-nous plutôt employer le terme “explication” et non pas celui de “description”, mais en rappelant qu'une explication est de l'ordre de la description et non pas de celui de la validation et de la preuve (Duval 1992 p. 40-41, 58.) Car une explication est cognitivement aux antipodes de l'argumentation. Quel avantage alors à ce changement de terminologie ? Une explication ne se contracte pas car on ne peut pas la dissocier des objets et des processus qu'elle décrit : elle appelle des tâches de production de données ou d'exemples dans le cadre de manipulation. Une explication ne se fait pas sur des documents déjà constitués, comme pourtant on peut le voir dans l'enseignement des sciences au primaire.

4. Comment analyser la complexité des rapports entre discours et visualisation ?

Combien de fois l'adage “un diagramme vaut (mieux que) dix mille mots” (Larcin et Simon 1987) n'a-t-il pas été décliné, en variant bien évidemment l'argument de la proposition : “dessin”, “schéma”, “croquis”, “figure”, “image mentale”.... et même “photo” ! Cela conduit non seulement à considérer que toute représentation visualisante pourrait se suffire à elle-même, mais qu'elle serait plus accessible que n'importe quel discours, surtout avec les élèves de l'enseignement

---

1 Souvent les figures en géométrie ont été considérées comme remplissant ce principe d'économie pour la compréhension d'une situation géométrique. Témoin cette explication déjà ancienne et dont l'opposition récente du terme “figure“ à celui de “dessin” n'est pas si éloignée ; deux rôles au moins peuvent être attribués aux figures en géométrie : “d'une part elles **illustrent les situations** étudiées, d'autre part elles servent de support à l'intuition en faisant apparaître sur un objet visible des relations ou des hypothèses de relations **qui ne sont pas clairement évidentes dans un énoncé verbal”** (Bessot 1983 p.35.)

primaire qui n'ont pas encore acquis une aisance fonctionnelle avec l'expression écrite (compréhension et écriture de “textes”.) En d'autres termes, on reconnaît un privilège didactique de l'“image”, ou du “dessin”, par rapport au “langage”, *comme si la reconnaissance de ce qu'une image représente était évidente et devait rendre compréhensibles les énoncés qu'on lui associe !* Bref, on postule que l'articulation entre “image” et “langage” se ferait spontanément.

La persistance des difficultés que soulèvent la lecture, l'utilisation ou parfois la construction de figures en géométrie, suffit à rappeler qu'il n'en est peut-être rien. Et, en dehors du domaine si particulier de la géométrie, on peut aussi rappeler les difficultés soulevées par l'utilisation de représentations visualisantes pour la résolution des problèmes à double description : ainsi celles qui sont proposées dans la littérature didactique pour les problèmes additifs sont loin d'avoir les vertus que l'on prête aux “images”, quelles soient schématiques ou mentales. Contrairement à l'adage souvent décliné, les rapports entre le contenu d'une image ou d'un dessin et un énoncé, descriptif ou explicatif, ne sont pas toujours évidents ou pertinents. *Souvent les élèves ne voient pas ou ne peuvent pas faire le passage de l'un à l'autre.* Et si on se place du côté des enseignants, aussi bien en mathématiques qu'en dehors des mathématiques, force est de constater que le recours didactique aux images se fait souvent de façon aveugle. Tout cela nous renvoie à l'un des problèmes cruciaux dans tout apprentissage : celui des correspondances et des non-correspondances cognitives entre le discours et les différents types de visualisation. Comment le poser et, surtout, comment l'analyser ?

4.1. Les deux niveaux d'articulation de sens dans un “dessin” (image ou schéma)

Commençons par une précision d'ordre terminologique et théorique. Toutes les représentations se partagent en deux grandes classes, selon les systèmes mobilisés pour les produire : soit des *systèmes sémiotiques,* soit uniquement des *systèmes physiques* (instruments optiques) ou *neurophy61 20402 TcEns ules r* la mesure où une telle notion ne permet pas de distinguer les représentations qui sont des prolongements automatiques de la perception et celles qui résultent de l'appropriation et de l'intériorisation de systèmes sémiotiques de représentation. Nous nous limiterons ici aux représentations sémiotiques : dessins, schémas, figures, plans, croquis, etc.

Pour pouvoir analyser le contenu d'une visualisation d'ordre sémiotique, il faut bien distinguer les unités figurales que l'on peut y “reconnaître”, lesquelles prennent de ce fait une valeur représentative élémentaire, et les relations entre les unités figurales pouvant être reconnues, lesquelles ont une valeur représentative de composition. On voit alors la nécessité de distinguer deux niveaux d'articulation du sens (à la différence des discours qui en comportent trois.)

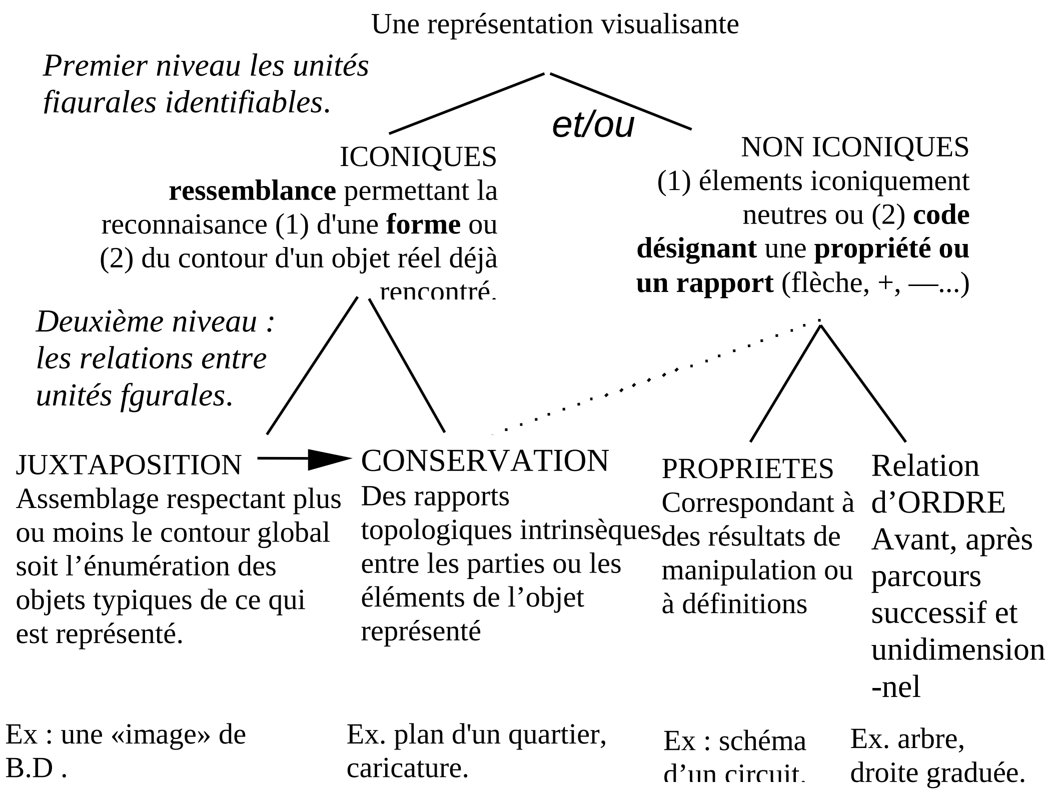


Figure 8 : Les deux niveaux d'articulation du sens dans une visualisation d'ordre sémiotique.

Les exemples indiqués correspondent à des cas purs que l'on peut trouver dans des documents didactiques. On peut alors voir apparaître un clivage entre les visualisations iconiques, qui fonctionnent sur une ressemblance entre ce qui est dessiné et ce qui est représenté, et les visualisations non iconiques qui exigent la surimpression d'un codage d'informations. Or l'activité de codage échappe à la visualisation ou la neutralise (supra I, 2.) On peut aussi remarquer que la ressemblance peut s'établir soit à un seul des deux niveaux ou aux deux : d'où des variations possibles pour représenter un visage, par exemple, ou n'importe quel objet de l'environnement.

Cette distinction de deux types d'unités figurales et de deux niveaux d'articulation permet d'analyser les productions des élèves et de mesurer la lente évolution de leurs productions, allant d'une simple juxtaposition d'unités figurales jusqu'à ces représentations que Piaget qualifiait de “formelles”. Au premier rang de ces représentations “formelles”, c'est-à-dire des représentations où le codage commande totalement la visualisation, il faut compter les droites munies de repères. Or on y recourt souvent pour “faire voir”, en oubliant que ces représentations formelles sont aussi des représentations polymorphes (si ce terme a un sens pour les représentations D1 !) car elles ne sont pas composées des mêmes unités figurales.

4.2. Une visualisation polymorphe : les “droites” munies de repères

On recourt souvent à une droite pour visualiser tout ce qui implique la prise en compte de phénomènes de succession ou l'une des propriétés de la relation d'ordre. Mais, dans toutes les représentations ainsi produites, le tracé de la droite est un support de rangement unidimensionnel (effaçable ou non) *pour des repères qui sont des unités figurales non iconiques et qui doivent être associées à d'autres unités figurales non-iconiques telles que* des noms, des nombres, des flèches, des symboles d'opérations. On peut ainsi obtenir beaucoup de “droites *quelque chose*” qui peuvent être classées selon les fonctions qu'elles remplissent (Duval 1999 p. 62.)

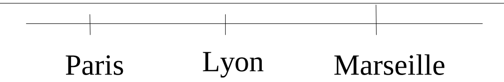
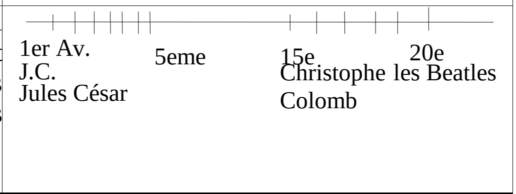
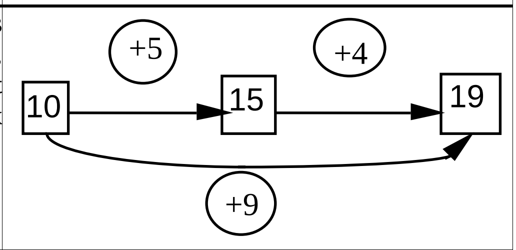
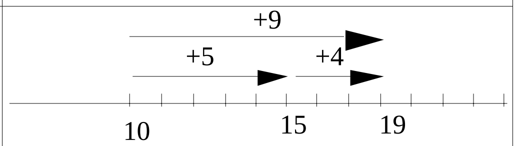
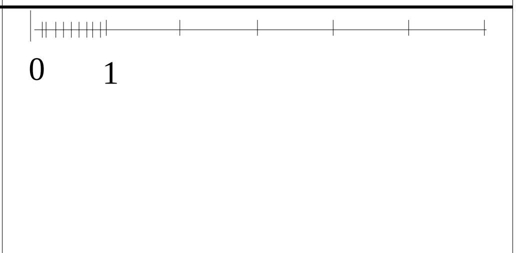
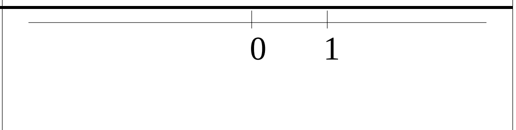
I. Simple **fonction de synopsis**	1. Villes ou étapes d'un itinéraire	
	2.Un ordre temporel	
	3. Frise chronologique (ici les intervalles deviennent des unités figurales permettant d'évaluer des distances)	
II. **Fonction de matériau** pour des déplacements ou pour d'autres types d'opérations	4. Schéma relationnel : des unités figurales spécifiques, (ex. **des flèches) doivent être superposées aux repères de la “droite”.**	
	5. Une variante isomorphe	
III **Fonction de traitement** fondée sur un principe de construction par subdivision indé-finement réitérable	6. Droites graduées (outil de mesure)	
Limite du processus de subdivision pour repérer les points	7. Droite des réels	

Figure 9 : Variétés des représentations visualisantes utilisant la “droite” proposées pour faciliter la “compréhension”.

La liste indiquée n'est évidemment pas exhaustive. Il y a autant de “droites (quelque chose)” que de combinaisons des différents types d'unités figurales iconiques et non iconiques possibles.

Hormis le recours à des repères, les six visualisations ci dessus ne mobilisent pas les mêmes unités figurales. En outre, toutes les unités figurales mobilisées sont des unités non iconiques. Il suffit pour s'en rendre compte de s'en tenir au premier niveau d'analyse des unités figurales mobilisées.

	Unités visuelles iconiquement neutres				Unités discursives codant les unités visuelles		
UNITÉS FIGURALES PERTINENTES	Repères	**(sous)-repères** construits par subdivision	Intervalles	**Flèches**	**Symboles d'opérations**	Nombres codant **systématiquement** les repères	Nombres ou noms codant **contextuellement** les les unités repérées
I.1	oui						oui
I.2	oui						oui
I.3	oui		oui				oui
II.1	oui			oui	oui		oui
II.2	oui			oui	oui		oui
III.1	oui	oui	oui			oui	
III.2	oui		oui			oui	oui

Figure 10 : Analyse de différentes représentations utilisant la “droite”.

Il y a donc un saut considérable de fonctionnement représentatif quand on passe d'une droite I.3 à une droite II.2 ou III.1. On ne saurait trop souligner l'hétérogénéité de ces trois types de représentations unidimensionnelles : ils peuvent être d'autant plus opaques que les repères peuvent donner lieu à des codages multiples et hétérogènes. Plus particulièrement, on ne saurait trop souligner la complexité de II.2 : la lecture du codage des flèches superposées se fait dans une direction différente de celle du parcours des repères sur la droite : la visualisation opératoire relève d'un balayage horizontal, tandis que les indications pour cette visualisation opératoire requiert un balayage transversal.

Venons en, maintenant, à la question souvent posée : peut-on considérer ces différentes “droites”, ou seulement certaines d'entre elles, comme un registre ? Une telle question peut être symptomatique de la confusion souvent faite entre représentation et registre de représentation. Sans en reprendre ici la description et la définition, rappelons l'un des intérêts méthodologique et théorique de la notion de registre (Duval 1995) : elle permet d'analyser la complexité cognitive propre aux différents types de représentations sémiotiques qui sont mobilisés dans l'activité mathématique et à ceux plus variés encore que l'enseignement des mathématiques conduit à introduire. Ainsi, par exemple, n'importe quelle figure géométrique mobilise simultanément plusieurs registres de représentations, chaque registre ayant ses moyens spécifiques de traitement. D'où cette conséquence qui n'est pas négligeable pour les apprentissages de la géométrie : l'utilisation des figures géométriques par un élève suppose que se soit mise en place pour lui la coordination des registres mobilisés. On pourrait donc dire qu'une représentation qui mobilise simultanément deux registres (parfois trois) est une représentation mixte. Et c'est ici manifestement le cas ici pour les “droites quelque chose”, à cette différence près qu'ici seul un des deux registres mobilisés donne un moyen de traitement. L'intérêt de la notion de registre ne se limite donc pas à souligner l'importance de la coordination des registres de représentation dans l'apprentissage, il est aussi de donner un outil pour analyser le contenu et la complexité cognitive de toutes les représentations, aussi bien de celles qui ne relèvent que d'un seul registre que de celles qui sont représentations mixtes.

On peut d'ailleurs se demander si on peut encore parler de visualisation pour toutes ces représentations ayant pour support une “droite” : elles ne sont qu'une mise en ordre linéaire de repères discriminables, et la valeur représentative de ces repères dépend uniquement du codage qui en est fait (celui-ci renvoyant à un autre registre pour le traitement.) Or une telle mise en ordre linéaire permet seulement de simultanéiser des appréhensions successives. Il suffit de considérer III.2 pour constater pour constater qu'il n'y a rien à voir concernant les nombres réels (les irrationnels.)

4.3. Un cas d'espèce étrange : les figures en géométrie

À la différence des différentes représentations utilisées aussi bien dans les sciences ou dans les textes documentaires, les figures géométriques semblent échapper à la distinction de deux niveaux d'articulation du sens. Et cette exception apparente est remarquable. Car loin d'invalider la pertinence du mode d'analyse proposé, elle contribue à montrer la complexité cognitive invisible de la visualisation géométrique. Prenons tout d'abord le premier niveau d'articulation du sens et demandons nous quelles sont les unités figurales que contient une figure donnée. Négligeons les informations codées (lettres, sigles de propriété, valeurs numériques...) qui reportent les hypothèses sur le dessin et concentrons nous sur le “dessin” qui est construit, ou constructible, instrumentalement (sinon il ne pourrait pas donner lieu à des tâches de reproduction ou même de construction !.) Notre question revient donc à se demander ce que l'on voit “au premier coup d'œil sur le dessin”. Ce sont évidemment soit des formes D2 (des “zones” ou des “surfaces”) soit une forme D3 (un “solide” ou un “volume”) qui est elle-même partagée en faces visibles D2... Cela dépend du jeu automatique et non-consciemment contrôlable des mécanismes gestaltistes d'organisation perceptive. Et chacun sait combien il est difficile, sinon presque impossible, de voir ensuite autre chose que ce que l'on a identifié au premier coup d'œil sur un dessin. Rappelons, pour qui en douterait, les plaintes indéfiniment récurrentes des enseignants sur les difficultés des élèves à imaginer un “tracé auxiliaire” dans une figure, à prolonger un trait au delà d'un contour fermé (c'est-à-dire à voir le support “droite” d'un côté, ou à voir un réseau de droites sous-jacent à une forme D2), à réorganiser les sous-figures d'une configuration (voir des parallélogrammes là où l'on reconnaît un assemblage de triangles et réciproquement) etc... En d'autres termes, **cela veut dire que les unités vues et identifiées sont des unités D2 ou D3 et non pas des unités D1, encore moins des unités D0,** qui elles sont pourtant les seules unités codées par des lettres ou des valeurs numériques !!! Et nous touchons là au point décisif pour notre question : passer de D3 en D2 (lorsqu'il s'agit par exemple de considérer des plans de section d'un solide) et, surtout, passer de D2 en D1 représente non seulement une gymnastique mentale mais une gymnastique visuelle qui peut parfois prendre des années et qui requiert, tous cas, un apprentissage spécifique. Et nous ne parlons pas du passage de D1 en D0, puisque les seuls points représentables ou visibles sont toujours des points exceptionnels ou mis en vedette (sommet d'un polygone, extrémité d'un segment, intersection de droites, position surlignée sur une ligne droite ou courbe, unité libre en dehors d'une figure....)

Ces rappels sur ce que l'on voit au premier coup d'oeil sur une figure géométrique (c'est-à-dire construite avec un instrument produisant visuellement une propriété géométrique -la primitive de l'instrument-) et sur ce que l'on ne peut s'empêcher de continuer à voir ensuite nous conduisent aux trois observations suivantes :

- (1) toute activité géométrique sur une figure implique des déplacements continuels dans l'échelle des dimensions D3-D0, l'activité discursive de description ou de raisonnement privilégiant toujours la prise en compte des organisations aux dimensions inférieures tandis que la visualisation fait prédominer les organisations aux dimensions supérieures (Duval 1995 p.191-192),
- (2) les unités figurales que l'on peut voir ou reconnaître dans une figure sont toujours relatives à un nombre particulier de dimensions qui s'impose au regard ou à celui que l'on s'impose dans la manière de regarder. Cela veut dire que la décomposition d'une forme D2 simple (triangle, quadrilatère) en une configuration de formes D1 (les côtés pour considérer leurs relations) suppose que **l'on “casse” dimensionnellement et non pas gestaltiquement cette unité figurale iconique D2 !**
- (3) casser dimensionnellement une unité figurale Dn en une configuration d'unités Dn-1 est une opération totalement différente de

casser gestaltiquement une configuration de formes, par exemple D2 en une autre configuration de formes D2 (voir des parallélogrammes dans un triangle partagé en triangles qui apparaissent en joignant les milieux du triangle de départ.)

Ces trois observations nous permettent de comprendre pourquoi les figures géométriques, à la différence du fonctionnement représentationnel de tous les autres types de visualisation sémiotique, présentent cette originalité extraordinaire : **les unités figurales discernables dans une figure ne sont pas constantes mais peuvent varier à la fois dimensionnellement et gestaltiquement en fonction du problème à résoudre.** Et c'est cette variabilité qui fait la puissance aussi bien heuristique qu'illustrative des figures en géométrie. Elles sont associativement plus fluides et plus riches que les tâches du célèbre test de Rorschach. Malheureusement elles inspirent souvent moins les élèves ! La prise en compte du second niveau d'articulation du sens dans les figures nous conduirait à la fois à prendre en compte le rôle des instruments ainsi que le rôle de déductions locales articulant théorèmes et constatations (les données apparaissant dans les transformations du regard sur la figure dans une démarche heuristique.)

On ne peut que regretter que l'introduction de la plus fréquente de la géométrie se fasse dans la méconnaissance et le plus souvent à l'encontre de ces trois caractéristiques de la visualisation géométrique. L'accent mis sur la reconnaissance des variétés de figures (de triangles ou de quadrilatères par exemple) ou la croyance que partir des unités figurales D1 et D0 serait plus simple en sont les expressions les plus typiques. Dans un cas, l'apprentissage de la géométrie se ramène à celle de la confection d'un herbier de formes D2 ou D3 et, dans l'autre, à la constitution d'un discours aveugle, c'est-à-dire sans aucune prise sur le fonctionnement visuel des figures. Quels types d'activités peuvent alors introduire les élèves dans les changements dimensionnels du regard que la visualisation géométrique exige, et cela dès l'enseignement primaire ? Ni les tâches de construction de figures, contextualisées ou non dans des situations de transmission de message, ni même les reproductions de figures ne semblent adaptées à cet objectif. Pour cela il faut proposer des tâches de restauration de figures, qui posent de véritables problèmes pour passer d'une vision spontanée d'unités D2 à une analyse en termes d'unités D1 et pour aussi apprendre à casser la stabilité des unités D2 identifiées au premier coup d'œil (Perrin 2003.)

4.4. Quelle (s) articulation (s) entre discours et visualisation ?

L'analyse des rapports entre discours et visualisation, ou dans une situation particulière donnée entre un énoncé et un “dessin” (diagramme, schéma, figure...), ou entre un texte et une image requiert que l'on réponde à trois questions.

La première porte sur l'existence de leurs correspondances : elles déterminent ce que l'on pourrait appeler la “zone d'intersection” entre le contenu de l'énoncé et le contenu du “dessin”. Cela concerne la pertinence des visualisations proposées comme des aides. *Force est de constater que, cette zone est souvent très réduite.* Le rapport entre l'énoncé et l' “image” n'est souvent perceptible que pour l'expert ou pour celui qui en a fait le “montage”.

La deuxième question porte sur le passage de l'un à l'autre. Il s'avère très souvent, en mathématiques, qu'une même visualisation puisse être décrite par une grande variété d'énoncés différents, comme si elle explicitait leur organisation commune. Nous prendrons ici deux exemples. Le premier est, évidemment, celui des représentations graphiques cartésiennes par rapport à l'écriture algébrique de relations : ainsi les valeurs numériques du coefficient directeur d'une fonction affine ou de sa constante peuvent varier sans que les valeurs visuelles qualitatives du graphe de cette fonction changent. Le second concerne les énoncés de problèmes à double description. Ainsi, quelle que soit la situation concrète évoquée, quelle que soit la place de la question, quelle que soit la taille des nombres, quelle que soit la présence ou l'absence de données inutiles, tous les problèmes additifs se visualisent par le même type de schéma : soit unidimensionnel soit bidimensionnel (Figure 4.) Le choix entre ces deux types de visualisation dépend de l'importance que l'on donne au calcul relationnel ou, au contraire, à la compréhension de l'énoncé du problème pour la résolution des problèmes additifs. Dans tous ces cas, **l'intérêt d'une visualisation pour les problèmes dont les énoncés superposent deux descriptions hétérogènes, n'est pas d'être utilisé pour aider à résoudre un ou des énoncés particuliers mais pour comprendre et résoudre l'ensemble de toutes les variations possibles d'énoncés.**

La troisième question s'inscrit dans une perspective d'analyse fonctionnelle, et non plus seulement structurale, comme c'était le cas pour les deux précédentes. En effet, lorsque dans le déroulement d'une démarche, on fait appel à une description verbale et à une représentation visualisante, simultanément ou alternativement, le schéma que l'on mobilise peut remplir des fonctions très différentes : illustration, appréhension synoptique d'une organisation, apport d'informations complémentaires, matériau de travail... On peut ainsi distinguer au moins huit fonctions différentes que les représentations auxiliaires peuvent remplir par rapport à une représentation considérée comme principale, c'est-à-dire comme autosuffisante (Duval 1999 p. 57-67.) Par exemple on peut se demander si les deux représentations de la somme d'une suite d'entiers proposées plus haute (Figure 6) remplissent les mêmes fonctions. L'intérêt ou la valeur didactique que l'on prête à un type de visualisation est donc relatif à la fonction que l'on fait remplir à ce type de visualisation. L'absence d'analyses fonctionnelles, systématiques et contrôlables, des types de visualisation que l'on propose ou que l'on fait construire dans des séquences d'activités est un facteur important dans les difficultés auxquelles se heurtent leur bonne utilisation dans les classes.

5. Descriptions et représentations : quelques questions décisives pour les recherches sur l'apprentissage des mathématiques

Toutes les analyses précédentes des démarches de description ainsi que de la variété des descriptions possibles nous ont sans cesse ramené au problème de production de représentations comme à celui de la compréhension des représentations produites. L'activité de représentation est au cœur même de toute démarche de description. Et pour mieux souligner cette coextensivité, il suffit de rappeler qu'il ne peut pas y avoir de connaissance scientifique sans des descriptions relatives à des observations et de recueil de données (*supra* Ib.) Au cours de cet exposé, nous avons cherché à voir comment cela aussi se vérifiait pour l'apprentissage des mathématiques. Et le lecteur aura vite perçu que c'est par la prise en compte en compte des registres de représentation que nous avons pu avancer dans cette analyse. Bien sûr, il ne s'agit pas de rabattre l'activité mathématique sur une activité de description, qui justement se présente de manière si différente en mathématiques et dans les autres sciences. Mais la mise en évidence de l'importance des activités de description en mathématiques permet de voir que *la prise en compte des représentations dans l'analyse de l'acquisition des connaissances scientifiques et mathématiques ne peut pas être réduite à la seule explication des erreurs des apprenants !* C'est même se condamner à mal poser le problème des apprentissages que d'entrer dans cette logique.

Rappelons d'ailleurs cette donnée historique. Toute la réflexion épistémologique et cognitive sur la construction des connaissances mathématiques de Descartes à Frege et Hilbert s'est développée autour de la question des rapports entre représentation et objet, et tous les progrès dans cette réflexion se sont trouvés liés à la reconnaissance du caractère sémiotique des représentations ainsi qu'à l'élaboration de méthodes pour analyser les représentations (Duval 1998.)

Que l'on prête attention à la grande variété des démarches description qui sont sollicitées dans l'enseignement des mathématiques, aux caractéristiques du fonctionnement cognitif que le développement des mathématiques n'ont cessé de développer depuis plus de trois siècles ou aux problèmes de compréhension des mathématiques quels que soient les contenus conceptuels, on se retrouve face à quelques questions décisives pour la recherche. Et il nous semble d'autant plus essentiel d'essayer de les formuler, qu'une focalisation, trop souvent exclusive, sur le quotidien du travail dans la classe les fait souvent perdre de vue. Nous en retiendrons quatre.

5.1. Comment analyser les "représentations" ?

Toute représentation doit être analysée par rapport aux deux "réalités" qui la constituent : d'une part ce qu'elle représente et d'autre part le système par lequel elle est produite.

La première relation est évidemment la relation qui est classiquement retenue. Non seulement cette relation conduit à distinguer soigneusement le contenu de la représentation et l'objet représenté, "l'image" et le "modèle" (Platon *République* 509e-510), mais elle permet de distinguer plusieurs types de représentation, par exemple en fonction de l'existence, ou non, d'une ressemblance entre le contenu de la représentation et l'objet de la représentation. C'est sur la présence ou l'absence de cette relation que Peirce s'est appuyé pour proposer ses célèbres classifications de représentations.

La deuxième relation est généralement méconnue. On se contente généralement d'attribuer la production des représentations directement au sujet lui-même, comme si elles étaient le reflet global de son savoir. Cela revient non seulement à réduire le sujet à sa seule conscience actuelle, mais à oublier la diversité et l'hétérogénéité des représentations produites. Or cette diversité des représentations produites par les sujets, quel que soit leur niveau de savoir, s'explique par la diversité des systèmes producteurs de représentations dont ils disposent, ou plus exactement qui constitue leur "architecture cognitive" (Duval 2002.) D'où les trois conséquences immédiates :

(1a) Le contenu de la représentation d'un objet varie considérablement selon le système mobilisé pour produire la représentation de cet objet. En d'autres termes ce que le contenu d'une représentation explicite concernant les propriétés ou les particularités d'un objet ne dépend pas seulement de l'objet ou des intentions du sujet, mais il dépend également des possibilités et des limites spécifiques au système mobilisé.

(1b) Une classification de la diversité des représentations ne peut être fondée que sur les systèmes producteurs de représentation (Duval 1999 p. 34-48.) On voit alors apparaître deux grand types de systèmes producteurs : les systèmes physiques et neuronaux qui produisent automatiquement des représentations, et les systèmes sémiotiques qui permettent la production intentionnelle de représentations. Les deux seuls types de relation possibles entre le contenu d'une représentation et l'objet représenté dépendent uniquement de cette dichotomie des systèmes producteurs.

Une représentation : quelque chose QUI SE TIENT À LA PLACE DE quelque chose d'autre.

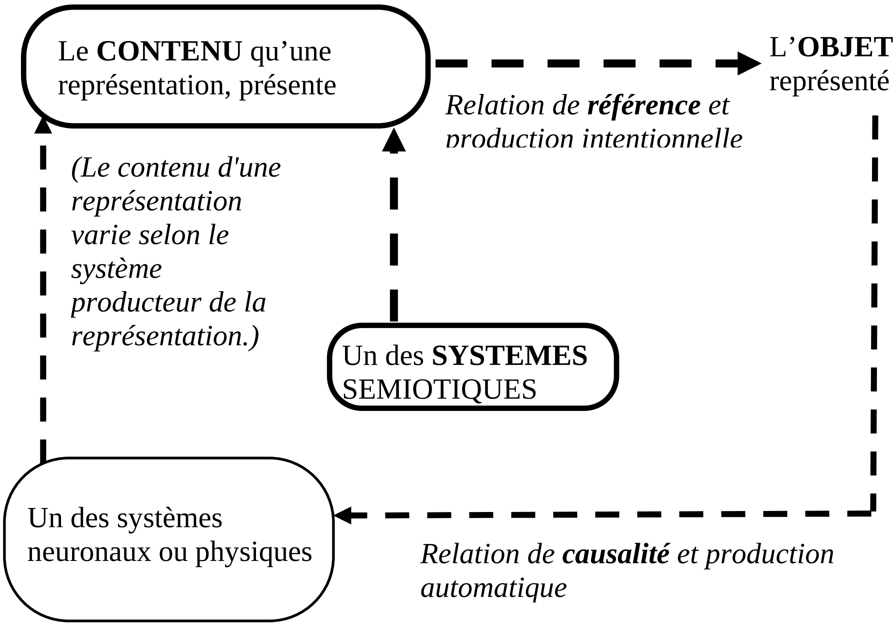


Figure 11 : Les trois aspects constitutifs d'une représentation.

On ne peut pas distinguer véritablement le contenu d'une représentation et l'objet qu'elle représente sans prendre en compte le système par lequel la représentation est produite. La possibilité de représentations différentes d'un même objet dépend de la diversité des systèmes dont un sujet dispose. On voit ici l'équivoque de l'expression “représentation mentale” dans la mesure où sa production peut aussi bien relever de systèmes non sémiotiques que de systèmes sémiotiques.

La psychologie cognitive s'intéresse prioritairement aux représentations produites par toutes les organisations neuronales. Et ce que nous avons appelé “registres de représentation sémiotique” est un sous-ensemble des systèmes sémiotiques : ils doivent respecter un minimum de règles non seulement pour que les représentations produites soient identifiables par autrui, mais aussi pour permettre une transformation contrôlable des représentations, c'est-à-dire leur traitement ou leur conversion (Duval 1995 p. 36-39.) Une classification plus détaillée des différents types de représentation sémiotique peut être faite : elle doit prendre en compte à la fois la distinction entre représentations discursives et représentations non discursives et celle entre représentations multifonctionnelles, qui sont non algorithmisables, et les représentations monofonctionnelles qui le sont (Duval 2000c p. 65.)

(1c) *L'analyse cognitive d'une représentation sémiotique doit se faire à partir des systèmes par lesquels elle est produite.* Son outil principal est la prise en compte des variations de contenu chaque fois que l'on change de registre pour représenter un objet. C'est de cette manière, par exemple qu'une analyse cognitive du discours est radicalement différente d'une analyse linguistique du discours ou même d'une analyse qui n'aurait pour but que de détecter la mise en œuvre ou non de “concepts”. Cette approche permet de définir des variables indépendantes cognitives, qui peuvent également être des variables didactiques dans l'organisation des tâches.

5.2. Les représentations sémiotiques sont-elles intrinsèques ou extrinsèques au fonctionnement de la pensée en mathématiques ?

C'est évidemment la question intéressante mais qui évidemment n'intéresse pas puisque la réponse serait a priori évidente du fait que les mathématiques relèvent de la pensée et non pas du langage. En réalité, ce blocage repose sur l'étrange réduction des “représentations” à de simples “support” venant remplir certaines fonctionnalités didactiques. Or si nous partons de la relation fondamentale pour l'analyse des représentations, celle de leur production, on peut tout de suite remarquer qu'une représentation sémiotique peut être produite (Duval 1999 p. 57-62) :

- *à titre d'auxiliaire* (et donc de manière transitoire) *par rapport à une autre représentation*, qui elle apparaît comme représentation principale : leur fonction est d'aider la compréhension de la représentation principale.... Ainsi, les représentations données en exemple plus haut dans les Figures 4, 5, 6, 9 sont des représentations auxiliaires : elles doivent aider la compréhension de l'énoncé, la recherche d'une solution, le sens d'opérations sur des nombres, etc... Mais les élèves peuvent se fabriquer leurs propres représentations,
- *à titre intrinsèque* (et donc de manière autosuffisante) pour remplir celle des trois fonctions cognitives majeures qui est prioritaire en mathématique : le traitement. Ainsi toutes les représentations qui relèvent de registres discursifs monofonctionnels et sans lesquelles aucun calcul ne serait possible sont intrinsèques au fonctionnement de la pensée mathématique. Mais il en va de même pour la langue dans certaines situations, car elle est indispensable pour l'énonciation des propositions, quel que soit leur statut théorique (définition, théorème, conjecture... .)

	REPRÉSENTATION DISCURSIVE (Uniquement des règles de combinaison d'unités, entraînant un ordre linéaire pour l'appréhension des chaînes produites)	**REPRÉSENTATION NON-DISCURSIVE**
REGISTRES MULTI-FONCTIONNELS Les traitements effectués dans ces registres ne sont pas algorithmisables	(Langue naturelle commune permettant des associations verbales et des énoncés) *Type de production impliquant des opérations discursives (à trois niveaux d'articulation de sens) :* *Description, explication,* *Raisonnement :* - *argumentation à partir d'observations, de croyances.* - *déduction valide à partir de définitions ou de théorèmes)*	(Formes et configuration de formes **en dimension 2 ou 3,** puis par médiation instrumentale en D 1) *Type de production :* ***ICONIQUE*** *(dessins, caricatures, croquis...)* ***NON-ICONIQUE*** *(les figures géométriques construites avec un instrument et donnant lieu à des appréhensions discursives et opératoires)*
	REPRÉSENTATIONS AUXILIAIRES LIBRES pour réduire la distance cognitive des conversions	
REGISTRES MONO-FONCTIONNELS les traitements sont principalement des algorithmes	(Codes permettant l'association directe d'une unité à l'unité d'un autre système ou à un objet (structure dyadique des signes) : systèmes de numération, symboles d'opérations, de variables, de quantificateurs...) *Type de production :* *des expressions permettant des substitutions univoques, condition de tout calcul*	(Combinaison D2 de formes D1 et D0 orientées ou non orientées) *Type de production :* *diagrammes, schémas, graphes, cartes...* *Les graphes cartésiens permettent des traitements (interpolation, extrapolation), les autres productions répondent à d'autres fonctions que celle de traitement*

Figure 12 : Les différents registres de représentations utilisés en mathématiques. Les flèches représentent les différentes conversions requises par l'activité mathématique.

Or, généralement quand on parle de représentations sémiotiques, on scotomise toutes les représentations produites à titre intrinsèque, comme si les objets mathématiques étaient accessibles en dehors de tout système de représentation sémiotique et comme si les possibilités de traitement (raisonnement ou calcul) n'étaient pas liées aux systèmes sémiotiques utilisés, et comme si les représentations sémiotiques étaient subordonnées aux représentations produites par des systèmes non sémiotiques... Résultat de cette scotomisation : les représentations sémiotiques se trouvent assimilées à ces représentations auxiliaires qui d'une certaine manière restent extrinsèques aux démarches mathématiques. Or il ne peut y avoir de recherche sur la pertinence et l'utilité réelle de toutes les représentations auxiliaires qu'en les mettant en relation avec les autres représentations sémiotiques que l'on utilise de manière intrinsèque.

C'est la raison pour laquelle, dans l'analyse de l'activité mathématique à des fins d'apprentissage, nous prenons comme notion primitive non pas celle de “concept” mais le couple {représentation, objet} (Duval 2002a.)

5.3. Les premiers apprentissages en mathématiques : acquisitions conceptuelles ou acquisitions surtout fonctionnelles ?

Les apprentissages des toutes premières années de la vie, ceux au cours desquels le tout jeune enfant apprend à utiliser sa voix pour reproduire les sons des paroles qu'il entend, ses mains dans des gestes de plus en plus volontaires et plus en plus fins, à coordonner sa vision et ses gestes... sont des apprentissages fonctionnels. Ce qui caractérise les apprentissages fonctionnels c'est le fait qu'un sujet apprend à faire fonctionner et à maîtriser un système producteur qui est là à sa disposition et qui fait déjà partie de lui-même. Il y a une expression qui définit parfaitement un apprentissage fonctionnel c'est “prendre en main” : en ce sens on peut dire qu'un enfant apprend à prendre en main ses mains, sa voix, les possibilités d'exploration de ses sens, les possibilités d'action de son corps. Merleau-Ponty (1945, p. 161-162, 289) expliquait ainsi pour la main : “un mouvement est appris lorsque le corps l'a compris, c'est-à-dire lors qu'il l'a **incorporé** à son “monde”, et mouvoir son corps c'est viser à travers lui les choses, c'est le laisser répondre à leur sollicitation qui s'exerce sur lui sans aucune représentation”. Il en va de même pour tous les systèmes culturels sémiotiques, à commencer par la langue, qui fonctionnent dans le milieu relationnel où l'enfant se développe et qu'il doit aussi s'incorporer pour enrichir les potentialités d'actions et de représentation de son “architecture cognitive” initiale. On ne saurait donc confondre les acquisitions fonctionnelles avec des acquisitions conceptuelles.

Or, dans la mesure où l'activité mathématique implique de faire fonctionner, d'une manière de plus en plus en maîtrisée, des registres de représentation communs à d'autres domaines de connaissance et des registres spécialisés pour les traitements mathématiques, on peut se demander si les premiers apprentissages en mathématiques ne doivent pas prendre autant en compte les acquisitions fonctionnelles que les acquisitions conceptuelles. Cette question est d'autant plus importante qu'à la suite d'une ou de deux décennies de référence inconditionnelle au constructivisme, on en est venu à penser tous les apprentissages mathématiques en termes d'acquisitions conceptuelles. Et cela nous renvoie à un problème plus fondamental.

L'étude des changements impliqués, d'une part, par la multimodadilité sensorielle (voir, entendre respectivement dans l'écrit et la parole...) et, d'autre part, par la variété des registres de représentation sémiotique constitue l'entrée majeure pour analyser les mécanismes de compréhension et les problèmes d'incompréhension dans les apprentissages. Car il y a là un jeu considérable de variations, aussi bien pour les contenus accessibles que pour les opérations possibles, chaque fois que l'on change de modalité ou que l'on change de registre. *La connaissance ne peut véritablement commencer à se construire que lorsqu'une synergie commence à s'établir, chez le sujet, entre les fonctionnements des différents systèmes représentatifs, sensoriels comme sémiotiques.* Naturellement cela présuppose un certain degré de maturation ou de maîtrise pour le fonctionnement spécifique de chaque système, cela se fait souvent de manière indépendante et non synchrone. *Les stades que l'on repère dans le développement des acquisitions ne concernent en réalité que des émergences en surface d'un début de synergie.* C'est l'oubli de cette différence qui non seulement a conduit à des erreurs d'analyse dans le développement de l'enfant (par exemple sur le rôle du langage dans le développement de l'intelligence) mais à confondre la construction de connaissances et la construction du sujet capable de ces connaissances.

En mathématiques, c'est la synergie, non naturelle, entre des registres de représentation sémiotique hétérogènes qui est évidemment fondamentale. Et la géométrie, à l'opposé de l'algèbre, constitue le domaine où cela apparaît de la manière la plus spectaculaire. Mais bien qu'apparemment monoregistre, l'entrée dans l'algèbre repose également sur une synergie de registres de représentation.

5.4. Un même modèle général pour rendre compte de l'apprentissage des mathématiques ?

Cette question revient à se demander si les problèmes d'apprentissage sont fondamentalement les mêmes selon que l'on considère les tous jeunes enfants, les élèves durant la période de scolarisation obligatoire ou les étudiants de l'université engagés dans des filières spécialisées. On peut ainsi considérer trois niveaux :

- celui d'émergences spontanées d'activités numériques ou des premières représentations de l'espace que l'on peut observer chez les jeunes enfants et que l'on retrouve, avec des manifestations diverses, dans toutes les cultures,
- celui des mathématiques enseignées impliquant l'appropriation de connaissances et d'outils de représentation mathématiques par tous les élèves d'une classe d'âge,
- celui des mathématiques avancées qui requièrent un travail quasi à temps plein et qui ne concernent qu’une partie très infime de la population.

Très souvent, les recherches sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques tendent à minimiser les différences radicales entre ces niveaux et cherchent à généraliser un modèle qui, en fait, se réfère exclusivement à un seul niveau. Ainsi, vouloir importer un modèle de pratique issu des mathématiques avancées se heurte à de sérieuses limites (Duval, 2000a p. 165-166.) À l'inverse, les didacticiens ont bien perçu l'inadéquation radicale des études de psychologie qui s'en tiennent au niveau des émergences pour étudier la diversité et la complexité des apprentissages du C.P. jusqu'à la fin du Lycée. Cette inadéquation radicale est facile à expliquer. Au niveau des émergences spontanées, le développement de l'activité mathématique est indépendant de tout recours à l'écriture et ne dépend réellement que d'une “pratique orale” (Duval, 2000a p.146-147.) Au contraire, au niveau de la scolarisation obligatoire, le développement de l'activité mathématique est au contraire lié à la pratique de l'écriture (système de numération, écriture littérale, algèbre..) et de tous les moyens de représentation visuelle.

6. Conclusion

Lorsqu'on regarde les conditions d'entrée, pour de jeunes élèves, dans un processus d'acquisition de connaissances aussi bien scientifiques que mathématiques, on ne peut qu'être frappé par le caractère crucial des démarches de description. L'enjeu des démarches description est la constitution d'une base d'observations personnelles, de plus en plus large et surtout de plus en plus fine, des phénomènes qui relèvent d'un champ d'investigation. C'est cela qui permet de construire scientifiquement des connaissances et qui “donne du sens”, dans la mesure que c'est là le moment fondamental où s'amorcent à la fois la découverte et la prise de conscience. Décrire, c'est d'abord recueillir les *data* pertinents, ce qui implique leur intégration dans un processus de représentation qui doit être nécessairement multiregistre.

Cela est évidemment trivial dès qu'il s'agit de sciences où l'observation, les manipulations, les expériences ont en quelque sorte le premier et le dernier mot. Mais en mathématiques, cela peut sembler moins évident. Non que l'on y méconnaisse les activités de description (principalement lorsqu'il s'agit de “figures géométriques” à construire, à faire construire, à analyser...), mais celles-ci ne peuvent y apparaître que secondaires, car l'activité privilégiée est la résolution de problème, et celle-ci appelle des démarches d'explication et de justification qui sont au moins tout aussi fondamentales pour la compréhension proprement mathématique. Or ici nous nous heurtons à des questions essentielles aussi bien pour les apprentissages des élèves que pour la formation des enseignants : qu'est-ce qu'un problème mathématique ? Qu'est-ce que résoudre un problème mathématique ? À quelles conditions résoudre un problème permet-il des acquisitions transférables ? Naturellement, quand nous parlons de “problèmes”, il s'agit de problèmes pour des élèves de primaire ou de collège, bref des *non-problèmes* depuis fort longtemps pour les mathématiciens.

C'est par rapport à ces interrogations que nous avons introduit la distinction entre description complète d'une situation et description minimale faite dans un énoncé, une description complète donnant lieu à une variété de descriptions minimales qui peuvent apparaître très différentes entre elles. Les problèmes mathématiques proposés aux élèves à des fins didactiques sont toujours une description minimale parmi d'autres, la solution consistant à remonter vers l'un des aspects de la description complète qui a été volontairement omis. Cette analyse de la notion de problème pour élèves permet de mettre en évidence deux points essentiels :

(1) La génération de problèmes mathématiques pour l'enseignement relèvent en profondeur d'une même procédure, quelle que soit la manière dont chaque enseignant a le sentiment de s'y prendre pour élaborer un problème. Et avec cette procédure, nous pouvons générer tous les problèmes possibles et donc évaluer le poids des variables cognitives et didactiques qui jouent sur la remontée vers la description complète, laquelle est relative à une procédure mathématique ou à des propriétés mathématiques. Et cela permet d'établir une graduation contrôlable du coût ou de la difficulté de décryptage des différentes descriptions minimales

(2) Il y a des conditions pour la compréhension du problème et de sa résolution par les élèves, donc pour une réelle transférabilité. Celle-ci ne se détermine pas au niveau de l'activité concernant un ou deux problèmes mais à celui de l'ensemble des problèmes générables. Un réel travail permettant la compréhension et l'appropriation de la résolution de problème ne doit pas se faire à partir d'un énoncé de problème mais à partir du passage d'une description complète à des descriptions minimales et dans les passages inverses. Tout énoncé de problème et toute variation dans les énoncés de problèmes doivent être regardés en fonction de cet écart constitutif du problème. C'est pourquoi la question d'un problème d'enseignement correspond si rarement à une véritable question, c'est-à-dire à un questionnement.

C'est d'ailleurs dans le cadre de démarches de description que l'on obtient les productions d'élèves les plus personnelles et les plus diversifiées. Et cela aussi bien dans l'observation des phénomènes à l'aide de dispositifs instrumentaux que dans la résolution de problèmes mathématiques. Cela constitue non seulement une source considérable de données qualitatives mais également un défi non moins redoutable aussi bien pour le chercheur que pour l'enseignant. Comment interpréter les productions verbales et les dessins et schémas produits par les élèves ? Force est de reconnaître que l'utilisation reste le plus souvent impressionniste (la compréhension du lecteur, sa compétence faisant foi) ou rhétorique (on se contente de citer des extraits pour illustrer.) Et surtout cela ne permet pas d'effectuer des comparaisons contrôlables, voire parfois quantifiables, entre des productions différentes pour les mêmes élèves en des situations différentes ou à des échelles de temps différentes. Comment alors pouvoir discerner véritablement les évolutions ou les blocages profonds dans les acquisitions ?

Nous avons essayé de proposer un cadre d'analyse intrinsèque aux possibilités complexes qu'offre le discours (et dont la maîtrise est requise pour le développement des connaissances) et à celles qu'offre les différentes formes de visualisation sémiotique. Cela nous a permis entre autres de mettre en évidence le déséquilibre entre “langage” et “image” pour reprendre une opposition simpliste : d'un côté trois niveaux dans l'articulation du sens et de l'autre seulement deux niveaux (sans même prendre en compte l'hétérogénéité interne entre représentations iconiques et représentations non iconiques !)

Tous ces rappels suffisent à montrer le caractère fondamental des démarches de description pour l'acquisition des connaissances scientifiques et mathématiques, ainsi que leur complexité cognitive. Cela veut dire que l'enjeu premier dans l'enseignement doit être de décrire et non pas d'argumenter. Nous insistons sur cette conséquence contre la mise au premier plan, ces dernières années dans l'enseignement primaire, de l'argumentation. Sans être ignorées les démarches de description sont didactiquement et cognitivement sous-estimées. On passe trop vite du “quoi” au “pourquoi ?” Toute exigence de justification et d'argumentation est prématurée et stérilisante tant que les apprenants n'ont pas eu le temps d'entrer dans des démarches de description. La production d'arguments, leur examen critique, tout autant que la production, inséparable de questions, trouvent leur source dans la base d'observations personnelles que les élèves ont pu eux-mêmes recueillir, base d'observations qui ne devient utilisable que lorsqu'elle commence à intégrer des variations. D'ailleurs les exigences de justification sont souvent ambiguës. Leur demande conduit trop souvent à ne pas vraiment distinguer la planification d'une action à faire et les raisons de la fiabilité d'une interprétation. Les difficultés d'argumentation —hormis les débats sur des questions touchant des questions de vie dans la classe ou l'école— sont d'abord des déficiences dans les démarches description.

BIBLIOGRAPHIE

DAMM Regina, 1992, *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte.* Thèse, Strasbourg, UniversitéLouis Pasteur.

DELÈGUE H-P. et ROUSSEL J., 2000, Introduction à la complexité des problèmes à énoncé, *Spirale,* n° 26, p. 119-138.

DOUADY Régine, 1986, Jeux de cadre et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques,* n°7.2, 5-31.

DUVAL Raymond, 1992, Argumenter, démontrer, expliquer :continuité ou rupture cognitive ? *Petit x* 31, p. 37-61.

DUVAL Raymond, 1995, *Sémiosis et pensée humaine,* Bern, Peter Lang.

DUVAL Raymond, 1998, Signe et objet (I) : trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°6, p. 139-163.

DUVAL Raymond (Ed.), 1999, *Conversion et articulation des représentations analogiques,* Volume 1, Lille, I.U.F.M. Nord Pas-de-Calais : D.R.E.D. 115 p.

DUVAL Raymond, 2000a, Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques.* 20/2, p. 135-170.

DUVAL Raymond, 2000b, Costruire, vedere e ragionare in geometria : quali rapporti ? *Bolletino dei docenti di matematica* 41, p. 9-24 (version française disponible).

DUVAL Raymond, 2000c, Basic issues for Research in Mathematics Education, *Proceedings of th 24th Conference of PME* Vol 1, p. 55-65. Hiroshima.

DUVAL Raymond, 2002c, L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets, *Actes du SFIDA* , IV, n°13-16, Nice, IREM.

DUVAL Raymond, 2002a, Comment décrire et analyser l'activité mathématique ? Cadres et registres. dans *Actes de la journée en Hommage à Régine Douady,* 83-105 Paris 7 : IREM.

DUVAL Raymond, 2002b, “Voir” en Mathématiques. A paraître dans *Matemática Educativa : Aspectos de la investigación actual*.

GOUANELLE C., 1996, SCHNEEBERGER P.,Utilisation de schémas dans l'apprentissage de la biologie à l'école : la reproduction humaine, *ASTER* n°22, p. 57-86.

LARKIN J.H., SIMON H.A., 1987, Why a diagram is (sometimes) worth Ten Thousand Words, *Cognitive Science* 11, p. 65-99.

PERRIN Marie-Jeanne et GAUDIN M., 2002, Etudes des figures à l'école élémentaire. Des surfaces aux points, Dijon, Journées IUFM.

PERRIN Marie-Jeanne, 2003 (à paraître), Studying geometric figures at primary school from surfaces to points, CERM 3

PIAGET Jean, 1950, *Introduction à l'épistémologie génétique 1, La pensée mathématique*, Paris, P.U.F.

VERGNAUD Gérard et DURAND Catherine, 1976,Structure des problèmes additifs et complexité psychogénétique, *Revue Française de Pédagogie*, 36, p. 28-43.

VERGNAUD Gérard, 1990, La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 10/2.3, p. 133-170.

Annexe : l'ambiguïté des problèmes dont l'énoncé décrit une situation “réelle”

On insiste beaucoup sur la résolution de problème, mais on s’interroge peu sur ce qui différencie les problèmes mathématiques de tous les autres types de problèmes en dehors du domaine des mathématiques. Par exemple, est-ce qu’un problème de mathématiques fonctionne comme une interrogation sur les phénomènes de la nature que l’on peut observer ou sont-ils des exercices d’autant plus conventionnels qu’ils dépendent des hypothèses et des contraintes particulières que quelqu’un a choisies ? Pour comprendre la caractérisation que nous proposons, en introduisant la relation entre une description complète et une description partielle minimale, on peut partir des observations suivantes qui peuvent être faites en prenant ce qui est présenté comme “problème” dans les manuels.

Un problème de mathématiques est inséparable de son énoncé

La demande d’exécution d’une opération n’est pas un problème.

La question dans un énoncé de problème est la formulation rhétorique d’une demande de résolution et non pas l’expression d’un questionnement.

Exemple 1 : *quel est le prix d’un nounours en gélatine sachant que pour 100 centimes (d’euro) j’ai eu 40 nounours ?*

Une opération numérique lie trois nombres. Sa description complète est donc du type $40 \times 2{,}5 = 100$. Il y a donc trois manières de l’amputer. Et selon le choix fait, l’opération permettant de retrouver la donnée numérique supprimée peut être une opération de multiplication ou de division. Cette amputation est plongée dans une deuxième description, celle d’un scénario de la vie réelle : ici celle qui est familière au consommateur. D’où des formulations possibles du type “ quel est le prix d’un nounours sachant que pour 1 euro j’ai eu. 40 nounours ? ” ou “ combien ai-je payé sachant qu’un nounours coûte et que j’en ai pris 40 ? ” Ici le plongement de la description partielle dans un scénario de la vie réelle ne conduit pas à des énoncés étranges. Mais cela survient dès que l’on veut complexifier la présentation des données numériques de la description partielle, comme dans l’énoncé suivant :

Exemple 2 : *Je veux acheter un panneau de latté dont la surface sera de 2,4 m2, qui soit le plus épais possible mais qui ne devra pas peser plus de 15 kg. Sachant que le latté pèse 0,500 tonne par mètre cube, quelle épaisseur en mm vais-je choisir ? (le rayon bricolage propose des lattés de diverses épaisseurs en nombres entiers de mm).*

La complexification de la présentation des données numériques joue sur les deux types de description. D’une part, elle fait une présentation non homogène pour les unités de grandeur (tonne et kilo, mètre carré et mètre cube) ce qui requiert des conversions d'unités. D'autre part, la description complète d'un panneau de latté requiert 4 informations (*la longueur, la largeur, l'épaisseur et le poids* du panneau). La description partielle donne des informations par rapport à la surface (longueur × largeur) et par rapport au volume ! Cela revient donc à présenter les données d'une manière telle qu'elles ne sont pas directement utilisables pour résoudre le problème. On peut aussi ajouter que supprimer l'information directe et simple de l'épaisseur et donner une information sur le poids du latté au mètre cube est contraire à toute pratique d'étiquetage dans les rayons de Castorama ou de Leroi-Merlin. En **réalité ce problème est du même type que celui des nounours mais noyé dans deux exercices de conversion d'unités de grandeur**.

Exemple 3 : *Convertir en en heures et en minutes une durée de 340 minutes.*

Analysée en termes de registre cette tâche de conversion d'unités de grandeur est évidemment un traitement. Elle consiste (selon la distinction de Frege entre sens et référence qui est fondamentale pour toute analyse en terme de registres) en un changement de sens qui conserve la référence au même objet (ici la durée d'un intervalle de temps). Ce traitement est une opération de redésignation d'un objet. Cela n'apporte aucune information nouvelle ou manquante. *Il ne peut donc pas y avoir de question dans ce type de tâche,* sinon de manière rhétorique afin d'atténuer la brutalité connotative d'une instruction.

Exemple 4 : *De retour de la supérette, Jacques a noté ses achats. Il apparaît notamment sur son relevé l'indication suivante :*

	Prix au kilo	*poids*	*prix*
Bœuf	*12 euros*	*0, 650 kg*	*7,15 euros*

Pourquoi Claudine, après, avoir regardé ce relevé, lui dit-elle de prendre sa fiche de caisse pour vérifier ?

L'énoncé consiste ici en la description complète d'une opération d'achat. Il n'y a aucune information manquante. Certes on pourrait demander “quel est l'age de la caissière ?”. On voit tout de suite qu'il y a un présupposé implicite de cohérence général à toute description : **la question posée doit porter sur un élément de la description complète.** Ce qui est ici le cas mais est-ce vraiment une question ? En fait la question est une demande de vérification de l'opération faite. Il s'agit donc d'une simple tâche de contrôle. Si l'on veut considérer cela comme un problème, alors il faut considérer que toute opération de vérification d'une opération est un problème.

Il est donc important de ne pas confondre les consignes d’un exercice et les énoncés de problème (pour nous limiter aux seuls “problèmes verbaux”). L’intérêt et l’enjeu de la prise en compte de cette caractérisation des problèmes comme relation entre une description complète et une description minimale possible est double.

Il concerne d’abord l’identification des variables à prendre en compte pour déterminer le degré de difficulté d’un problème. Presque toujours, ces variables sont déterminées en fonction du contenu mathématique (la nature des nombres, des opérations…), c’est-à-dire en aval. Nous le faisons en fonction de la description minimale et en fonction d’une part des surcodages de chacune des informations constituant la description minimale et d’autre part des interférences sémantiques entre les deux types de description superposées. Cette analyse en amont, nous permet de prendre en compte toutes les tâches cognitives (celle de repérage des “informations pertinentes, celle de leur conversion et celle de leur organisation opérations à effectuer...) qui se trouvent ainsi rajoutées et qui vont permettre de mieux comprendre des écarts considérables quand on change de description minimale en gardant le même scénario.

Il concerne ensuite la compréhension, par les futurs enseignants et par les élèves, de la nature de cette activité très particulière qu’est la résolution d’un problème mathématique, c’est-à-dire d’un problème produit par le choix des données qui en constituent l’énoncé. Pour cela, l’analyse en amont, et non pas en aval apparaît fondamentale, car elle conduit à développer deux types d’activité. (1) La description complète renvoie à un travail qui est une activité importante en dehors des mathématiques (physique, géographie…) : observer et relever, dans une situation, toutes les données caractérisant un phénomène ou un processus. (2) Effectuer sur une description complète un travail de réduction qui, lui, est caractéristique de l’activité mathématique : réduire au maximum la description complète mais de manière à pouvoir retrouver les informations que l’on aura supprimées. Or la plupart des élèves ne sont pas conscients que c’est là le premier geste mathématique, celui-là même que l’on retrouve aussi dans la manière de définir mathématiquement (le contre-exemple n’étant qu’un test de validité pour la pertinence de la réduction effectuée sur une liste de propriétés “candidates”). Et nombre de futurs professeurs d’école qui, sur ce point, ne sont guère plus avancés que les élèves, n’est pas du tout négligeable.