RUDOLF STRÄßER

L'INVERSEUR DE PEAUCELLIER : DÉCRIRE EN GÉOMÉTRIE

Abstract. Concerning the geometry in this text, I wish to emphasize a rather negative aspect: the current want of a satisfactory theory for semiotic non-linguistic systems. I would also like to point out an interesting pedagogical use: the possibility of concrete applications.

Résumé. A propos de la géométrie, je souligne dans ce texte un aspect plutôt négatif : le manque actuel d'une théorie satisfaisante pour les systèmes sémiotiques non langagiers et un aspect intéressant dans les applications pédagogiques : des possibilités d'utilisation concrètes.

Mots clés : géométrie, inverseur de Peaucellier, unités figurales.

---

1. Introduction

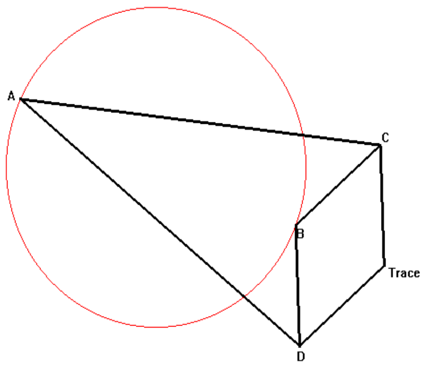
Comme réaction au texte de Raymond Duval, je présente l'inverseur de Peaucellier. L'analyse de ce mécanisme géométrique me servira comme illustration pour mes arguments un peu sceptiques sur certaines propositions et conséquences du texte de Raymond, mais aussi pour montrer un aspect de la géométrie, qu'on a tendance à oublier : l'aspect - si on peut dire - utilitaire de la géométrie, ou (d'après Gaspard Monge), l'aspect « géométrie descriptive ».

2. L'inverseur de Peaucellier : description et exploration

L'inverseur de Peaucellier est un mécanisme géométrique, un assemblage de 6 barres, dont quatre forment un losange. Deux des extrémités du losange sont liées à un point à l'extérieur du losange avec les deux autres barres de même longueur entre elles. Ce point à l'extérieur est fixé sur un cercle, un troisième coin du losange (qui se trouve entre les deux déjà mentionnés) peut se promener sur ce cercle.

Si je prends les « trois niveaux d'articulation du sens » des descriptions verbales de Raymond Duval, j'étais dans la fonction référentielle et apophantique - et je pense qu'il vaut mieux regarder la visualisation du dessin 1 ci-dessous pour bien comprendre la construction de l'inverseur de Peaucellier.

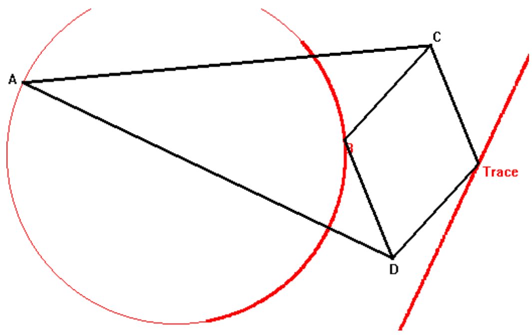
Annales de didactique et sciences cognitives, volume 8, p. 63 – 68.



Dessin 1 : Schéma de l'inverseur de Peaucellier

Avec le dessin, on a changé de registre, on est dans les représentations sémiotiques - et la description langagière nous a dirigés dans le premier niveau « d'articulation du sens dans une visualisation d'ordre sémiotiques » , les unités figurales identifiables (voir par ex. « losange » et « cercle » .) Plus précisément, le dessin 1 donne une représentation iconique, avec quelques relations entre unités figurales (par ex. « de même longueur » , « sur le cercle »), représentation parlante de la « juxtaposition » , « conservation » et « propriétés » (« deuxième niveau : les relations entre unités figurales » .)

Mais la description de l'inverseur de Peaucellier n'est pas encore finie : l'inverseur a comme fonctionnalité de **transformer un arc en un segment** (cf. Klein1908, p. 108.) Si le point B se promène sur le cercle, la hauteur opposée - la « trace » - se promène sur un segment. C'est la transformation d'un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne (longuement recherchée pour une utilisation technique, surtout mécanique.)



Dessin 2 : Fonctionnalité de l'Inverseur de Peaucellier

Pour la description verbale, on est évidemment dans le troisième niveau d'articulation du sens, la « fonction d'expansion discursive ». Mais à quel niveau d'articulation du sens situer le dessin 2, la représentation sémiotique, iconique - surtout si on regarde la configuration de façon dynamique, sur un écran à l'aide d'un logiciel de type Géométrie dynamique (par ex. Cabri-géomètre) ?

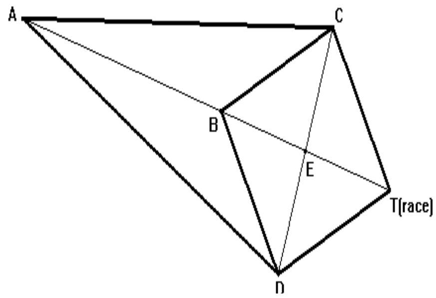
3. La variabilité des unités figurales en géométrie et algèbre

Dans la présentation de l'inverseur, il y avait des changements multiples des unités figurales (6 'barres', qui forment un 'losange', au lieu d'un cercle, on ne regarde qu'un arc, le 'segment' qu'on peut voir est pensé comme une droite etc..) D'après Raymond Duval : C'est proto-typique pour la géométrie (voir son texte, p. 20) - et je suis tout à fait d'accord avec lui en ce qui concerne la géométrie.

Mais regardons une description algébrique du dessin (voir ci-dessous) :

(1) $(AB+BE)^2 + EC^2 = AC^2$
(2) $BE^2 + EC^2 = BC^2$
(pour les deux équations : ->Pythagore)

(1) $(AB+BE)^2 + EC^2 = AC^2 \Rightarrow$
$AB^2 + 2AB\ BE + BE^2 + EC^2 = AC^2 \Rightarrow$
$AB\ (AB + 2\ BE) + BE^2 + EC^2 = AC^2$



Dessin 3 : Mieux comprendre la description algébrique

Soustraction de
(2) $BE^2 + EC^2 = BC^2$ donne l'équation
(*) $AB\ (AB + 2\ BE) = AC^2 - BC^2$, impliquant que le produit des deux longueurs AB et AT est constant.

Ceux qui connaissent la Géométrie euclidienne, en déduisent : 'Trace' est l'image de B sous une inversion et par conséquent : 'Trace' « se promène » sur une droite.

Je ne voulais ***pas*** le prouver, mais montrer : Dans la déduction faite

$$(1)(AB+BE)^2 + EC^2 = AC^2 \Rightarrow$$
$$AB^2 + 2AB\ BE + BE^2 + EC^2 = AC^2 \Rightarrow$$
$$AB\ (AB + 2\ BE) + BE^2 + EC^2 = AC^2$$

Soustraction de

$$(2)\ BE^2 + EC^2 = BC^2$$

donne l'équation

$$(*)\ AB\ (AB + 2\ BE) = AC^2 - BC^2 = const.$$

on change constamment les unités sémiotiques, dont l'hypothèse :

Dans (tous ?) les systèmes sémiotiques *opérationnels* (ceux qui sont utilisés pour transformer une description, ceux qui sont pour un traitement dans la représentation), on change constamment les unités sémiotiques. C'est la raison fondamentale pourquoi les systèmes opérationnels peuvent servir au traitement.

Mais qu'est-ce qu'on fait dans les systèmes à l'usage descriptif (les systèmes pour identifier et délimiter un objet ; pour la différence « opérationnel » versus « descriptif » -'action' versus 'display' systems- voir par exemple Kaput 1994, pp. 382 et suivantes) ? Dans les systèmes à l'usage *descriptif,* on ne change pas les unités sémiotiques ? En plus, il faut mentionner qu'on est loin d'un système vraiment opérationnel en géométrie **-** si on compare avec l'algèbre. C'est pourquoi il faut constamment changer les unités figurales iconique en géométrie ?

4. Les niveaux d'articulation dans une visualisation

Dans son analyse cognitive du discours, Raymond Duval distingue ***trois*** « niveaux d'articulation du sens » (p.36)

I. Fonction référentielle
II. Fonction apophantique
III. Fonction d'expansion discursive.

Pour les visualisations d'ordre sémiotique il ne distingue que seulement ***deux*** niveaux (p.40) :

I. Unités figurales identifiables
II. Relations entre unités figurales.

Pour moi, cette différence entraîne deux questions :

- Est-ce la fonction apophantique correspond aux relations entre unités figurales ? Si on regarde les descriptions sémiotiques, surtout les dessins géométriques, les relations entre unités figurales prennent le « statut de définition, constat, conjecture, théorème, etc. » , ce que sont exactement les types d'expressions produites de la fonction apophantique, (voir p. 36 du texte de Raymond Duval),
- est-ce qu'il y a des systèmes sémiotiques non-langagiers d'une fonction d'expansion discursive (« niveau III ») ? Comme description sémiotique, le langage de l'Algèbre peut illustrer cette fonction explicative des systèmes hors la langage maternelle / de tous les jours. La section 3 de ce texte en donne un exemple pour les représentations « non-iconiques » - et l'analyse de la fonctionnalité dynamique de l'inverseur de Peaucellier en

est peut-être une illustration dans une représentation iconique du dessin/Géométrie.

Tout court, pour moi les réponses sont « **oui** » pour les deux questions ! Mais je veux bien ajouter un commentaire en ce qui concerne les visualisations : Pour une visualisation qui aide vraiment à comprendre une situation, voir résoudre un problème, il faut une relation entre deux systèmes sémiotiques, dont un de type analogue, non-propositionnel (?iconique?) et l'autre non-iconique. Une visualisation est une activité dans les deux directions où on prend un jugement dans un système pour le comprendre (métaphoriquement) dans l'autre (cf. Kadunz 2000 and Kadunz&Sträßer 2001.) Par conséquence, l'‘adage du valeur d'un diagramme est vraiment à re-penser (voir la partie IV du texte de Raymond Duval) !

5. Conclusions

Je veux bien conclure avec deux remarques assez générales :

Si on regarde les systèmes sémiotiques non-langagiers, surtout ceux iconiques / analogues, on a l'impression qu'on est loin d'une théorie satisfaisante pour l'articulation du sens et pour une analyse fonctionnelle. La longue histoire de la géométrie a fourni un champ vaste d'illustrations et de démarches possibles. Une théorie (didactique ?) pour l'usage de ce système si répandu n'est pas encore écrite.

Plus spécifiquement, pour la géométrie, il y a - à côté de l'aspect formel et logique si fameux et bien analysé (voir les travaux sur « preuve et argumentation ») - l'aspect « concret d'application » . C'est un aspect souvent négligé dans la présentation de la géométrie en didactique des mathématiques et hors la didactique. Mais c'est exactement cet aspect qui a fait survivre la géométrie aux attaques des « Maths modernes » et c'était la raison pour laquelle j'ai choisi l'inverseur de Peaucellier comme exemple. Gaspard Monge a créé la « géométrie descriptive » « ...Pour tirer la nation française de la dépendance où elle a été jusqu'à présent de l'industrie étrangère... »
(Monge dans le « programme » de la Géométrie descriptive, p.xv de la 6ième éd.1838.)

BIBLIOGRAPHIE

KADUNZ G., Visualisierung, Bild und Metapher. Die vermittelnde Tätigkeit der Visualisierung beim Lernen von Mathematik. *Journal für Mathematikdidaktik, 21*(3/4), 280 – 302, 2000.

KADUNZ G. & STRÄßER, R., *Visualisation in Geometry : Multiple Linked Representations ?* PME 25 - Utrecht, vol. 3,. 201-208, 2001.

KAPUT J., The Representational Role of Technology in Connecting Mathematics with Authentic Experience and Elevating Levels of Cognition. In R. Biehler & R. W. Scholz & R. Sträßer & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* Dodrecht : Kluwer. (pp. 379-397), 1994.

KLEIN F., Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. Vol. 2 : Geometrie (réimpression :1968.) Berlin : Springer, 1908.

RUDOLF STRÄßER, BIELEFELD ET LULEÅ
Universität Bielefeld
Institut für Didaktik der Mathematik
Postfach 100 131
33501 Bielefeld, ALLEMAGNE

e-mail : rudolf.straesser@uni-bielefeld.de