CATHERINE HOUDEMENT

Abstract. Hidden knowledge in usual verbal problem solving at primary school. This paper contributes to determine student's knowledge involved in arithmetic word problem solving, that are ignored by mathematics education research but discriminate reinvestment problems solving students : among these skills the use of a modeling approach (models are the arithmetic operations), different types of controls and the qualification. This paper shows how rich is a clinical approach after the solving session to discover ignored knowledge and feeds current (study of semiotic tools) and upcoming researches (controls and qualification) in relation to flexibility.

Résumé. Cet article participe à la détermination de connaissances que les élèves posséderaient ou qu'ils devraient posséder pour résoudre des problèmes arithmétiques verbaux. L'étude se centre sur les connaissances qui contribuent aux différences entre réussites d'élèves sur des problèmes de réinvestissement et qui sont peu connues des recherches en didactique des mathématiques. Parmi ces connaissances se trouvent l'utilisation d'une démarche de modélisation, divers types de contrôles et ce que nous appelons la qualification. Cet article prouve la potentialité d'une approche clinique sous forme d'entretien après la séance et alimente des pistes de recherche déjà initialisées (outils sémiotiques efficaces) ou à venir (jeu de contrôles et qualification) liées à l'apprentissage d'une certaine flexibilité.

Mots-clés. Résolution de problèmes, problèmes arithmétiques, schémas de problèmes, qualification, connaissances cachées, registres sémiotiques, modélisation, démarche expérimentale, flexibilité.

Introduction

Epistémologiquement faire des mathématiques est indissociable de la résolution de problèmes. Concernant l'enseignement des mathématiques, en particulier à l'école primaire (niveaux 1° à 5°, *id est* CP à CM2), l'hypothèse actuelle communément partagée est la suivante : les problèmes sont à la fois la source et la finalité des connaissances mathématiques. Ceci signifie : pour apprendre des mathématiques, il faut résoudre des problèmes ; mais pour résoudre des problèmes, il faut des connaissances mathématiques. Nous sortirons de ce cercle vicieux en considérant dans notre étude des problèmes à résoudre pour lesquels les élèves ont a priori « déjà les connaissances », c'est-à-dire des problèmes de réinvestissement.

Notre souci est de mieux appréhender les connaissances auxquelles les élèves font appel ou qu'ils mettent en œuvre, de leur propre initiative, pour traiter des problèmes ordinaires, plus spécifiquement les problèmes arithmétiques verbaux[1]. Bien entendu les recherches contemporaines sur les problèmes arithmétiques verbaux abondent (par ex. Nesher & Hershkovitz, 1991 ; Verschaffel & De Corte, 1993 ; Coquin-Viennot & Moreau S., 2007, …). Un grand nombre de recherches se centre sur l'étude de l'efficacité de l'enseignement d'outils sémiotiques (par exemple la droite numérique, voire la droite « des entiers », cf. Elia dans ce numéro) pour la réussite aux problèmes. Ce n'est pas dans ce cadre que nous nous plaçons : nous inscrivons cette recherche, dont nous voulons souligner le caractère exploratoire, dans la volonté de débusquer des connaissances ignorées, au sens des enjeux cachés d'apprentissage (Castela, 2008). Ces connaissances ignorées seraient nécessaires à la réussite (ici la résolution correcte des problèmes verbaux arithmétiques), mais elles ne seraient repérées ni par les études didactiques, ni par les institutions d'enseignement, au sens où l'enseignement effectif de ces connaissances ne serait pas expressément conseillé, que ce soit dans les programmes ou les ressources pédagogiques. Parmi ces connaissances, certaines seraient utilisées par les résolveurs experts de façon non consciente, elles auraient été auto-construites ou apprises « par hasard » (à l'occasion d'une remarque anodine d'un professeur,…) ; dans tous les cas, leur absence poserait problème aux élèves qui en sont démunis.

Cet article se propose d'installer cette problématique dans le cadre de la didactique française, de valider l'hypothèse de l'existence de telles connaissances en les exhibant, et d'ouvrir de nouvelles perspectives de recherche qui prendraient comme objets d'étude la possibilité et la pertinence d'un enseignement de ces connaissances. Il cherche à montrer en quoi cette étude interroge la notion de flexibilité cognitive (Clément, 2009) et questionne la difficulté de son enseignement.

1. Une première insertion théorique

L'étude des connaissances en jeu mises en jeu par les élèves dans la résolution de problèmes verbaux arithmétiques d'école primaire n'est pas si courante : en didactique, les travaux liés aux problèmes ordinaires portent plutôt sur le secondaire (Coppé, 1995) et/ou proposent plutôt une analyse a priori de problèmes (par exemple Robert, 1998).

Les problèmes arithmétiques verbaux usuels en primaire ont cette particularité de problématiser une réalité, évoquée par l'énoncé, pour obtenir une réponse mettant en jeu des mathématiques.

[1] Problèmes numériques, résolubles avec une (ou plusieurs) des quatre opérations usuelles, et dont l'énoncé est un texte, plutôt écrit.

Nous distinguons deux versants du passage du réel (présent ou évoqué – Houdement, 1999) au traitement mathématique : la *mathématisation* (Freudenthal, 1971) et la *modélisation* par des connaissances mathématiques. La *mathématisation* est une première étape d'apprentissage, elle consiste à acquérir des connaissances mathématiques à partir de la résolution de problèmes issus du réel par la transformation de modèles implicites d'action (Brousseau, 1978 ; Vergnaud, 1990). La *modélisation* est plutôt l'inférence, puis l'opérationnalisation de mathématiques pour résoudre un problème issu du réel. Nous considérons que la résolution de problèmes **d'application ou de réinvestissement** ne relève pas tant de la *mathématisation* que de la *modélisation.*

Prenons l'exemple de la recherche du nombre de tulipes dans un massif à partir de ces quatre énoncés :

a) un massif de fleurs formé de 60 tulipes rouges et de 15 tulipes noires ;
b) un massif de 60 rangées, toutes de 15 tulipes ;
c) un massif de 60 fleurs, composé de tulipes et de 15 jonquilles ;
d) 60 tulipes disposées en 15 massifs tous identiques.

Les énoncés évoquent le même contexte, présentent la même structure syntaxique (similarité de lecture-compréhension), posent la même question (combien de tulipes dans UN massif ?), mettent en jeu les mêmes nombres (15 et 60) et pourtant ils relèvent d'opérations arithmétiques différentes. Comment savons-nous, nous experts, différencier les traitements ? Notre intérêt, déjà ancien, pour la résolution de problèmes (Houdement, 1999, 2003, 2009 ; Coppé & Houdement, 2002 ; Artigue & Houdement, 2007) nous a conduit à nous intéresser aux travaux de psychologues cognitifs qui se sont penchés spécifiquement sur les mathématiques, en particulier J. Julo et G. Vergnaud dont nous examinerons les réponses dans le paragraphe suivant.

Il est déjà intéressant de constater l'embarras que nous avons à expliquer, après coup, nos choix. Julo (1995, p. 86) l'avait fort bien pointé :
« *La vraie compréhension n'a pas de mémoire. Dès que nous avons compris quelque chose, nous oublions comment nous sommes parvenus à cette compréhension ou plus exactement nous interprétons la démarche qui nous a conduits à l'état actuel de notre compréhension à la lumière de ce nouvel état*.»[2]

[2] Notons qu'un des soucis de l'enseignement réside d'ailleurs dans la pertinence de la réinterprétation d'une réussite : établir une connexion entre les connaissances mathématiques à institutionnaliser et les stratégies des élèves mises en œuvre.

1.1. Le regard de cognitivistes sur les mathématiques

Julo (1995, 2002) suppose l'existence en mémoire d'objets mentaux structurés par le sujet, les schémas de problèmes, à fonction assimilatrice, qui permettent au sujet de mobiliser dans de nouveaux problèmes des connaissances acquises lors de la résolution réussie d'anciens problèmes. La nature exacte des schémas et leur organisation en mémoire est encore floue, mais il est admis que le sujet les forme à partir des problèmes qu'il rencontre, des représentations qu'il construit et des analogies qu'il perçoit. Julo distingue trois structures de schémas (Julo, 2002, p. 36) :

- les schémas de type « cas » : des problèmes de référence qui deviendraient prototypiques, tels différents cas de la bibliothèque du joueur d'échecs ;
- les schémas de type « regroupement », suivant un regroupement personnel, non nécessairement logique, mais pouvant être partagé entre individus (par exemple le contexte des recettes et des dépenses, où les réussites des élèves sont souvent plus nombreuses) ;
- les schémas de « catégorie plus abstraite », autour d'un même outil de modélisation (par exemple la droite arithmétique), une même procédure de résolution (par exemple la règle de trois) ou une certaine structure.

Des exemples de telles structures nous sont fournis par Vergnaud (1990) avec la théorie des champs conceptuels. Un concept prend du sens à partir d'une grande variété de situations, et pour l'élève la conceptualisation consiste à élaborer les moyens intellectuels de traiter des situations de plus en plus complexes. Cette conceptualisation passe par la mise en œuvre par l'élève de connaissances implicites dans l'action et la proposition par le médiateur de formes symboliques ad hoc (langage, écritures arithmétiques) propres à pointer des ressemblances dans le traitement des situations. Un champ conceptuel est ainsi un ensemble des situations dont la résolution met en jeu une grande variété de procédures, liés à des concepts très proches. Vergnaud fait en particulier l'hypothèse que les compétences des élèves résolvant des problèmes numériques élémentaires ne reposent pas tant sur leur maîtrise des algorithmes opératoires que sur la conceptualisation de relations liées à des types de raisonnements. Ce qui l'amène, d'une part, à regrouper les problèmes numériques ternaires selon deux champs conceptuels : les structures additives, autour de l'addition et de la soustraction et les structures multiplicatives autour de la multiplication, de la division et de la proportionnalité ; d'autre part à proposer à l'intérieur de chaque champ des niveaux de complexité a priori, appuyés ou confortés par des études statistiques de résultats d'élèves.

Les schémas de problèmes résulteraient de la création de relations (de nature logique ou autre) entre des problèmes, construites par le sujet, dans une approche ergonomique personnelle. Ces schémas se constitueraient **dans** l'activité de résolution de problèmes. Nous faisons nôtre cette hypothèse de Julo : certains élèves mettraient en œuvre de façon plus ou moins spontanée une structuration des problèmes résolus qui leur permettrait d'augmenter leur champ de problèmes résolubles, contrairement à d'autres élèves. Ce peut être coiffé par la flexibilité cognitive, envisagée comme capacité « à déplacer volontairement le foyer attentionnel d'une catégorie de stimuli à une autre, ou d'un processus cognitif à un autre » (Clément, 2009, p. 112).

1.2. Travail privé, travail public

Dans la mesure où nous souhaitons débusquer des connaissances ignorées, il nous faut « remonter » jusqu'à la composante privée du travail de l'élève, celle qui apparaît peu sur les traces publiques. Nous devons donc analyser d'une part les problèmes rédigés, mais aussi les brouillons des élèves. Mais nous savons, par expérience, que ces lieux d'écriture a priori privée sont diversement investis selon le contrat de classe : certains enseignants corrigent aussi les brouillons (ce qui enlève leur part privée), d'autres font utiliser l'ardoise (effaçable, ce qui rend le recueil des traces heuristiques impossible). C'est pourquoi l'étude des seuls brouillons ne nous suffit pas. Il nous faut trouver un moyen d'accès, autant que faire se peut, à la pensée individuelle en amont de l'écriture, celle qui déclenche un passage à l'écrit, sur la route de la solution.

Nous nous intéressons aussi au passage du *résultat* (souvent calculé) à la *réponse* (Margolinas, 1993, p. 208) et au fait de considérer le problème comme terminé. A partir de quand, de quoi l'élève reconnaît il le résultat de son calcul comme réponse à la question posée ? En effet certains élèves font des calculs et obtiennent des résultats sans savoir si ces résultats donnent la réponse.

2. Méthodologie

La question générale est la suivante : quelles idées, dans le temps court de la résolution d'un problème numérique viennent ou ne viennent pas à l'esprit de l'élève, provoquant ainsi une avancée vers la réponse ou au contraire un blocage ? Cette question est très générale mais elle traduit bien la recherche : se laisser surprendre par les idées des élèves, « *s'intéresser vraiment à ce que fait l'élève, à ce qu'il produit, à ses mathématiques* » (Conne, 1999, p. 53)

Pour avoir accès à la composante privée de l'élève, nous aurions pu demander, pendant la résolution aux élèves, de raconter leur recherche, mais il est connu que la formulation verbale n'est pas toujours possible et transforme le rapport à la tâche ; nous aurions pu chercher à recueillir des échanges entre deux élèves résolvant ensemble avec la présence d'un enregistreur, mais il est connu que la coopération transforme la réflexion. Or nous souhaitions « attraper la singularité ». Nous avons donc choisi, pour saisir la singularité, des entretiens individuels de type explicitation (Vermersch, 1994) méthodologiquement intéressants pour relever des « connaissances cachées » (Sackur & *al*. 1997 ; Castela, 2008). L'entretien (enregistrement audio) a eu lieu sur le temps de classe, mais hors de la salle de classe et loin du groupe classe, dans la semaine qui a suivi le moment où l'élève a résolu individuellement les problèmes dans la séance collective prévue pour cela.

Les problèmes ont été choisis par l'enseignant, dans le cadre de sa progression usuelle avec la commande du chercheur de problèmes arithmétiques ordinaires de réinvestissement. Le lecteur pourra être surpris de ce degré de généralité, nous n'avons pas resserré sur un champ conceptuel. Mais notre grande confiance dans les enseignants de notre étude nous faisait attendre des problèmes vus par l'enseignant comme susceptibles de réussites et nous voulions surprendre les connaissances des élèves qui différenciaient les réussites. Notre analyse après-coup des problèmes a confirmé que les problèmes relevaient de connaissances que les enseignants avaient déclaré faire travailler et apprendre et que les réussites étaient différentes selon les élèves.

Les élèves interviewés ont été choisis par le professeur avec la commande du chercheur d'élèves « bons » et « moins bons » en mathématiques. Cette différence n'a pas été pointée dans les analyses. Lors de l'entretien, l'élève avait sous les yeux la copie rendue (éventuellement corrigée) et son éventuel brouillon. Nous avons étudié onze protocoles écrits d'élèves de deux classes différentes de cycle 3 (grades 3°, 4° et 5°), en les mettant en relation avec copie et brouillon. En faisant des croisements entre des pensées de plusieurs élèves, nous avons ainsi dégagé des invariants (études croisées) ; nous avons aussi constaté des redondances dans la pensée d'un élève particulier (monographies).

Notre problématique peut donc se raffiner en : quelles connaissances, concernant la résolution de problèmes arithmétiques verbaux de réinvestissement, suffisamment partagées (par des élèves différents ou un même élève dans plusieurs problèmes), surprenantes au sens où peu connues en didactique des mathématiques ou mal repérées dans le programmes, …, outillent certains élèves ou semblent faire défaut à d'autres ?

3. Typologie des inférences et contrôles

Le lecteur aura saisi l'ouverture a priori de la question à l'étude. Pour organiser la présentation des interprétations issues de l'analyse des données, nous présentons ci-dessous une typologie, établie au fil d'analyses *a priori*[3], des inférences et des contrôles utilisables par les élèves dans la résolution de problèmes de réinvestissement. Ce développement participe au cadrage théorique de notre recherche.

La convocation d'une connaissance est fortement liée à celle du contrôle de sa pertinence dans le problème : contrôle ou *vérification*, au sens de Coppé (1995), « *argument avancé ou action mise en œuvre par l'élève pour limiter l'incertitude sur le résultat (….). Une vérification a pour conséquence soit d'accroître la vraisemblance et éventuellement acquérir la certitude du résultat, soit d'engendrer un doute plus grand et éventuellement déboucher sur une phase de rectification*. » (Coppé, 1995, p. 30). C'est l'idée d'un véritable processus de contrôle au sens de Margolinas (1993, p. 213) pour anticiper la validation, que nous exprimerons par l'expression inférences et contrôles. Ce rôle des contrôles a aussi été souligné par Burgermeister et Coray (2008) pour des élèves plus âgés résolvant des problèmes de réalité évoquée.

Quelle idée de l'action à mener ont les élèves ? Quel contrôle les élèves peuvent ils avoir à exercer sur le résultat de leur action ? Si leur action consiste à se lancer dans un calcul lié au choix d'une opération, la transformation du résultat en réponse passerait par un contrôle du nombre résultat. Nous proposons ici une typologie des inférences ou des contrôles (Houdement, 2006) en jouant sur leur nature : pragmatique, sémantique, syntaxique.

Nature sémantique : c'est l'interprétation de la situation du problème (Vergnaud, 1986 ; Coquin-Viennot & Moreau, 2007), interprétation liée à la représentation que l'élève se fait du problème (au sens de Julo, 1995) qui déclenche des associations de type : 'partager c'est diviser' ; 'fois c'est multiplier'.

A priori ce type d'interprétation se place souvent en amont du choix d'une opération, d'un calcul ; les trois autres raisonnements se situent davantage après qu'un calcul ait été mené à terme.

Nature pragmatique : c'est la connaissance de la réalité évoquée par le texte du problème (notamment l'ordre de grandeur des résultats) qui régule le résultat et éventuellement convainc l'élève de commencer un autre calcul.

Nature syntaxique : c'est l'analyse des relations entre les objets mathématiques (ici les nombres) qui permet d'avancer : seuls les nombres sont conservés (les mesures en jeu sans référence aux grandeurs qu'elles mesurent, par exemple 12, et non 12 euros ou 12 tables). Le contrôle s'exerce alors sur les écritures mathématiques, indépendamment de la signification que ces écritures ont par

[3] Il ne s'agit pas d'analyse *préalable*, mais bien d'une analyse *a priori (*Artigue, 1988) qui envisage des « possibles » dans les pensées des élèves.

rapport au texte du problème ou des grandeurs en jeu. Cette décontextualisation est souvent très utile pour l'obtention d'un résultat ; par contre elle peut se révéler problématique pour l'obtention de la réponse.

La qualification

En précisant la nature des inférences et des contrôles, nous essayons de prendre compte les deux plans d'étude liés à un problème verbal arithmétique : plan de la réalité et plan des mathématiques. Comment penser l'articulation ? Elle est d'abord liée à une sorte de syntaxe sur les grandeurs (que les physiciens nomment les équations aux dimensions), dont la version minimale est d'associer un nombre et une unité (12 euros). Nous appellerons cela *qualification faible*. Plus généralement qualifier revient à savoir dire (savoir se dire) quelle grandeur « contextualisée » est

4. Choisir un modèle ? Tester un modèle ?

4.1. Des stratégies pour inférer un modèle

Dans les problèmes arithmétiques rencontrés par les élèves de cette étude, les modèles à inférer sont essentiellement des opérations.

Les élèves repèrent souvent le « bon » champ conceptuel, c'est-à-dire qu'ils infèrent une des deux opérations du champ conceptuel dont relève le problème. Nous interprétons cela comme une utilisation d'inférences sémantiques pour déclencher un calcul ou des calculs. Ces inférences sont souvent « intériorisées », naturalisées, elles ne sont pas explicitables lors de l'entretien. Le lecteur pourrait se dire que cette absence d'explicitation relève d'un manque de mots pour le dire, nous préférons suivre l'hypothèse de Julo (voir plus haut) : « la vraie compréhension n'a pas de mémoire ... »

Voyons les réponses de Victor (5°), Clémence (5°) et Marie (5°) lors d'un questionnement général sur les problèmes :

C.H. :
Victor :

C.H. :

Clémence :

C.H. :

Marie :

Ces élèves perçoivent la relation entre énoncé et opération comme une évidence : tout se passe comme s'ils récupéraient en mémoire[4] un résultat, comme un adulte qui répond automatiquement 5 pour 17 moins 12. Les déclarations des élèves confortent les hypothèses de Julo sur l'existence en mémoire de schémas de problèmes, schémas qui seraient activés par des éléments de l'énoncé. Nous avons constaté que les éléments de l'énoncé qui jouent le rôle d'indices pour les élèves sont variables selon les connaissances des élèves.

Nous avons pointé différentes inférences de nature sémantique.
Deborah (cf. annexe 2, lignes 61 à 68), ayant à trouver le poids d'une table connaissant la masse (300 kg) de 25 tables, utilise la relation connue entre partage et division :

---

[4] Les psychologues cognitifs distinguent deux types de stratégies en calcul mental : celles correspondant à des récupérations et celles correspondant à des reconstructions ; cf. par exemple Thévenot & al (2010).

C.H. :

Deborah :

Revenons sur Deborah 5° (cf. annexe 2, lignes 45 à 54) : elle doute de son calcul (résultat) car devant la valeur calculée du poids d'une table, elle s'interroge sur la possibilité d'un tel poids pour une table.

C.H. :

Deborah *[hésitante]* ***:***
C.H. :
Deborah *[en regardant C.H.]* ***:*** *.*
C.H. :
Deborah *[elle pose la division 300 par 25]* ***:***
C.H. :
Deborah :
C.H. :
Deborah :
C.H. :
Deborah :

Mais un peu plus loin (lignes 61 à 68), elle nous montre qu'elle contrôle l'opération pressentie (la division) par rapport à deux autres (multiplication, soustraction) par l'ordre de grandeur supposé de la réponse attendue.

C.H. :

Deborah :
C.H. :

Deborah :
C.H. :

Deborah :
C.H. :

Deborah :

Deborah infère (à juste titre) une division, doute de sa stratégie après calcul du résultat et la réaffirme après avoir croisé deux types de contrôle : pragmatique (souligné ci-dessus) et sémantique (la dernière ligne ci-dessus).

Ainsi les contrôles sémantiques sont aussi utilisés. Citons encore Ludivine (cf. annexe 1).

C.H. :
Ludivine :
C.H. :
Ludivine : *etc,*

C.H. :

Ludivine :
C.H. :
Ludivine *[silence, puis lentement]* ***:***

C.H. :
Ludivine :

L'argument de vérification croise de nouveau contrôle pragmatique et sémantique : il faut plus d'œufs que de brioches, cet ordre sera conservé si le nombre de brioches augmente, ce que permet le modèle multiplication (de nombres entiers !).

4.3. Stratégies de choix de modèle

Notre étude a montré que l'inférence du calcul jugé le plus adapté semble s'être fait de diverses façons : soit de façon intériorisée (selon l'idée du schéma opérationnel de Julo) ; soit par interprétation réfléchie d'éléments de l'énoncé[7]. Une technique est apparue chez certains élèves : ils essaient plusieurs opérations (voire toutes), c'est-à-dire qu'ils font tous les calculs, puis mettent en œuvre des contrôles pragmatiques et sémantiques pour valider la « bonne » opération, en retravaillant les liens sémantiques connus (partager c'est diviser, …, tel schéma c'est telle opération), en comparant le résultat obtenu à l'ordre de grandeur de la réponse qu'ils infèrent de ce qu'ils savent de la réalité (contrôle pragmatique)…

Nous avions repéré, par expérience, cette technique chez certains élèves moyens ou faibles, mais nous n'avions pas imaginé qu'elle pouvait s'optimiser pour devenir un outil intégré de bons élèves. Finalement les élèves pratiquent une démarche expérimentale mentale : ils calculent grâce à différents modèles arithmétiques (les opérations) et réfutent les modèles en fonction de l'acceptabilité de la réponse, eu égard à des vérifications pragmatiques et/ou sémantiques.[8] Les jeux de contrôle jouent un rôle essentiel dans ce processus.

5. Savoir qualifier

L'intérêt de cette connaissance, savoir qualifier, est visible dans deux monographies, celles de Nicolas 3° et de Corentin 4° dans la même classe.

[7] Nos recherches sur d'autres élèves ont montré que le choix de l'opération pouvait aussi résulter de l'interprétation de l'environnement du problème : titre de la leçon du jour, *etc*.
[8] Il se peut aussi qu'un « effet maître » influe sur le traitement des problèmes par les élèves.

5.1. Nicolas ou le défaut de « qualification »

L'étude du protocole de Nicolas nous montre comment, à des fins calculatoires, il se libère des grandeurs pour avancer plus rapidement (cf. annexe 3) dans le monde numérique. Mais cette abstraction le coupe de la réalité du problème résumé ci-dessous.

?

Dans un premier temps, Nicolas, après une suite de calculs justes posés en colonne sur son brouillon, recopiés sur la feuille réponse, a proposé la réponse 72 [qui correspond au prix payé par les enfants de l'après midi]. L'entretien est l'occasion de revenir sur cette résolution, en l'aidant à se remémorer puis à remonter le raisonnement qui se conclut par 72 (lignes 62 à 70).

Nicolas :

= 90

C.H. :
Nicolas :
C.H. :

Nicolas *[silence]*
C.H. :

Nicolas *[silence]*
C.H. :

Nicolas :

L'entretien se poursuit avec des qualifications qui restent faibles (lignes 71 à 76).

C.H. :
Nicolas :
C.H. :
Nicolas :
C.H. :

Nicolas :

En encore (lignes 77 à 82).

C.H. :

Nicolas :

C.H. :
Nicolas :
C.H. :
Nicolas *[hésitation]* ***:***
C.H. :

Nicolas :

Le lecteur remarquera ci-dessus que CH injecte dans les échanges des qualifications (soulignées), que Nicolas ne reprend pas.

L'entretien se poursuit (lignes 83 à 88) vers une « vraie » qualification : mais elle était fournie par le texte.

C.H. :

Nicolas :
C.H. :
Nicolas :

Dans cette dernière partie citée (lignes 89 à 99) Nicolas réaffirme, de façon cohérente, ce qu'il a cru lors de l'écriture de sa réponse sur la copie. Puis il nous donne à voir comment il réussit à entrer dans une qualification faible, puis complète.

C.H. :
Nicolas :

C.H. :
Nicolas *[silence] :*
C.H. :

Nicolas :
C.H. :
Nicolas :

C.H. :
Nicolas :
C.H. :
Nicolas :

Nicolas travaille sur un plan uniquement syntaxique, il se révèle incapable de qualifier seul, ne peut que faiblement qualifier les nombres calculés. Quand la question se complexifie, avec des étapes intermédiaires, Nicolas perd le fil du problème. Il montre son manque d'entraînement à la qualification, puis son succès quant à la qualification. Cette qualification ne termine pas le problème pour lui car il se trouve confronté à une opération qui n'est pas directe (voir annexe 3, lignes 100 à 119).

Nicolas nous a montré au cours de l'entretien sa non-conscience de l'importance de la qualification, faible ou complète. Ce faisant, il se coupe progressivement de la réalité en s'enfermant dans le modèle numérique, sans possibilité de contrôle sur les calculs effectués (un « calcul aveugle » cité par Sackur & *al.*, 2007).

5.2. Corentin ou la rencontre avec la qualification

Corentin, par contre, nous révèle l'importance qu'a pour lui, dans la résolution de problèmes, la qualification, qu'il semble avoir apprise de façon autonome. Il mentionne le souvenir vivace (cf. annexe 4a) d'un jour où il « *s'était embrouillé* » car il « *avait mélangé le nombre de T-shirts et les euros* ». Nous analysons cela comme un épisode biographique (Mercier, 1995), moment de l'espace-temps douloureux, qui lui a permis un apprentissage, celui de l'importance de la qualification. Cette connaissance, qualifier, est aussi explicite et visible (sur son brouillon) : elle se traduit en particulier par une légende sur les nombres de l'énoncé spécifiant leur qualification (cf. annexe 4b) dont nous reproduisons ici un extrait relativement au problème :

Entretien ligne 18	Sur son brouillon
Corentin : € €	2 255 : euros 36 : livre-darts 62 : prix des livre-darts[9]

Remarquons que Corentin possède deux connaissances d'ordres différents : il sait qualifier, il sait en plus que la qualification est un outil de résolution des problèmes.

5.3. La qualification, une connaissance ignorée, mais nécessaire

Nous avons souligné le possible impact d'un défaut de qualification sur la réussite des élèves pour de tels problèmes. Le travail de Nicolas nous convainc que la qualification participe du travail de modélisation, notamment dans les problèmes qui nécessitent plusieurs étapes, comme celui qu'avait à résoudre Nicolas. La qualification d'un résultat issu d'un calcul intermédiaire (même pertinent) est à la

[9] La façon d'orthographier de Corentin est volontairement conservée.

charge complète de l'élève. Une qualification efficace ne peut se réduire à une qualification faible.

La compétence double de qualification révèle une connaissance essentielle, actuellement invisible dans les curricula. Le travail sur les nombres *concrets* (nombre + unité) a en effet progressivement disparu des programmes du primaire depuis les années 1970 (Chambris, 2008). Cette habitude permettait de rattacher les nombres à leur grandeur contexte. Quant à l'habitude de qualifier les grandeurs dans les problèmes, elle est sans doute, selon les enseignants, diversement enseignée aux élèves. Mais elle se limiterait alors à la résolution de problèmes, ce qui pourrait se révéler un habitait trop pauvre (question d'écologie des savoirs). En tout cas cette étude révèle l'intérêt qu'il y aurait à réfléchir à l'enseignement systématique de la qualification notamment pour les problèmes verbaux arithmétiques.

6. Questions sémiotiques

Bien que de nombreux articles internationaux envisagent la pertinence de l'utilisation d'outils sémiotiques pour la résolution de problèmes verbaux ordinaires, ces questions nous semblent encore insuffisamment explorées d'autant plus qu'à notre avis, elles restent constitutives des mathématiques du primaire. Chevallard (1995) (qui utilise plutôt le mot ostensif pour signe) avait déjà pointé pour les mathématiques, deux fonctions du signe : une fonction *sémiotique* - déictique - (montrer ou garder la mémoire de) et une fonction *instrumentale* (permettre l'avancée du travail mathématique dans sa dimension matérielle). Certains élèves semblent démunis dans les changements de points de vue, oraux et écrits, sur les objets (ici les opérations) comme si les ostensifs restaient pour eux rigides, n'ayant qu'une fonction, désigner. Or l'avancée du travail mathématique est liée à la mise en relation d'ostensifs différents relatifs à un même concept. Il nous semble que Duval (2006) développe la même idée, sur le plan cognitif, en pointant le travail nécessaire sur les registres sémiotiques (qui pourraient être considérés comme des organisations d'ostensifs) : *traitement* à l'intérieur d'un registre et *conversion* d'un registre à un autre. Il précise même « *La compréhension commence avec l'articulation, pour le sujet, de deux registres de représentation sémiotique*. » (Duval, 2006, p. 84). Ce que nous avons appelé inférence et contrôle syntaxique relève du traitement sémiotique dans le registre oral ou celui des écritures arithmétiques.

Notre recherche contribue très modestement à ces questions : en effet les entretiens et les protocoles ont mis en avant une faiblesse des élèves à passer à l'écrit dans la phase heuristique. Le questionnement de l'élève (reconstruit par l'entretien) reste essentiellement oral et, dû aux limites de l'oral non spécifiquement travaillé, souvent limité à sa fonction déictique. Nous avons relevé peu ou prou de conversion vers le registre graphique ou celui des écritures arithmétiques, a fortiori le registre pré-algébrique (écritures arithmétiques à trous).

6.1. Étude des élèves

Nicolas (cf. annexe 3, lignes 100 à 119) reconnait un problème multiplicatif quand il s'agit de calculer le nombre d'enfants si chaque enfant paye 4 euros et le total de la dépense s'élève à 72 euros, mais il ne propose comme résultat que 4 fois 72. Cet oral n'est pas transformé en une autre formulation orale opérationnelle de type : 4 fois quelque chose égale 72. Nicolas semble n'avoir accès qu'à des expressions « directes ». Cette possibilité d'inverser nous semble constituer, déjà à l'oral, un critère de flexibilité. Bien entendu cette flexibilité là peut s'enseigner : il s'agit de la réciprocité des deux opérations multiplication et division.

Corentin (cf. annexe 4 c) s'est limité à des essais mentaux pour la transformation des 60 billets de 5 euros en billets de 20 euros. Il mentionne oralement la relation (*4 fois 5 ça fait 20*), mais n'en tire pas parti. Un passage à l'écrit dans le registre pré-algébrique avec 300 = ? 20 = ? 4 5 eût peut-être pu l'aider à opérationnaliser sa décomposition de 20.

Sébastien (cf. annexe 5) a bien réussi les trois premiers problèmes : sur sa copie figure une phrase-réponse correcte. Mais le 4$^{\text{ème}}$ problème reste sans réponse, alors que son brouillon témoigne qu'il l'a cherché. Dans le premier problème, il a traité oralement l'équation « *il en avait perdu 48 (…) et puis il m'en / il en restait 127, donc j'ai imaginé 127 plus 48* » : il montre par là qu'il sait mettre en œuvre oralement la réversibilité dans le cas additif (contrairement à Nicolas dans le cas multiplicatif). Dans le second problème (, il a formulé l'équation oralement, par analogie avec un problème déjà résolu « *J'ai vu que dans mon fichier c'est à peu près sauf que c'est à 100. Et bah, on essaie de trouver 573 par exemple à 100 / Et pis là, j'ai cherché mais jusqu'à 1 260* », puis il a résolu par essais successifs écrits (travail de calcul), sans passage à l'écriture soustractive (travail sur l'aspect instrumental de l'écriture arithmétique).

En revanche, le dernier problème ( ) lui a résisté : il a reconnu un problème multiplicatif, il a su formuler l'équation orale « *J'ai essayé de faire 6 fois quelque chose* », mais comme la recherche par essais et erreurs n'a pas abouti (travail de calcul), il s'est replié sur le produit 2 fois 1830 : « *Je sais / Une idée bête / Je sais qu'il fallait trouver 1830 / Mais j'essaie quand même fois 2 fois / même si c'était plus grand.* » ? Nous interprétons ses actions comme la certitude du champ multiplicatif pour ce problème, la non-conscience de l'intérêt d'un écrit fonctionnel, dans le registre des écritures pré-algébriques, tel 6 ? = 1830. Nous faisons l'hypothèse que cet écrit aurait permis à Sébastien une certaine flexibilité : trouver un résultat en complétant par essais une

« multiplication à trous ». L'écrit finalement produit par Sébastien (2   1830) reste décalé et il en est conscient « *Je sais / Une idée bête ...* », ce qui confirme qu'il manque d'un outil adapté.

6.2. Un travail arithmétique spécifique oral, écrit

Il nous semble avoir pointé, chez certains de ces élèves, un déficit en représentation sémiotique pré-algébrique de la question.

Ce déficit est déjà visible à l'oral, ce qui révèle que les façons de dire les choses et notamment les reformulations possibles[10] d'une question sont une compétence à développer aussi chez les élèves jeunes. Cela questionne la « qualité » du discours oral « arithmétique » enseigné et spécifiquement travaillé dans les classes. On peut d'ailleurs se demander si les techniques arithmétiques, autrefois enseignées à l'oral par exemple dans les anciens manuels d'arithmétique (cf. Chiocca, 2010 qui a réédité de tels usages) ne participaient pas de ce travail sur le discours oral : elles aidaient à dire les actions et les transformations licites sur les nombres ; elles permettaient donc de ne pas limiter les signes à leur dimension déictique.

Ce déficit est certain concernant le registre écrit pré-algébrique, déjà dans sa fonction déictique. Nos études de cas l'ont montré.

Il nous semble pointer ici un pan de connaissances ignorées par l'enseignement mathématique en école primaire actuel, le travail sémiotique, constitutif des mathématiques (Duval, 2006). Un document d'accompagnement des programmes 2002 de mathématiques du primaire (MENESR, 2005, p. 18, cf. annexe 6) avait partiellement, soulevé cette question, en envisageant la systématisation et le traitement des écritures **additives** pré-algébriques. La fréquentation des additions à trous (mais pas leur transformation en soustraction) semble résister[11] dans les pratiques enseignantes et les manuels scolaires, qui explique peut-être aussi la dextérité langagière de Sébastien. A notre connaissance un seul ouvrage (Bonhême & Descaves, 2007) propose dès le cycle 2, un apprentissage sémiotique pré-algébrique plus poussé. Mais l'insertion de ce type de recommandations demande un accompagnement auprès des enseignants : en effet des outils sémiotiques donnés de façon systématique, sans construction conjointe avec les élèves et sans relation avec les situations qu'ils outillent, peuvent induire chez les élèves des automatismes privés de signification.

Les apprentissages mathématiques ont bien différents volets : l'aspect *mathématisation* où les modèles sont construits pour rendre compte de la réalité sur

[10] Robert (1998) avait relevé cette nécessité de plusieurs points de vue pour des questions de géométrie de lycée (par exemple prouver que trois points sont alignés).
[11] Mais cela nécessiterait une étude plus objective.

laquelle agissent les élèves, les modèles trouvant là une première signification ; *un travail spécifique sur le modèle* (les écritures arithmétiques pré-algébriques et les façons de les parler) pour en explorer la potentialité intrinsèque ; l'aspect *modélisation* qui rend la réalité calculable.

Conclusion

Plusieurs conclusions semblent se dégager. Nous confirmons que la méthode d'entretien individuel (plutôt de type explicitation) après résolution de problèmes arithmétiques ordinaires de réinvestissement est productive : elle nous a permis de mettre en avant des bribes de raisonnements individuels partagés par les élèves ou guides d'un élève. Le faible nombre d'élèves et de classes suivis ne limite pas la portée des résultats dans la mesure où il s'agit de débusquer des connaissances cachées dont la présence ou l'absence peuvent agir que la réussite aux problèmes.

Cette étude a permis de prouver l'existence de deux types d'ignorance : d'abord des connaissances peu (ou prou) repérées par les études de didactique, telles l'intérêt de la qualification et la pratique d'une démarche de modélisation par le test d'opérations, suivie de contrôles sémantico-pragmatiques ; enfin des questions connues (notamment sémiotiques), mais dont les développements restent faibles dans la recherche.

La qualification se révèle d'une grande importance : pour des élèves qui utilisent une démarche de test d'opérations, le fait de savoir qualifier conditionne la possibilité d'un contrôle sémantique, voire pragmatique et *in fine* le passage d'un résultat à une réponse. Comme une modélisation adaptée intègre un contrôle du modèle pressenti, la qualification fait intrinsèquement partie du jeu de la modélisation. En réalité cette connaissance se dédouble en *savoir qualifier,* une connaissance proto-mathématique (Chevallard, 1985, 52–56) et *savoir que qualifier peut permettre d'avancer vers une solution,* une connaissance métacognitive.

Cette étude a soulevé la question de l'utilisation spontanée d'outils sémiotiques dans lesquels se placent déjà des reformulations orales. Nous soulevons l'hypothèse, grâce à Nicolas, Sébastien et Corentin, de la nécessité, pour résoudre un problème, de formulations orales ou écrites d'écritures pré-algébriques (6   ? = 1830 écrit et parlé). La dialectique entre oral et écrit est très sensible dans les résolutions étudiées et milite pour l'apprentissage de conversions entre oral et écrit : Sébastien sait poser le problème « *J'ai essayé de faire 6 fois quelque chose* », mais cette formulation n'est ni convertie en écriture arithmétique, ni traitée dans le registre oral, ce qui le laisse démuni.

Cette recherche soulève d'autres questions. Quel enseignement pour ces connaissances ? Suffit il par exemple, pour améliorer les réussites des élèves aux résolutions de problèmes, de rendre sensibles les enseignants à la qualification comme un passage obligé de la résolution de problèmes ? Il y a peu de chance que ce soit si simple. L'introduction d'un élément isolé prend le risque d'une rigidification de son enseignement et d'une coupure avec ce qui le fonde. Dans cette recherche la qualification apparaît comme un invariant de la résolution de problèmes verbaux arithmétiques, mais il faudrait questionner le lien avec une problématique plus générale : la prise en compte des relations entre nombres et grandeurs dans les organisations mathématiques (Chambris, 2008).

Concernant le travail sur les écritures pré-algébriques, s'il semble utile de travailler stricto sensu les conversions entre oral et écrit et le traitement interne relativement au registre des écritures pré-algébriques (modélisées par x+a=b et a.x=b), se pose la question du sens de ce travail s'il est déconnecté des problèmes que ces écritures outillent. Publier sans précaution dans la noosphère l'utilité de ce travail risque d'en faire trop précocement un objet d'enseignement et de créer un glissement métadidactique, certains enseignants réduisant l'activité mathématique à ces jeux d'écritures. Est en jeu une fois encore la compréhension du subtil équilibre entre calcul et raisonnement (Artigue, 2004) que nécessite l'activité mathématique.

Cette étude enrichit les questions d'apprentissage d'une flexibilité cognitive dans la résolution de problèmes ordinaires, si celle-ci est envisagée comme « capacité à envisager plusieurs points de vue sur un même objet, c'est-à-dire à envisager plusieurs moyens pour atteindre un même but » (Clément, 2009, p. 126). Toutefois, elle laisse en suspens celles de son enseignement.

Bibliographie

ARTIGUE, M. (1988), Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **9.3**, 281–308.

ARTIGUE, M. (2004), L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes défis perspectives, *Repères-IREM*, **54**, 23–39.

ARTIGUE, M., HOUDEMENT, C. (2007), Problem solving in France: didactic and curricular perspectives, *Zentralblatt der Didaktik der Mathematik*, **39**, 365–382.

BONHÊME, B. & DESCAVES, A. (2007), *Activités numériques et résolution de problèmes au cycle*, **2**, Hachette Éducation.

BURGERMEISTER, P.F. & CORAY, M. (2008), Processus de contrôle en résolution de problèmes dans le cadre de la proportionnalité des grandeurs : une analyse descriptive, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **28.1**, 63–106.

CASTELA, C. (2008 dir.), Contribution à une approche didactique des implicites scolaires : la problématique des enjeux ignorés d'apprentissage, *Les Cahiers de l'IUFM*, **7**, Université de Rouen.

CHAMBRIS, C. (2008), *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire*, Thèse de l'Université Denis Diderot, Paris 7.

CHEVALLARD, Y. (1985), *La transposition didactique*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1995), Les outils sémiotiques du travail mathématique, *Petit x*, **42,** 33–57.

CHIOCCA, M. (2010), *Calcul sans retenue*, Toulouse : Éditions Cépaduès.

CLÉMENT, E. (2009), *La résolution de problème : à la découverte de la flexibilité cognitive*, Paris : Armand Colin.

CONNE, F. (1999), Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne. In G.Lemoyne & F.Conne (eds) *Le Cognitif en Didactique des Mathématiques*, Presses Universitaires de Montréal, 31–69.

COPPÉ, S. (1995), Types de connaissances mises en œuvre par les élèves dans la détermination de la composante publique de son travail, *Différents types de savoirs et leur articulation*, Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions, 129–144.

COPPÉ, S. & HOUDEMENT, C. (2002), Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire, *Grand N*, **69**, 53–63.

COQUIN-VIENNOT, D. & MOREAU, S. (2007), Arithmetic problems at school: When there is an apparent contradiction between the situation model and the problem model, *British Journal of Educational Psychology*, **77**, 69–80.

DUVAL, R. (2006), Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques, *Actes du 32ème colloque sur la Formation des Maîtres*, IREM de Strasbourg, 67–89.

ELIA, I. (2011), Le rôle de la droite arithmétique dans la résolution de problèmes additifs, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **16**.

FREUDENTHAL, H. (1971), Geometry between the devil and the deep sea, *Educational Studies in Mathematics*, **3**, 413–435.

HOUDEMENT, C. (1999), Le choix des problèmes pour la résolution de problèmes. *Grand N*, **63**, 59–76.

HOUDEMENT, C. (2003), La résolution de problèmes en question, *Grand N*, **71**, 7–23.

HOUDEMENT, C. (2006), Trouver ou ne pas trouver : ce qui peut faire des différences dans la résolution de problèmes arithmétiques ordinaires, *Cahier DIDIREM*, **54**, IREM Paris 7.

HOUDEMENT, C. (2009), Une place pour les problèmes pour chercher, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **14**, 31–59.

JULO, J. (1995), *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*, Presses Universitaires de Rennes.

JULO, J. (2002), Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, **69**, 31–52.

MARGOLINAS, C. (1993), *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

MENESR (2005), Résolution de problèmes et apprentissage, In *Documents d'accompagnement des programmes. Mathématiques Ecole Primaire*, Scéren-CNDP, 15–19.

MERCIER, A. (1998), La participation des élèves à l'enseignement, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **18.3**, 279–310.

NESHER, P., GREENO, J.G. & RILEY, M.S. (1982), The development of semantic categories for addition and subtraction, *Educational Studies in Mathematics*, **13**, 373–394.

ROBERT, A. (1998), Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **18.2**, 139–190.

SACKUR, M. & *al.* (1997), Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ?, *Repères-IREM*, **28**, 37–68.

THÉVENOT, C., CASTEL, C., FANGET, M., FAYOL, M. (2010), Mental Subtraction in High- and Lower Skilled Arithmetic Problem Solvers. *Journal of Experimental Psychology, Learning, Memory and Cognition*, **36/ 5**, 1242–1255.

VERGNAUD, G. (1990), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **10.2/3**, 133–170.

VERMERSCH, P. (1994), *L'entretien d'explicitation*, Paris : ESF.

VERSCHAFFEL, L. & DE CORTE, E. (1993), A decade of research on word problem solving in Leuven: theoretical, methodological and practical outcomes, *Educational Psychology Review*, **5**, 239–256.

VERSCHAFFEL, L., GREER, B. & DE CORTE, E. (2000), *Making sense of word problems*, Lisse (Netherlands): Swets & Zeitlinger Publishers.

CATHERINE HOUDEMENT
LDAR, Universités Paris Diderot et Rouen
IUFM, BP 18, 76131 Mont-Saint-Aignan Cedex
catherine.houdement@univ-rouen.fr

Annexe 1

Nicolas 3° au sujet du problème :

C.H. :

Nicolas :

C.H. :
Nicolas :
C.H. :
Nicolas :

Ludivine 5° reste perplexe, dans l'entretien, sur le nombre d'œufs pour 8 000 brioches s'il faut 3 œufs pour une brioche, à l'occasion du problème :

Elle pense à une division, évolue vers une multiplication (grâce à un dessin). Son incertitude peut certes être mise sur le compte de l'élargissement du champ numérique. Quand il lui est demandé de trancher, elle donne cet argument en faveur de la multiplication, lignes 103-112 :

C.H. :
Ludivine :
C.H. :
Ludivine : *etc.*
C.H. :

Ludivine :
C.H. :
Ludivine *[silence, puis lentement] :*

C.H. :
Ludivine :

Annexe 2

Deborah 5° au sujet du problème :

Lignes 45 à 58 :

C.H. :

Deborah *[hésitante]* ***:***
C.H. :
Deborah *[en regardant C.H.]* ***:*** *.*
C.H. :
Deborah *[elle pose la division 300 par 25]* ***:***
C.H. :
Deborah :
C.H. :
Deborah :
C.H. :
Deborah :
C.H. :
Deborah

Lignes 61 à 68 :

C.H. :

Deborah :
C.H. :

Deborah :
C.H. :
Deborah :
C.H. :

Deborah :

Annexe 3

Nicolas 3° sur le problème :

?

Lignes 62 à 99 dans le corps du texte.

Lignes 100 à 119 :

C.H. :

Nicolas :
C.H. :
Nicolas
C.H. :

Nicolas *rappel pour le lecteur : un enfant paye 4 euros*
C.H. :

Nicolas :
C.H. :

Nicolas :
C.H. :
Nicolas :
C.H. :
Nicolas :
C.H. :
Nicolas : *il calcule et trouve 288*
C.H. :
Nicolas :
C.H. :
Nicolas : *silence très long*

Annexe 4

Corentin 4° révèle dans l'entretien et montre (dans son brouillon) l'importance qu'il accorde à la qualification dans la résolution de problèmes.

a) Lignes 9 à 14 : il cite comme souvenir d'un problème très difficile ….

C.H. :

Corentin *réponse qui fuse*
C.H. :
Corentin :

C.H. :
Corentin :

b) Cet apprentissage de la qualification est visible dans les détails qu'il nous donne sur chaque problème, confirmé par ce qu'il a noté sur son brouillon (et qui n'est pas sur la copie finale)

Pour le problème 1 :

Entretien ligne 18	Sur son brouillon
Corentin : € €	2 255 : euros 36 : livre-darts 62 : prix des livre-darts[12]

Et pour le problème 2 :

Entretien lignes 28 à 36	Sur son brouillon
Corentin : ***C.H. :*** ***Corentin :*** ***Corentin :***	60 : nombre <u>de</u> billets 5 : nombre <u>des</u> billets [Remarque : c'est nous qui soulignons.]

[12] La façon d'orthographier de Corentin est volontairement conservée.

Corentin a intégré l'intérêt de qualifier chacun des nombres qu'il manipule. Pour raisonner, il reste très attaché au texte de départ ; s'il s'en détache, il note ce que signifient les nombres. Il contrôle l'avancée de ses essais par la conformité au sens du texte.

c) Lignes 43-48 : déficit en représentation sémiotique pré-algébrique

C.H. :
Corentin :
C.H. :
Corentin :
C.H. :
Corentin :

Corentin identifie oralement la relation (*4 fois 5 ça fait 20*), mais n'en tire pas partie. Nous pensons que le fait d'écrire 300 = **?** 20 = **?** 4 5 aurait pu l'aider à opérationnaliser sa décomposition de 20.

Annexe 5

Sébastien 3° a bien réussi les trois premiers problèmes pour lesquels figure sur sa copie une phrase-réponse correcte. Le 4ème problème reste par contre sans réponse, mais son brouillon témoigne qu'il a cherché.

Pb1.

Pb2.

Pb3.

Pb4.

Lors de l'entretien, il déclare avoir vite traité le problème 1, lignes 25 à 27 :

Sébastien :

Dans ce problème, Sébastien a su inverser oralement la transformation évoquée : pour remonter au début de la partie, il faut retrouver les billes perdues.

Le pb2 ne lui a pas résisté longtemps, lignes 29 à 33 :

Sébastien :

C.H. :
Sébastien :

C.H. :
Sébastien :

Il montre donc là que, par analogie avec un problème déjà traité (sans doute la trace d'un schéma de problème), il a instancié une stratégie non immédiate certes, mais dont il est certain qu'elle mène à bon port, en effet ligne 37 :

Sébastien :

Son brouillon confirme qu'il a trouvé le résultat en testant différentes additions en colonnes (différents ajouts à 573 pour essayer d'atteindre 1 260).

Sébastien n'a pas écrit d'écriture arithmétique en ligne : ce qu'il nous renvoie en parole semble en parfait accord avec ce qu'il a pensé lors de la résolution, chercher le complément à 573 pour atteindre 1 260, par essais successifs : là encore le langage (sans doute intériorisé lors de la recherche effective) lui suffit pour avancer.

Sébastien nous oriente ensuite vers le problème 4 quand il s'agit de parler de problèmes « un peu moins faciles ». C'est le contraste avec les trois premiers qui nous interpelle. Sébastien nous dit successivement, lignes 43 et 56 :

Sébastien :

Sébastien :

Sébastien a bien identifié le champ conceptuel multiplicatif et sait oralement modéliser le problème : *faire 6 fois quelque chose*. Mais cette oralisation ne suffit pas à déclencher une action (certes dans le domaine multiplicatif). Il se peut que la taille du quotient à trouver (3 chiffres) l'ait empêché d'opérationnaliser son idée de départ. Il se replie alors sur une surexploitation de la multiplication. Or il sait que cette opération directe ne convient pas, à cause de l'ordre de grandeur du résultat (contrôle pragmatique), lignes 72 à 74, et pourtant il ne voit pas d'autre alternative.

C.H. :
Sébastien :

C.H. :

Sébastien :

Il se peut qu'une écriture de type 6 **?** = 1830 ait pu l'aider à poursuivre sa recherche et surtout à garder son fil conducteur, associée à la croyance de l'existence d'un tel nombre inconnu, comme il a pu le faire pour les calculs additifs.

Annexe 6

Extrait de MENESR (2005) *Documents d'accompagnement des programmes. Mathématiques Ecole Primaire*. Résolution de problèmes et apprentissage 15-19. Scéren-CNDP Page 19

L'appui sur les écritures symboliques

Le premier type d'expériences (à partir d'une matérialisation de la situation) permet de justifier l'équivalence alors que le deuxième type (calcul mental) permet de la faire fonctionner. Dans le prolongement de ces expériences, la mise en relation des écritures symboliques permet d'exprimer cette équivalence.

Il est possible d'utiliser des exercices utilisant des supports comme les petits tableaux ci-dessous avec des consignes du type : « *Trouve la règle et complète les cases vides* ».

<table>
<tr><td>10</td><td>5</td><td>5</td><td>17</td><td>23</td><td>18</td><td>12</td><td>26</td><td>14</td><td></td><td></td><td>25</td></tr>
<tr><td colspan="2">15</td><td colspan="2">22</td><td colspan="2">41</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">23</td><td colspan="2">42</td></tr>
</table>

Ils peuvent être prolongés par un travail sur les écritures, comme par exemple : « *Pour chaque tableau, trouver toutes écritures additives ou soustractives avec les trois nombres* »

10+5 =15   5+17=22   etc.
5+10=15   22 - 5=17
15-5=10 22 – 17=5
15-10=5

La demande de formulations orales qualifiant le nombre à chercher dans chaque tableau aide aussi les élèves à relier entre elles différentes significations. Par exemple pour le cinquième tableau :

- quel est le nombre qui, ajouté à 14, donne 23 ?
- quel est le complément de 14 à 23 ?
- quel est le nombre différence de 23 et 14 ?
- quel est l'écart de 14 et de 23 ?

Des exercices systématiques de ce type ne peuvent suffire **seuls** ni à faire comprendre, ni à rendre fonctionnelle l'équivalence étudiée. Mais associés aux deux autres types d'expériences, ils contribuent à la construction et à la consolidation de cette équivalence.