

PATRICIA MARCHAND

COMMENT DÉVELOPPER LES IMAGES MENTALES LIÉES À L'APPRENTISSAGE DE L'ESPACE EN TROIS DIMENSIONS ?

Abstract. Developing mental imagery linked to spatial geometry learning.

This article puts forward specific results from our interdisciplinary Ph. D. thesis, involving mathematics and sports, in order to progress towards a framework for the elaboration of activities aiming to develop three dimensional mental images. We illustrate this framework with examples of activities from elementary and secondary level.

Résumé. Cet article vise à reprendre quelques résultats tirés de notre thèse de doctorat interdisciplinaire (mathématique et sport) afin d'élaborer un cadre de référence pour la création d'activités visant le développement des images mentales liées à l'espace en trois dimensions. Ce cadre est explicité à l'aide d'exemples d'activités tirées du corpus primaire et secondaire.

Mots-clés. Enseignement de la géométrie, primaire-secondaire, espace en trois dimensions et images mentales.

Préambule

Notre sujet de recherche a émergé de l'interaction entre deux domaines spécifiques d'enseignement : l'enseignement des mathématiques et l'enseignement du patinage artistique. Ces domaines peuvent paraître éloignés de prime abord, mais ils partagent un champ commun de connaissances, soit la géométrie des transformations liées à l'espace en trois dimensions. La pratique simultanée de ces deux domaines d'enseignement nous a exposé à des réalités divergentes autant du point de vue des approches d'enseignement que des connaissances et savoirs développés chez les élèves.

En classe de mathématiques de niveau secondaire (12 à 17 ans), nous observons qu'il y a peu d'outils disponibles pour supporter les enseignants dans l'enseignement des connaissances spatiales de façon globale. Ce manque d'outils se traduit par une lacune au point de vue de la continuité d'un niveau scolaire à l'autre, à l'intérieur des programmes de formation de mathématiques des niveaux primaires et secondaires et d'une similarité entre les objectifs fixés pour ces deux niveaux d'enseignement (Marchand, 2004). Cette réalité reflète le contexte

québécois, mais des résultats semblables ont été observés en France par Berthelot et Salin (1993-1994).

De plus, les manuels scolaires employés dans les classes de mathématiques présentent majoritairement des activités centrées sur l'observation et l'identification¹ de formes géométriques en deux ou en trois dimensions représentant en moyenne 42,2% des activités géométriques proposées à la fin du primaire et 37% en troisième année du secondaire (Marchand, 2004). Cette concentration sur l'observation et l'identification dans l'enseignement des connaissances spatiales au primaire a aussi été constatée par Bouckaert (2005) en Belgique. Ainsi, les enseignants sont actuellement peu outillés face à cet enseignement. Ce constat se répercute évidemment sur le développement de connaissances et de savoirs des élèves, pour qui, l'apprentissage de la géométrie ne se fait pas sans difficultés comme l'ont démontré plusieurs recherches (Bessot, 1994 ; CREM, 2001 ; Parzysz, 1990).

Un tout autre portrait de l'enseignement des connaissances spatiales nous est révélé par le domaine sportif. Depuis une vingtaine d'années, les recherches dans ce domaine se sont orientées vers la création de programmes d'entraînement mental visant une meilleure maîtrise technique et un plus haut niveau de performance des athlètes (Blaize, 1984 ; Pellissier & Billouin, 1989). Ainsi, les entraîneurs possèdent actuellement différents programmes permettant de développer les connaissances spatiales de leurs athlètes. Il existe différentes composantes à un entraînement mental², mais la composante la plus importante et la plus efficace reste la visualisation qui amène les athlètes à s'imaginer réaliser leurs mouvements mentalement, à se créer des images mentales d'objets en mouvement faisant ainsi référence à la géométrie des transformations (Orlick, 1990, 1992 ; Partington, 1990 ; Porter & Foster, 1990). Ces programmes sportifs permettent un développement plus spécifique des connaissances spatiales chez les athlètes qui se reflète par leur réussite scolaire liée à ce champ mathématique, même pour ceux éprouvant des difficultés dans d'autres champs mathématiques (Marchand, 2004)³.

¹ Tâches géométriques (Piaget 1973) : observation-identification, description-classification, construction, représentation, recherche-transformation et argumentation-démonstration ; Une tâche d'observation-identification serait, par exemple, d'observer un objet ou une représentation d'un objet et de lui associer son nom.

² L'entraînement mental traite de la relaxation, de la pensée positive, de la visualisation, de l'élaboration d'objectifs et de mots-clés (Porter & Foster, 1990).

³ Attention, il serait erroné de généraliser et d'affirmer que tous les sportifs développent de bonnes connaissances spatiales. Ceci s'applique principalement aux athlètes ayant un programme d'entraînement mental spécifique et bien établi.

Les réalités plutôt contradictoires de ces deux domaines d'enseignement face à l'apprentissage et l'enseignement des connaissances spatiales et des images mentales liées à l'espace en trois dimensions (IM-3D) représentent, pour nous, un moment déclencheur et décisif dans l'orientation de notre champ de recherche.

1. Introduction

Cet intérêt à faire un parallèle entre l'enseignement sportif et scolaire des connaissances spatiales a d'abord fait l'objet d'une étude doctorale, dirigée par Louise Poirier de l'Université de Montréal, où nous avons analysé deux interventions didactiques portant sur les connaissances spatiales auprès de trois profils d'élèves du secondaire (sportif, musicien et standard) (Marchand, 2004)⁴. Le but de cette recherche était de caractériser une approche d'enseignement des connaissances spatiales imprégnée de l'approche sportive en comparaison d'une approche plus traditionnelle. Des analyses préalables sur l'enseignement usuel (programme, manuels scolaires et approche d'enseignement) et sur les contraintes de l'enseignement actuel des connaissances spatiales, autant d'un point de vue épistémologique que cognitif et didactique, nous ont permis d'avoir une vue d'ensemble de la situation de cet enseignement et un canevas pour construire des interventions didactiques. Un cadre théorique interdisciplinaire a aussi été développé mettant en lien les domaines didactique, psychologique et sportif dont certains éléments seront repris dans cet article. Deux interventions didactiques ont été élaborées et expérimentées auprès de groupes d'élèves. Une analyse *a posteriori* des interventions didactiques à l'aide de grilles faisant ressortir des aspects comme la nature et le contenu des interventions et du questionnement, le type de tâches exploitées et le rôle de la visualisation autant du point de vue de l'enseignant que des élèves a été réalisée et confrontée à l'analyse *a priori*. Les caractéristiques spécifiques de l'approche «sportive» pour développer les connaissances spatiales ayant été jugées comme potentiellement bénéfiques à ce développement seront reprises dans le cadre de cet article car elles constitueront le point de départ des variables didactiques à considérer pour développer, de façon plus spécifique, les IM-3D.

Ainsi, nous commencerons par émettre des pistes de réponses à une question élémentaire mais primordiale concernant la pertinence même de notre champ de

⁴ Le champ de recherche exploité dans cet article, mettant en jeu les connaissances spatiales développées à travers différentes portes d'entrée (sport, musique ou école) pour en dégager une approche d'enseignement plus explicite, systématique et efficace dans un contexte de classe de mathématiques, représente un champ de recherche novateur. Ce texte doit être considéré comme un point de départ, car ce champ de recherche demeure en ébullition. Mais nous croyons, justement, qu'il est important de partager les découvertes à ce moment pour lui permettre d'évoluer.

recherche : pourquoi nous intéressons-nous aux connaissances spatiales ? Ensuite, nous exposerons notre cadre théorique identifiant les définitions des concepts clés et les différents modèles illustrant le développement des connaissances spatiales. Les variables didactiques importantes au développement des IM-3D seront exposées et traitées à l'aide d'un exemple d'activité tiré de notre expérimentation et en guise de conclusion, nous énoncerons deux autres activités favorables à ce développement ainsi que des pistes de recherches éventuelles.

2. Pourquoi s'intéresser aux connaissances spatiales ?

Les connaissances spatiales sont traitées en classe de mathématiques lors de l'enseignement de la géométrie. Les connaissances géométriques et spatiales représentent des connaissances distinctes, mais, en même temps, indissociables (Berthelot et Salin, 1993-1994). Elles représentent très souvent deux faces d'une même démarche (Wheatley, 1990 ; Laborde, 1988). Ainsi, lorsque nous traitons de la géométrie à l'école, nous ne pouvons négliger le développement des connaissances spatiales (NCTM, 2001). Cet enseignement connaît, de plus, actuellement un virage important :

« La géométrie, qui a souvent (et longtemps) été cantonnée à l'enseignement du raisonnement logique et de la méthode hypothético-déductive, retrouve ainsi (à présent) son attrait visuel et l'un de ces rôles fondamentaux, l'organisation et la structuration de l'espace. » (p. 3, CREM, 2004).

Ce virage ainsi que la réalité du monde actuel orienté vers les technologies impliquant l'espace en deux et en trois dimensions remettent à l'avant-plan le développement des connaissances spatiales dans le cadre de l'enseignement au primaire et au secondaire. D'ailleurs, selon le NCTM (2001), la création et la manipulation d'images mentales impliquant des figures et des transformations en deux et trois dimensions représentent une des plus importantes conclusions à tirer de l'étude de la géométrie.

De plus, plusieurs recherches montrent qu'il existe une corrélation positive entre le développement des connaissances spatiales et la réussite mathématique à tous les niveaux (Clements & Battista, 1992 ; Hallet, 1991 ; Whiteley, 2002, 2004). Whiteley (2002) va même jusqu'à affirmer que les connaissances spatiales jouent un rôle central dans l'enseignement des mathématiques puisque leur construction ne relève pas principalement d'un langage comme certains le pensent, mais plutôt de connaissances visuelles comme les connaissances spatiales.

Les recherches récentes en neurologie nous renseignent aussi sur le fonctionnement du cerveau lors de la réalisation d'activités mathématiques. Le cerveau est divisé en deux hémisphères (Houdé, 2004 ; Whiteley, 2002) :

- l'hémisphère droit comporte l'intelligence visuo-spatiale et celle liée à la vision globale, à l'imagination, aux liens, relations et associations ;
- l'hémisphère gauche comporte l'intelligence linguistique et celle liée à la vision locale ou partielle (précision et détails du tout), à la logique, au comptage, à la linéarité et l'analyse.

Lorsque nous réalisons une activité mathématique, les deux hémisphères, et non seulement l'hémisphère gauche sont sollicités (p. 62, Houdé, 2004) :

Lorsque l'on doit résoudre des problèmes de mathématiques... les régions activées (sont surtout les) régions visuo-spatiales... L'intelligence visuo-spatiale permet de visualiser les opérations à réaliser tout en mémorisant les résultats intermédiaires... Ainsi, logique et intelligence linguistique d'une part, mathématiques et intelligence visuo-spatiale, de l'autre, sont associées.

L'intelligence visuo-spatiale joue, par conséquent, un rôle important dans l'activité mathématique et, la création et manipulation d'images mentales permettent de relier les différentes régions des deux hémisphères (Whiteley, 2004).

Ces facteurs, justifiant notre intérêt pour ce sujet, mettent en évidence que les connaissances spatiales jouent un grand rôle dans la résolution de problèmes et, globalement, dans le développement de la pensée mathématique, mais qu'elles ne semblent pas être prises en charge dans notre enseignement, comme elles le sont dans le domaine sportif, entraînant des difficultés chez nos élèves.

3. Définitions et développements liés aux connaissances spatiales et IM-3D

Nous traitons de différents concepts liés aux IM-3D depuis le début de cet article, le temps est maintenant venu de préciser ce que nous entendons par connaissance spatiale, image mentale et visualisation. Voici un tableau résumant ces définitions (Marchand, 2004) :

Connaissance spatiale : processus qui, par le biais des cinq sens, amène l'apprenant à contrôler, anticiper et communiquer les états, les transformations ou les déformations des données (forme, position, orientation) d'objets relatifs à l'espace en deux ou en trois dimensions. Par exemple, être en mesure d'anticiper la forme, l'apparence, d'un solide d'après son développement relève des connaissances spatiales.

Image mentale : représentation mentale d'objets ou d'événements qui ne sont pas physiquement présents. Il y a trois types d'image mentale : statique, cinétique (transformation isométrique) et transformatrice (déformation). Ces types d'image peuvent être reproductrices dans le cas où l'objet/événement a

déjà été vu concrètement par le sujet, ou anticipatrices quand l'objet/événement n'a jamais été vu concrètement. (Piaget & Inhelder, 1947).

Visualisation : processus de création et de modification d'images mentales. Technique de créativité consistant à générer et à manipuler une image mentale (Legendre, 1993). En sport (PNCE, 1991), nous parlons davantage d'imagerie mentale que de visualisation puisque cette action mentale n'implique pas uniquement la vue, mais aussi d'autres sens générés par le mouvement (kinesthésique – auditif).

La définition de connaissance spatiale nous est propre, mais elle découle directement d'une combinaison de définitions déjà existantes de Berthelot & Salin (1992), Chevillard & Jullien (1990), Clements & Battista (1992), Laborde (1988). Outre la précision que ces définitions apportent pour chacun des concepts, elles évoquent que la visualisation et les images mentales sont directement liés au développement des connaissances spatiales étant donné leur nature d'intériorisation d'aspects physiques d'un objet : pour développer des connaissances spatiales, nous devons intérioriser les propriétés physiques d'objets et donc faire référence à la visualisation qui elle-même fait référence aux images mentales. Ainsi, pour développer les connaissances spatiales, le passage de l'espace physique vers l'espace représentatif est nécessaire. Plusieurs modèles de développement des connaissances spatiales ont d'ailleurs exploité ce principe, mais ils n'utilisent pas la même porte d'entrée pour réaliser le passage d'un espace à un autre. Nous décrivons brièvement les quatre modèles, soit celui de van Hiele (1959), de Dion, Pallascio & Papillon (1985), de Hoffer (1977) et de Piaget & Inhelder (1947)⁵.

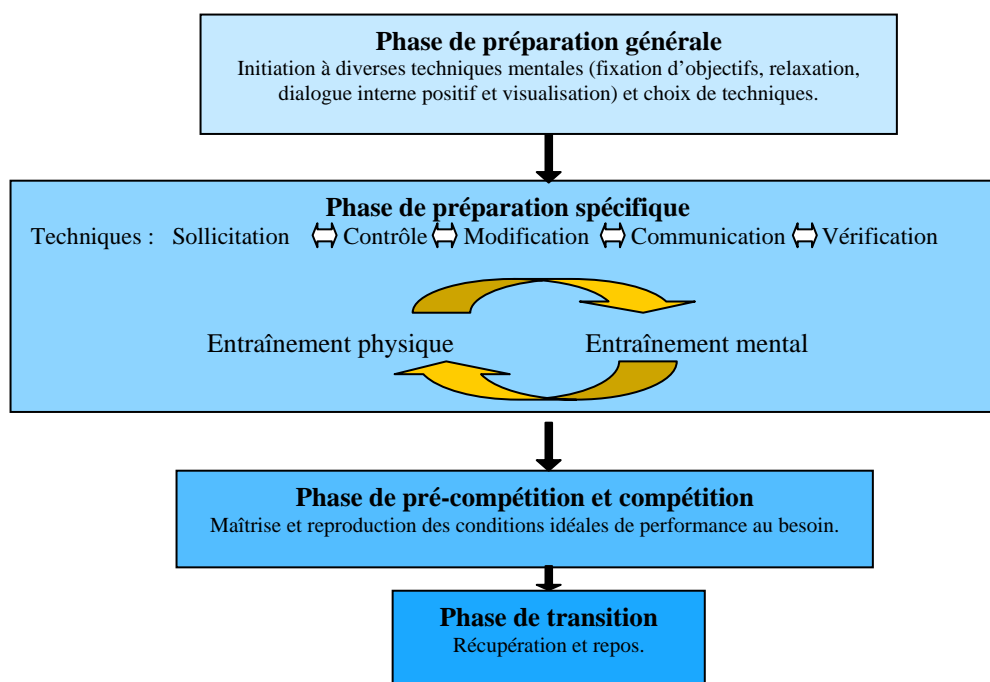
- Le modèle de van Hiele traite des différents niveaux de la pensée géométrique en deux dimensions réparties en cinq niveaux : visuel, descriptif, logique ou déductif informel, déductif formel et rigoureux. Il est orienté sur le langage et le développement axiomatique (dont la notion de preuve) de niveau primaire et secondaire ;
- le modèle de Dion et al. traite de tâches mathématiques et de types de géométries d'après cinq étapes : observation-visualisation (mémorisation d'objets), structuration (construction de solides topologiquement équivalents), transfiguration (description de solides topologiquement équivalents), détermination (description métrique de solides) et la

⁵ N.B. : Brèves descriptions impliquent nécessairement une vulgarisation du contenu et du contenant des différents modèles, nous sommes conscients que cette simplification n'illustre pas toute la complexité de ce développement, mais nous voulions présenter qu'un aperçu global des différents modèles pour en dégager leur porte d'entrée. Veuillez vous référer aux textes originaux pour avoir la description complète et détaillée de chacun des modèles. Ces quatre modèles sont repris dans un article de Lunkenbein (1982).

classification (classes métriques d'une famille de solides). Ce modèle est orienté vers l'enseignement/apprentissage de l'espace en trois dimensions au niveau secondaire ;

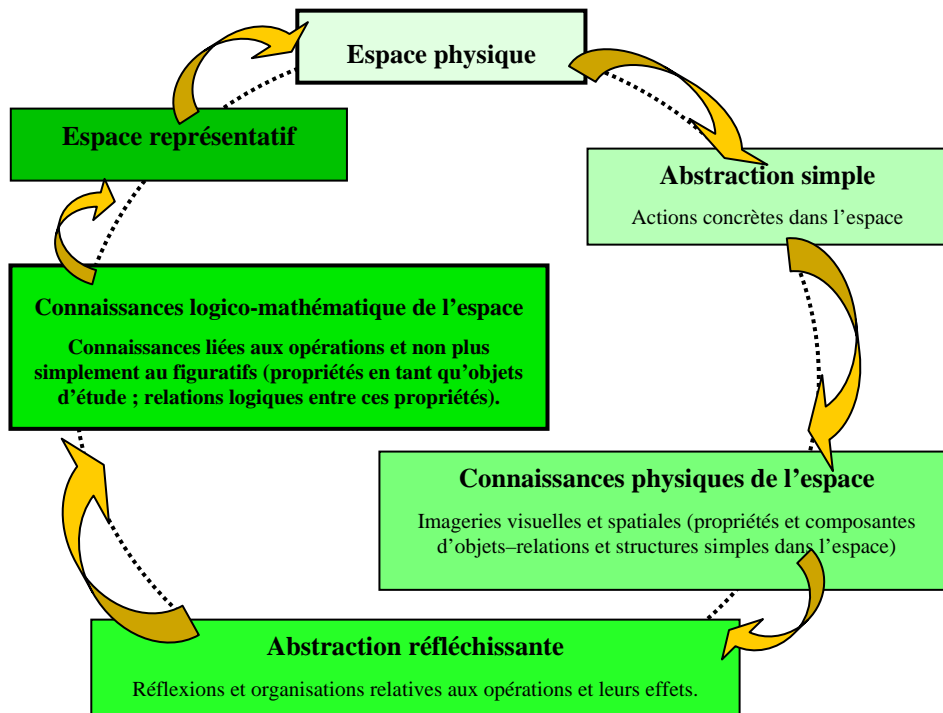
- le modèle de Hoffer (1977) traite de tâches visuelles liées aux développements des connaissances spatiales de l'environnement en 7 étapes : coordination (œil-mouvement), perception d'objets qui l'entourent, constance (reconnaissance d'invariants), orientation spatiale d'un objet par rapport à sa position, perception de relations spatiales entre deux objets, discrimination visuelle (différenciation et association) et la visualisation (images mentales des objets). Hoffer met l'accent sur le développement des connaissances spatiales allant de l'enfance à la fin du primaire par le biais de la perception ;
- le modèle de Piaget & Inhelder (1947) traite explicitement du passage d'un espace à un autre : de l'espace physique (environnement réel et actions concrètes), aux connaissances physiques de l'espace, par le biais d'une abstraction simple (abstraction des qualités d'un objet comme sa forme et sa couleur) à l'espace représentatif (actions intériorisées – visualisation) par le biais d'une abstraction réfléchissante (abstraction des propriétés et des conséquences d'une action). Ainsi, la représentation de l'espace se construit progressivement chez l'apprenant en passant par l'espace perceptif, l'espace topologique, l'espace projectif et enfin l'espace euclidien. Ce modèle traite spécifiquement du développement des **connaissances spatiales** liées à l'enseignement de niveau **primaire-secondaire** et le passage de l'espace physique à l'espace représentatif met de l'avant le rôle important que joue l'**action** de l'apprenant autant concrète qu'intériorisée.

L'analyse de ces quatre modèles nous a permis de sélectionner le modèle de Piaget & Inhelder correspondant davantage aux caractéristiques de notre champ de recherche visant le développement des connaissances spatiales à travers l'enseignement primaire-secondaire et faisant le lien entre l'action concrète (le sport) et l'action intériorisée (la visualisation – images mentales). En parallèle à ce modèle, nous avons également considéré ceux élaborés dans le cadre des différents programmes d'entraînement mental du domaine sportif (Chevallon, 1995 ; Porter & Foster, 1990). Ces programmes d'entraînement visent à améliorer la préparation pour la compétition, développer les aspects techniques de l'athlète et remédier aux différents obstacles en lien avec l'entraînement et les compétitions. L'entraînement mental est prévu dans l'entraînement quotidien de l'athlète et échelonné, de façon progressive, jusqu'à la période de compétition où il devrait avoir atteint un rendement optimal.



La période créant un lien entre les deux champs d'enseignement/apprentissage est celle où se développent les images mentales impliquant des visualisations et anticipations d'états ou de transformations d'objets en mouvement, soit la phase de préparation spécifique. Selon l'approche sportive, la capacité à visualiser et à anticiper le résultat d'une transformation nécessite une sollicitation explicite de la création et la manipulation des IM-3D. Les athlètes sont amenés à **générer**, **anticiper**, **contrôler** et **modifier** leurs images mentales pour tendre vers les conditions idéales de compétition. Tout au long de ce processus, ils doivent aussi **communiquer** leurs processus mentaux, soit à leurs collègues, leur famille ou leur entraîneur de façon orale ou écrite à l'aide d'un journal de bord. Ce développement des images se fait simultanément avec l'entraînement physique, les deux étant complémentaires. Il y a, par conséquent, une interaction constante entre les actions concrètes et intériorisées dans le processus de développement des IM-3D. Cette interaction sera au centre de notre modèle de référence et deviendra la variable didactique centrale au développement des IM-3D en classe de mathématiques. Voici donc notre modèle de référence pour une activité donnée⁶ :

⁶ Les interactions entre les actions concrètes et intériorisées contenues de ce schéma nous sont propres (inspirées du modèle sportif) et le contenu, du point de vue de Piaget, s'inspire du schéma que Lunkunbein a présenté de ce modèle (p. 8, 1982).



L'explicitation des définitions et du modèle illustrant le développement des connaissances spatiales nous offre une vue théorique de la situation ; nous verrons à présent comment ce cadre peut se décomposer concrètement, d'après des variables didactiques pouvant servir de point d'appui pour élaborer des activités propices au développement des IM-3D en classe. Comment pouvons-nous y provoquer le passage de l'action concrète à l'action intériorisée ? Comment solliciter, générer, anticiper, modifier et communiquer les IM-3D en classe ?

4. Variables didactiques à considérer pour le développement des IM-3D

L'analyse comparative de deux interventions didactiques portant sur l'enseignement des connaissances spatiales nous a permis de dégager les constats suivants :

1. À partir d'un même objectif mathématique, deux activités très différentes peuvent être créées et il faut donc établir d'autres variables didactiques si

nous voulons obtenir des activités valorisant le développement spécifique des connaissances spatiales et des IM-3D ;

2. Un glissement des connaissances spatiales vers d'autres connaissances géométriques est possible : ce phénomène s'est produit lors de notre expérimentation et il illustre bien le contexte québécois de cet enseignement, de même que le contexte français rapporté par Berthelot et Salin (1993-1994) ;
3. Une centration sur les actions concrètes, préconisée par le programme, les manuels et l'approche traditionnelle de notre expérimentation ne favorise pas le développement des connaissances spatiales et des IM-3D. Les actions intériorisées devraient être centrales à notre approche pour développer ces connaissances ;
4. Le questionnement portant sur la construction des images mentales n'est pas habituel dans le contexte actuel des classes, bien que le développement des connaissances spatiales soit l'aspect central de l'enseignement de la géométrie à ce niveau scolaire (troisième secondaire) et que des recherches, publiées il y a déjà plusieurs années, recommandent l'exploitation de la visualisation dans les classes de mathématiques (Hill & Baker, 1983 ; Hutton & Lescohier, 1983 ; numéro spécial de la revue *Arithmetic Teacher* de février 1990, vol. 37, no. 6).

À partir de ces constats, nous procédons à un regroupement et une généralisation des caractéristiques liées à l'approche «sportive» mises de l'avant par notre cadre théorique interdisciplinaire et notre analyse *a posteriori* de l'expérimentation dans le but de les rendre applicables à d'autres interventions didactiques portant sur les IM-3D. Ainsi, nous regroupons les variables didactiques en cinq thèmes : les solides, le développement, les tâches, les images mentales et la «clé magique» de la réussite.

La variable «**solide**» implique une prise en compte de la nature et de la complexité des solides proposés lors de nos interventions. Il ne suffit pas de présenter des solides droits ou typiques, nous devons également travailler sur des solides obliques, tronqués et composés. De plus, nous pouvons aussi varier le nombre de solides impliqués dans une tâche : tout comme la grandeur des nombres, cette variable peut influencer la nature et la complexité des raisonnements des élèves.

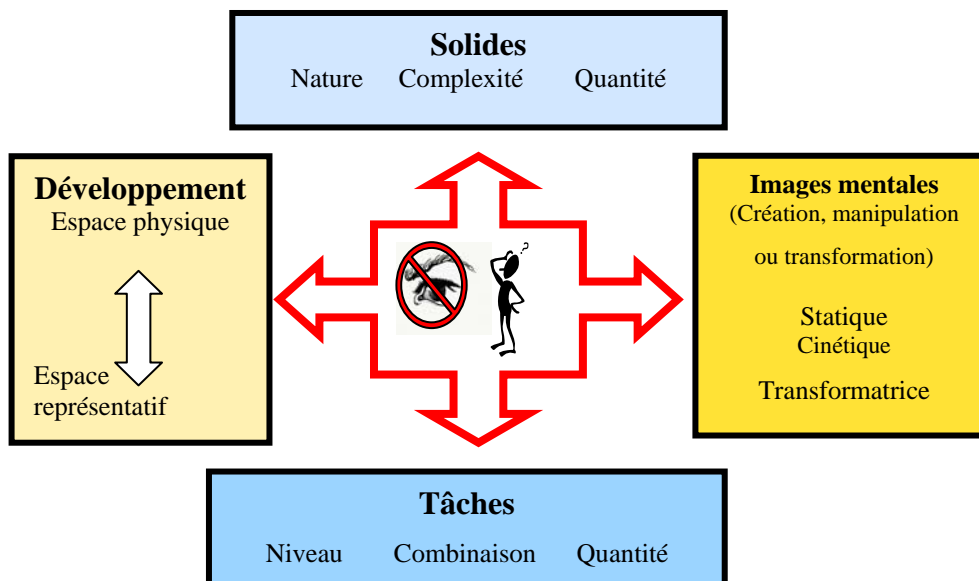
La variable «**développement**» met en évidence que pour développer les IM-3D des élèves, il faut non seulement passer de l'espace physique à l'espace représentatif, mais aussi créer une interaction entre ces deux espaces en faisant des passages inverses, soit de l'espace représentatif à l'espace concret.

La variable «**tâche**» implique que nous ne devons pas uniquement demander aux élèves d'observer et d'identifier des solides comme le font majoritairement les manuels scolaires actuels. Des tâches plus complexes comme la description, la construction, la représentation, la recherche (anticipation) et la justification (Piaget, 1973) devraient aussi être traitées. Il faut varier la quantité de tâches qu'une activité nécessite et ne pas s'en tenir, surtout au niveau secondaire, à des activités n'impliquant qu'une ou deux tâches. Enfin, toujours dans l'optique du développement des IM-3D, nous devons proposer une combinaison de tâches incluant une tâche de recherche (anticipation) ; cette tâche valorise fréquemment un passage aux actions intériorisées (visualisation).

La variable «**image mentale**» indique que nous devons varier la nature des images mentales impliquées dans nos interventions didactiques. Il ne faut pas se limiter aux images statiques reproductrices. Il faut orienter les activités vers les images anticipatrices (jamais observées concrètement) pour développer davantage les IM-3D et employer aussi des images cinétiques (impliquant une transformation isométrique) et transformatrices (impliquant une déformation).

La dernière variable, la «**clé magique**», est la plus importante. Vous pouvez créer une activité comportant les quatre premières variables et ne pas valoriser le développement des IM-3D chez les élèves. Il ne faut pas croire qu'un enfant réalisant des manipulations, travaillant avec des objets concrets (Poirier, 1999) ou même effectuant des mouvements développera des images mentales (ce ne sont pas tous les sportifs qui développeront une visualisation efficace). La «clé magique» que nous avons dégagée de l'analyse de nos interventions didactiques et de nos interventions sportives doit être présente. Les IM-3D ne se développeront que si nous les sollicitons dans notre approche d'enseignement. Ainsi, nous devons prévoir des phases à l'intérieur de nos interventions didactiques où, premièrement, ***les élèves ont accès uniquement à leurs images mentales et ne peuvent recourir à la vue*** pour observer les solides ou les transformations de solides (tout comme le sportif ne peut se fier à sa vue pour réaliser des pirouettes dans les airs), deuxièmement, prévoir une phase de ***questionnement portant sur leur création des IM-3D*** (tout comme l'athlète qui doit partager quotidiennement, avec son entraîneur, sa préparation mentale afin d'en vérifier sa progression). Ces éléments peuvent paraître triviaux à première vue, mais ils sont très rarement mis en application lors de l'enseignement des IM-3D.

Voici une schématisation des variables didactiques à considérer dans l'élaboration des interventions didactiques ciblant le développement des IM-3D :



Afin d'illustrer davantage ce que chaque variable didactique implique concrètement dans l'élaboration d'une intervention didactique, nous les reprenons une à une, dans le point suivant, pour la planification d'une activité expérimentée en classe de troisième secondaire (13-14 ans).

5. Exemple d'une activité visant les IM-3D

Lors de notre expérimentation (Marchand, 2004), une des activités mathématiques avait pour objet d'étude la construction d'une maison, à partir d'une description, composée d'un pavé droit et d'une pyramide à base rectangulaire. Ce type d'activité n'est pas envisagé nécessairement, *a priori*, pour développer les IM-3D ; cette raison justifiait notre choix, car ce n'est pas tant le choix de l'activité qui importe, mais bien son exploitation en classe (les variables didactiques impliquées)⁷. Nous exposons brièvement la description de l'activité en mettant en évidence les cinq variables didactiques.

La première consigne donnée aux élèves est de construire, à l'aide de cure-pipes et pailles de trois longueurs différentes, la maison décrite. La description écrite était de «construire une maison dont le corps est un pavé droit où les rectangles latéraux

⁷ Les deux exemples choisis pour la conclusion sont plus intrinsèquement liés au développement des IM-3D.

sont plus grands que les rectangles des bases et le toit est une pyramide dont le sommet est dans le prolongement d'une des arêtes du prisme.»

La deuxième consigne impose à l'élève d'anticiper, en une seule fois, le nombre exact de pailles des longueurs respectives (petite, moyenne ou longue) avant de commencer la construction. Le matériel n'est pas accessible aux élèves ; l'enseignant leur distribue uniquement la quantité demandée. Lors du retour, l'enseignant questionne les élèves sur leur processus de construction (Quel type de maison avez-vous vu dans votre tête ? La maison construite correspond-t-elle à l'image que vous en aviez ? La maison construite correspond-t-elle à celle décrite au départ ?).

La planification de cette activité met en jeu les cinq variables didactiques :

1. Les solides présentés ne se limitent pas à des solides droits, car il y a longtemps que les images mentales d'un pavé et d'une pyramide sont acquises à ce niveau. Ainsi, nous leur proposons une maison composée de deux solides dont un est oblique. Trop souvent les manuels scolaires et les programmes se limitent à des solides simples ne permettant pas une progression dans la construction des IM-3D ;
2. Le modèle de référence sur le développement des IM-3D est pris en considération puisque les deux espaces sont impliqués. L'élève doit d'abord faire référence à ces IM-3D pour anticiper l'allure de la maison décrite pour ensuite la construire concrètement. Il réalise, au moment de cette phase de construction, le passage de l'espace représentatif à l'espace physique et le passage réciproque se produit lors des ajustements nécessaires de sa construction et, ultérieurement, lors du retour collectif ;
3. Les tâches impliquées ne se résument pas uniquement à l'observation et l'identification. Les élèves doivent interpréter la description, anticiper l'allure de la maison ainsi que le matériel nécessaire à la construction, construire la maison et comparer leur construction finale avec leur construction mentale ainsi que la description de départ. La deuxième consigne amène une tâche supplémentaire d'anticipation à l'activité menant à un enrichissement du développement des IM-3D. Sans cette consigne, les élèves n'auraient pas eu à anticiper l'allure globale de la maison, ils auraient pu simplement l'imaginer partiellement et revenir à la description, au besoin, pour plus d'informations et prendre le matériel au fur et à mesure ;
4. Les images mentales impliquées dans cette activité sont de nature statique reproductrice ou anticipatrice. La construction du pavé droit, faisant appel à une image reproductrice, ne semble pas causer problème pour la majorité des élèves de ce niveau, même si certains l'ont construite plus large que

haut. La description de la pyramide implique, pour un élève moyen de ce niveau scolaire, une image anticipatrice et elle constitue un obstacle majeur pour plusieurs. La comparaison, lors du retour, représente pour les élèves un outil permettant d'explicitier et d'ajuster leurs IM-3D ;

5. La «clé magique» découle directement des choix didactiques considérés pour les consignes et pour le retour de l'activité. Le choix d'une description écrite demande à l'élève de se créer une IM-3D de la maison ; la consigne leur demandant de se procurer tout le matériel avant même le commencement de la construction ajoute à ce facteur. Ainsi, au départ, les élèves ne peuvent recourir à la vue pour anticiper l'allure du solide, ils doivent nécessairement recourir à leurs IM-3D et les manipuler pour prédire la longueur et le nombre des pailles exigés. Cette première phase de l'activité permet aux élèves de générer, de contrôler et de modifier leurs IM-3D. Lors du retour, le questionnement de l'enseignant lui permet de communiquer et de comparer ces IM-3D avec la solution attendue et lui assure un suivi sur son apprentissage. Le questionnement pourrait porter sur d'autres propriétés des solides construits comme le nombre de faces, le nombre de sommets ou le volume du solide, mais nous questionnons alors les élèves sur le solide présent et non plus sur les IM-3D. Ce type de glissement vers d'autres connaissances géométriques est fréquent en classe, mais il s'agit d'un moment clé pour le développement des IM-3D qu'il ne faut surtout pas négliger.

Cet exemple, même s'il demeure ponctuel et succinct, permet une meilleure compréhension des cinq variables didactiques impliquées dans ce cadre de référence et qui devraient être pris en considération dans l'élaboration d'activités scolaires visant le développement des IM-3D.

6. Conclusion

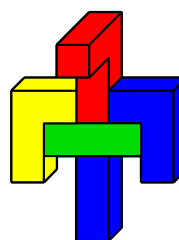
Ce cadre nous permet d'élaborer des activités valorisant le développement des IM-3D, mais il facilite aussi une meilleure exploitation des activités actuellement présentées dans le milieu. Il existe plusieurs activités potentiellement pertinentes présentées dans les classes du primaire et de la troisième année du secondaire pour le développement des IM-3D, mais elles ne sont actuellement pas orientées vers les connaissances spatiales. Voici deux exemples accompagnés de leur exploitation tirés des deux corpus ciblés :

Au primaire (6 à 11 ans), une activité permettant de développer les images mentales est la construction d'un modèle composé de pièces de Tangram préalablement observé grâce au rétroprojecteur (Wheatley, 1990) : les élèves ont en leur possession les pièces, ils observent la construction présentée au rétroprojecteur

pendant trois secondes pour ensuite la reconstruire en son absence (l'objet peut être présenté de une à trois fois). Suite à la construction, l'enseignant pose des questions sur ce qu'ils ont vu dans leur tête (« comment t'es-tu rappelé de la forme ? » *Je me suis rappelé de la forme globale... j'avais vu les quatre triangles...* « Qu'as-tu vu ? » *J'ai vu un petit bonhomme chinois... j'ai vu un bateau sur une tablette...*). Pour développer les IM-3D, nous pouvons reprendre la même activité, mais présenter un objet construit avec les pièces SOMA⁸ que nous cachons dans une boîte après trois secondes. Voici deux exemples de formes possibles :



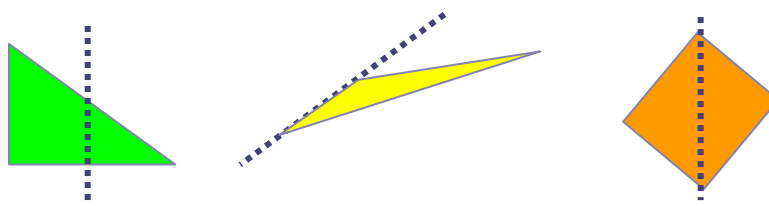
Tangram



SOMA

Ces deux activités (2D ou 3D), telles qu'exploitées, mettent en jeu des figures et solides divers selon le grade des élèves, impliquent les deux espaces (action concrète et action intériorisée), demandent des tâches d'observation, de construction et de comparaison d'images statiques. Elles possèdent aussi la « clé magique », puisque lors de la construction de l'objet, ce dernier n'est plus visible, les élèves doivent donc obligatoirement recourir à leurs images mentales. De plus, le questionnement utilisé porte explicitement sur les images mentales.

Au secondaire (12 à 17 ans), une activité permettant de développer les IM-3D est l'étude des solides de révolution. Nous présentons, sur carton, la figure et l'axe de rotation et les élèves doivent imaginer le solide résultant de la rotation. Ainsi, les élèves observent (images), ils cherchent le résultat et décrivent ce qu'ils anticipent. Le questionnement de l'enseignant porte explicitement sur la construction des images mentales (« *Que vois-tu dans ta tête ?* » « *Le vois-tu tourner ?* » « *Vois-tu le résultat en 2D ou en 3D ?* » « *Explique-moi ce que tu vois* »...).



⁸ SOMA : solides en bois ou en mousse de différentes formes et couleurs.

Cette activité, telle que présentée, comporte les variables didactiques nécessaires au développement des IM-3D pour ce niveau scolaire : d'abord, une variété de figures et d'emplacements de l'axe de rotation est exposée, les deux espaces sont impliqués (action concrète et action intériorisée), les élèves sont amenés à observer, anticiper la rotation et communiquer leur résultat, les images générées sont cinétiques reproductrices ou anticipatrices et la «clé magique» réside dans le fait que la rotation n'est pas réalisée concrètement et que le questionnement *a posteriori* porte sur le résultat de cette rotation mentale⁹.

Pour résumer nos propos, l'interaction entre l'enseignement des mathématiques et du patinage artistique et les divergences existant dans les pratiques entourant le développement des IM-3D, nous a mené à l'élaboration d'un cadre inspiré du domaine sportif, pour développer de façon plus systématique et explicite les IM-3D dans un milieu scolaire. Ce cadre théorique, ayant été caractérisé et expérimenté pour une première fois, va nous permettre de poursuivre nos recherches à chaque niveau d'enseignement de façon plus spécifique. Nous en sommes donc à l'étape d'établir, non plus simplement des activités ponctuelles pour développer les IM-3D, mais une séquence complète d'activités valorisant ce développement. Notre prochaine tâche sera d'élaborer une séquence d'enseignement visant le développement des IM-3D pour les élèves du primaire et, ensuite, de créer des séquences d'enseignement pour les autres niveaux d'enseignement. Cette continuité entre les différents niveaux d'enseignement nous permettra de traiter de l'arrimage entre les différents niveaux afin d'amenuiser les ruptures et les lacunes actuellement présentes dans le curriculum.

⁹ D'autres exemples auraient pu être exposés en lien avec l'enseignement mathématique collégial et universitaire, mais nous avons opté de nous limiter à ces deux exemples pour ne pas alourdir le texte.

Bibliographie

BERTHELOT R. & SALIN M-H. (1993-1994) L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, *Grand N*, I, **53**, 39-53.

BERTHELOT R. & SALIN M-H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I.

BESSOT A. (1994) *Représentations graphiques et maîtrise des rapports avec l'espace*, Séminaire sur la représentation, CIRADE, UQAM, septembre 1993, 34 pages.

BLAIZE P. (1984) *The effects of internal and external imagery in psychologically preparing skaters for performing figures*, Maîtrise es arts, University of Western Ontario, 115 pages.

BOUCKAERT C. (2005) *Transformation geometry in primary school according to Michel Demal*, CREM, article à paraître.

CHEVALLARD Y. & JULLIEN M. (1990) Autour de l'enseignement de la géométrie au collège, première partie, *Petit x*, **27**, 41-76.

CHEVALLON S. (1995) *L'entraînement psychologique du sportif*, Édition De Vecchi S.A., Paris, imprimé en Italie, 106 pages.

CLEMENTS D. H. & BATTISTA M.T. (1992) Geometry and spatial reasoning, *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, Douglas A. et Grouws, Macmillan publishing compagny, New York, Chap. 18, 420-464.

CREM : Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (2004) *Pour une culture mathématique accessible à tous. Élaboration d'outils pédagogique pour le développement des compétences citoyennes*, Nivelles, Belgique.

<http://www.enseignement.be/@librairie/documents/ressources/100/index.asp>

CREM (2001) *Formes et mouvements. Perspectives pour l'enseignement de la géométrie*, Luc Lismont et Nicolas Rouche, coordinateurs, Nivelles, Belgique.

<http://www.enseignement.be/@librairie/documents/ressources/081/formes.asp>

DION D., PALLASCIO R. & PAPILLON V. (1985) Perception structurale d'objets polyédriques, *Bulletin AMQ*, Octobre 1985, 10-21.

HALLET D. H. (1991) Visualization and calculus reform, *Visualization in teaching and learning mathematics: a projet*, Zimmermann et Cunningham (ed.), Washington, M.A.A., **19**, 121-126.

- HILL D.M. & BAKER S.R. (1983) A visual imagery typology for instructional design, *Mental imagery and learning*, Hutton et Lescohier (ed.), chapitre 9, 133-154.
- HOFFER A.R. (1977) *Mathematics Resource Project: Geometry and Visualisation*, Creative Publications (ed.), Californie, Palo Alto.
- HOUDÉ O. (2004) Vers une pédagogie mieux adaptée, *Cerveau & Psycho*, **3**, 60-63.
- HUTTON D.W. & LESCOHIER J.A. (1983) Seeing to learn: using mental imagery in the class room, *Mental imagery and learning*, Hutton et Lescohier (ed.), chapitre 8, 113-132.
- LABORDE C. (1988) L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques, *Recherches en didactiques des mathématiques*, **9/3**, 337-364.
- LEGENDRE R. (1993) *Dictionnaire actuel de l'Éducation. 2^e édition*, La collection «Le défi Éducatif», Guérin, Montréal, et ESKA, Paris, 1500 pages.
- LUNKENBEIN D. (1982) Géométrie dans l'enseignement au primaire. *Instantanés Mathématiques*, Novembre, 5-15.
- MARCHAND P. (2004) *Analyse de deux interventions didactiques portant sur les connaissances spatiales auprès de trois profils d'élèves du secondaire*, Thèse de doctorat, Université de Montréal, Canada, dirigée par Louise Poirier, 222 pages.
- ORLICK T. (1992) *Freeing children from stress : Focusing and stress control activities for children*, Willits, CA : ITA.
- ORLICK T. (1990) Chapter 8: Mental Imagery, *Pursuit of Excellence: How to Win in Sport and Life Through Mental Training*, Champaign, IL: Leisure Press, 65-77.
- PARTINGTON J. (1990) *Personal knowledge in imagery: Implications for novice gymnasts, figure skaters and their coaches*, Conférence annuelle "the Canadian Society for Psycho-Motor Learning and Sport Psychology", Windsor, ON.
- PARZYSZ B. (1991) Espace, Géométrie et Dessin. Une ingénierie didactique pour l'apprentissage, l'enseignement et l'utilisation de la perspective parallèle au lycée, *Recherches en didactiques des mathématiques*, **11/ 23**, 211-240.
- PELISSIER P. & BILLOUIN A. (1989) *Patinage*, Éditions Robert Laffon, S. A., Paris, 239 pages.
- PIAGET J. (1973) *La géométrie spontanée de l'enfant*, Presses Universitaires de France, Paris, 491 pages.
- PIAGET J. & INHELDER B. (1947) *La représentation de l'espace chez l'enfant*, Presses Universitaires de France, Paris, (ed. 1977).

POIRIER L. (1999) *Réflexion autour du matériel de manipulation*, Instantanés mathématiques, septembre, 1999.

PORTER K. & FOSTER J. (1990) *Visual Athletics: visualizations for peak sports performance*, Wm.C. Brown (ed), Dubuque, Iowa, 202 pages.

PNCE (Programme National de Certification des Entraîneurs) théorie niveau 2 (1991), Publié par l'association canadienne des entraîneurs, Gloucester, Ontario, 230 pages. Imprimé par le CCASCP.

VAN HIELE P.M. (1959) La pensée de l'enfant et la géométrie, *Bulletin de l'APMEP*, **198**, 199-205.

WHEALTEY GRAYSON H. (1990) Spatial sense and mathematics learning, *Arithmetic teacher*, Février 1990, 10-11.

WHITELEY W. (2004) *Visualization in Mathematics: Claims and Questions towards a Research Program*, 6 pages, <http://www.math.yorku.ca/~whitely/>

WHITELEY W. (2002), *Teaching to see like a Mathematician*, 11 pages, <http://www.math.yorku.ca/who/faculty/whiteley/menu.html>

PATRICIA MARCHAND

Université du Québec à Rimouski (UQAR)
Professeure en didactique des mathématiques
300 allée des Ursulines, c.p. 3300
Rimouski (Québec), Canada G5L 3A1
patricia_marchand@uqar.qc.ca

