

**ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES,
Volume 10, 2005, IREM de STRASBOURG
RÉSUMÉS**

**Raymond DUVAL Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie :
développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et
coordination de leurs fonctionnements p. 5 - 53**

Résumé. La géométrie est un domaine de connaissance qui exige l'articulation cognitive de deux registres de représentation très différents : la visualisation de formes pour représenter l'espace et le langage pour en énoncer des propriétés et pour en déduire de nouvelles. Les difficultés d'apprentissage viennent d'abord de ce que ces deux registres sont utilisés d'une manière souvent contraire à leur fonctionnement cognitif normal en dehors des mathématiques.

La manière de voir des figures dépend de l'activité dans laquelle elle est mobilisée. On peut ainsi distinguer une manière de voir qui fonctionne de manière iconique et une manière de voir fonctionnant de manière non iconique. La visualisation non iconique implique que l'on déconstruise les formes déjà visuellement reconnues. Il y a trois types de déconstruction des formes : la déconstruction instrumentale pour construire une figure, la décomposition heuristique et la déconstruction dimensionnelle. La déconstruction dimensionnelle constitue le processus central de la visualisation géométrique.

Pour analyser le rôle du langage en géométrie, il faut distinguer trois niveaux d'opérations discursives : la dénomination, l'énonciation de propriétés, la déduction. Cette distinction est essentielle car le rapport du langage à la visualisation change complémentaire d'un niveau à l'autre. Cependant, sous cette variation, se cache un phénomène cognitif fondamental : le hiatus dimensionnel. Les passages entre visualisation et discours impliquent en géométrie un changement du nombre de dimensions pour reconnaître les objets de connaissance visés dans chacun des deux registres.

La prise de conscience de la déconstruction dimensionnelle des formes et celle de la variété des opérations discursives sont les conditions pour que la visualisation et le discours fonctionnent en synergie malgré leur hiatus dimensionnel. Ce sont là les seuils décisifs dans l'apprentissage de la géométrie.

Mots clés. analyse fonctionnelle, codage, circuit de visualisation, contre-exemple, décomposition heuristique (des figures), déconstruction dimensionnelle (des formes), définition, droite, figure, hiatus dimensionnel, preuve, proposition, reconfiguration, représentation autosuffisante, source de conviction, unité figurale, visualisation iconique, visualisation non iconique.

Denis TANGUAY Apprentissage de la démonstration et graphes orientés p. 55 - 94

Résumé. Selon Duval, les tâches traditionnelles d'analyse, lecture et écriture de démonstrations ne permettent pas aux élèves de distinguer entre une démonstration formelle, c'est à dire un enchaînement logique de propositions dont chacune respecte des critères de validité et a sa place en vertu de son statut dans la démarche, et une argumentation, dont les propositions obéissent à des critères de pertinence et se contentent de s'accumuler.

En développant plus radicalement des pistes de recherche proposées par Duval et en tentant dans la mesure du possible d'isoler les difficultés, nous avons proposé à des élèves de remplir par des propositions les boîtes vides du graphe orienté d'une démonstration géométrique préalablement présentée. La séquence d'activités a été expérimentée auprès d'élèves du début de l'enseignement secondaire (12 à 13 ans) au printemps 2004 à Montréal.

Une première analyse des données recueillies nous a notamment permis de conclure que :

- la structure déductive, consistant en enchaînements d'inférences, n'est ni spontanément, ni aisément comprise des élèves;
- le passage d'une compréhension apparemment satisfaisante d'une preuve, des liens entre ses idées générales, à sa rédaction sous l'égide d'un bon contrôle logique, constitue un saut fondamental pour les élèves et est intimement lié à leur maîtrise de la structure déductive;
- le travail d'organisation qui a été proposé aux élèves a pu contribuer à une meilleure compréhension par les élèves des mécanismes qui régissent cette structure.

Mots-clés. enseignement secondaire, géométrie, démonstration, pas de déduction, inférence, enchaînement logique, graphe de démonstration, rédaction.

Robert ADJIAGE **Diversité et invariants des problèmes mettant en jeu des rapports**
p. 95 - 129

Résumé. Nombre de variables ont été étudiées par les chercheurs qui ont tenté d'expliquer la complexité des problèmes mettant en jeu des rapports au niveau des élèves de 9-13 ans. Mais curieusement, une variable est peu examinée : il s'agit du contexte physico-empirique auquel se réfère usuellement un énoncé du type considéré. Cet article définit les valeurs de cette variable et établit sa pertinence didactique. Une classification des énoncés de problème concernés est d'abord entreprise. On dégage ainsi six valeurs, soit six problèmes-types, pour cette nouvelle variable. A des fins de validation, un questionnaire en six items, chacun représentant un des six problèmes-types, a été soumis à deux types de population : 121 élèves de cinquième (12-13 ans) et 110 étudiants en première année d'IUFM comme population de référence. Les résultats montrent que les variations d'un item à l'autre, sur le plan de la réussite comme sur celui des procédures utilisées, sont beaucoup plus importantes dans le groupe des élèves que dans celui des étudiants. Comme les autres variables ont été bloquées lors de l'élaboration des six problèmes-types, nous attribuons ces variations aux changements du contexte physico-empirique. Cette étude permet de : resserrer l'analyse de la complexité des problèmes de rapports autour de deux principes de séparation et d'articulation des univers physique et mathématique ; situer la diversité de ces problèmes dans le champ physique et leur unification dans le champ mathématique.

Mots-clés. Fraction, proportionnalité, contexte physique, grandeur, rapport, collège, registre sémiotique.

Carl WINSLØW **Définir les objectifs de l'enseignement mathématique : la**
dialectique matières à compétences **p. 131 - 155**

Résumé. La description des objectifs de l'enseignement mathématique a plusieurs finalités potentielles : externes (justification, déclaration), internes (planification, évaluation). Quoique ces finalités ne soient pas indépendantes les formes usuelles des descriptions ont tendance à ne remplir qu'une partie de ces finalités. Dans cet article, nous examinons si la notion de "compétence" apporte des solutions à ces problèmes, ainsi que des exemples de son usage notamment dans le contexte du Danemark.

Mots clés. Enseignement mathématique, programmes, contenu, compétences.

María TRIGUEROS et Asuman OKTAÇ **La théorie APOS et l'enseignement de l'Algèbre Linéaire p. 157 - 176**

Résumé. Cet article a pour but de présenter le cadre théorique APOS (Action - Processus – Objet – Schème) et d'explicitier son usage dans le cas d'un projet de recherche concernant les constructions mentales chez les étudiants en algèbre linéaire. Pour cela, nous avons choisi le thème des espaces vectoriels, car c'est un des concepts de base de ce domaine mathématique et, de plus, dans l'approche que nous décrivons, il constitue le début de l'enseignement dans un cours introductif.

Mots clés. Théorie APOS, algèbre linéaire, espaces vectoriels.

C. Armando CUEVAS V., Salvador MORENO G. & François PLUVINAGE **Una experiencia de enseñanza del Objeto Función (Une expérience d'enseignement de l'objet fonction) p. 177 - 207**

Resumen. Investigaciones previas han reportado que los estudiantes, instruidos sobre el teorema de máximos y mínimos alcanzados por una función continua en un intervalo cerrado, generalmente lo aplican a una función diferenciable adoptando una conducta algorítmica: Ellos, a partir de la expresión algebraica, obtienen sus valores críticos, incluyendo aquéllos que quedan fuera del intervalo considerado. Nuestra hipótesis, al igual que reportes de otros investigadores, es que esta conducta es el resultado de una falta de significados en el concepto de función. Por consiguiente, hemos diseñado un experimento, con la intención de extender el significado del concepto de función. Elegimos, como proyecto de acción, la modelación de una situación física sencilla de entender, un globo esférico inflable en un recipiente que contiene cierta cantidad de líquido, lo cual nos permitió introducir a una función, no como una mera fórmula algebraica, sino en un acercamiento semejante al histórico que implica el estudio de variables interconectadas. Decidimos implementar tres fases sucesivas en nuestro experimento: descriptiva, cuantitativa, y generalizante. El propósito fue favorecer el empleo de varios registros de representación semiótica para trabajar funciones y sus propiedades. Después de un experimento de dos semanas la evaluación demuestra una clara mejoría en la comprensión de funciones. La mayoría (17 de 21) obtienen un éxito total o parcial al resolver un problema que en reportes previos ha mostrado ser difícil de resolver.

Résumé. Des recherches antérieures ont signalé que les étudiants, après enseignement du théorème des *extrema* atteints par une fonction continue sur un intervalle fermé, ont tendance pour appliquer à une fonction dérivable ce résultat, à adopter une conduite algorithmique : à partir de l'expression algébrique de la fonction, rechercher ses points critiques, même si ceux-ci sortent de l'intervalle d'étude. Notre hypothèse a été que cette conduite résulte d'une attribution faible de sens au concept même de fonction. Nous avons donc élaboré une expérience destinée à étendre la signification de ce concept. L'étude d'un modèle de ballon

gonflable, maintenu au fond d'un récipient cylindrique contenant une certaine quantité de liquide, introduit une fonction par une approche non pas directement algébrique, mais plus conforme à l'approche historique impliquant une étude de co-variations. Trois phases successives (descriptive, quantitative, généralisante) furent élaborées, chacune donnant lieu pour les étudiants à des tâches précises, à consigner par écrit en recourant aux divers registres d'expression appropriés à représenter des fonctions. Pour 17 des 21 étudiants observés, l'expérimentation d'une durée de deux semaines a abouti, grâce à une amélioration de la compréhension de l'objet fonction, à une réussite totale ou partielle dans la résolution du problème signal dans les travaux antérieurs comme donnant lieu à un échec quasi général.

Mots clés. Analyse, fonction, fonction continue, valeurs extrêmes, variable, modélisation, projet d'action, registre sémiotique.

Aline ROBERT **De recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants de mathématiques du second degré : un point de vue didactique p. 209 - 249**

Résumé. Dans cet article, après avoir justifié la légitimité du propos, nous présentons quelques résultats de recherches que nous avons obtenus sur les pratiques des enseignants de mathématiques. Nous en déduisons des propositions, encore partielles, sur la formation de ces pratiques : elles mettent en jeu les modalités des formations pour certains choix de contenus ; elles ne concernent que des formations pouvant avoir des retombées directes sur les pratiques de classe. Ce sont notamment la stabilité, la cohérence et la complexité des pratiques d'un enseignant donné, et la difficulté correspondante de modifier les pratiques ainsi que la prise en compte du métier de l'enseignant et de toutes les contraintes correspondantes, qui nous amènent à ces propositions. Nous présentons ensuite un exemple précis de scénario de formation à partir d'analyses de vidéo de séances de classe, qui a comme objectif de donner aux enseignants des outils d'analyses de ces séances. Nous nous attachons à montrer comment ce scénario s'inspire des propositions précédentes et les vérifie : formation longue, permettant un travail simultané sur les contenus enseignés et la gestion en classe, mettant en jeu les contraintes et amenant à une réflexion sur les alternatives, grâce à des activités collectives signifiantes pour les participants. Nous terminons en évoquant des recherches qui pourraient se développer sur ces formations, notamment pour concevoir des scénarios et tester les propositions présentées en évaluant les effets des formations. Des annexes permettent de donner des précisions sur l'exemple de scénario.

Mots clés. Formations des enseignants de mathématiques du second degré, pratiques des enseignants de mathématiques du second degré, scénarios de formation, formateurs d'enseignants de mathématiques du second degré, évaluation des formations, hypothèses sur les formations