Nicolas Rouche

De la pensée commune aux mathématiques : sur le besoin de théories génétiques

Abstract. From common thought to mathematics : the need for genetic theories.
Part 1 of this paper shows that mathematical learning, rarely considered in its full extension from early childhood to adulthood, is in need of clear guidelines. Guidelines, the way we understand them here, are outlines of what might be called genetic theories. One shows what such genetic theories could look like. Part 2 develops a possible guideline, one whose title might be : from proportionality to linearity, or the evolution of the concept of ratio. In the conclusion, we revisit the notion of genetic theory to discuss further its nature and relevance.
Consult an english version of this article at
`http ://irem.u-strasbg.fr`, menu "Publications".

Résumé. La première partie de cet article montre que l'apprentissage des mathématiques, rarement considéré dans sa réelle extension de la prime enfance à l'âge adulte, a besoin de fils conducteurs clairs. Les fils conducteurs, au sens où on les entend ici, sont des esquisses de ce que l'on pourrait appeler des théories génétiques. On montre ce que pourraient être de telles théories. La deuxième partie expose un fil conducteur possible, qui pourrait s'intituler : de la proportionnalité à la linéarité, ou l'évolution du concept de rapport. Dans la conclusion, on revient sur la notion de théorie génétique pour en cerner plus précisément la nature et la pertinence.

Mots-clés. Apprentissage mathématique à long terme, théorie génétique, modèle, proportionnalité, linéarité, grandeurs.

À la mémoire de H. Freudenthal,
à qui nous devons tant de lumières
sur l'apprentissage des mathématiques

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, supplément vol. 11, p. 17 – 50.
©2006, IREM de STRASBOURG

PREMIÈRE PARTIE

Des fils conducteurs : pourquoi et comment ?

1. Les mathématiques et l'expérience commune

Le chemin qui conduit de l'expérience commune jusqu'aux mathématiques s'allonge de siècle en siècle (on trouvera cette idée exposée en détail dans N. Rouche [2004]). Tout d'abord, alors que les Babyloniens et les Égyptiens traitaient de questions relativement isolées d'arithmétique et de géométrie, les Grecs – en particulier Euclide – ont élaboré des théories de grande ampleur, de longues chaînes de déductions. Cette forme de pensée est très éloignée de la vie quotidienne. Et ce d'autant plus que, dans ce contexte, même les propositions évidentes devaient être prouvées, car tout – hormis les axiomes de départ – devait être prouvé.

La distance de la pensée commune aux mathématiques s'est encore allongée à cause de l'introduction des lettres en algèbre, de la représentation des figures par des équations en géométrie analytique, de l'introduction des nombres négatifs et complexes, de l'arithmétisation du continu (les nombres réels) et, au cours du XX^e siècle, de la constitution des mathématiques en un édifice quasiment d'un seul tenant, entièrement déduit des axiomes de la théorie des ensembles.

Une autre étape significative a été franchie avec la création des géométries non euclidiennes, conduisant à la coexistence de plusieurs théories contradictoires, chacune logiquement cohérente. Ce fait historique majeur a entraîné une mutation de la nature de la vérité mathématique. En effet, pour les Grecs, un axiome était vrai du fait de son évidence dans l'univers (platonicien) des idées, alors que dans les mathématiques contemporaines, la vérité s'identifie à l'absence de contradiction dans un système axiomatique.

Enfin, il y a l'existence des structures telles que les groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels et topologiques, catégories, et leur rôle dans la pensée mathématique. Ces structures sont abstraites et, alors qu'elles semblent ne dire rien sur rien, elles expriment l'architecture et le fonctionnement d'un grand nombre de situations particulières, que ce soit dans les mathématiques ou en dehors. C'est ce qui explique le double effet qu'elles ont d'éclairer ces situations et de faciliter les transferts d'intuitions entre celles-ci.

Ces observations rendent compte des mathématiques d'aujourd'hui telles qu'elles apparaissent dans les traités, c'est-à-dire comme un monument hautement abstrait, une science artificielle. Toutefois, et par contraste, la pratique des mathématiques et la résolution de problèmes, à quel que niveau que ce soit, sont des activités stimulantes, nullement *a priori* déductives, s'appuyant sur l'imagination, les conjectures, la recherche d'exemples et de contre-exemples et bien entendu les déductions. Elles sont une source d'intimes satisfactions.

Que les mathématiques soient loin de la pensée commune a pour effet que la plupart des gens ont une idée fausse de cette discipline. Ils la voient comme un monument immuable – ils n'ont pas idée de son évolution séculaire –, ils réduisent l'activité mathématique à l'exécution de calculs routiniers, conduisant dans chaque cas à l'unique solution par l'unique bonne méthode. Rappeler cela est banal, mais c'est une triste vérité. Une telle méconnaissance des mathématiques n'est en aucune façon nouvelle, mais elle empire au fil des siècles, à cause de l'évolution de la connaissance mathématique.

Une importante proportion des enseignants partage cette conception des mathématiques, qui souvent leur a été transmise par leurs propres professeurs. D'autres, bien que conscients de l'authentique nature des mathématiques et capables eux-mêmes de pratiquer cette science de façon créative, lèguent à leurs élèves la conviction qu'elle est purement déductive.

Tous ces malentendus rendent difficile une conception claire et efficace de l'enseignement des mathématiques. Évoquons maintenant, dans les grandes lignes, les réformes par lesquelles on a, depuis une cinquantaine d'années, essayé d'améliorer la situation.

2. La cohérence des « maths modernes »

Dans les années cinquante et soixante du XX^{e} siècle, les promoteurs des « maths modernes » ont vraiment cru avoir trouvé « la solution ». Et peut-être avaient-ils raison sur certains points, malgré les difficultés qu'ils ont rencontrées. Quoi qu'il en soit, leurs options étaient extrêmes et extrêmement claires, ce qui fait qu'elles se prêtent à une critique claire. Rappelons donc ce qu'a été cette réforme et quels en étaient les fondements.

Tout d'abord, ces promoteurs sont partis d'un fait majeur, à savoir que la science mathématique existe en tant que discipline quasiment unifiée, issue déductivement des axiomes de la théorie des ensembles. Donc il fallait la présenter aux élèves de façon axiomatique, déductive, en se focalisant sur les structures. Les matières à enseigner étaient – nous nous en tenons aux principales – les ensembles, les relations, les fonctions (sur le mode naïf, car cela eut été impossible autrement), ensuite les nombres naturels, les entiers, les rationnels et les réels, puis les espaces vectoriels et l'algèbre linéaire, pour aboutir aux limites, à la continuité, aux dérivées et aux intégrales. Les figures étaient considérées comme trompeuses. La géométrie des figures et des solides avait presque disparu, et avec elle une source importante d'intuitions.

L'enseignement devait être rigoureux. Il était, nous l'avons dit, focalisé sur les structures, comme par exemple les groupes, les anneaux, les corps et les espaces vectoriels. Pour éviter confusions et pertes de temps, les concepts devaient être introduits autant que possible dans leur forme définitive, ce qui impliquait nécessairement un niveau élevé de généralité. De plus, les termes techniques et les symboles étaient nombreux, plus que dans l'enseignement traditionnel.

La réforme des « maths modernes » a été conçue initialement par des mathématiciens bien connus (Dieudonné, Choquet, Stone, Artin, ...) au cours de deux colloques tenus l'un en 1959 à Royaumont et l'autre en 1960 à Dubrovnik (voir H. O. Fehr [1961] and O.E.C.E. [1961]). Les actes de Royaumont affirmaient que *tout* l'enseignement mathématique devait être revu. Mais paradoxalement, le colloque de Dubrovnik a suivi en proposant un programme destiné seulement aux classes scientifiques de la fin de l'école secondaire. Toutefois, dans les quelques années ultérieures, ce programme a été étendu, sans changement substantiel de ses principes, aux classes allant de la maternelle jusqu'à 18 ans (voir par exemple G. Papy [1963]).

Et donc des matières très générales étaient proposées à de très jeunes élèves. Mais plus une théorie est générale, plus son champ d'application est étendu. Les jeunes ne pouvaient pas se rendre compte de l'immense variété des référents, que ce soit ou non dans les mathématiques, de notions telles que celles d'ensemble, relation, groupe, etc. Et donc ils devaient se contenter de quelques exemples, souvent artificiels et sans grand intérêt à leur niveau. Certains concepts étaient presque inopérants dans leur champ d'expérience. Dans un tel contexte, il était rarement possible de stimuler leur intérêt pour la résolution de problèmes, même si certains d'entre eux trouvaient leur plaisir dans cet univers formel.

Par delà ces lacunes, il reste que la réforme des « maths modernes » partait d'un plan global clair et bien structuré. *Les matières s'y entre-suivaient de façon ordonnée et intelligible.* Les enseignants capables de saisir l'architecture du programme connaissaient leur position et la position de leurs élèves dans le projet global d'enseignement. Malheureusement, à cause de leur nature même, les fils conducteurs de ce programme étaient rarement saisis, particulièrement par les instituteurs.

Retenons cette observation essentielle : la source à peu de choses près unique de l'enseignement à cette époque était la science mathématique contemporaine. Et d'ailleurs quoi de plus naturel, lorsqu'on veut enseigner une science, que de partir ce celle-ci, d'essayer de la communiquer ? La rationalité de l'enseignement était celle des mathématiques elles-mêmes : des axiomes, des démonstrations rigoureuses, des concepts définitifs, des structures algébriques.

3. Après les « maths modernes », quelle cohérence ?

Que s'est-il passé après l'effacement des "maths modernes" ? Quelques matières qui avaient été nouvellement introduites ont survécu vaille que vaille, principalement les transformations géométriques et les vecteurs. Mais les subdivisions traditionnelles des mathématiques sont réapparues : l'arithmétique de base au niveau élémentaire, l'algèbre centrée sur les équations et non plus sur les structures, la géométrie des figures et des solides. De nouvelles matières sont apparues, principalement l'usage des calculatrices, l'algorithmique (sporadiquement), des éléments de statistique et de traitement des données.

Une autre tendance des programmes d'aujourd'hui est l'insistance sur la résolution de problèmes, un précieux héritage de G. Polya. Et il y a aussi l'importance accordée à la construction – ou la reconstruction – du savoir, dans toute la mesure possible par l'élève lui- même.

Une observation s'impose : alors que, comme nous l'avons dit ci-dessus, les « maths modernes » suivaient un plan global cohérent, les programmes d'aujourd'hui ne montrent pas le plus souvent un tel degré de cohérence. *On ne voit pas clairement comment les élèves sont conduits graduellement vers les mathématiques contemporaines.* Les « maths modernes » résultaient d'une mise à jour des programmes, inspirée par les progrès de la science mathématique observés vers le milieu du XX^{e} siècle. Les programmes et les manuels d'aujourd'hui sont davantage des assemblages, pas toujours bien articulés, de matières modernes et anciennes. *Ils ne sont pas inspirés par une pensée scientifique d'ensemble clairement identifiable.*

Pourtant, le besoin de cohérence est toujours présent. L'idée même de *construction du savoir*, évoquée ci-dessus, en témoigne. Mais elle renvoie davantage aux efforts de chaque élève pour comprendre et organiser un pan de connaissances qu'à l'élaboration d'un savoir global reconnu.

Le besoin de cohérence apparaît aussi, par exemple, dans le fait que trois chapitres des Standards de la NCTM [1989] s'intitulent *Les connexions mathématiques.*

Toutefois, ces chapitres ne développent pas un enchaînement de matières au long du programme : ils invitent l'élève à multiplier les représentations diverses des concepts, à reconnaître les liens entre concepts et à voir les relations entre diverses disciplines, mathématiques, physique, économie, ... Par contraste, les actes de Dubrovnik (O.E.C.E. [1961]) proposaient un enchaînement ferme de questions mathématiques à enseigner dans l'ordre donné.

En bref, on dirait que l'enseignement mathématique manque aujourd'hui d'une référence explicite et ferme, qu'il ne sait plus trop où sont ses sources, ni quelles sont ses lignes directrices. Cet embarras s'explique. En effet, si on reconnaît qu'un enseignement globalement déductif, *directement* inspiré par la pensée mathématique contemporaine, est inadapté à une majorité d'élèves, force est de chercher *une voie qui parte davantage de la pensée de ceux-ci pour aller par degrés, par généralisations successives, vers les mathématiques d'aujourd'hui*[1]. Mais cette voie n'est pas facile à dégager. On a l'impression que, depuis trente ou quarante ans, on la cherche à tâtons.

D'où la question fondamentale : comment élaborer des fils conducteurs, des théories génétiques[2] ? Occupons-nous maintenant de cela.

4. Partir de l'expérience commune

Une théorie génétique devrait être un chemin conduisant de manière sensée de la pensée et du langage communs à une théorie mathématique. Or l'expérience quotidienne n'impose pas d'emblée des distinctions entre disciplines : mathématiques, physique, chimie, biologie, géographie et d'autres analogues. Dans cette expérience, il y a des objets qui ont des grandeurs physiques (longueurs, poids, volumes, ...), des mouvements divers, des durées, des ensembles d'objets, des régularités, des rythmes, des relations entre des choses et des gens, etc. Certaines situations dans l'environnement sont en appel d'une explication mathématique, d'autres d'une explication physique, etc. Et même les mathématiques et la physique (ou d'autres couples de cette sorte) ne sont pas immédiatement disjoints. Les mathématiques doivent émerger graduellement, et pour de bonnes raisons, en tant que discipline distincte.

[1] Encore faudrait-il discerner, selon les catégories d'élèves, quels sont les objectifs mathématiques raisonnables.

[2] L'idée de théorie génétique est fortement présente dans l'œuvre de Freudenthal, même si c'est implicitement. Elle ne coïncide pas avec ce que O. Tœplitz [1963] a appelé une *approche génétique*, mais elle en est parente.

Cette émergence ne suit pas un ordre arbitraire, même si certains choix demeurent possibles. En fait, certaines filiations naturelles d'expériences et d'idées s'imposent d'elles-mêmes.

Considérons par exemple la pensée géométrique à ses débuts. La plupart des droites et des plans de notre environnement sont verticaux ou horizontaux. Toutes les droites verticales sont parallèles, et tous les plan horizontaux aussi. Toute droite verticale est perpendiculaire à tout plan horizontal et orthogonale à toute droite horizontale. Il serait difficile de croire que ces deux directions physiques (physiques parce qu'elles doivent leur existence au champ de gravitation) ne joueraient pas un rôle important dans la naissance des notions de droite, de plan, de parallélisme et d'orthogonalité[3]. Bien entendu, à une étape ultérieure de l'étude de la géométrie, toute référence à la physique sera abandonnée. La géométrie apparaîtra alors comme une théorie abstraite, disponible pour des applications variées, y compris bien entendu en physique.

Voici un autre exemple de filiation naturelle. L'origine pratique des nombres décimaux (les nombres à virgule) se trouve dans la mesure des longueurs et d'autres grandeurs dans un système décimal d'unités. C'est aussi leur origine historique. Mesurer une grandeur est une activité physique. Laisser tomber le symbole de l'unité de mesure aboutit à constituer ces nombres en entités abstraites, disponibles pour toutes sortes d'applications. Et donc une succession raisonnable des idées est : d'abord des mesures (c'est-à-dire des décimaux concrets, dont l'usage saute aux yeux), et ensuite des décimaux abstraits[4].

Un principe essentiel sur le chemin qui va de l'expérience commune vers les mathématiques est qu'aucun concept ne devrait être introduit tant qu'il ne joue pas de rôle dans l'une ou l'autre explication. Les concepts mathématiques, tels qu'ils apparaissent dans les théories axiomatiques, sont munis de caractéristiques techniques dont la fonction est de permettre la construction de preuves rigoureuses et complètes, ne négligeant aucun cas particulier, évitant les pièges logiques. Dans les traités mathématiques, le rôle des définitions est moins de dire ce que les choses sont réellement, que de servir d'outils appropriés à la démonstration des théorèmes.

[3]Comme contre-exemples, on notera le rôle négligeable joué par les directions verticale et horizontale aux débuts de la géométrie dans les Standards de la N.C.T.M. [1989] ainsi que dans le programme français pour l'école primaire (voir B.O. [2002]).

[4]Voici de nouveaux contre-exemples : la mesure des grandeurs est souvent présentée non comme la source des décimaux, mais comme une application de ceux-ci (voir les deux références de la note 3).

Aux stades intermédiaires entre la pensée commune et la pensée mathématique, il y a des niveaux de rigueur[5] et des types de notions appropriées au champ de phénomènes étudié. De telles notions ont été appelées *objets mentaux* par Freudenthal[6]. Si un concept est introduit prématurément dans la construction de la pensée, c'est-à-dire à une étape où il ressemble à une machine compliquée pour exécuter des tâches simples, il manque d'une raison d'être.

Dans ces conditions, qu'est-ce qu'une *théorie génétique* au sens où nous l'entendons ici ? C'est une construction rationnelle qui va par paliers de contextes quotidiens vers une théorie mathématique, de questions et de notions simples, éventuellement liées à des perceptions et des manipulations d'objets, vers de nouvelles questions plus générales et plus abstraites. Chaque étape d'une telle construction répond à de nouvelles questions, sert à surmonter des obstacles nouveaux. Les objets mentaux et les concepts mathématiques mobilisés à chaque étape sont appropriés au contexte théorique auquel on est arrivé. En parcourant une théorie génétique d'un bout à l'autre, on doit saisir la raison d'être de chaque nouveau développement.

Ces quelques considérations générales méritent d'être illustrées par un exemple substantiel. Voyons cela.

DEUXIÈME PARTIE

Un essai de théorie génétique : de la proportionnalité à la linéarité

Voici maintenant, à titre d'exemple, une esquisse de théorie génétique concernant une partie des mathématiques enseignées de la maternelle jusqu'à la fin du secondaire. Nous avons choisi d'observer la notion de linéarité, c'est-à-dire les généralisations successives du concept de *rapport,* ou encore la construction de ce que l'on pourrait appeler *la structure linéaire*. Ce choix, qui mériterait d'être discuté en détail, peut être sommairement justifié par la prégnance de cette structure dans les mathématiques en général. De plus, il va dans le sens d'un renforcement de la notion de fonction, également centrale en mathématiques[7].

---

[5]Cf. H. Freudenthal [1973] : "Il y a des niveaux de rigueur, et pour chaque matière, il y a un niveau de rigueur qui lui est adapté ; l'élève devrait passer par ces niveaux et leur rigueur."

[6]Voir H. Freudenthal [1983], p. 31.

[7]Voir à cet égard F. Klein [1933] : "Wir, man nennt uns wohl die "Reformer", wollen in den Mittelpunkt des Unterrichts den Funktionsbegriff stellen, als denjenigen Begriff der Mathematik des letzten 200 Jahren, der überall, wo man mathematisches Denken braucht, eine zentrale Rolle spielt." (Nous, on nous appelle volontiers les « réformateurs », voulons placer le concept

Une remarque s'impose : en mathématiques, une structure est quelque chose qui existe et ne change pas. L'histoire séculaire des mathématiques a abouti à éliminer de cette discipline toute connotation temporelle. Les structures et les théorèmes sont « fixes ». Comment pouvons-nous alors imaginer *une évolution* de la structure linéaire ?

En tant que métaphore, considérons une graine qui devient une pousse, puis un arbuste et finalement un grand arbre. Elle produit des bourgeons, des feuilles, des fleurs et des fruits. Saison après saison, elle n'est jamais exactement la même, et qui plus est elle change considérablement. Toutefois, elle demeure un même être vivant, elle conserve son identité. Elle est un être en évolution. Ici nous aimerions considérer la *linéarité* comme un être en évolution, né dans le contexte des grandeurs (avant toute idée de mesure) et devenant finalement un grand arbre dans le contexte des espaces vectoriels. Une différence importante est toutefois que, par nature, cette évolution consiste en mutations successives, chaque mutation étant une généralisation. À chaque étape, une nouvelle structure – fixe, immobile – est engendrée. Ces discontinuités sont probablement les obstacles principaux rencontrés par les élèves.

Dans ce qui suit, nous avons autant que possible évité trop de subtilité mathématique. Les lecteurs mathématiciens comprendront sans peine au passage certains raccourcis de pensée.

5. Grandeurs et ensembles

Les grandeurs

Les longueurs, aires, volumes, poids et durées sont des exemples de grandeurs[8]. Les grandeurs existent avant d'être mesurées. Quelques-unes de leurs propriétés principales sont :

a) Deux grandeurs d'un même type étant données, elles sont égales, ou l'une est plus grande que l'autre : *les grandeurs sont ordonnées.*

b) Pour chaque type de grandeur, *il y a une addition.* Par exemple,

---

de fonction au centre de l'enseignement. Car il est celui des concepts mathématiques des 200 dernières années qui, partout où on a besoin de la pensée mathématique, joue un rôle central.)

Le principe didactique dont cette citation témoigne était connu en Allemagne, au début du XX[e] siècle, comme *das funktionales Denken" (la pensée fonctionnelle).* Pour plus de détails, voir K. Krüger [1999]. La notion de fonction mériterait d'être envisagée pour servir à l'élaboration de fils conducteurs.

[8]Pour une définition rigoureuse des grandeurs comme classes d'équivalence, voir N. Rouche [1992].

mettre deux bâtons bout à bout réalise la somme de deux longueurs ; rassembler deux objets lourds réalise la somme de deux poids ; verser deux quantités d'eau dans un vase réalise la somme de deux volumes.

c) Additionner deux grandeurs égales revient à multiplier une grandeur par 2. On peut dire la même chose pour 3, 4, ... Ainsi, *il existe une multiplication des grandeurs par les nombres naturels.*

d) Toute grandeur peut être divisée en 2, en 3, ... parts égales. Et donc *il existe une division des grandeurs par les nombres naturels.*

Les ensembles

Considérons maintenant les ensembles, en nous bornant aux ensembles finis. Pour plus de clarté, nous ne retenons que les ensembles formés d'objets identiques. Les ensembles partagent avec les grandeurs les propriétés a), b) et c) ci-dessus. Plus précisément,

a$'$) Étant donné deux ensembles, ils sont égaux[9], ou l'un est plus grand que l'autre (l'*égalité* est la possibilité d'une mise en correspondance terme à terme).

b$'$) Deux ensembles disjoints peuvent être *additionnés* (mis ensemble pour n'en faire plus qu'un).

c$'$) Tout ensemble peut être multiplié par 2, ou 3, ou 4, etc.

D'autre part et contrairement aux grandeurs, les ensembles ne possèdent pas la propriété d). En effet :

d$'$) Un ensemble peut être divisé en n parts égales seulement si n divise le nombre de ses éléments.

Les ensembles sont *discrets*, alors que les grandeurs sont *continues.*

Physique ou mathématique ?

Les opérations pratiques sur les grandeurs et les ensembles (d'objets matériels) demandent des manipulations physiques. De plus, ces manipulations souffrent de limitations importantes. Tout d'abord et surtout, les comparaisons de grandeurs ne sont pas entièrement précises, à cause principalement du manque d'acuité de nos organes sensoriels. Mais en outre et par exemple :

des objets trop grands ou trop petits, ou des ensembles comprenant des objets trop nombreux, ne peuvent pas être manipulés ;

---

[9]Nous utilisons ici le terme *égal* dans son sens quotidien. Il s'agit en réalité de l'égalité des cardinaux.

alors que des surfaces planes découpées dans du carton peuvent être comparées par superposition, tel n'est pas le cas des objets solides, car ils ne se pénètrent pas mutuellement ;

deux durées ne peuvent pas être comparées directement si elles ne commencent (ou ne finissent) pas en un même instant.

On pourrait aisément donner d'autres exemples. Au tout début, il n'y a pas de distinction entre propriétés physiques et mathématiques. Toutefois, *dès que l'on se met à raisonner à leur propos,* on suppose – fut-ce implicitement – qu'elles existent et sont exactes. Elles sont idéalisées. Autrement, beaucoup de propositions demeureraient indécises.

6. La proportionnalité avant les mesures

Une première notion de rapport

Pour pouvoir introduire l'une ou l'autre situation de proportionnalité, nous avons besoin de savoir ce qu'est un rapport. Soient a et b deux grandeurs. Il arrive – bien que rarement – qu'il existe un nombre naturel n tel que $b = n \times a$. Si c'est le cas, nous dirons que n est *le rapport de b à a*. Le rapport exprime combien b est plus grand que a.

Soient m et n deux nombres naturels. Quand il existe un nombre naturel p tel que $m = p \times n$, nous dirons que p est *le rapport de m à n*. Un tel rapport existe[10] si m est multiple de n.

Trois exemples de proportionnalité

Voici maintenant trois exemples de *proportionnalité* (la proportionnalité est la linéarité à sa naissance).

I. Premier exemple : lorsqu'on verse de l'eau dans un vase cylindrique, il y a une correspondance terme à terme entre les hauteurs et les volumes d'eau (voir la figure 1, qui montre des dessins en lieu et place des vases eux-mêmes). Observons que les hauteurs et les volumes sont des grandeurs de deux types différents. Par cette correspondance,

la somme de deux hauteurs correspond à la somme des volumes correspondants ;

lorsqu'il existe un rapport entre deux hauteurs, le même rapport existe

[10] On prendra garde à ce que, jusqu'à nouvel ordre dans cet exposé, un rapport est un nombre naturel.

entre les volumes correspondants.

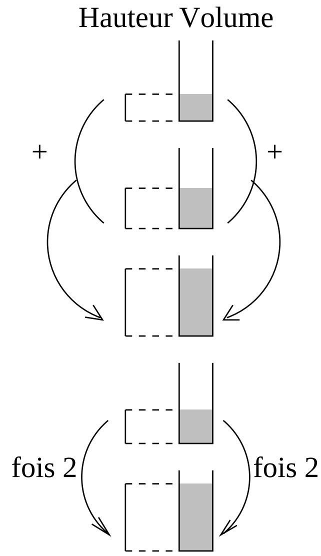

FIG. 1

Nous résumons ceci en disant que les hauteurs et les volumes sont *proportionnels*. La figure 1 est un *tableau de proportionnalité*. Ces propriétés, formulées ici dans un langage scientifique, sont comprises et s'expriment dans la vie quotidienne de façon plus familière. Par exemple, on dit "deux fois plus haut, deux fois plus de volume", et cela renvoie, fut-ce implicitement, à la correspondance des rapports.

Les flèches sur la figure 1 illustrent la correspondance des sommes et celle des rapports. Nous appellerons ces derniers *rapports internes*, parce que ce sont des rapports entre grandeurs apparaissant *à l'intérieur* d'une même colonne du tableau (les rapports internes seront opposés plus tard aux rapports externes).

II. Un autre exemple, à propos cette fois d'ensembles, est donné par une situation de troc. Je suis disposé à échanger 2 billes bleues contre 3 rouges. Et donc il existe une correspondance terme à terme entre les ensembles d'un nombre pair de billes bleues et ceux d'un nombre de billes rouges multiple de 3. Par cette correspondance,

la réunion de deux ensembles disjoints de la première sorte correspond à la réunion des deux ensembles disjoints correspondants de l'autre sorte ;

lorsqu'il y a un rapport entre deux ensembles de la première sorte, il existe le même rapport entre les ensembles correspondants de l'autre sorte.

III. Comme troisième exemple, considérons une balance à bras inégaux : par exemple avec un bras deux fois plus long que l'autre, comme sur la figure 2. Établissons une correspondance terme à terme entre les poids qui équilibrent la

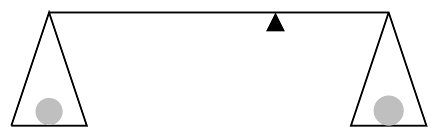

Fig. 2

balance, l'un sur le plateau de gauche et l'autre sur celui de droite. De nouveau, par cette correspondance

la somme de deux poids de la première sorte (ceux venant du plateau de gauche) correspond à la somme des poids correspondants de la seconde sorte (ceux venant du plateau de droite) ;

quand il existe un rapport entre deux poids de la première sorte, le même rapport existe entre les poids correspondants de la seconde.

Propriétés constitutives de la proportionnalité

Les exemples ci-dessus illustrent la notion de *proportionnalité* avant l'introduction des mesures. En voici les éléments :

il y a deux ensembles de grandeurs (ou deux ensembles d'ensembles) ;

il y a une correspondance terme à terme entre ces deux ensembles ;

toute somme de deux éléments d'un des ensembles (n'importe lequel) correspond à la somme des éléments correspondants de l'autre ;

quand il existe un rapport entre deux éléments d'un des ensembles (n'importe lequel), le même rapport existe entre les éléments correspondants de l'autre (ces rapports sont appelés *rapports internes*).

La correspondance des sommes entraîne celle des rapports[11], via la définition du produit d'un nombre naturel par un autre comme addition répétée.

[11] Rappelons qu'il ne s'agit jusqu'à présent que de rapports entiers.

Commentaires

1) Les grandeurs et les ensembles se comportent de la même façon dans le contexte envisagé.

2) Ils sont des entités physiques, mais idéalisées du fait qu'ils deviennent des objets mentaux.

3) Ils ne sont pas mesurés. Les mesures apparaîtront plus tard dans notre construction de la linéarité.

4) L'addition est sans doute la première, la plus simple et la plus fondamentale des opérations binaires rencontrées au cours du développement cognitif : qu'est-ce qui pourrait être plus simple en effet que *mettre deux objets ensemble* ? Les correspondances terme à terme sont probablement les applications les plus simples que l'on puisse imaginer, car les correspondances multiples impliquent des choix non définis (plusieurs images correspondant à un seul original). La conservation des sommes et des rapports via une correspondance terme à terme a quelque chose d'ordonné et de rassurant. D'où, sans doute, le caractère naturel de la proportionnalité.

7. La mesure en tant que proportionnalité

Dans cette section, nous considérons des grandeurs d'un type donné, n'importe quel type.

Les mesures en nombres naturels

Nous savons qu'il n'existe pas toujours un rapport (au sens proposé pour ce mot à la section 6 : un rapport est jusqu'ici un nombre naturel !) entre deux grandeurs a et b. En particulier, il n'y a pas de rapport de b à a si $b < a$.

Malgré ce défaut, introduisons une première notion de mesure. Soit u une grandeur, choisie comme *unité de mesure*. Considérons ensuite toutes les grandeurs a de la forme

$$a = n \times \mathrm{u},$$

où n est un nombre naturel quelconque. En d'autres termes, nous considérons toutes les grandeurs qui ont un rapport avec l'unité u.

Il existe une correspondance terme à terme entre ces grandeurs et les nombres naturels. Nous dirons de ceux-ci qu'ils sont les mesures des grandeurs dans l'unité u. Par cette correspondance, la somme de deux grandeurs correspond à la somme de leurs mesures ;

s'il existe un rapport entre deux grandeurs, le même rapport existe entre leurs mesures.

Un tel système de mesures est intéressant, car *les grandeurs et leurs mesures sont proportionnelles* : les mesures représentent fidèlement les grandeurs. Cela veut dire que les opérations habituelles sur les grandeurs ont une traduction fidèle en termes de mesures. De plus, l'addition des grandeurs et leur multiplication par un nombre naturel peuvent être exécutées sur leurs mesures. *Des opérations mentales – ou papier-crayon – remplacent des opérations physiques.*

Mais ce système de mesures comporte deux lacunes :

seules les grandeurs de la forme $a = n \times \mathrm{u}$ ont une mesure ;

il n'y a pas toujours un rapport entre deux grandeurs de cette forme.

Dans tous les cas où a n'est, pour aucun n, de la forme $n \times \mathrm{u}$, on peut chercher un n tel que

$$n \times \mathrm{u} < a < (n+1) \times \mathrm{u}.$$

Un tel n existe toujours, mais il n'exprime une mesure qu'approximativement.

Une réponse partielle à cette difficulté consiste à changer l'unité u, à en choisir une autre très petite, de sorte que davantage de grandeurs aient une mesure, et que les mesures soient plus précises. Mais il restera toujours que la plupart des grandeurs ne pourront être mesurées par un nombre naturel, et ce quelque petite que soit l'unité u choisie.

Bien entendu, une telle affirmation est théorique. En fait, quand u est très très petite, les limitations de nos organes sensoriels sont telles que nous ne percevons plus de différence entre $n \times \mathrm{u}$ et $(n+1) \times \mathrm{u}$. Et donc on peut toujours croire alors que la mesure est un nombre naturel.

Et maintenant vient la question : est-il possible d'améliorer ce système de mesures ?

Les mesures en fractions (positives)

On essaie de généraliser la notion de rapport. Donnons-nous deux grandeurs a et b. Au lieu de chercher un seul nombre naturel n tel que

$$b = n \times a,$$

cherchons deux nombres m et n tels que

$$b = m \times (a : n),$$

expression dans laquelle " :" signifie *divisé par*. On écrit cela d'habitude sous la forme

$$b = (\frac{m}{n}) \times a,$$

et $\frac{m}{n}$ est appelé *fraction*[12]. Quand une telle égalité existe, nous disons par voie de généralisation que $\frac{m}{n}$ est le *rapport* de b à a.

Les fractions sont considérées comme une nouvelle sorte de nombres, généralisant les nombres naturels. Elles sont munies d'une addition et d'une multiplication, ce que nous ne montrerons pas ici. L'existence de ces opérations entraîne que le concept de rapport peut être étendu aux fractions. Effectivement, si trois fractions sont telles que

$$(\frac{m}{n}) = (\frac{p}{q}) \times (\frac{m'}{n'}),$$

alors on dit que $\frac{p}{q}$ est *le rapport de* $\frac{m}{n}$ *à* $\frac{m'}{n'}$.

Observons que la notion de rapport a subi une mutation. En fait, tant que nous n'examinions que des nombres naturels, nous disions que le rapport d'une grandeur (ou d'un nombre) à une autre disait combien la première était plus grande que la deuxième. Mais maintenant, un rapport entre deux grandeurs (ou fractions) exprime combien l'une est *plus grande* ou *plus petite* que l'autre : nous entendons par là qu'un rapport peut dorénavant être soit plus petit, soit plus grand que un.

Nous pouvons faire deux observations :

> premièrement, deux grandeurs a et b étant données, *il arrive qu'il n'y ait pas de fraction* $\frac{m}{n}$ *telle que* $b = (\frac{m}{n}) \times a$ *ou, en d'autres termes, pas de rapport de* b *à* a. Un exemple bien connu est celui où b est la longueur de la diagonale d'un carré et où a est la longueur de son côté ;
>
> deuxièmement, *entre deux fractions, il y a toujours un rapport.*

Nous pouvons maintenant étendre notre système de mesures. Choisissons une unité de mesure u et considérons toutes les grandeurs de la forme

$$a = (\frac{m}{n}) \times \mathrm{u},$$

où $\frac{m}{n}$ est une fraction quelconque ou, en d'autres termes, toutes les grandeurs qui ont un rapport avec u. Il existe une correspondance terme à terme entre ces grandeurs et les fractions. Nous appelons ces dernières les *mesures* des grandeurs dans l'unité u.

Dans cette correspondance,

[12] Dans le présent contexte, *fraction* doit être interprété comme *fraction positive.*

> la somme de deux grandeurs correspond à la somme de leurs mesures ;
>
> le rapport de deux grandeurs est égal au rapport de leurs mesures.

Autrement dit, dans ce nouveau système de mesures, *les grandeurs et leurs mesures sont encore proportionnelles.* Ce n'est pas une surprise, car l'addition et la multiplication des fractions ont été définies de l'unique façon qui assure cette proportionnalité. Les opérations sur les fractions sont les contreparties exactes des opérations sur les grandeurs[13].

Mesurer en fractions est beaucoup plus performant que mesurer en nombres naturels. De fait, une unité u étant choisie, il y a beaucoup plus de grandeurs de la forme $(\frac{m}{n}) \times \mathrm{u}$ que de la forme $n \times \mathrm{u}$.

Toutefois, ce système de mesures présente une lacune :

> en effet, *seules les grandeurs de la forme* $a = (\frac{m}{n}) \times u$ *possèdent une mesure.*

Quand une grandeur a ne peut pas être mesurée par une fraction, alors on peut chercher une fraction $\frac{m}{n}$ telle que

$$(\frac{m}{n}) \times \mathrm{u} < a < (\frac{m+1}{n}) \times \mathrm{u}.$$

Une telle fraction existe toujours, et – encore mieux –, n peut être choisi aussi grand que l'on veut, de sorte que, u étant choisie, la mesure de a peut être estimée avec une précision arbitraire.

Et maintenant, malgré les améliorations que nous venons de relever, la question demeure : que faire pour améliorer, pour compléter ce système de mesures ?

Les mesures en nombres réels (positifs)

Une fois de plus, on essaie de généraliser le concept de rapport. Nous n'entrerons pas ici dans les détails. Un nouveau type de nombres est créé, appelé les *réels,* dont les naturels et les fractions sont des cas particuliers[14]. Ils sont tels que, *a et b étant deux grandeurs, il existe toujours un réel α tel que*

$$b = \alpha \times a.$$

Par voie de généralisation, α est appelé le *rapport* de b à a.

---

[13] C'est à ce point vrai que, dans l'enseignement élémentaire, les opérations sur les fractions sont définies via les manipulations correspondantes sur les grandeurs, ce qui est tout à fait sensé.

[14] Les *réels* doivent être interprétés ici comme *réels positifs.*

Les réels sont eux-mêmes munis d'une addition et d'une multiplication. Le concept de rapport s'étend alors à ces nombres, et on a même la propriété très intéressante que voici : deux réels α et β étant donnés, il en existe toujours un troisième γ tel que

$$\beta = \gamma \times \alpha.$$

Par voie de généralisation, nous appelons γ *le rapport de* β *à* α.

Étendons maintenant à nouveau notre système de mesures. Une grandeur quelconque u étant choisie comme unité de mesure, *toute grandeur est de la forme* $a = \alpha \times u$ *pour un certain réel* α. Il y a une correspondance terme à terme entre les grandeurs et les réels. Nous appelons ces derniers les *mesures* des premières dans l'unité u. Par cette correspondance,

> la somme de deux grandeurs correspond à la somme de leurs mesures ;
>
> le rapport de deux grandeurs égale le rapport de leurs mesures.

Les grandeurs et leurs mesures sont toujours proportionnelles.

La figure 3 illustre la proportionnalité des volumes et de leurs mesures en litres.

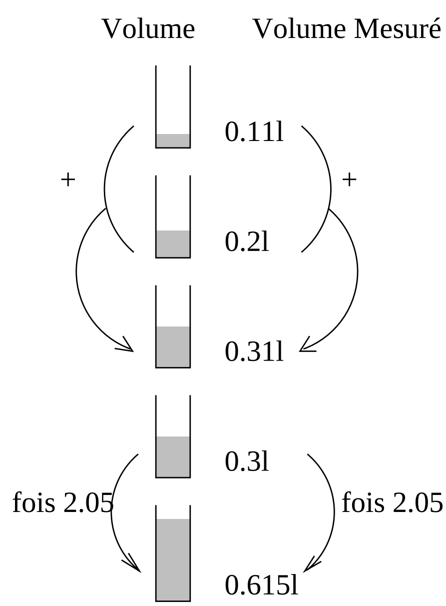

FIG. 3

La correspondance des sommes et celle des rapports internes y est illustrée par des flèches appropriées.

Au rebours des précédents, ce système de mesures ne présente aucune lacune. Et de fait, comme nous l'avons déjà observé,

> toute grandeur possède une mesure en nombre réel ;
>
> deux grandeurs quelconques ont toujours un rapport entre elles, deux réels quelconques aussi.

Il s'agit donc là, du moins d'un point de vue théorique, d'un système de mesures parfait. Pourquoi d'un point de vue théorique ? D'abord parce que les mesures échouent pratiquement dès qu'un trop grand degré de précision est exigé, et qu'alors seulement des approximations sont possibles. Ensuite parce que, alors que les nombres naturels étaient faciles à additionner, multiplier et diviser, ces opérations sont plus compliquées avec les fractions, et beaucoup plus compliquées avec les réels. *Les nombres réels fournissent une caractérisation numérique du continu,* mais au prix d'une théorie assez lourde, et à plus d'un égard peu naturelle.

8. Proportionnalité entre mesures

Grandeurs de même espèce

Comme premier exemple, considérons deux vases cylindriques de bases inégales, posés côte à côte sur une table horizontale. Versons de l'eau jusqu'au même niveau dans chacun d'eux. Il y a une correspondance terme à terme entre les volumes d'eau, également lorsqu'ils sont mesurés (dans une même unité).

premier vase : volume en litres	deuxième vase : volume en litres
0,2	0,4
0,4	0,8
0,6	1,2
0,8	1,6
1,2	2,4

Tab. 1

Il s'agit d'une correspondance entre des grandeurs, mais aussi entre des nombres, ceux qui mesurent les volumes. Ceci est illustré par un tableau contenant seulement des nombres (voir tableau 1). Il s'agit d'un tableau de proportionnalité, possédant les propriétés qui nous sont maintenant familières : la correspondance des sommes et celle des rapports internes.

Mais il y a autre chose. Nous avons des volumes de chaque côté, et donc il existe un rapport entre deux volumes qui se correspondent, égal au rapport de leurs mesures. Dans notre exemple, l'aire de la base du second vase vaut deux fois l'aire de la base du premier, ce qui entraîne que toute mesure lue à droite égale deux fois la mesure correspondante lue à gauche. Ce rapport, – le même pour tous les couples de mesures – est appelé *rapport externe* parce qu'il organise le passage d'une colonne à l'autre. Bien entendu, le passage de la colonne de droite à celle de gauche mobilise le rapport inverse, $\frac{1}{2}$ dans notre exemple. Au tableau 1, nous aurions pu ajouter des flèches (sur le modèle de celles des figures 1 et 3) pour montrer le rapport externe, et aussi la correspondance des sommes et celle des rapports internes.

En généralisant cet exemple qui portait sur des volumes, nous pouvons énoncer ce qui suit :

> dans un tableau de proportionnalité entre grandeurs de même espèce *mesurées dans une même unité,* il existe un rapport externe, qui est le rapport entre deux mesures quelconques qui se correspondent.

Ce rapport est aussi appelé *le coefficient de proportionnalité.*

Une propriété importante est que l'existence du rapport externe entraîne la correspondance des rapports internes, et réciproquement. Nous ne prouverons pas cette propriété ici.

Un deuxième exemple s'avérera d'une grande importance pour ce qui suit. Considérons, comme à la figure 4, une droite horizontale OP, une droite inclinée OQ et quelques segments verticaux. Les segments horizontaux Oa_0, Oa_1, Oa_2, etc. sont en correspondance terme à terme avec les segments verticaux a_0b_0, a_1b_1, a_2b_2, etc. La même chose est vraie aussi de leurs mesures dans une unité quelconque, par exemple le centimètre. Cette correspondance est une proportionnalité. Elle est illustrée par le tableau 2.

Dans celui-ci, le rapport externe est $\frac{2}{5}$. On vérifie aisément sur ce tableau la correspondance des sommes et celle des rapports internes.

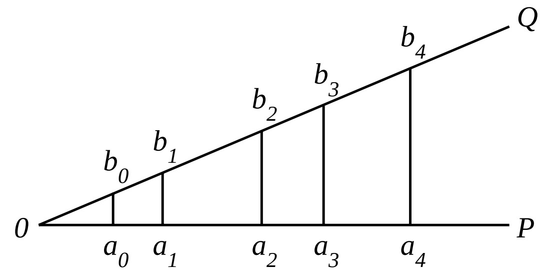

Fig. 4

segments horizontaux : longueurs en cm	segments verticaux : longueurs en cm
1,5	0,6
2,5	1
4,5	1,8
5,75	2,3
7,5	3

Tab. 2

Voici une propriété fondamentale de cette proportionnalité :

> sans plus nous occuper de la droite OQ, traçons un nombre quelconque de segments *proportionnels* tels que Oa_0, a_0b_0, ou Oa_1, a_1b_1, ou Oa_2, a_2b_2, etc., les uns horizontaux et les autres verticaux. Alors, il se fait que les points b_0, b_1, b_2, etc. sont alignés.

Un troisième exemple de proportionnalité, également fondamental, se trouve dans la reproduction d'objets à l'échelle. Considérons un objet A' qui reproduit un objet A à l'échelle 0,4. La distance entre deux points quelconques de A' égale la distance entre les points correspondants de A multipliée par 0,4. Les distances dans A' sont proportionnelles aux distances dans A, et le rapport externe est de 0,4. Dans ce contexte, *rapport externe* et *échelle* sont synonymes.

Grandeurs d'espèces différentes

Le tableau 3 montre à gauche un certain nombre d'intervalles de temps, et à droite les distances parcourues par un marcheur pendant ces intervalles. Il s'agit d'un tableau de proportionnalité.

durées en heures	distances en kilomètres
0,25	1
0,5	2
0,75	3
2	8
4	16

TAB. 3

Comparons maintenant ce tableau avec les tableaux 1 et 2. Au tableau 1, nous avions des volumes dans les deux colonnes, et au tableau 2 des longueurs dans les deux. On définit sans peine un rapport entre deux grandeurs de même espèce. C'est pourquoi nous avons pu trouver un rapport externe pour les tableaux 1 et 2. Au tableau 3, nous avons à faire à des grandeurs d'espèces différentes. Il n'y a pas de rapport entre de telles grandeurs. Personne n'arrivera jamais, en multipliant un intervalle de temps par un nombre, à obtenir une distance. Voilà qui est vrai pour des grandeurs non mesurées. Mais au tableau 3, les intervalles de temps et les distances sont mesurés, et les mesures sont des nombres. Et entre deux nombres (en excluant zéro), il y a toujours un rapport. Au tableau 3, le rapport externe égale 4. Mais les nombres représentant des grandeurs dépendent des unités de mesure, et donc le rapport change si on change celles-ci. On mentionne cette dépendance des mesures en disant que ce rapport, aussi appelé la *vitesse* du marcheur, est de 4 *kilomètres à l'heure*, ce que l'on écrit également $4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

On pourrait aussi, sur le tableau 3, ajouter des flèches pour montrer le rapport externe et illustrer la correspondance des sommes et celle des rapports internes.

En généralisant cette observation, nous pouvons conclure :

> dans un tableau de proportionnalité entre deux grandeurs d'espèces différentes, toutes deux mesurées dans une unité donnée, il existe un rapport externe qui dépend des unités choisies.

Une conséquence de cette dépendance par rapport aux unités est que, dans les cas de grandeurs d'espèces différentes, les rapports internes sont plus faciles à comprendre et à manipuler que le rapport externe[15]. D'où le succès de la *règle de trois* dans la résolution des questions de proportionnalité, cette règle reposant uniquement sur les rapports internes.

Des graphiques en ligne droite

La figure 5 est un graphique montrant le mouvement du marcheur considéré ci-dessus. Ce graphique repose sur les proportionnalités suivantes :

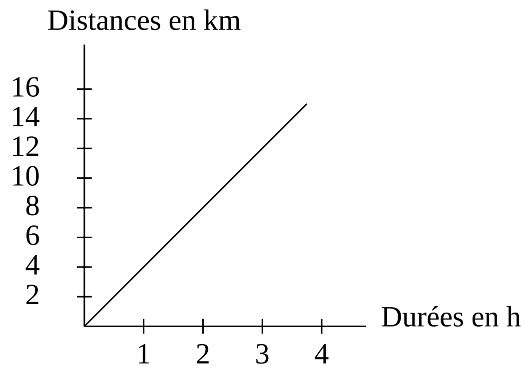

Fig. 5

tout d'abord et principalement, les distances et les durées, deux grandeurs physiques, sont proportionnelles (au sens donné à ce terme à la section 6, c'est-à-dire avant toute mesure) ;

les durées sont mesurées en heures, et ces mesures sont proportionnelles aux durées ;

les durées en heures sont transformées en longueurs exprimées en cm, à raison de 1,2 cm pour une heure ; cette transformation est aussi une proportionnalité ;

ces mesures en centimètres sont marquées sur l'axe des abscisses (cette activité de report est la réciproque d'une mesure : le passage d'une mesure à la grandeur physique correspondante, la longueur sur l'axe) ;

les distances sont mesurées en km, et ces mesures sont proportionnelles aux distances ;

[15] C'est là un fait communément observé dans les écoles, et il a été illustré de façon spectaculaire par I. Soto [1994] dans une étude sur les paysans illettrés du Chili.

les distances en km sont transformées en longueurs exprimées en cm, à raison de 0,3 cm par kilomètre ;

ces mesures en centimètres sont marquées sur l'axe des distances.

Il y a proportionnalité à tous les étages. Le résultat est un graphique en ligne droite. Pourquoi ? Nous avons vu plus haut qu'une disposition appropriée de longueurs proportionnelles fournissait un tel diagramme en ligne droite. Dans l'exemple ci-dessus, à cause de toute la chaîne des proportionnalités, les longueurs marquées sur l'axe des durées sont proportionnelles aux longueurs marquées sur l'axe des distances. Ceci explique la ligne droite.

Cet exemple d'un mouvement est typique d'une pratique générale : pour les besoins de la représentation, toutes les sortes de grandeurs sont transformées en longueurs, via des mesures et des échelles. Les longueurs sont les grandeurs les plus *lisibles*. C'est pourquoi la plupart des représentations graphiques sont basées sur des longueurs. La transformation des grandeurs en longueurs est une application centrale de la proportionnalité. Il ne fait pas de doute que la proportionnalité est une clé de la représentation fidèle des grandeurs et des fonctions.

9. L'intervention des quantités négatives

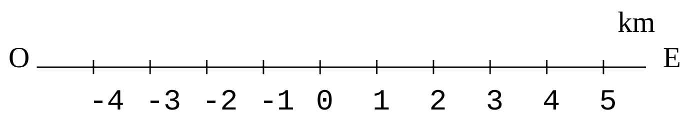

FIG. 6

La figure 6 montre une route orientée d'ouest en est, où les distances sont marquées en kilomètres. Ces distances sont mesurées à partir d'un certain point 0 et comptées positivement vers l'est et négativement vers l'ouest. Sur cette figure, des nombres positifs et négatifs localisent les points sur la droite.

Ceci implique une nouvelle interprétation de la notion d'ordre. Jusqu'à présent, *plus grand* et *plus petit* étaient interprétés dans leur sens ordinaire. Dorénavant, un nombre sera dit *plus grand* qu'un autre si le point qui lui correspond est sur l'axe à la droite de ce dernier. Alors que les lois abstraites de l'ordre, par ex. la transitivité, sont toujours valides, l'interprétation change considérablement. C'est une mutation drastique. Toutefois, l'interprétation précédente demeure valable pour les nombres positifs.

Le tableau 4 donne la position d'un marcheur sur cette route à différents moments.

temps en heures	position en kilomètres
-0.75	$+3$
-0.50	$+2$
-0.25	$+1$
0	0
$+0.25$	-1
$+0.50$	-2
$+0.75$	-3
$+1.00$	-4
$+1.25$	-5

Tab. 4

La situation est semblable à celle du marcheur considéré précédemment au sens où, dans les deux cas, une personne marche à $4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Mais il y a des différences importantes. Par exemple, concernant un tel mouvement, on peut se poser les questions suivantes :

> Étant donné la position du marcheur au temps $(+0,50)$, où était-il 2 heures plus tôt ?
>
> Connaissant la vitesse du marcheur et sa position au temps 0, où est-il (ou où était-il) à un instant donné, positif ou négatif ?

Pour répondre facilement à de telles questions, on introduit une addition et une multiplication pour cette nouvelle sorte de nombres. Ceux-ci – les réels dans toute leur extension –, généralisent les réels positifs. Cette extension est une mutation, comme le montrent entre autres deux changements spectaculaires :

> la somme de deux réels n'est plus nécessairement plus grande que chacun de ses deux termes ;
>
> le produit de deux nombres réels obéit à la fameuse règle des signes, qui n'a pas de raison d'être pour les réels positifs.

Ensuite, *on généralise une fois de plus la notion de rapport.* Malgré les changements majeurs mentionnés ci-dessus, *sa définition ne change pas de forme* :

> si α, β et γ sont des réels, et si
>
> $$\beta = \gamma \times \alpha,$$

alors γ est appelé le rapport de β à α.

De plus, et comme auparavant, deux réels quelconques (zéro excepté) ont un rapport.

Alors que la définition du rapport n'a pas changé, il n'en va pas de même de sa signification. Un rapport est maintenant plus qu'une estimation de combien un nombre est plus grand ou plus petit qu'un autre. Il prend aussi en compte le fait que les nombres comparés se trouvent ou non du même côté de l'origine 0 sur la droite des nombres.

Maintenant, en dépit de ces interprétations totalement nouvelles de l'addition et du rapport, les tableaux de proportionnalité existent toujours et demeurent formellement les mêmes, au sens où ils obéissent à la même définition. On peut, sur le tableau 4, vérifier cette permanence de la structure. La figure 7 montre que le graphique de la proportionnalité est toujours une ligne droite.

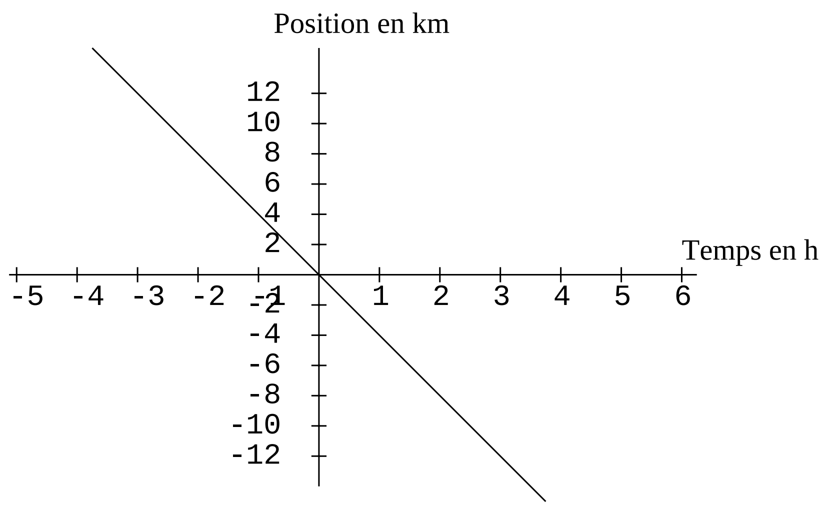

FIG. 7

Insistons sur le fait que, bien que la notion de proportionnalité soit demeurée structurellement la même, son interprétation, sa relation aux situations réelles a changé considérablement. Toutefois, dès qu'il s'agit seulement de nombres positifs, rien n'est changé.

10. La proportionnalité abstraite, la linéarité

Dans les exemples considérés jusqu'ici, tous les nombres exprimaient des mesures de volumes, de longueurs, de distances parcourues par un marcheur, de distances à partir d'une origine sur un axe, de durées, de vitesses, etc. Donc nous avons pris en compte les unités de mesure, et nos rapports externes étaient parfois des grandeurs composées, telles que des vitesses (mesurées). « Coupons maintenant le cordon ombilical » de la proportionnalité.

Laissons tomber toute référence aux mesures et définissons une proportionnalité entre nombres purs. Une telle proportionnalité est une correpondance terme à terme entre le système des nombres réels et lui-même. Elle peut être illustrée par un tableau en deux colonnes, montrant des couples de nombres réels (autant que l'on veut) face à face, avec les propriétés suivantes : la correspondance des sommes, la correspondance des rapports internes, l'existence d'un rapport externe, un graphique en ligne droite. Cette correspondance est aussi appelée *fonction réelle linéaire.*

À première vue, une telle notion abstraite de la proportionnalité ne dit rien sur rien, à part sur elle-même. À quoi sert-elle ? Elle est une pure structure – chose commune en mathématiques – un modèle prêt à être appliqué soit à des situations concrètes, soit dans d'autres contextes mathématiques.

11. Grandeurs orientées, vecteurs, transformations linéaires

Certaines des grandeurs que nous avons étudiées jusqu'ici étaient mesurées en nombres réels positifs et pouvaient être représentées sur un demi-axe gradué. D'autres étaient mesurées par des nombres réels généraux, c'étaient des grandeurs munies d'un signe, représentables sur un axe gradué. Les deux sortes étaient à une dimension. Toutefois, dans la vie quotidienne autant qu'en géométrie, en physique, etc., on rencontre des grandeurs orientées dans le plan ou l'espace. Par exemple, les changements de position d'un point, les translations d'un objet solide, les vitesses d'un point mobile dans un plan ou dans l'espace, les forces, etc. sont toutes des grandeurs qu'un nombre réel ne suffit pas à mesurer et qui ne peuvent pas être représentées par un point sur une droite. En plus d'être grandes ou petites, elles ont une direction. Nous les appelons *grandeurs orientées.* On peut les représenter par une flèche. Bien entendu, la notion commune de proportionnalité, celle que nous avons étudiée jusqu'à présent, ne s'applique pas telle quelle à ce nouveau type de grandeurs, elle doit être adaptée.

En principe, exactement comme nous l'avons fait pour les grandeurs ordinaires, nous devrions maintenant étudier les grandeurs orientées *concrètes*, c'est-à-dire que nous devrions explorer les contextes dans lesquels cette nouvelle sorte de grandeurs apparaît. Une telle étude, qui s'impose dans tout programme aboutissant aux espaces vectoriels, serait ici trop longue. Contentons-nous donc de jeter un coup d'œil d'une part sur les déplacements d'un point, et de l'autre sur les forces.

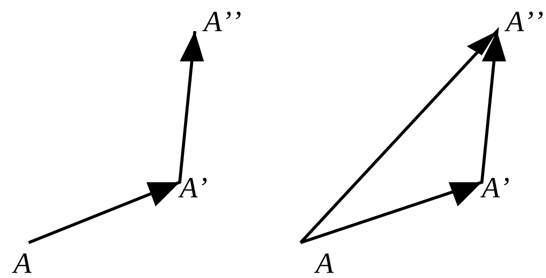

FIG. 8

Si un point mobile passe d'une position fixe A à une autre A', et ensuite de A' à A'', ses déplacements peuvent être représentés, comme le montre la figure 8, par des flèches, à savoir $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{A'A''}$ (dans des notations évidentes). Le déplacement résultant est $\overrightarrow{AA''}$. Nous l'appelons la *somme* des deux autres.

La figure 9 représente deux forces $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$ appliquées à un point P (par exemple un point possédant une masse).

On peut imaginer que les deux forces sont obtenues en tirant sur des ficelles attachées au point P. Elles ont un effet sur P (une accélération). On obtient le même effet sur P lorsqu'on remplace $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$ par une autre force $\overrightarrow{h}$, celle qui apparaît sur la figure 9(b). Nous appelons cette troisième force la *somme* des deux autres.

Remplaçons maintenant les déplacements et les forces par des flèches "abstraites" : nous les appellerons *vecteurs*[16]. Deux vecteurs peuvent être additionnés comme des déplacements ou comme des forces : le résultat est le même. Ainsi, nous avons une *addition des vecteurs.*

[16]On nous pardonnera de confondre *flèche* (ou *segment orienté)* et *vecteur*.

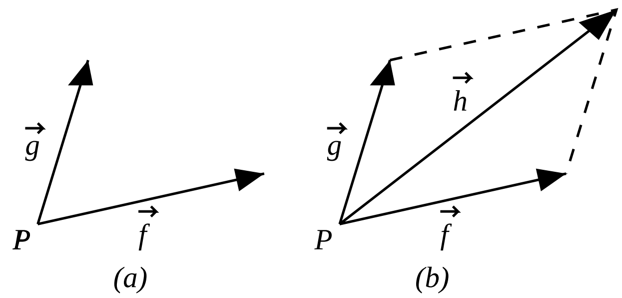

Fig. 9

De même que nous avons défini le produit d'une grandeur par un nombre réel, nous définissons le produit d'un vecteur par un nombre réel. Ce produit est connu sous le nom de multiplication du vecteur par un *scalaire* (un nouveau nom pour *nombre réel*).

Qu'en est-il maintenant des rapports ? Le rapport d'un vecteur à un autre "devrait être" un nombre qui, multipliant le second, donne le premier. Mais un tel nombre existe si et seulement si les deux vecteurs ont la même direction. Une impasse ?

Alors que, nous venons de le voir, il est habituellement impossible (dans un plan) de passer d'un vecteur à un autre en utilisant un seul nombre réel, il est habituellement possible de passer de *deux* vecteurs à un troisième en utilisant *deux* nombres réels. Soit $\overrightarrow{c}$ un vecteur, et $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ deux vecteurs non nuls de directions différentes. Alors il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{c} = \lambda \overrightarrow{a} + \mu \overrightarrow{b}$. Une telle expression est appelée *combinaison linéaire* de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$. Ainsi, la combinaison linéaire est, d'une certaine manière, une forme généralisée du rapport.

Voyons maintenant si nous pouvons utiliser l'idée de combinaison linéaire pour généraliser celle de proportionnalité. Et pour cela, revenons un instant en arrière pour voir comment il est possible de construire un tableau de proportionnalité dans le cadre des nombres réels. On inscrit un nombre réel non nul a dans la première colonne. On inscrit ensuite dans celle-ci autant de nombres réels que l'on veut. Chacun de ceux-ci est susceptible d'être mis sous la forme $b = \lambda a$, où λ est un nombre réel. Ce nombre est le rapport (interne) de b à a. Ensuite on inscrit, en face de a dans la deuxième colonne, un nombre a' quelconque. Et enfin, en utilisant la correspondance des rapports internes, en face de chaque nombre $b = \lambda a$, on écrit le nombre $b' = \lambda a'$. Le rapport externe du tableau est $\frac{a'}{a}$.

Imitons cette procédure dans le cadre des vecteurs. Dans une première colonne, écrivons deux vecteurs $\overrightarrow{a_1}$ et $\overrightarrow{a_2}$ non nuls et de directions différentes. Inscrivons dans la même colonne autant de vecteurs que nous voulons, de la forme

$$\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{a_1} + x_2\overrightarrow{a_2}, \tag{$*$}$$

où x_1 et x_2 sont deux nombres réels. Inscrivons ensuite, en face de $\overrightarrow{a_1}$ et $\overrightarrow{a_2}$ respectivement, deux vecteurs quelconques $\overrightarrow{a_1'}$ et $\overrightarrow{a_2'}$. Et enfin, en face de chaque vecteur de la forme (*), écrivons

$$\overrightarrow{x'} = x_1\overrightarrow{a_1'} + x_2\overrightarrow{a_2'}.$$

Le tableau ainsi constitué est tel que toute combinaison linéaire de deux vecteurs de la première colonne a pour image dans la seconde la même combinaison linéaire des deux vecteurs correspondants.

Cette propriété peut être reformulée de manière équivalente et sans doute plus suggestive de la manière suivante. Si deux vecteurs $\overrightarrow{x'}$ et $\overrightarrow{y'}$ correspondent dans le tableau à $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$, alors $\overrightarrow{x'} + \overrightarrow{y'}$ correspond à $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$. Il y a correspondance des sommes. En outre, si $\overrightarrow{x'}$ correspond à $\overrightarrow{x}$, alors $\lambda\overrightarrow{x'}$ correspond à $\lambda\overrightarrow{x}$. Il y a correspondance des rapports internes, dans ce sens restreint (vecteurs de même direction).

Ce que nous avons défini est une *application linéaire* pour les vecteurs en dimension 2. Elle généralise la notion de proportionnalité, que l'on peut donc aussi appeler *application linéaire* en dimension 1. On construirait de même des applications linéaires en dimension 3. Dans ce passage de une à deux, puis à trois dimensions, on voit surgir une grande richesse de phénomènes nouveaux. Mentionnons seulement le fait que toutes les géométries classiques du plan et de l'espace se rattachent aux applications linéaires en question. Nous voyons maintenant comment la proportionnalité, à l'origine une modeste graine (nourrie de contextes multiples), est devenue un arbre (abstrait) couvert de fleurs.

Ceci n'est toutefois pas la fin de l'histoire. Car la linéarité se développe ensuite du plan vers l'espace à trois dimensions, puis vers les espaces à n dimensions, là où l'algèbre prend par nécessité le relais de la géométrie, où l'imagination tombe en difficulté et où néanmoins les intuitions spatiales fonctionnent toujours. Pour ne pas mentionner les espaces à un nombre infini de dimensions de l'analyse fonctionnelle, avec la découverte dramatique que, dans ce cadre, les applications linéaires ne sont pas toutes continues.

À la fin de ce long parcours, remarquons que, lorsqu'on étudie les phénomènes linéaires, on ne devrait pas oublier de les contraster avec les non linéaires. Malheureusement, le manque de place nous empêche de développer ici ce point de vue pédagogique fondamental.

CONCLUSIONS

Ici s'achève notre esquisse d'une théorie génétique, celle de la structure linéaire. À la lumière de cet exemple, essayons de préciser ce que nous entendons par *théorie génétique*, de dire quelles en sont la nature et l'utilité. On l'a vu, il s'agit d'une suite de notions, de théories, de structures qui vont de la pensée commune jusqu'aux mathématiques constituées. Pour l'essentiel, cette suite va dans le sens d'une généralité croissante, chaque notion s'avérant pertinente dans un contexte plus large que la précédente. Le passage de l'une à la suivante est fortement motivé par des questions, une ou des lacunes constatées, un obstacle à franchir, la recherche d'une compréhension nouvelle. Chaque théorie apparaît comme une réponse adéquate, efficace, aux difficultés rencontrées, aux nouveaux contextes pris en compte. Elle s'enracine dans tout le cheminement qui précède, où elle puise son sens et trouve sa source d'intuitions.

La théorie génétique aboutit à des théories abstraites : les rationnels, les réels, les espaces vectoriels... Ces théories larguent en cours de route leurs amarres à l'expérience commune, aux contextes concrets. Mais elles peuvent à tout moment en retrouver le chemin, car elles en sont issues. Elles ne sont pas comme des théories conçues d'emblée au niveau formel, partant ensuite à la recherche de leurs applications.

Ainsi, une théorie génétique ne va pas d'axiomes et de définitions en lemmes, théorèmes et corollaires. Elle n'est pas *globalement* déductive. Mais alors, on peut se demander où sont, dans un tel schéma, les démonstrations, les déductions. Nous l'avons souligné en cours de route, chaque notion ou théorie nouvelle est le résultat d'une mutation (qu'on se souvienne des avatars du concept de rapport). Et donc, comme à chaque étape il y a changement de l'une ou l'autre définition ou propriété, il faut chaque fois réorganiser les choses. Et réorganiser veut dire mettre de l'ordre déductif. La théorie génétique est jalonnée de preuves.

Voyons maintenant à quoi servent les théories génétiques ? Voici quelques essais de réponses. Elles servent à clarifier les relations entre les choses et les phénomènes quotidiens et leur expression mathématique, à exhiber les raisons fortes, quoique parfois cachées, qui sous-tendent la construction des mathématiques. Elles cernent ce que l'on pourrait appeler une culture mathématique consciente de ce qu'elle doit à la pensée commune. Si ce n'était là une expression un peu ambitieuse, on pourrait dire qu'elles sont le résultat d'un effort vers une *épistémologie rationnelle*[17].

Mais en quoi une théorie génétique peut-elle être utile à l'enseignement ?

Pour éviter de graves confusions, soulignons d'abord qu'*une théorie génétique ne peut pas inspirer directement un programme d'études.* En effet, les choses se passent, dans la progression familiale et scolaire d'un enfant, dans un ordre qui n'a pas un tel degré de rationalité. Par exemple,

> les enfants ne découvrent pas en détail les propriétés des grandeurs non encore mesurées avant de rencontrer certaines mesures ;
>
> ils n'apprennent pas les propriétés principales qui fondent les nombres naturels avant de rencontrer quelques fractions simples ;
>
> ils découvrent les nombres négatifs sur le thermomètre longtemps avant d'apprendre à les utiliser pleinement en algèbre ;
>
> ils ont l'expérience des vitesses et des forces et de certaines de leurs propriétés élémentaires longtemps avant de les représenter par des vecteurs.

Une fois cette précaution prise, venons-en aux raisons qui justifient l'élaboration de théories génétiques dans la perspective de l'enseignement.

On peut espérer que si les auteurs de curriculums et de programmes comprennent en profondeur la *construction* de la matière mathématique, il introduiront de façon plus efficace les concepts nouveaux et seulement en cas de nécessité ou d'utilité visible.

On peut espérer qu'un enseignant qui a compris et assimilé une théorie génétique bien bâtie, d'une part dispose de clés pour construire son cours et interpréter certaines difficultés rencontrées par ses élèves, et d'autre part soit conscient de l'endroit où se trouve sa classe dans la construction d'un certain savoir, de ce qui

[17] *Épistémologie rationnelle* par opposition à *l'épistémologie historique*, qui étudie l'émergence des concepts au fil des siècles, et à *l'épistémologie génétique* (au sens de Piaget) qui étudie l'émergence des concepts chez les individus au cours de leur enfance. L'épistémologie rationnelle résulterait davantage d'une recherche des liens entre concepts, tels que peut les apercevoir un adulte utilisant sa raison. Elle relèverait de la *lumière naturelle* au sens cartésien ou pascalien de l'expression.

vient logiquement (pas chronologiquement) avant, et de ce qui se prépare pour après.

On peut espérer qu'un enseignant qui aurait approfondi l'une ou l'autre théorie génétique réaliserait que les mathématiques ont des racines dans la réalité, qu'elles ont une forme et des articulations intelligibles, qu'il aurait pour les mathématiques un intérêt accru et qu'il en aurait moins peur.

Qu'on nous permette de conclure par une seule suggestion : *que dans chaque pays, un groupe permanent d'enseignants de tous niveaux et de mathématiciens étudie le curriculum comme un tout, de la prime enfance à l'âge adulte, de la connaissance commune aux mathématiques, en évitant tout concept prématuré.* Insistons sur le fait qu'il doit s'agir d'un *groupe permanent*, car la probabilité est trop grande que des discussions occasionnelles s'avèrent inefficaces, sur un sujet où on sait que la compréhension mutuelle est difficile. Ne serait-il pas essentiel de mettre au travail sur un même projet ceux qui connaissent intimement les enfants et ceux qui connaissent intimement les mathématiques ?

Le présent article prend la suite d'une étude collective du CREM sur le même sujet (voir N. Rouche [2002]). J'exprime ma gratitude à ses auteurs : M. Ballieu, M.-F. Guissard, P. Laurent, Ch. Lemaître, L. Lismont, Ph. Tilleuil, Th. Sander, E. Vanderaveroet, F. Van Dieren, M.-F. Van Troeye, J. Van Santvoort et P. Wantiez.
Merci aussi à M. Ballieu, G. Cuisinier, Ch. Docq et M.-F. Guissard dont les remarques et critiques ont permis d'améliorer cet exposé et à Th. Gilbert pour d'intéressantes et fructueuses discussions.

Bibliographie

R. Bkouche [1991], Les mathématiques comme science expérimentale, *in* B. Charlot *et al.*, *Faire des mathématiques, le plaisir du sens*, A. Colin, Paris, 79-97.

B.O. [2002], *Programme de l'École Primaire, cycle des approfondissements*, Le Bulletin Officiel, n° 1, 14 février 2002, hors-série.

H. F. Fehr coord. [1961], *Mathématiques nouvelles*, O.E.C.E., Paris. Compte rendu du Colloque réuni à Royaumont du 23 novembre au 4 décembre 1959.

H. Freudenthal [1983], *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Reidel, Dordrecht.

H. FREUDENTHAL [1973], *Mathematics as an Educational Task,* Reidel, Dordrecht.

F. KLEIN [1933] *Elementar Mathematik vom Höheren Standtpunkte aus,* 1er vol. Arithmetik, Algebra, Analysis, 4e éd., Springer, Berlin.

K. KRÜGER [1999] *Erziehung zum funktionalen Denken, zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips*, Logos, Berlin.

N.C.T.M. (National Council of Teachers of Mathematics) [1989], *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston, Virginia.

O.E.C.E. [1961], *Un programme moderne de mathématiques pour l'enseignement secondaire*, Paris, (sans date, probablement 1961). Compte rendu du Groupe de travail réuni à Dubrovnik du 2 août au 19 septembre 1960.

G. PAPY [1963], *Mathématique moderne*, Marcel Didier, Bruxelles. Voir aussi quatre volumes publiés ultérieurement sous le même titre.

N. ROUCHE coord. [2002], *Des grandeurs aux espaces vectoriels, la linéarité comme un fil conducteur*, C.R.E.M., Nivelles (Belgique).

N. ROUCHE [2004], *De l'élève aux mathématiques, le chemin s'allonge, in* Ph. Bouillard et J. Lemaire, *L'apprentissage des sciences en question(s),* Espace de Libertés, Bruxelles, 2005, 29-49.

I. SOTO, N. ROUCHE [1994], Résolution de problèmes de proportionnalité par des paysans chiliens, *Repères-IREM* 14, pages 5-19.

O. TŒPLITZ [1963], *The Calculus, a Genetic Approach*, Univ. of Chicago Press.

NICOLAS ROUCHE
Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM)
5 rue Émile Vandervelde
B-1400, Nivelles, Belgique
rouche@math.ucl.ac.be