CARL WINSLØW

DÉFINIR LES OBJECTIFS DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE : LA DIALECTIQUE MATIÈRES – COMPÉTENCES

Abstract. Defining goals of mathematics education: the contents – competencies dialectic
The description of goals of mathematics education has several potential ends, external (justification, declaration…) as well as internal (planning, evaluation…). Although these ends are not independent, the usual forms of description have a tendency to serve but a part of these ends. In this paper, we examine the notion of "competency" as a possible solution to these problems. We also consider some examples of its use especially in the Danish context.

Key words. Mathematics education, curriculum, contents, competencies

Résumé. La description des objectifs de l'enseignement mathématique a plusieurs finalités potentielles : externes (justification, déclaration…), internes (planification, évaluation…). Quoique ces finalités ne soient pas indépendantes les formes usuelles des descriptions ont tendance à ne remplir qu'une partie de ces finalités. Dans cet article, nous examinons si la notion de « compétence » apporte des solutions à ces problèmes, ainsi que des exemples de son usage notamment dans le contexte du Danemark.

Mots clés. Enseignement mathématique, programmes, contenu, compétences.

---

1. Le problème

Quels sont les objectifs de l'enseignement des mathématiques, et comment les décrire ? Évidemment, la réponse dépend du contexte et de la personne qui répond. Globalement, elle est profondément liée à la **raison d'être** de l'enseignement, qui dépend à son tour – au moins pour le grand public – fortement de la nécessité, pour l'individu, de posséder des connaissances mathématiques afin de réussir dans les formations supérieures ou dans la société en général. Ces besoins sont bien sûr réels, généralement reconnus, et en même temps, assez mal compris. A ceux-ci s'ajoutent les notions, souvent encore moins précises, de valeurs d'une culture mathématique, provenant de perspectives assez diverses : le point de vue historique surtout (c'est un domaine cultivé depuis l'Antiquité), ainsi que les points de vue philosophique (puisant ses racines également dans l'Antiquité, mais aussi dans la pensée d'une multitude de philosophes depuis Descartes et Kant) et idéologique (par exemple, pour la participation du citoyen dans la vie démocratique). Il y a un écart évident entre ces idées générales et la tâche de cerner les objectifs d'un enseignement concret, avec ses choix incontournables de sujets, méthodes, notions **etc.** à enseigner. Souvent, le didacticien doit considérer – comme une partie des

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 10, p. 131 - 155.

conditions données – les objectifs formulés dans les programmes régissant l'enseignement en question.

Or il y a plusieurs raisons pour se livrer à une réflexion plus approfondie sur la nature des objectifs. La plus importante est la **nécessité de cohérence à travers les systèmes.** Actuellement, la nature des programmes varie énormément en fonction des contextes (niveau, pays, institutions…) – non seulement par ses contenus (ce qui est évident) mais aussi par ses catégories et par la manière employée pour les décrire. Un obstacle que l'on rencontre pour arriver à des catégories communes est le problème du « programme implicite ». Souvent, la tradition joue un rôle au moins aussi important que les prescriptions officielles, même si certains manuels sont obligatoirement utilisés. Surtout, la pratique plus ou moins centralisée des **examens** par lesquelles on évalue les résultats de l'enseignement, a une influence considérable sur la mise en œuvre des programmes dans l'enseignement. Bien que cette pratique soit censée être en accord avec le programme, elle est souvent plus nettement en relation avec les attentes du système éducatif par rapport aux activités liées au sujet enseigné. Dans le cas usuel où le succès de l'apprenant (et de son maître) dépend de ses savoir-faire, les pratiques d'évaluation peuvent être bien plus déterminantes qu'un programme officiel. Plus généralement, les objectifs réellement en jeux sont, en grande partie, **implicites**.

Ces conditions se retrouvent sans doute dans toutes les disciplines scolaires. Nous nous intéresserons à la nature **spécifique** des difficultés – et de la nécessité – à expliciter les objectifs d'un enseignement mathématique. Localement, il s'agit du **contrat didactique** qui, selon Brousseau (1986), reste forcément en partie implicite : que l'enseignant ne dise pas 'ce qu'il faut faire', sous peine de réduire la tâche de l'élève à une simulation, est même une condition pour un enseignement qui vise à développer la compréhension autonome de l'élève. Cela, évidemment, ne veut pas dire que les objectifs locaux ne doivent pas être explicités pour l'enseignant, ou qu'il faut les dissimuler à jamais à l'élève. Mais les objectifs locaux sont continuellement **négociés** dans l'interaction entre les deux parties, en fonction de leurs actions et de leurs décisions. La situation est **asymétrique** dans le sens (et dans la mesure) où l'enseignant 'sait mieux'. Le 'savoir mieux' ne veut pas seulement dire que l'enseignant sait mieux la **matière mathématique**, mais surtout qu'il sait ce qu'il faut **pouvoir en faire**. Et cela nous ramène à un niveau plus global, qui est de savoir si cette potentialité – essentiellement un **potentiel d'action** – possède des traits susceptibles d'être explicités et généralisés. En mathématiques, nous parlons souvent de tels traits, par exemple de 'bien raisonner', de 'focaliser sur l'essentiel', de 'choisir les bons outils', ou de 's'exprimer clairement'. Tout cela, qui a l'apparence d'une généralité banale, ne l'est pas quand on y réfléchit : par exemple, de 'bien raisonner', en mathématiques, fait référence (entre autres) aux contraintes spécifiques des inférences valides dans un raisonnement mathématique. Il n'y a donc, **a priori**, aucune raison pour ne pas chercher à préciser plus finement de tels 'traits du pouvoir faire'.

C'est finalement en prenant de telles exigences au sérieux que nous arriverons à cerner des objectifs plus globaux de l'enseignement des mathématiques en tant que telles. La matière, sans doute, ne consiste pas en des îlots isolés de notions et de faits variés, avec ses méthodologies particulières pour les traiter. Même les didacticiens se sont peut-être trouvés un peu trop éblouis par la cohérence des structures plus abstraites (relations, transformations) de notre discipline pour vouloir répondre à la question initiale telle qu'elle se pose du point de vue de l'élève : quels sont les objectifs de l'enseignement dans le sens du **pouvoir faire** à atteindre pour l'élève, et surtout, ces objectifs ne sont-ils pas, aussi, munis d'une certaine cohérence spécifique aux mathématiques ? Cette façon de poser la question s'impose pour deux raisons.

Premièrement, on ne peut pas, en dehors de contextes très spécialisés, justifier un enseignement mathématique en se bornant à se référer à des éléments de contenu, surtout si on veut maintenir que l'enseignement mathématique porte bien sur une seule discipline. Certes, pour beaucoup de ceux qui apprennent les mathématiques sans choisir ni la discipline ni la matière, la motivation se trouve ailleurs, qu'elle soit interne ou externe. Et on ne peut pas rendre compte des attentes de la société vis-à-vis de l'éducation mathématique dans les termes de la seule matière enseignée.

Deuxièmement, il faut expliquer comment il se fait que les enseignements de divers éléments (voire de diverses branches) des mathématiques s'articulent entre eux – au-delà de leur interdépendance logique. Par exemple, les pratiques de raisonnement en géométrie euclidienne ne sont pas indépendantes de celles qui ont cours en l'analyse. Il n'y a pas d'ordre nécessaire ici ; quoique la tradition puisse mettre l'expérience d'une pratique avant une autre, le soutien mutuel des deux instances du 'pouvoir raisonner' n'est pas nécessairement dépendant de la structure du contenu.

Dans le reste de cet article, nous allons discuter pourquoi et comment les notions de **compétences** fournissent des cadres possibles pour un traitement plus systématique des problématiques que nous venons d'esquisser. Il est clair que l'on ne peut pas entièrement séparer le traitement théorique de l'emploi pratique de ces cadres, mais nous avons fait le choix d'accorder la plus grande partie de la section principale (2) au premier et de ne présenter pour le second que l'esquisse d'une expérience contrôlée (section 3). Les raisons de ce choix tiennent d'une part à la taille envisagée pour cet article, d'autre part à une estimation de ce qui est susceptible d'intéresser le lecteur au premier chef.

2. La notion de compétences

La notion de **compétences** est à la mode aussi bien dans les sciences de l'éducation (voir par ex. la revue périodique **Education permanente** 1999, no. 140-141) que dans le discours politique (voir par ex. Rychen et al., 2003). Quoique son usage par les différents auteurs de tels discours varie considérablement, il paraît être lié à un changement assez cohérent de la façon dont ceux-ci conçoivent la nature de l'éducation en tant que telle. Qu'on le veuille ou non, il représente en particulier un défi pour l'idée classique que la formation d'un individu consiste essentiellement en l'acquisition d'un certain ensemble de savoirs. Il ne s'agit pas seulement de l'internalisation qui s'opère dans l'acquisition au moment où les savoirs objectifs (déterminés par un certain **canon** de textes, indépendamment des individus) se transforment dans des **connaissances** du sujet. Il s'agit d'une insistance sur le fait que ce qui compte en pratique – et ce qui peut être effectivement évalué – ce sont les **potentiels d'action** de l'individu, liés à ces connaissances mais dépendant aussi des contextes où les actions sont réalisées. Ici les 'contextes' impliquent aussi des **interactions sociales** (dans un milieu scolaire, dans une entreprise **etc.**) et il s'en suit que les potentiels de l'individu ne sont pas purement individuels – ils dépendent du milieu social, aussi bien pour leur développement que pour leur réalisation. Un changement s'opère donc également par rapport à l'objet de la formation : il ne s'agit plus seulement de l'individu mais aussi des organisations sociales. Finalement, le développement et la réalisation des potentiels d'actions sont considérés comme co-existant dans toutes ces organisations : on réalise ces potentiels et on les développe non seulement dans la vie scolaire mais aussi dans la vie du travail et dans la vie privée. Il y a donc une extension, aussi bien dans le temps que par rapport aux institutions, de la notion de formation : elle n'est plus vue comme une affaire essentiellement liée aux institutions scolaires ou au 'temps de scolarisation', précédant le temps de travail. Ainsi, les objectifs de formation à réaliser dans les organisations scolaires sont considérés dans un système plus large du développement de l'individu et des organisations dont il fait partie.

La réaction des didacticiens face à ces discours n'est pas toujours enthousiaste : **Un … point de vue, en émergence … consiste à voir dans une École fortement diluée dans la société civile un réseaux de lieux de diffusion et de validation de compétences variées, constamment et localement redéfinissables, acquises et validées sans référence ni révérence obligée aux savoirs « monumentaux »… Dans une telle problématique, l'École peut prendre l'allure d'une salle des marchés où, loin des trop longs détours de la connaissance « théorique », on gère fiévreusement un « portefeuille de compétences » qu'il convient d'actualiser rapidement pour répondre aux demandes des différents marchés sur lesquels l'individu est censé réaliser sa valeur.** (Chevallard, 2002, 54-55).

Ces propos reflètent aussi un certain dépaysement (non réservé aux seuls didacticiens !) par rapport à la « dissolution institutionnelle » (voulue ou prévue) de l'apprentissage. Que deviennent les notions à la base de la didactique – le milieu, les situations, les contrats – toutes enracinées, au moins dans leur emploi, à l'organisation scolaire et aux savoirs d'une discipline ? Peut-on effectivement formuler les objectifs de la formation avec des notions abstraites comme 'potentiel d'action', organisations sociales, **etc.** ? Où est le savoir mathématique dans tout cela ?

La didactique des mathématiques est, effectivement, particulièrement mise au défi. Le savoir mathématique est certes enraciné dans les milieux universitaires où il est, pour partie, développé, ainsi que dans les milieux scolaires chargés de l'entretenir. Mais par ses interactions avec d'autres savoirs (intellectuels et autres), il est également omniprésent hors du milieu scolaire, et en effet, une grande majorité d'individus n'en éprouve un besoin réel qu'en fonction de cette présence. Il ne s'agit pas, pour le didacticien, d'accepter d'emblée les déplacements des discours sur la formation que nous venons d'évoquer – il s'agit de les préciser, voire parfois même de les corriger, en vue d'identifier ce qu'ils apportent en défis et en ouvertures pour la réflexion sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. En particulier, il s'agit d'examiner – et c'est notre sujet ici – les apports possibles de la notion de **potentiel d'action** (et après précision, de **compétence**) à notre réflexion sur la description des objectifs de l'enseignement mathématique.

2.1. Éléments de matière

Partons de territoires familiers : la **matière** d'un enseignement mathématique se décrit dans les termes de la discipline : équations du second degré, différentiation, homothétie… Plus précisément, parlons d'un **élément de matière** pour désigner le conglomérat de structures conceptuelles et textuelles impliqué par une telle expression : des notions de base, des formes de représentation, des définitions, des méthodes, des théorèmes, **etc.** (voir fig. 1 pour ces structures en fonctions des exemples d'éléments évoqués).

Pour l'enseignant ainsi que pour le didacticien, chacune de ces expressions évoque également une structure mathématique encadrante, des bases théoriques nécessaires, des explications à faire, peut-être des **situations fondamentales** (Brousseau, 1986) pour faire sentir à l'élève la pertinence de la matière en question… bref, de telles étiquettes communément utilisées pour désigner un élément de la matière à enseigner évoquent aussi des éléments auxiliaires pour la mettre en relation avec des pratiques scolaires que l'enseignant est censé initier et gérer.

	Notions de base	Formes de représentation	Définitions	Méthodes	Théorèmes
Équations du second degré	Variable, inconnue, solution…	[symbolisme algébrique] $\mathbf{x}^2+\ldots$	Équation de type $\mathbf{ax}^2+\mathbf{bx}+\mathbf{c}=0$ où…	Complément de carrés, formules, vérification, …	Si $\mathbf{b}^2-4\mathbf{ac}\geq 0$, …, solutions conjuguées,…
Différen-tiation	Fonction, variable, …	$\mathbf{f}'$, $\mathbf{dy/dx}$, $\boldsymbol{\partial}\mathbf{f}$, [tangente], …	Si **a** est… $\mathbf{f}'(\mathbf{a})=\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\ldots$	[m. de calcul, approxim.,…]	Si **a** est un extrem., alors $\mathbf{f}'(\mathbf{a})=\ldots$
Homothé-tie	Espace, point, transfor-mation…	[figures géom., symbolismes …]	Soit **P** … et **k** … $\underline{\mathbf{Cm_{\underline{C}}(P)}}=\mathbf{k_m}\underline{\mathbf{CP}}$	Calcul vectoriel, constructions …	Préservation du parallélisme, …

Figure 1 : exemples d'éléments de matière et de leurs structures impliquées

La **transposition** de la matière est censée s'opérer par l'interaction de l'enseignant avec l'élève ainsi que dans le travail individuel ou collectif des élèves selon les instructions plus ou moins ouvertes fournies par l'enseignant, basées sur les relations identifiées par celui-ci entre l'élément et la pratique. Quand tout se passe bien, les élèves s'appliquent à comprendre les explications et à faire le travail approfondi suggéré par l'enseignant – on a 'appris la matière', on va passer l'examen pour ce qui la concerne, et on passe ailleurs.

Cela n'est pas une caricature ; bien sûr, les activités proposées aux élèves peuvent viser une compréhension profonde, et pas seulement l'acquisition de quelques techniques pour répondre à des questions standardisées de manière à satisfaire le professeur. Ces activités, quand elles sont bien conçues, peuvent amener les participants à s'engager avec ferveur dans la découverte de principes essentiels. L'attention aux relations multiples d'une matière avec d'autres, déjà travaillées ou à découvrir plus tard, est certainement aussi d'une grande importance pour la conception globale comme locale de l'enseignement. Mais la question reste incontournable : est-ce qu'on peut, même en supposant que tout cela est bien en place, dire que l'on a appris une matière, ou est-ce que l'on n'a pas plutôt simplement vécu des discours et des situations provoquant une réflexion plus ou moins autonome ? Le produit de l'activité peut-il vraiment être décrit par la matière mathématique ? Quand on 'passe ailleurs', est-ce que ce que l'on apporte de l'activité vécue se réduit à des éléments de matière acquis ?

Pour la première question, il est clair que l'on peut, tout au moins, avoir 'appris la matière' plus ou moins bien, avec plus ou moins de solidité par rapport aux situations où l'on peut en faire un usage correct, et avec plus ou moins de stabilité par rapport au temps ou pour soutenir de nouvelles acquisitions. Une partie de ces aspects des résultats de l'apprentissage peut effectivement être décrite par rapport à des principes, méthodes, résultats **etc.** visés par l'enseignement, et qui ne seront qu'une partie de ceux qui sont disponibles. Certains des choix de ces éléments peuvent effectivement être cruciaux pour les activités envisagées plus tard, selon la structure mathématique des contenus, et il faut donc sans doute veiller à ces relations clairement liées à la matière. Mais reste la pertinence des situations vécues, la solidité des acquisitions de l'élève par rapport au temps et aux situations différentes. Les enseignants expérimentés et avisés savent bien que l'on n'a jamais appris une matière dans un sens définitif. Aucune situation n'est capable d'épuiser la richesse d'une matière. En se référant aux seules caractéristiques de la matière, on ne peut donc pas indiquer les résultats de l'enseignement de façon à la fois vérifiable dans le temps et par rapport aux individus et aux situations.

2.2. Compétences mathématiques spécifiques

Nous appellerons **compétence mathématique spécifique** le potentiel d'action d'un individu lié à un élément de matière et à une classe de situations ; ici, une 'classe de situations' est spécifiée de façon descriptive et non par énumération exhaustive. Ce n'est pas une définition très précise ; mais pour nos propos, elle suffira. Mieux vaut dire ce que nous voulons faire d'une telle 'compétence':

- la **décrire** dans des termes qui sont accessibles aux personnes concernées, en particulier les enseignants et les élèves,
- dans un sens qualitatif et partiel, **constater sa présence chez un individu** (ou chez un groupe d'individus).

Par exemple, nous pouvons décrire une compétence, spécifique à l'élément « différentiation », comme de pouvoir utiliser la fonction dérivée dans les problèmes d'optimisation, ou encore de pouvoir justifier cet usage. Bref, nous parlons du 'pouvoir faire' de l'individu où le 'faire' consiste à utiliser ses connaissances de la matière par rapport à une classe de situations susceptibles de les mobiliser. Nous pouvons constater sa présence chez un individu dans la mesure où il réussit effectivement à agir de façon convenable dans ces situations. Notons, toutefois, que la compétence spécifique ne se réduit ni à la maîtrise d'une technique associée, ni à des formes de comportement, ni à une connaissance théorique ; elle réside dans le **potentiel de l'individu** de faire usage, dans les situations visées, de tous les éléments de sa connaissance par rapport à l'élément de matière.

Avant de nous perdre dans les abstractions, retournons tout de suite au problème de décrire les objectifs : qu'est-ce que cela apporte de compléter la description des éléments de matière par une spécification des compétences spécifiques à viser ? Le pas n'est pas spectaculaire, dans le sens où nous rendons simplement explicite ce qui peut sensiblement à la fois constituer de vrais objectifs d'apprentissage (ce qui n'est pas vrai pour les éléments de savoir), et en même temps être effectivement décrit (ce qui n'est pas vrai pour les connaissances individuelles associées). Dans un sens pratique, pourtant, ce pas peut pourtant être déjà important, au moins dans les contextes d'enseignement où, sinon, les descriptions des objectifs se réfèrent aux seuls éléments de matière. Nous en présenterons un cas plus détaillé plus tard ; mais voici quelques effets principaux de cet élargissement des descriptions :

- tout d'abord, celui qui est censé apprendre fait partie de la description, au moins dans un sens idéal, car on s'occupe explicitement de ce qu'il devra, dans une certaine mesure, devenir capable de **faire** ; l'attention se déplace donc, en partie, du domaine de l'institution (savoirs à transmettre par l'enseignant) au domaine de l'élève et de ses actions,
- ce déplacement d'attention se transpose aussi à l'enseignement, qui – de façon officielle ou institutionnalisée – se conçoit pour faciliter et assister le développement de pratiques plutôt que de les « transmettre »,
- la matière n'est plus considérée uniquement dans son objectivité abstraite mais aussi comme base d'une classe limitée d'actions ; on est forcé d'expliciter des priorités réalistes par rapport à l'infinité potentielle de situations qui, normalement, sont liées à un élément de matière – ce qui peut considérablement nuancer la conception de la matière, surtout chez l'enseignant,
- il devient possible de considérer l'évaluation des objectifs au-delà de l'implicite des pratiques habituelles.

La plupart de ces effets ne sont pas des 'déductions théoriques' ; ils visent à systématiser les observations de pratique. Tous sont d'ailleurs observés dans Grønbæk et al. (2004).

Concrètement, ce qui est proposé ici est donc de compléter la description d'objectifs, formulée initialement dans les termes d'éléments de matière, par des **objectifs de compétences spécifiques** (abrégé dans la suite OCS) pour chacun des éléments. La description des OCS sera sans doute un peu abstraite, malgré ses références à des classes de situations ; il est donc nécessaire d'en donner des **exemples illustratifs** (comme des exercices ou des tâches, des problématiques concrètes, …) tout en précisant qu'ils sont, justement, des exemples.

Ces propositions ne sont pas, je le crois, très surprenantes ; mais selon la façon de les implémenter et selon le contexte, les effets peuvent l'être. Il faut donc les contrôler. Par exemple, un effet qui sera rarement recherché est un effet **behavioriste** où les OCS dégénèrent simplement en des prescriptions pour l'entraînement de certains schèmes d'action ; pour l'éviter, il faut veiller à ne pas trop restreindre les classes d'action, par exemple à un inventaire de types d'exercices. Un autre effet non désirable sera l'**atomisation** de l'apprentissage, qui pourrait résulter d'un défaut d'attention aux relations et à la coordination des OCS. Le souci d'éviter ces effets (et plus généralement, les effets **réducteurs** ou dégénérés) est une des raisons des considérations de la prochaine section.

2.3. Compétences mathématiques générales

Nous en venons maintenant au point le plus difficile et, sans doute, le plus sujet à controverse de l'article. Posons-le sous forme de question : peut-on parler de compétences mathématiques générales, qui (pour leur définition) sont **indépendantes d'une matière mathématique concrète** ? La réponse naïve est oui, on en parle effectivement (comme nous l'allons voir). La question plus subtile, alors, est : à quelles fins et avec quelles conséquences peut-on envisager d'utiliser de telles notions de compétence dans la description des objectifs de l'enseignement mathématique ?

Avant de présenter et discuter une réponse remarquable à ces questions, développée par M. Niss et autres, indiquons que l'idée de 'compétence mathématique générale', par rapport aux compétences spécifiques discutées dans la section précédente, peut être vue comme une **abstraction** de ces dernières **faite à travers les éléments de matière** (Winsløw, 2001). Une métaphore mathématique de cette position est donné en fig. 2 (Winsløw, 2004) : il y a **d'abord** des compétences spécifiques, représentées dans la figure comme les points (ou des régions) dans un plan. Celles-ci peuvent se voir comme situées dans un espace bidimensionnel, engendré par **les éléments de matière** et par des formes abstraites de 'potentiels d'action' – ce que nous appellerons les **compétences générales** – définies par la similitudes des formes d'action associées aux compétences spécifiques.

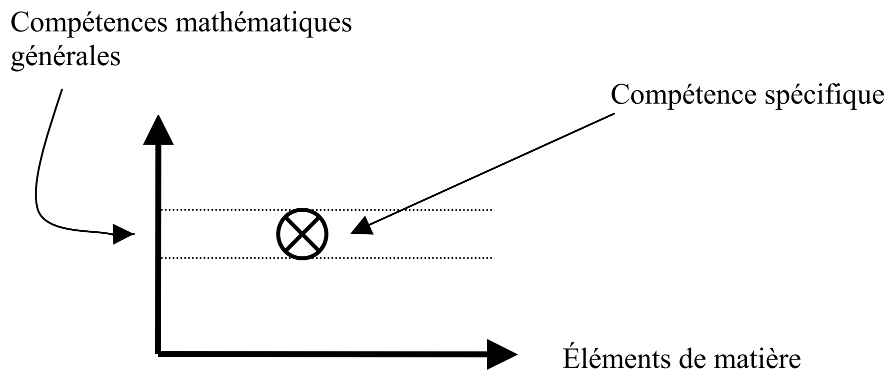

Figure 2 : Compétences spécifiques par rapport aux compétences générales et matière (Winsløw, 2001, 2004).

De ce point de vue, les compétences générales sont considérées comme une notion **dérivée** de la notion de compétence spécifique. Elles ne sont donc pas premières. Notons aussi que le plan théorique en mathématiques vise normalement tout un ensemble d'éléments de matière et présuppose donc, pour l'apprentissage, une classe de compétences spécifiques intégrées.

2.3.1. Le modèle Niss

La notion de compétence (générale) est en revanche première dans un cadre théorique récent, issu de certaines traditions de la didactique scandinave. Elaboré il y a déjà quelques années (cf. Niss, 1999), il est au cœur d'un projet (dit le « projet KOM ») initié et financé par le Ministère de l'Éducation du Danemark (Niss et al., 2002), dont le but est ainsi formulé par le directeur du projet, Mogens Niss :

The fundamental idea of the project is to base the description of mathematics curricula primarily on the notion of a « mathematical competency », rather than on syllabi in the traditional sense of lists of topics, concepts and results. This allows for an overarching conceptual framework which captures the perspectives of mathematics teaching and learning at whatever educational level (Niss, 2003).

Une **compétence mathématique**, pour Niss, est une composante de **l'expertise** mathématique : la puissance d'agir avec intelligence et d'une façon convenable dans des situations comportant une certaine forme de défi mathématique (Niss et al., 2002, 43). A priori cette notion n'est donc qu'un potentiel d'action lié à une certaine forme de défi, voire de tâche. Mais un élément central du cadre consiste dans l'identification de **huit compétences mathématiques,** qui seront majeures, clairement reconnaissables et distinctes (sans être forcément indépendantes ou disjointes). En voici les descriptions sommaires (tirée de Niss et al., 2002 ; cf. aussi Niss, 2003, pour une explication plus détaillée en anglais) :

1. maîtriser les formes caractéristiques de poser et résoudre des questions mathématiques (formes de **pensée** mathématique),
2. pouvoir reconnaître, formuler et résoudre des **problèmes** mathématiques,
3. pouvoir comprendre, évaluer et construire des **modèles** mathématiques (pour les phénomènes non mathématiques),
4. pouvoir suivre, analyser, évaluer et construire des **raisonnements** mathématiques,
5. pouvoir manier diverses **représentations** de phénomènes mathématiques,
6. pouvoir manier les **formalismes** mathématiques,
7. pouvoir **communiquer** par et sur les mathématiques,

8. pouvoir utiliser les **outils** appropriés pour l'activité mathématique.

Selon l'auteur, le choix de ces huit compétences est pragmatique et n'exclut pas, théoriquement, les alternatives : **It just so happens that the present set seems to be able to capture the essential aspects of mathematical mastery reasonably well** (Niss, 2003). Dans le projet KOM, cette affirmation est illustrée par des exemples tirés d'un nombre de contextes d'enseignement mathématique au Danemark, de l'école primaire à l'université. Il faut d'ailleurs ajouter que chacune des compétences est censée être évaluée, chez l'individu, selon trois dimensions : la mesure dans laquelle la personne maîtrise ses aspects caractéristiques, le rayon du domaine de contextes et de situations où il peut les appliquer, le niveau technique de ces applications maîtrisées.

Le projet KOM est à la base de nombreuses initiatives actuellement en réalisation dans le cadre de révisions de programmes au Danemark. Le modèle des huit compétences a été également fondateur pour le cadre théorique à la base de la partie **mathematical literacy** du programme PISA (OCDE, 1999). Le directeur du groupe international d'experts pour cette partie était, d'ailleurs, Mogens Niss.

Étant donné l'influence de ce « modèle Niss », au moins dans la Scandinavie et dans certaines parties de la scène internationale, il faut au moins se poser trois questions :

1. Quelles sont les fondations théoriques et empiriques de ce modèle ? En particulier, quelles sont ses relations (explicites ou implicites) aux théories classiques de la didactique ?
2. Quelles sont ses conséquences – visées, plausibles ?
3. Quelle place accorde-t-il à la matière, au sujet, par exemple par rapport à notre discussion sur les compétences spécifiques ?

Nous ne pouvons, naturellement, donner ici une réponse satisfaisante à ces questions ; en effet, ne serait-ce que pour clarifier leur importance, l'exposé sommaire que nous venons de donner du modèle et de ses applications est très insuffisant. Osons quand même, avant de procéder à une analyse critique depuis notre point de vue, signaler quelques pistes de réflexion.

Il y a, en Scandinavie, une tradition assez longue de considérer l'éducation mathématique dans une perspective politique de **démocratisation** (voir par exemple Melin-Olsen, 1988, pour une référence capitale). Une justification majeure en serait de développer les capacités d'orientation et de participation du citoyen, dans une société de plus en plus influencée par les « applications de modèles mathématiques », que ce soit dans la technologie, dans les formes de description ou de conception de la réalité, **etc**. (Niss, 1994). Pour partie, cette tradition est proche d'une pédagogie optimiste d'émancipation, où la propagation de compétences mathématiques est vue comme une voie (parmi d'autres) pour libérer l'individu de la manipulation, de l'incompréhension de son environnement, et ainsi de suite. Elle est liée aussi à une vision plus négative de la technologie, vue comme un outil potentiel d'asservissement, et donc à une pédagogie critique (voir par exemple Valero et al., 2002). C'est ainsi une tradition qui refuse de voir l'enseignement mathématique comme un terrain politiquement neutre ; en particulier, elle se veut un défi pour une didactique qui se voit, de façon neutre, au service de la diffusion de savoirs scientifiques.

Pour certains, comme Niss, c'est aussi une tradition qui est fortement liée à l'expérience de nouvelles formes d'enseignement au niveau universitaire, centrées autour de la « pédagogie de projets » pratiquée, depuis le début des années 70, au Centre Universitaire de Roskilde (Niss, 2001). Ces formes se veulent des alternatives aux pratiques de l'université « classique » avec ses cours magistraux, son organisation du cursus selon les domaines mathématiques, **etc**. Il est clair que l'opposition savoirs-compétences est à la base de ces formes : on veut que l'acquisition des connaissances se fasse au fur et à mesure que l'étudiant en éprouve le besoin, selon les exigences d'une problématique qui, par préférence, se situe dans un contexte « réel » (d'où le grand intérêt des modèles pour ces mathématiciens). Naturellement, dans la pratique, il y a plus de nuances ; de nos jours, on donne aussi des cours plus classiques à Roskilde, et les projets plus autonomes font partie de l'expérience des étudiants dans toutes nos universités (et l'ont toujours fait, au moins vers la fin des études). La base idéologique du milieu de Roskilde s'est également adoucie considérablement ; en effet, il a noué depuis quelque temps de fortes relations avec les entreprises privées qui sont, d'ailleurs, assez preneuses de ses diplômés. Le fait que sa production de chercheurs en mathématiques pures est pratiquement nulle choque sans doute peu.

Il y a donc, derrière le modèle Niss, une expérience intéressante et unique d'une conception alternative des études supérieures en mathématiques. Elle n'est pas sans consonances avec le développement récent des programmes de l'école unique du Danemark (couvrant neuf ans de scolarité pour les élèves âgés de 7 à 15 ans), où les applications pratiques de la discipline sont très favorisées au dépens de ses éléments plus théoriques (notamment les démonstrations qui sont presque totalement absentes jusqu'au lycée). Parmi les tendances observées dans les évaluations internationales de compétences mathématiques chez les élèves de moins de 15 ans, on voit donc d'un côté une certaine faiblesse, chez les élèves danois, pour ce qui concerne les aspects formels et théoriques, des résultats un peu meilleurs pour les tâches appliquées, et des attitudes relativement positives et confiantes vis-à-vis la discipline (Weng et al., 2004). On peut supposer que l'application du modèle Niss à un programme d'enseignement des mathématiques devrait renforcer de telles tendances.

Un contrepoids à de tels effets – qui ne sont pas sans éveiller les critiques – est pourtant contenu dans la formulation finale du projet KOM (Niss et al., 2002), qui envisage une structure 'matricielle' pour la description d'objectifs de l'enseignement, effectivement assez proche de la fig. 2. Un objectif devra, dans cette structure, se situer par rapport à une des 8 compétences générales ainsi que par rapport à une catégorie (parmi une dizaine) assez large de matières. La progression du programme sera alors considérée aussi par rapport aux grands thèmes de la discipline, même si un motif central et explicite du projet KOM a été de leur ôter le rôle principal dans les programmes.

2.3.2. Évaluation critique du modèle Niss

En dépit des expériences que nous venons d'évoquer, le modèle Niss n'est pas sans rappeler le projet des Bourbakistes. Bien sûr, le projet KOM est complètement opposé à ces dérives didactiques qui voulaient que l'organisation du cursus découle, de façon aussi fidèle que possible, d'une analyse de la structure des savoirs scientifiques. Mais le dessein de partir de bases primaires et universelles – cette fois-ci liées à des idées sur l'exercice de la discipline plutôt que sur sa structure interne – est similaire. Ce qui est décrit par les huit compétences est une expertise idéalisée – voulue indépendante des savoirs, des individus et des contextes. Même si on reconnaît qu'elles ne peuvent se passer, dans la pratique, de savoirs quelconques, le point-clé est que ces huit compétences seraient essentielles dans l'expertise par rapport à n'importe quel savoir mathématique. On veut donc, pour ainsi dire, rendre compte de **la connaissance qui peut être exercée** dans des termes objectifs et universels. Il y a, derrière cette volonté, la reconnaissance (déjà soulignée dans les premières sections de cet article) que ni les savoirs ni les connaissances ne peuvent en soi être détectés et évalués, et donc être réellement des objectifs de l'enseignement. Or il est bien évident que cela est aussi le cas pour une compétence générale du genre proposé. Comme nous l'avons vu, on n'a même pas tenté d'avancer des arguments théoriques justifiant le système des huit compétences générales. Il apparaît plutôt comme un système axiomatique de modélisation, évalué par ses usages et ses effets dans la pratique. Nous avons abordé brièvement, dans la section précédente, des conséquences possibles de telles expériences, quoique beaucoup dépendent évidemment des conditions de mise en oeuvre (tout comme dans l'histoire des 'maths modernes'). Passons quand même à quelques remarques critiques d'un point de vue théorique.

Tout d'abord, le fait de partir, à la manière des Bourbakistes, des structures générales, qui ne sont que des traits communs et substantiels d'éléments plus particuliers, risque d'inverser le rôle du didactique dans le concept de compétence et de l'éloigner de ce qui lui est naturellement premier : les pratiques à mettre en place chez l'élève. La théorie précède, pour ainsi dire, son contenu, au risque de le cacher ou de le banaliser.

Ensuite, les huit compétences ne nous semblent pas très bien définies. Bien sûr, la description de chacune – et encore plus les exemples qui sont fournis dans (Niss et al., 2002) – évoquent des aspects réels et centraux de l'expertise mathématique, quoique presque uniquement dans des termes phénoménologiques. Le problème majeur c'est qu'aucune parmi ces huit catégories ne soit concevable isolément des autres, et que la reconnaissance de chacune, dans les actions de l'apprenti, demande une interprétation pour laquelle aucun outil n'est fourni. On a beau évoquer le spectre du behaviorisme pour se décharger de la dernière critique, l'absence d'outils ne les rend pas moins impraticables pour la vie scolaire. Encore plus grave, me semble-t-il, est le fait que certaines des compétences sont fondamentales pour toutes les autres (même en supposant qu'elles soient clairement définies, ce qui est sans doute un but difficile à atteindre pour un système voulu aussi général) : par exemple, la maîtrise des systèmes de représentation sémiotique, évoqué dans la compétence numéro 5 et étudiée sérieusement, par exemple, dans (Duval, 1995), est indispensable pour n'importe quelle activité liée aux mathématiques, tandis que la maîtrise des processus de modélisation semble beaucoup plus particulière à certaines activités. En mettant tout sur le même plan, on offre en effet une image déconstruite d'une vision qui devrait justement servir à faire voir – et à développer – la cohérence et la totalité de l'expertise mathématique. Nous y revenons dans la section suivante.

Un point plus subtil se situe dans les rapports voulus entre les compétences générales et la matière enseignée. Comme nous l'avons déjà dit, ils dépendent, pour le projet KOM, de la mise en pratique du modèle dans des contextes où certains éléments de matière seraient plus ou moins pertinents (quoique, selon les recommandations du projet, ces éléments ne soient pas prescrits en détail). On admettrait sans doute aussi que les compétences acquises dans un contexte donné (y compris des éléments de matière) soient de quelque façon imprégnées par le contexte, en se gardant bien sûr des positions extrêmes de la théorie de « l'apprentissage situé » (**situated learning** ; voir Anderson, 1997 pour une revue critique). Or en donnant la priorité – le sens – dans l'apprentissage aux compétences générales, comment règle-t-on les raisons diverses pour qu'une matière plutôt qu'une autre soit enseignée ? Ne pourrait-on s'imaginer que les compétences seraient mieux acquises (et cela pour chacune des trois dimensions !) dans des domaines très restreintes de matière (par exemple, la théorie des nombres entiers, ou la seule géométrie euclidienne) ? En effet, le terme 'mathématique' employé pour qualifier et décrire les compétences, est en soi redoutable ; les compétences, par exemple, de raisonnement, ont-elles un sens indépendamment d'un cercle de problèmes et de méthodes liés à un contexte de matière, au-delà des pures structures logiques ? Quelle est la relation entre la capacité à résoudre des problèmes de géométrie et des problèmes d'analyse, au-delà des simples généralités de l'heuristique ?

Bref, en réduisant le rôle des contextes de matière à des terrains nécessaires mais plus ou moins arbitraires pour développer et exercer les compétences générales, on risque de considérer comme des faits accidentels nombre de résultats et de préoccupations de la didactique qui visent les problèmes spécifiques de ces contextes. De plus, tout comme l'approche des Bourbakistes, on se situe par là dans une position **ahistorique** par rapport aux mathématiques (ici, il semble juste de mettre le mot au pluriel !) –les développements historiques de la discipline ne sont guère concevables comme une progression collective sur des compétences générales. Pourtant, toute nouvelle technologie de représentation est liée de façon intrinsèque à des éléments de matière. Même d'un point de vue strictement didactique, il faut se méfier des objectifs d'apprentissage dans lesquels les obstacles notionnels spécifiques sont secondaires. Si ces obstacles ne sont que des accidents sans importance intrinsèque pour les objectifs primaires, une solution tentante serait d'éviter les terrains difficiles. Ce faisant, on arriverait à une conception réductrice de l'apprentissage des mathématiques. Bien sûr, ce n'est pas une conséquence fatale, dans la pratique, des programmes conçus selon ce modèle ; mais il me semble néanmoins que c'est une possibilité qui n'est pas que théorique.

2.4. Les niveaux de description des compétences

Revenons maintenant aux principes que nous envisageons pour la conception de programmes de l'enseignement mathématique. Il faut distinguer au moins les trois niveaux suivants par rapport aux contextes d'enseignement:

- le niveau d'**un programme dans sa totalité**, où les contextes globaux de matière ainsi que les catégories de compétences générales sont les plus importants,
- le niveau d'**une unité d'enseignement** (un cursus par ex. d'une durée de quelques mois), qui est normalement située dans un seul contexte global de matière et où la description principale se fait dans les termes d'objectifs de compétences spécifiques (OCS), tout en veillant à leur cohérence relationnelle ainsi qu'en identifiant leurs relations aux compétences générales du programme,
- le niveau d'**une entité d'enseignement minimale** centré, typiquement, autour d'un petit nombre de compétences spécifiques, liées entre elles au point d'être inséparables.

La description de ces niveaux ne peut pas se faire strictement dans l'ordre donné, d'autant, comme nous l'avons déjà noté, que les compétences générales visées dérivent des compétences spécifiques du programme. Sans doute le dernier niveau est le plus proche des considérations principales de la didactique : les situations d'enseignement et d'apprentissage en temps réel. Dans beaucoup de contextes, ce niveau ne figure pas du tout dans les programmes ; dans ce cas, il faut y penser quand même en concevant la description des OCS pour l'encadrement des modules.

Les programmes sont, surtout, des outils de **communication** destinés aux enseignants, aux institutions, aux sujets enseignés (même si ceux-ci sont souvent oubliés !), à ceux qui produisent les matériaux scolaires, aux responsables extérieurs... et ceux-ci seront différemment intéressés par les niveaux que nous venons d'énumérer. L'avantage de se focaliser sur les objectifs **réellement réalisables** par l'enseignement, et ensuite **évaluables** – c'est-à-dire l'accroissement des compétences spécifiques des sujets enseignés – dépend évidemment de l'efficacité de cette communication aux agents concernés. Par exemple, un élève (au moins dès le secondaire) devrait comprendre, au niveau d'une entité d'enseignement, la déclaration des OCS et ses relations avec les activités dans lesquelles il s'engage à ce niveau. Les compétences générales devraient aider à élucider et à expliquer les grands objectifs du programme aux personnes extérieures, même celles qui ne sont pas des experts de la mathématique ou de son enseignement. Il est naturellement très important que tous les niveaux, y compris le deuxième, soient entièrement accessibles et acceptables pour les enseignants.

Ces considérations imposent des conditions importantes à ceux qui ont à rédiger de tels programmes. D'un côté, il faut que la description soit basée sur une analyse didactique de la structure locale comme globale de l'apprentissage, y compris les niveaux épistémologiques et cognitifs; d'autre part, il faut que la communication du programme tienne compte des agents concernés, c'est-à-dire qu'il faut de plus une considération phénoménologique (cf. Duval, 2002) et discursive les concernant.

2.5. Par rapport à l'approche anthropologique

Avant de clore cette section largement théorique, je voudrais signaler quelques parentés qui me sont apparues au cours de la rédaction entre la structure conceptuelle proposée et certaines notions clés de l'approche anthropologique (sans doute plus familières à la plupart des lecteurs qu'à l'auteur). Quelques-unes sont signalées dans la figure 3.

Notions utilisées ici	Notions « parentes » de l'approche anthropologique
Classe de situations	Type de tâche
Méthode	Technique
Élément de matière	Organisation mathématique
Compétence spécifique	Liée aux praxéologies, surtout les blocs pratico-techniques (qui sont, pourtant, dépersonnalisées) ; intégration amenant le plan technologico/théorique (cf. sec. 2.3)
Niveaux de contextes d'enseignement	Hiérarchie de niveaux de détermination didactique (Chevallard, 2002, §3)

Figure 3 : quelques similitudes conceptuelles

Je ne vois pas clairement comment situer les compétences (spécifiques ou générales) par rapport à l'approche anthropologique. Une compétence est, dans le sens le plus général et classique, un potentiel chez un individu pour un type d'action (ou de **performance**, cf. Chomsky, 1965), bref un **pouvoir-faire** individuel. Une **praxéologie** dans le sens de Chevallard (1999) se compose de **savoir** (au « sens restreint », théorie et technologie) et de **savoir-faire** (technique lié à une type de tâche) ; c'est une entité **culturelle.** Au cœur des deux notions, il y a donc **un type d'action** (dans un sens large) et les deux visent à articuler les conditions pour l'accomplissement des actions en question. Il y a pourtant, me semble-t-il, au moins deux types de différences majeures dans leur usage : la place accordée aux **agents** (les individus qui agissent) et la qualité épistémologique des conditions envisagées. Pour le dernier point, les composantes de la praxéologie apparaissent explicitables à volonté et sont situées dans une hiérarchie simple de quatre niveaux verticaux liant l'action concrète au savoir le plus abstrait. Les compétences, pourtant, sont généralement vues comme fondées sur des systèmes « complexes » de capacités cognitives, dont on décrit surtout l'émergence ; pour le reste, seuls des traits partiels sont explicitables (il se peut que l'individu « compétent » ne sache pas du tout rendre compte du « savoir » dont il fait usage, l'exemple classique étant l'usage de « règles » grammaticales dans la langue maternelle). Dans l'approche anthropologique, ce sont plutôt les **agents** qui sont considérés d'un point de vue systémique, au point de disparaître entièrement, selon **l'axiome qu'une personne n'est en fait rien d'autre que l'émergent d'un complexe d'assujettissements institutionnels** (Chevallard, 1992, 91). La complexité d'un tel système reste pourtant abordable, car là encore on se trouve en présence de hiérarchies verticales reliant, par exemple, le niveau d'un sujet mathématique (et donc les types de tâches) avec la société. L'usage courant de la notion de compétence est partagé entre l'usage classique lié à l'individu (comme l'« **ideal speaker** » de Chomsky, 1965) et un usage tourné vers les systèmes sociaux (on parle alors, par exemple, du développement de compétence d'une organisation). Il me semble pourtant qu'il n'y a là, normalement, que la reconnaissance banale que les compétences individuelles « interagissent » (par les individus, bien sûr) dans un milieu social, et que la somme de ces interactions ne se réduit pas à leurs composants.

3. Un exemple de l'enseignement supérieur des mathématiques

Rappelons les tendances esquissées au début de la section 2, qui sont pour une partie issues des milieux universitaires, mais qui les concernent aussi dans un sens plus large, important pour comprendre le contexte du projet que nous allons décrire. Il est banal de constater que la situation des universités dépend, plus que jamais, des changements qui s'opèrent dans la société, et que ces changements ont des traits de plus en plus communs à travers les pays industrialisés. Les services attendus de l'université ne se limitent plus à fournir des formations et des produits de recherche plus ou moins déterminés par les traditions des disciplines ou des professions. D'une part, l'expertise universitaire se communique de plus en plus par d'autres voies que les textes académiques (destinés principalement aux collègues experts), elle passe surtout par la fonction des universitaires comme conseillers dans une variété de contextes, et par l'usage grandissant d'avis d'experts dans les médias à propos de questions d'actualité et d'intérêt public. D'autre part les formations sont de nos jours l'objet d'évaluation et de réformes toujours plus fréquentes, fondées sur des attentes et des analyses d'origine souvent extérieure au milieu universitaire, susceptibles de définir la formation. La notion de compétence est centrale dans la communication entre la société et l'université sur ces matières ; au Danemark, les universités sont depuis quelques années soumises à la contrainte (qu'elles ont généralement acceptée) de décrire leurs formations et leur développement du personnel en termes de compétences visées. En particulier, les **programmes** des formations universitaires (ainsi qu'aux niveaux antérieurs) sont actuellement en réécriture sous cette contrainte fixée (avec d'autres) par arrêtés ministériels. Ce n'est donc pas un choix libre, et l'option d'adopter une attitude défensive ou offensée ne me semble ni juste (pour les raisons déjà discutées), ni sage (pour des raisons pragmatiques évidentes). Au contraire les milieux universitaires devraient profiter des conditions pour clarifier leurs priorités.

Cela affecte aussi le rôle de la didactique par rapport à un enseignement universitaire qui doit faire face à ces demandes, et d'autres, de professionnalisation. Par conséquence, toutes les universités danoises ont établi un ou plusieurs centres ou instituts pour la recherche et le développement didactique. Le centre situé à la faculté des sciences de l'Université de Copenhague est parmi les plus récents. Il publie, outre des textes de recherche habituels, une série de fichiers pratiques, intitulé **Didaktips**, dont le premier (Grønbæk et al., 2003) est un « guide de description de compétences », destiné aux enseignants comme aux auteurs des nouveaux programmes qui sont en rédaction à la faculté depuis 2003. Les principes énoncés dans ce texte se mettent progressivement en œuvre à travers la faculté ; il est basé en partie sur le projet que je vais brièvement esquisser dans cette section (pour plus de détail des analyses et des résultats, voir Grønbæk et al., 2004).

3.1. Contexte du projet

Il s'agit d'un projet de développement, réalisé pendant l'automne 2002 et continué pendant l'automne 2003, d'un cours d'analyse situé dans la deuxième année du programme de mathématiques pures à l'Université de Copenhague. La description officielle du programme en vigueur jusqu'en 2003 était la suivante.

> **Analyse mathématique : espaces métriques, continuité ; espace de Hilbert ; analyse de Fourier ; équations différentielles partielles.**

A ceci s'ajoutaient les cadres prescrits pour l'examen, consistant en deux parties : une épreuve écrite suivie d'une épreuve orale (quelques semaines après). Une seule note est donnée pour l'ensemble de l'examen.

Bien sûr, la « tradition » ainsi que certains faits en disent plus. Le cours est suivi par environ 200 étudiants chaque année (redoublants compris). Une raison pour s'y intéresser est le taux d'échec relativement élevé du cours : en 2001, environ 50% des inscrits au cours ont passé l'examen final. Le cours est réputé difficile et beaucoup d'étudiants le remettent à la troisième année d'étude. Le cours est pourtant une condition d'accès pour plusieurs cours plus avancés du programme « bachelor » (licence).

L'enseignement se fait, comme dans tous les cours du niveau élémentaire, sur 15 semaines et sous deux formes : les **cours magistraux** (2 fois 2 heures par semaines), et des **séances d'exercice** (1 fois 3 heures par semaine). Seul le cours magistral est dispensé par le professeur responsable du cours, les séances d'exercices étant généralement conduites par des étudiants plus avancés dans leurs études (les « instructeurs »).

3.2. L'ingénierie

Nous avons identifié et analysé un complexe de facteurs qui, avec plus ou moins d'évidence, semble contribuer au dysfonctionnement de ce cours, dont voici des traits principaux :

Tout d'abord, **la matière enseignée** est réellement « difficile » pour le public visé, dans le sens qu'elle représente un saut à plusieurs niveaux : celui d'abstraction (antérieurement les étudiants ont étudié l'analyse 'concrète' des fonctions et des espaces vectoriels à dimension finie), celui de niveau technique (surtout en matière de raisonnement), celui d'indépendance et de niveau théorique du travail requis par l'étudiant. Ces « sauts » sont peut-être inévitables en général si on veut faire de l'analyse moderne.

Les étudiants, en général, ont du mal à se former une compréhension autre que locale de la matière, et ont souvent recours à des stratégies peu pertinentes (comme la mémorisation des preuves en guise de préparation à l'examen oral). Ils n'arrivent pas non plus, pour la plupart, à percevoir un sens plus global de la matière et des méthodes pour la traiter, ni à les maîtriser de manière à pouvoir en faire usage au-delà des tâches simples et connues.

Une partie des dysfonctionnements peuvent être localisés dans l'enseignement même : le cours magistral tend à vouloir « couvrir » la matière abstraite (tous les théorèmes et preuves sont passés en revue sur le tableau, dans une forme très proche du texte qu'il faut lire) ; les séances d'exercices se limitent souvent à des présentations, par l'instructeur, de solutions que les étudiants n'ont même pas tenté de faire par eux-mêmes. Il y a donc une passivité tolérée et renforcée chez les étudiants par des contrats didactiques dégénérés.

Finalement, les étudiants ont tendance à se focaliser sur la maîtrise purement formelle de procédures et de techniques liées aux formes de représentation, de façon à ne pas voir les relations entre les représentations d'un même objet sous des formes différentes (cf. Duval, 1995, 67). Par conséquent ils sont souvent incapables par exemple de suivre même les pas simples d'un raisonnement (au-delà de calculs), et encore plus de les produire.

L'identification et l'analyse de ces difficultés nous ont amenés à introduire plusieurs changements dans la réalisation du cours, en partant d'une description nouvelle de ses **objectifs** (consistante avec la liste de thèmes mathématiques mentionnées plus haut, mais – dans le sens de la fig. 2 – « orthogonale » à ces thèmes) : une explication des compétences **générales** visées, dérivée d'une description des OCS par rapport à une énumération beaucoup plus fine des éléments de matière. Chaque OCS est de plus illustré par des exemples d'exercices où la compétence spécifique peut se manifester de façon « typique ».

Ensuite, comme l'évaluation doit correspondre aux objectifs, et comme l'évaluation est toujours déterminante pour une grande partie des comportements dans l'enseignement même, nous avons annoncé des changement de **contenu** (mais non de forme) pour l'examen : l'épreuve écrite serait liée de façon très visible aux OCS, dans le sens où les questions posées viseraient clairement un seul OCS (ou, moins souvent, deux ou trois). Par contre, l'épreuve orale, au lieu de viser essentiellement la capacité de l'étudiant à reproduire une partie du texte (comme un théorème majeur et sa démonstration), est consacré à la présentation de **projets thématiques** élaborés, par des groupes d'étudiants, dans le courant du cours. Ces projets, de nature théorique mais avec des questions de difficulté variée (y compris par le degré d'ouverture), visent à la **coordination** de compétences spécifiques autour d'un thème d'analyse voisin (et dépendant) de la théorie présentée dans le texte des manuels, mais non traité explicitement au moins pour les problématiques posées. La consigne pour chaque projet était accompagnée d'une explication de sa pertinence pour certains OCS ainsi que de ses buts par rapport aux compétences générales du cours. Nous ne pouvons, ici, entrer dans tous les détails de cette formule d'évaluation, mais le point à retenir est qu'elle remplace, pour l'évaluation de la maîtrise de la théorie, la présentation de raisonnements fournis dans un manuel par des raisonnements élaborés par les étudiants eux-mêmes.

L'enseignement, également, a été réorienté de plusieurs façons en direction des objectifs précisés, pour faciliter le travail des étudiants en vue de les atteindre et, par conséquence, réussir à l'examen. Le cours magistral a été focalisé sur ce que doivent faire les étudiants, en montrant l'exemple d'une lecture détaillée d'un extrait de manuel, en explicitant les grandes lignes du développement théorique et en fournissant des liens entre la théorie, les exercices et les projets thématiques à travailler par les étudiants. Les consignes pour les séances d'exercices ont été complétées par une indication des OCS correspondants aux exercices posés, quoique dans des termes très concrets, pour faire face à une question souvent oubliée sinon : à quel sens – quel apport visé – correspond l'étude de ce problème ? On a indiqué aux instructeurs de focaliser l'attention des étudiants sur l'objectif des tâches individuelles, et de discuter plutôt les points difficiles des tâches que de fournir une présentation linéaire de leurs solutions.

Prenons un exemple pour illustrer ce point. Une tâche tirée du manuel propose trois fonctions, comme $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|/(1 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|)$, et il faut prouver qu'elles définissent des distances sur le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. Pour ce faire, il faut considérer pour chaque fonction les axiomes qui caractérisent une distance. Dans l'expérience du travail fait lors de séances, la complexité de certains des calculs requis a tendance à dissimuler le principe cherché au point de faire disparaître, pour l'étudiant, le sens de l'exercice (essentiellement, la vérification des conditions axiomatiques comme moyen de reconnaître les distances). Bien expliciter et focaliser l'attention en classe sur l'OCS correspondant et appliquer le principe en question semble bien plus efficace que de multiplier les exemples ou les détails présentés.

En outre, une partie du temps des séances a été consacrée au travail sur les projets thématiques dans des groupes formés par les étudiants et sous la guidance de l'instructeur. Ainsi, dans ce contexte aussi, l'organisation de l'enseignement a été déterminée par un souci de promouvoir et de faciliter le travail autonome des étudiants, plutôt que de nourrir l'illusion (particulièrement inappropriée dans un cours universitaire !) que l'enseignement vise à le rendre facile voire même superflu.

3.3. Résultats et perspectives

Le projet s'est étendu sur deux années consécutives (automne 2002 à automne 2003), avec des modifications surtout pour la forme et le contenu des projets thématiques pour la deuxième année. Voici des résultats principaux (tirés de Grønbæk et al., 2004) :

- Les étudiants ont beaucoup apprécié la formule des projets thématiques pour l'examen, la trouvant plus juste et satisfaisante ; en même temps, surtout la première année, ils ont trouvé la charge de travail très (souvent trop) lourde. Il apparaît que ce sont les étudiants plutôt forts qui sont les plus enthousiastes pour cette forme.
- Contrairement aux craintes de certains, il n'y a pas eu de problèmes de 'travaux de copie' dans le contexte des projets ; au contraire, une grande variété d'approches et de niveaux d'ambition s'est montrée dans les prestations écrites comme orales offertes par les étudiants à l'examen.
- Les instructeurs n'ont pas toujours suivi (ou compris) la nature des consignes pour les sessions d'exercices ; ils ont alors, surtout en première année, préservé certains des traits problématiques décrits précédemment.
- L'examen de la première année s'est déroulé à la satisfaction des examinateurs externes (certains ont même été très enthousiastes de la nouvelle formule, y voyant une solution à des problèmes classiques chez nous). Les résultats ont été meilleurs pour la moyenne des notes obtenues tandis que le taux d'étudiants présents n'a pas significativement changé. (Pour la deuxième année les résultats sont nettement meilleurs sur ce dernier point, avec un niveau de notes restant amélioré.)
- Il y a une très forte augmentation du contact entre les enseignants et les étudiants : davantage de questions posées, davantage d'usage des offres de consultation, notamment en relation avec les projets thématiques.

La description du cours a été utilisée activement seulement par une partie des étudiants. Il paraît décisif pour son rôle dans le cours qu'elle soit activement communiquée dans ses contextes spécifiques, par exemple en précisant le but d'une activité proposée. Certains (étudiants comme instructeurs) ont du mal à utiliser la description en soi, et il paraît vraisemblable que celle-ci **dans sa totalité** ait un rôle principal comme instrument d'ingénierie. Il faut donc bien faire attention aux modalités de sa communication, plus locale, aux étudiants et même aux instructeurs impliqués.

Une conclusion plus globale, peut être attendue mais à souligner tout de même, est que la description en soi ne fait pas de miracles ; il faut qu'elle soit introduite grâce à des formes de travail et d'évaluation adaptées. Aussi, la focalisation sur les objectifs de compétences – et donc sur le travail autonome de l'étudiant – doit se faire avec un souci de poser des buts réalistes et raisonnables du point de vue de l'étudiant (ce souci reste implicite et donc à la merci de l'intuition quand les objectifs sont formulés par rapport au seul contenu à « couvrir »).

Pour l'enseignement supérieur des mathématiques, c'est peut-être surtout le rapport des étudiants avec les parties les plus théoriques de la matière qui est transformé par notre approche. Il faut souligner que le travail visant à développer les compétences spécifiques s'est fait initialement dans des contextes assez fermés, et ensuite dans des contextes plus libres (pour intégrer les compétences spécifiques, et pour développer l'autonomie du sujet dans ses rapports avec la matière). Notons aussi que le contenu officiel du cours, ainsi que la plupart de ses formes, n'ont pas changé. La plupart des modifications ont simplement contribué à améliorer qualitativement le travail des étudiants dans un cadre ordinaire. Cela résulte en partie de la focalisation de l'attention des professeurs sur des objectifs globaux du cours (comme, potentiellement, du programme) par rapport à ce travail – notamment ceux qui concernent l'expression mathématique des étudiants, et leur choix autonome de méthodes et de niveaux – qui sont habituellement moins explicites voire totalement ignorés. Le manque de familiarité des étudiants comme de certains des instructeurs avec le discours d'accompagnement serait susceptible d'être réduit par une généralisation de cette approche à tout le programme et à toutes ses pratiques. Après tout, il s'agit de renforcer chez toutes les personnes impliquées la compréhension des rationalités de l'apprentissage et du travail requis de l'étudiant.

Bibliographie

ANDERSON John R., 1996, Situated Learning and Education. **Educational Researcher 25** (4), 5-11.

BROUSSEAU G., 1986, Fondations et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques 7** (2), 33-115.

CHEVALLARD Y., 1992, Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques 12** (1), 73-112.

CHEVALLARD Y., 1999, L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, **19** (2), 221-266.

CHEVALLARD Y., 2002, Organiser l'étude 3. Écologie & régulation. In: Dorier, J. L. et al. (éds), **Actes de la 11e école de didactique des mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHOMSKY N., 1965, **Aspects of the theory of syntax.** Cambridge: MIT Press.

DUVAL R., 1995, **Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.** Bern : Peter Lang.

DUVAL R., 2002, Quel ou quels point(s) de vue pour analyser la connaissance scientifique dans une perspective d'enseignement et d'apprentissage? (Manuscrit)

GRØNBÆK N. & WINSLØW C., 2003, **Kompetencebeskrivelser i universitetets virkelighed**. **Didaktips 1**, Centre de Didactique des Sciences, Université de Copenhague.

GRØNBÆK N. & WINSLØW C., 2004, Developing and assessing specific competencies in a first course on analysis. Manuscrit en lecture.

MELIN-OLSEN S., 1988, **The politics of mathematics education**. Dordrecht: Kluwer.

NISS M., 1994, Mathematics in society**.** In R. Biehler et al., **Didactics of Mathematics as a scientific discipline**, 367-378. Dordrecht: Kluwer.

NISS M., 1999, Kompetencer og uddannelsesbeskrivelse. **Uddannelse 9**, 21-29.

NISS M., 2001, University mathematics based on problem-oriented student projects : 25 years of experience with the Roskilde Model. In: D. Holton (éd) **Teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI study**, 153-165. Dordrecht: Kluwer.

NISS M & JENSEN T., 2002, (éds) **Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark.** Copenhague : Undervisningsministeriet.

NISS M., 2003, Mathematical competences and the learning of mathematics: the Danish KOM-project.

Trouvé le 31 décembre 2003 à l'adresse
http://www7.nationalacademies.org/mseb/
Mathematical_Competencies_and_the_Learning_of_Mathematics.pdf

OCDE, 1999, **Measuring student knowledge and skills – a new framework for assessment.** Paris: OCDE, Programme for International Student Assessment (PISA).

RYCHEN D. & SALGANIK L., 2003, (éds) **Key Competencies for a Successful Life and a Well-Functioning Society .** Hogrefe & Huber.

VALERO P. & SKOVSMOSE O., 2002, (éds) **Mathematics education and society. Proceedings of the third international Mathematics and Society conference.** Copenhagen: The Danish U. of Education.

WENG P. et WINSLØW C., 2004, The Nordic countries in international comparisons**.** In B. Dahl Sørensen et al. (eds.), **Mathematics education – the Nordic way**, pp. 95-98. Trondheim: NTNU.

WINSLØW C., 2001, Two dimensions in the conception of mathematics in tertiary education. **Proceedings of third Nordic Conf. on Math. Education**, Kristiansstad, Suède, 2001.

WINSLØW C., 2004, Hvad skal vi med matematikdidaktikken ? In K. Schnack (éd.), **Didaktik på kryds og tværs**, 325-344. Copenhague: Presses Univ. Danoises de l'Éducation.

CARL WINSLØW
Centre de Didactique des Sciences
Université de Copenhague, Danemark