BENOÎT RITTAUD

UNE APPROCHE DE LA CROISSANCE EXPONENTIELLE PAR L'INTRODUCTION D'UNE VIRGULE GLISSANTE

Abstract. Introducing the slippery point to represent exponential growth. We offer an overview of the evolution of an exponential phenomenon from the kinematic model of a "slippery point." This proposal was submitted to the four experiments reported here: one with adults untrained in mathematics, a second with engineering students and two other with students in different classes of general secondary education.

Résumé. Nous proposons une présentation de l'évolution d'un phénomène exponentiel à partir du modèle cinématique d'une « virgule glissante ». Cette présentation a été soumise aux quatre expérimentations rapportées ici : une première avec un public d'adultes non formés aux mathématiques, une seconde avec des élèves-ingénieurs, et deux autres avec des élèves de différentes classes de l'enseignement secondaire général.

Mots - clés. Croissance exponentielle, notation décimale, continu, placement de virgule.

Introduction

En classe, les élèves étudient la croissance exponentielle d'abord sous sa forme séquentielle au travers des suites géométriques de raison supérieure à 1. Or les formules qui permettent le calcul du n^{e} terme d'une suite géométrique, ou la somme de ses n premiers termes, apparaissent comme impuissantes à dissiper le « biais exponentiel », c'est-à-dire la tendance intuitive fautive qui conduit à sous-estimer de façon assez systématique la rapidité de croissance d'un phénomène exponentiel. Le biais exponentiel a fait l'objet de diverses études, d'abord par des psychologues (Wagenaar *et al.* 1975, 1977a, 1977b, 1979, Jones 1977, 1979, 1984, Keren 1983, Kemp 1984, Mackinnon & Wearing 1991…) puis plus récemment par des économistes (Bolton *et al.* 2003, Christandl & Fetchenhauer 2009, Stango & Zinman J. 2009…). Dès le IX^e siècle toutefois, et peut-être même avant, les conteurs orientaux avaient mis en évidence le phénomène, au travers de l'histoire bien connue du grain de blé placé sur la première case de l'échiquier et que l'on double sur chaque nouvelle case, pour un total dépassant les dix-huit trillions de grains.

Par ailleurs, la croissance exponentielle est l'une des rares notions mathématiques dont il soit occasionnellement fait mention dans la vie de tous les jours. Un phénomène semble notamment avoir pris de l'ampleur durant la seconde moitié du XX^e siècle : l'insistance de plus en plus grande portée à la très grande rapidité de cette croissance, qui fait de celle-ci une formulation mathématique de diverses angoisses. La peur d'une explosion démographique mondiale en est l'exemple le plus courant, ses origines remontant au moins au XVII^e siècle et à William Petty (Rohrbasser 1999), c'est-à-dire bien avant le célèbre *Essai sur le principe de population* (1798) de Thomas Malthus.

L'importance prise par les phénomènes exponentiels dans les représentations collectives justifie à l'évidence que l'on s'attache à permettre aux élèves, et plus largement au grand public, de mieux s'approprier l'exponentielle, moins dans ses dimensions calculatoire (intégration, calcul de la somme des premiers termes…) et théorique (réciproque de la fonction logarithme, solution de $y' = y$…) que dans sa propriété d'être à croissance « rapide ». Mieux apprécier la rapidité de croissance de l'exponentielle permettrait non seulement une appropriation plus intime de l'objet mathématique, mais également de limiter la sidération que provoque parfois le biais exponentiel, sidération qui est un frein à la réflexion rationnelle.

La première partie du présent article propose une présentation nouvelle de la croissance exponentielle, la *virgule glissante*. L'idée consiste à exprimer un phénomène exponentiel à partir d'une représentation « cinématique » de la position de la virgule au fil du temps. En s'intéressant ainsi aux nombres de chiffres plutôt qu'aux nombres eux-mêmes, l'on obtient une expression de la croissance exponentielle à partir d'un phénomène linéaire plus facile à appréhender. Le caractère « transgressif » de la notation par virgule glissante est destiné à éviter le recours à la notation exponentielle, plus théorique et donc, en un sens, moins accessible.

La seconde partie consiste en la description de quatre expérimentations réalisées sur des publics différents, qui fournissent un premier ensemble de données pour analyser dans quelle mesure la virgule glissante permet une appropriation intime de la croissance exponentielle. Il s'agissait, dans un premier temps, de cerner les compétences *a priori* des sujets sur la croissance exponentielle et à les raffermir. Les problèmes classiques du pliage répété d'une feuille de papier et du grain de blé que l'on double sur chaque nouvelle case de l'échiquier fournissaient le contexte autour duquel se sont articulées les questions posées ainsi que les discussions. Dans toutes les expériences, une première étape mettait en évidence le biais exponentiel, une seconde présentait l'outil de « virgule glissante », outil dont l'efficacité était ensuite testée.

Une dernière partie rassemble brièvement quelques conclusions générales et propose des prolongements.

1. La virgule glissante

Soit g une fonction exponentielle définie sur $\mathbf{R}^+$, que dans un premier temps nous prendrons de la forme $g(x) = b^x$, où $b > 1$ (b est la *base*). Les valeurs de g pour x entier avec $b = 2$ produisent la suite bien connue des puissances de deux, dont les premières valeurs sont 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1 024. La croissance de plus en plus rapide de g rend impossible le calcul direct des termes suivants au-delà de quelques-uns. L'histoire du grain doublé sur chaque nouvelle case de l'échiquier montre les limites d'un tel calcul, que ce soit de tête, à la main ou même à la machine à calculer (laquelle, en général, ne permet pas l'affichage des dix-huit chiffres significatifs du nombre total de grains). Le calcul approché, en revanche, surmonte facilement l'obstacle à l'aide de la relation $2^{10} \approx 10^3$ (soit $1\,024 \approx 1\,000$), qui fournit une approximation de la réponse 2^{63} que l'on peut écrire ainsi :

$$2^{63} = 2^3 \times (2^{10})^6 \approx 8 \times 10^{18}.$$

Parce qu'elle repose de manière cruciale sur la relation $2^{10} \approx 10^3$, cette méthode présente l'inconvénient d'être limitée au cas particulier des puissances de 2. Ainsi, bien que très simple à mettre en œuvre pour un résultat excellent (la véritable valeur est voisine de $9{,}22 \times 10^{18}$), elle constitue davantage un point d'appui intermédiaire qu'une technique suffisante pour une appropriation qualitative de la croissance exponentielle en général.

Il est certes possible d'étendre la technique précédente en cherchant, une valeur de b étant donnée, une puissance n raisonnable telle que b^n soit proche d'une puissance de dix (ou, plus généralement, d'une valeur dont on sache facilement estimer les puissances). Utile pour l'enseignement du calcul mental, pour l'appropriation de l'idée d'ordre de grandeur et pour développer l'aptitude au maniement des très grands nombres, une telle technique peut être considérée comme un premier pas, qui doit ensuite se compléter par une présentation plus synthétique. Celle-ci doit notamment permettre de légitimer en quoi il est pertinent de parler de « l'exponentielle », au même titre que nous disons fréquemment, en géométrie, « le » cercle ou « le » plan plutôt qu'« un » cercle ou « un » plan. Si l'usage du singulier a pour fonction de rassembler un ensemble d'objets au sein d'une même réalité mathématique, le cas de « l'exponentielle » correspond au fait que différentes fonctions exponentielles ne diffèrent que par un changement de variable affine.

La présentation ici proposée de la croissance exponentielle est d'ordre plus qualitatif que quantitatif. Elle consiste en une représentation des nombres dans laquelle seule la virgule se déplace et est autorisée à se trouver *dans* un chiffre et non uniquement entre deux chiffres comme c'est l'usage. Strictement adossée, du point de vue mathématique, à la représentation exponentielle, cette présentation a l'avantage de rester proche de l'écriture décimale ordinaire des nombres, à cette seule originalité près, donc, d'une virgule qui se place de façon continue et non discrète au sein d'un nombre.

Prenons le problème des grains sur l'échiquier dans lequel la valeur 2^{10} est approchée par la valeur 1 000. La première case contient 1 grain, la onzième 1 000 (environ), la vingt-et-unième 1 000 000, et ainsi de suite. En ajoutant des 0 après la virgule, ces nombres de grains se réécrivent 1,00000000, puis 1000,00000, puis 1000000,00, et ainsi de suite. Il est intuitif que le passage d'un nombre au suivant s'effectue en faisant glisser la virgule le long de l'expression 1000000000. Du point de vue mathématique, cela revient à écrire le nombre de grains sur la n-ième case sous la forme $10^{f(n)}$. L'approximation $2^{10} \approx 10^3$ conduit à $f(11) \approx 3$, puis donne $f(21) \approx 6$ et plus généralement $f(10k+1) \approx 3k$. Du point de vue cinématique, ces valeurs prises par la fonction f représentent la distance de la virgule au chiffre 1. Une interpolation linéaire très naturelle conduit alors à poser que, pour tout n, on a $f(n) \approx 3(n-1)/10$, c'est-à-dire que « la virgule glisse à la vitesse de trois 0 toutes les dix cases ». Pour des valeurs de n qui ne sont pas de la forme $10k+1$, on en tire une représentation chiffrée qui prend la forme matérielle d'un 1 suivi de suffisamment de 0, avec une virgule placée « dans » l'un des 0, comme dans le cas suivant du nombre de grains sur la seizième case :

10000̦0000

Puisque $f(16) \approx 4+(1/2)$, la virgule est placée au milieu du cinquième 0, figurant ainsi la valeur $10^{4,5}$. Dans la suite, nous désignons cette notation comme une *écriture en virgule glissante*.

À moins de mentionner explicitement la position de la virgule dans le 0 (ce qui rend la notation assez lourde), la vocation première de l'écriture en virgule glissante est de négliger volontairement la valeur exacte au profit de l'ordre de grandeur. Une expression comme la précédente est utile dans un contexte de calcul approché, où il est suffisant de savoir qu'une valeur est comprise entre 10 000 et 100 000 et encombrant d'en savoir davantage.

Le caractère général de cette représentation tient à ce qu'elle demeure valable pour une suite géométrique dont la raison est quelconque : pour s'en représenter qualitativement l'évolution des termes, la seule chose à comprendre est que la virgule se déplace toujours à vitesse constante (la raison de la suite fixant la vitesse). Par ailleurs, il apparaît assez naturellement que le terme initial, sur lequel on fait « glisser » la virgule, joue un rôle secondaire dans le comportement général de la suite. En effet, pour une suite géométrique dont le premier terme n'est pas nécessairement égal à 1 (c'est-à-dire si g est de la forme $g(x) = ab^x$, avec $a > 0$), il suffit de remplacer le 1,0000000 dans lequel glisse la virgule par la valeur de $a = g(0)$. D'autre part, l'écriture en virgule glissante permet une transition naturelle entre l'étude des suites géométriques (situation discrète) et celle des fonctions exponentielles (situation continue).

Cette écriture permet aussi de comparer des nombres et d'effectuer des opérations arithmétiques, étant entendu une fois encore qu'il ne s'agit pas de travailler sur des valeurs exactes mais sur des ordres de grandeur. Voyons brièvement de quelle manière (sachant que des difficultés théoriques ont été soulevées lors de la quatrième expérience : voir section 2.4). Un nombre x étant donné dont l'écriture décimale commence par le chiffre 1, notons $d(x)$ la distance de la virgule au 1 initial dans son écriture en virgule glissante, et $[d(x)]$ la partie entière de $d(x)$ (qui correspond au nombre de zéros « entièrement à gauche de la virgule » dans l'écriture de x en virgule glissante). Soient deux nombres r et s. Le premier peut être dit plus grand que le second si, et seulement si, $[d(r)] > [d(s)]$. En cas d'égalité, r et s sont considérés comme du même ordre de grandeur. De manière alternative (et plus générale), l'on peut préférer décider d'un écart maximal e entre $[d(r)]$ et $[d(s)]$ en-dessous duquel r et s sont réputés comme du même ordre de grandeur (sans que cela soit exclusif du fait que l'on puisse, si $[d(r)]$ et $[d(s)]$ diffèrent, de déterminer que l'un est plus grand que l'autre).

L'écriture en virgule glissante permet d'effectuer les opérations arithmétiques courantes de façon élémentaire. En particulier les expressions $r+s$ (resp. $|r-s|$) sont réputées égales à r (resp. à s) si, et seulement si, $[d(r)] > [d(s)]$ (resp. $[d(r)] < [d(s)]$). Le produit rs, quant à lui, est donné en plaçant la virgule au point correspondant à la somme $[d(r)] + [d(s)]$ (plus un petit décalage vers la droite).[1] Enfin, l'extraction de racines carrées, et plus généralement n-ièmes, est elle aussi très simple. Bien sûr, tout cela n'a rien d'inattendu : l'écriture en virgule glissante n'étant qu'une réécriture plus intuitive de la notation exponentielle, il est naturel qu'elle hérite des facilités de calcul permises par cette dernière.

2. Expérimentations

2.1. À l'université populaire de Bondy (« Expérimentation de Bondy »)

L'université populaire Averroès est une initiative de la municipalité de Bondy (Seine - Saint-Denis, France) consistant en des cycles annuels de conférences. L'un de ces cycles, présenté par l'auteur depuis quatre ans, traite de mathématiques. Il réunit, un jeudi sur deux de 18h30 à 20h30, un public qui oscille entre dix et trente personnes selon les séances. Plusieurs d'entre elles sont assidues depuis les débuts de l'Université populaire. Le public est fait d'adultes, dont une grosse proportion de retraités, et dont seule une faible minorité à suivi une filière scientifique lors de sa scolarité. Bien que le rythme des conférences soit relativement soutenu, l'objectif n'y est pas de faire un cours de mathématiques, mais des présentations générales de différents sujets. Les participants ne viennent pas pour apprendre mais pour découvrir. Il n'y a pas de devoir à faire d'une séance sur l'autre, ni d'évaluation d'aucune sorte. En principe, les personnes intéressées s'inscrivent en début d'année scolaire et s'engagent à assister à toutes les séances. En pratique, les choses sont un plus erratiques, mais les conférences comptent tout de même un

1 Comme me l'a fait remarquer Pierre-Alain Chérix (université de Genève), ces opérations correspondent à celles de la *géométrie tropicale* (Itenberg, 2008), laquelle reçoit ainsi une interprétation inattendue de géométrie des ordres de grandeur.

noyau important de fidèles.

L'expérimentation a été menée à l'occasion de l'une des dernières séances de la troisième année du cycle, le jeudi 24 mai 2012. Les sujets n'étaient pas prévenus à l'avance, le seul indice à leur disposition sur le sujet du jour était l'intitulé de la conférence (publié en 2011 avec l'ensemble des titres des autres exposés) : « Les logarithmes ou comment multiplier en additionnant ». Le mot « logarithme » n'a toutefois pas eu l'occasion d'être prononcé durant la séance, faute de temps. Quatorze personnes étaient présentes, toutes âgées de plus de 50 ans. Quatre d'entre elles ont une formation scientifique supérieure, quatre autres ont l'équivalent d'un baccalauréat scientifique. Aucun sujet n'a ou n'a eu de profession liée aux mathématiques, sauf peut-être, de loin, deux ou trois d'entre eux (chimie, pharmacologie).

Toutes les personnes présentes se sont prêtées de bonne grâce à l'exercice. L'attitude des sujets étaient celle de personnes désireuses d'apprendre et de progresser. Une grosse proportion de sujets n'a donc pas hésité à proposer des réponses mais aussi à poser des questions ou à exprimer leur incompréhension, leurs hésitations ou leur sentiment sur tel ou tel point. Il s'agit là d'un élément qui distingue particulièrement cette expérience, raison pour laquelle il s'agit de celle que nous avons choisi de détailler de manière toute particulière.

Dans la mesure où les sujets n'étaient ni des élèves ni des étudiants mais seulement des auditeurs d'un cycle de conférences, il n'était guère envisageable de leur proposer une feuille d'exercices à rédiger durant la séance : cela ne leur aurait à l'évidence pas convenu et plusieurs d'entre eux se seraient assez vite découragés et auraient regretté d'être venus. C'est pourquoi, s'il leur était bien demandé de répondre sur une feuille à des questions, une seule question était posée à la fois, rédigée sur un petit tableau blanc et à laquelle ils avaient quelques minutes pour répondre. Durant ces instants de réflexion et de rédaction, il leur était demandé de ne pas communiquer entre eux. Ensuite, la réponse à chaque question était donnée avec tous les détails et explications nécessaires, parfois assortis de commentaires plus généraux qui permettaient de faire en sorte que la séance ne se distingue pas trop d'une conférence ordinaire du cycle.

La consigne était de n'écrire sur sa feuille que ses propres réponses et non les explications données ensuite. Malheureusement, bien qu'il ait été expliqué d'emblée que les feuilles seraient anonymes, il est manifeste que plusieurs sujets ont reporté sur la leur les réponses données par l'expérimentateur. L'analyse des copies est donc difficile, un inconvénient heureusement compensé par le fait que la discussion à l'occasion de chaque explication était très libre et que certaines réactions orales ont ainsi fourni des renseignements éclairants sur l'état d'esprit et sur la compréhension des sujets.

La première question est ainsi formulée :
1)a) Une feuille (épaisseur 1 mm) est pliée en deux 10 fois. Quelle est l'épaisseur atteinte ?

En même temps que la question est posée, une feuille est pliée pour illustrer le propos. La moitié des sujets entament alors leurs recherches en commençant par effectuer d'eux-mêmes une série de pliages. Environ la moitié des sujets donnent la bonne réponse. Certains écrivent l'expression 2^{10}, tâchant parfois d'en tirer une valeur plus explicite, sans toujours y parvenir.

La bonne réponse est ensuite présentée en donnant la liste des premières puissances de deux et en comptant le nombre de pliages avec les doigts. Les sujets scandent la liste en chœur, tous la connaissant visiblement très bien. Le résultat est écrit au tableau sous la forme 1 024 mm, puis 1,024 m, et enfin approché à 1 m (approximation écrite sur le tableau).

La question 1)a), qui devait n'être qu'une mise en condition, a parfois été la source de problèmes qui se sont prolongés, liés aux unités de longueur et à leurs conversions. Un sujet qui avait fait l'expérience de quelques pliages a ainsi déclaré « incroyable » la valeur obtenue, avant de réaliser que l'énoncé proposait en fait une épaisseur irréaliste pour la feuille.

La question suivante a révélé des éléments plus profonds :
1)b) Et si on plie 50 fois ?

- *10 m ?*
- *entre 10 m et 10 km ?*
- *entre 10 km et 100 km ?*
- *plus de 100 km ?*

Au moment de la rédaction de la question, il est bien précisé que le cadre était celui d'une approximation et non d'une valeur exacte ; en pratique toutefois, les sujets ne tentent pas d'utiliser la valeur approchée donnée juste auparavant de 1 m pour les dix premiers pliages. L'énoncé 1)b) provoque aussi la question : « qu'est-ce qu'un kilomètre par rapport à un millimètre ? », les questions de conversion continuant ainsi à obscurcir la situation pour certains sujets.

Un événement remarquable au moment de l'écriture de la question au tableau est l'éclat de rire général provoqué par la seconde proposition (« entre 10 m et 10 km »), rire causé (comme une discussion le révélera par la suite) par le fait que 10 km apparaît aux sujets comme une longueur déraisonnablement grande pour le problème posé.

Les copies ne dégagent pas vraiment de majorité, seuls les sujets disposant d'une formation scientifique solide proposant une bonne réponse.

La présentation de la solution commence par une réinterprétation du résultat de la question 1)a) : plier dix fois est à peu près la même chose que multiplier par mille. Des sujets en déduisent à tort que plier 50 fois revient à peu près à multiplier par 5 000. En-dehors de cette erreur classique, un point d'achoppement est que, pour obtenir la valeur approchée 1 000 000 (= 1 000 × 1 000), le 1 000 obtenu lors de la question 1)a) n'est pas seulement une quantité de papier mais un facteur multiplicatif, valable quel que soit le nombre de morceaux de feuilles considéré.

La réponse est présentée, comme d'ailleurs toutes les suivantes, sans le recours à la notation exponentielle, c'est-à-dire sous la forme 1 000 000 000 000 000. Des cris de surprise accompagnent cette écriture. Tout le monde s'étonne de l'immensité du résultat, qui ne part pourtant que de trois valeurs numériques tout à faits insignifiantes (1 feuille, que l'on plie 50 fois en 2). Une question, qui reviendra ensuite plusieurs fois lors de l'écriture d'autres valeurs très grandes, est : « comment appelle-t-on ce nombre ? » (*cf. infra)*.

La question 2)a) n'est pas écrite au tableau, mais seulement posée oralement. Elle consiste à demander si les sujets connaissent l'histoire du légendaire ministre Sessa qui, pour distraire son roi, inventa le jeu d'échecs et demanda pour récompense que lui fût donné un grain de blé pour la première case de l'échiquier, deux pour la deuxième, quatre pour la troisième, et ainsi de suite en doublant les grains pour chaque nouvelle case. Presque la moitié des sujets répond par l'affirmative, précisant pour la plupart « *depuis très longtemps* ». Deux d'entre eux se souviennent même des circonstances où ils l'ont apprise : « *entendue dans un doc[umentaire] » pour l'un, « vers 13 ans dans un cours de math[ématique]s sur les puissances* » pour l'autre.

Après le rappel complet de l'histoire est proposée la question suivante :
2)b) Combien de grains (approximativement) sur la 64^{e} case ?
(Pour être plus fidèle à l'histoire, il eut plutôt fallu poser la question de la somme des grains. Toutefois, cela eut ajouté une difficulté supplémentaire quelque peu hors-sujet.)

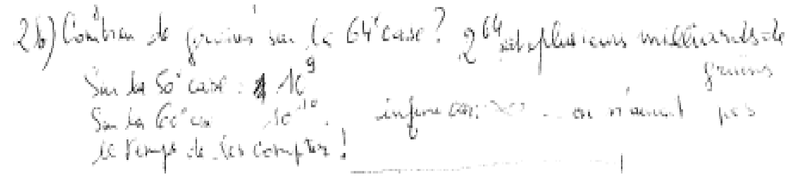
L'un des sujets demande : « *Au grain près ?* », provoquant les rires. Quelqu'un ajoute alors : « *On va faire comme 1 024* ! », sous-entendant l'idée d'une approximation. Enfin, malgré le changement complet de contexte, l'un des sujets reste encore un temps bloqué par la question de la conversion entre mètres et kilomètres.

L'analyse des copies dégage trois grands types de réponses, plusieurs types pouvant apparaître au sein d'une même copie. Le premier type, qui s'observe aussi dans les réponses aux questions 1)a) et 1)b) et concerne ici 5 copies, est celui des réponses qui utilisent une notation exponentielle, parfois comme introduction à un calcul, parfois comme un refuge devant une valeur trop difficile à calculer. Deux copies donnent la réponse correcte 2^{63}, une autre propose 2^{64}, une quatrième 2^n, et une dernière un étrange 10^{1064} (qui vient juste après une première réponse barrée : 1000^{64} ; peut-être le sujet rôde-t-il autour de l'expression correcte $1000^{63/10}$). Quatre des cinq sujets, visiblement gênés par leur réponse qu'ils estiment sans doute incomplète, tentent de la prolonger. Ainsi, une copie contient une écriture de toute la suite des puissances de 2 jusqu'à 2^{10} (bien que déjà donnée en 1)a)), sous la forme n 2^n ; elle passe ensuite directement de 2^{10} à 2^{20} (puis à 2^{30}, 2^{40}, etc. jusqu'à 2^{60}) en ajoutant un point d'exclamation pour indiquer le changement de rythme ; pour ces dernières puissances de 2, elle propose les valeurs 256×256 (pour 2^{20}), puis indique simplement « ×256 » à chaque nouvelle ligne, dans ce qui est à l'évidence une erreur d'indice dans le choix du facteur à appliquer. Dans un coin, un calcul à la main du produit 256×256 (avec le résultat incorrect 65 512 au lieu de 650536) apparaît, sans être réinvesti.

La difficulté devant le calcul est explicitée sur une copie qui n'utilise pas de notation exponentielle mais donne la liste des premières puissances de 2 jusqu'à 2 048, suivi de « *Je ne vais pas faire t[out] le calcul comment trouver l'expression ((1×2)×2…) 64 fois ? non, pour le coup, ce n'est pas assez* ! »

Le second type de réponses apparaît sur sept copies (dont deux qui montrent aussi le type précédent), qui tentent de réutiliser l'idée donnée en 1)b) (au point que l'une parle de plis). Parmi celles qui aboutissent à un résultat détaillé, deux réutilisent l'évaluation de 2^{50} déjà connue, trois repartent de l'approximation de 2^{10} par mille pour aller de dix en dix jusqu'à soixante. Une copie, atteignant 8×10^{18}, choisit d'arrondir à 10^{19}. La copie la plus aboutie sur cette question donne le calcul $2^{63} = 2^{50}\times2^{13} = 2^{50}\times2^{10}\times2^3$, réutilise le résultat de 1)b) pour évaluer 2^{50}, signale sous 2^{10} « 1000 fois », mentionne que $2^3 = 8$, pour finalement donner la réponse approchée attendue : « 8 millions de millions de millions ». Le résultat de cette copie est d'autant plus remarquable que la réponse de son auteur à la question 1)b), si elle montrait une bonne connaissance des règles sur les puissances (« $2^{50} = 2^{10}\times2^{10}\times2^{10}\times2^{10}\times2^{10}$ »), n'avait conclu que par une piètre approximation : « 32 mètres ~ ». (L'auteur est un ingénieur de 64 ans, dont « la profession en période active [a été] très éloignée des math[ématiques]») À une faute de calcul près (qui donne quatre trillions au lieu de huit), une autre copie est presque aussi remarquable, de la part d'un sujet n'ayant aucune formation scientifique.

Les réponses du dernier type sont celles qui tâchent d'exprimer une idée générale de l'immensité, comme : « des millions donc des tonnes de riz. Les réserves du sultan n'y ont pas suffi ». Une autre copie propose « des milliards de milliards », avant de se raviser pour barrer les deux premiers mots et les remplacer par « plusieurs », puis se raviser à nouveau et réécrire sa première proposition. Une copie propose la réponse reproduite ci-dessous, jolie synthèse des trois types de réponses, qui se conclut sur l'affirmation de l'infinité des grains sur la dernière case :


2b) Combien de grains sur la 64'case ? 2^{64} est plusieurs milliards de grains
Sur la 50' case : 10^9
Sur la 60' case 10^{10}. infini car : « on n'aurait pas le temps de les compter !

« 2)b) Combien de grains sur la 64^e case ? 2^{64} est plusieurs milliards de grains. Sur la 50^e case : 10^9. Sur la 60^e case : 10^{10}. infini car : « on n'aurait pas le temps de les compter ! »

Lors de la présentation de la réponse approchée, écrite sous la forme 8 000 000 000 000 000 000, certains sujets manifestent leur connaissance des puissances de dix en proposant d'écrire plutôt 8×10^{18}. Surtout, tout comme pour la réponse à la question 1)b), plusieurs sujets se montrent très demandeurs du nom de ce nombre ; quelques instants sont donc consacrés aux noms des grands nombres (selon l'échelle longue). Une discussion s'engage également sur la manière d'appréhender les grands nombres, l'un des sujets expliquant qu'il les considère comme « effrayants », de même que les très petits nombres, au motif qu'ils sont hors du champ de ce qu'on peut atteindre.

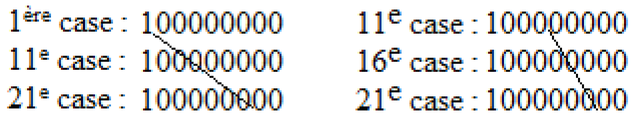
La question suivante n'est pas traitée par écrit, mais seulement au travers d'une discussion, à partir d'un support écrit au tableau :

1ère case :	1,00000000
11^e case :	1000,00000
21^e case :	1000000,00

Ce qui est demandé aux sujets est de décrire l'évolution de la valeur (approchée) du nombre de grains au fil des cases, en s'inspirant de ce qui s'observe sur les valeurs particulières indiquées. L'idée de « virgule glissante » ne s'est pas imposée d'elle-même ; après quelques instants de discussion, une question plus quantitative porte sur l'évaluation de la quantité de grains sur la 16^e case, les données du tableau étant complétées ainsi :

1ère case :	1,00000000
11^e case :	1000,00000
16^e case :	
21^e case :	1000000,00

Les sujets tournent autour de l'objectif pendant un certain temps, certains l'atteignant même probablement l'espace d'un instant avant de se censurer (« Mais on ne peut pas couper un 0 en deux ! »). L'un des sujets propose alors, idée décisive, de tracer la diagonale menant de la virgule de la première ligne à celle de la dernière, observant que cette diagonale passe par la virgule de la ligne intermédiaire (11e case). Avec un peu d'aide, il franchit finalement le pas : pour la 16e case aussi, on met la virgule « sur la diagonale », et donc au milieu d'un 0.



Placements de virgule

Le présentateur explique que cette notation est avant tout destinée à rendre compte d'ordres de grandeur et non de valeurs exactes. Au fil de la discussion, l'expression

10000̦0000

dans laquelle la virgule est « au milieu » du cinquième 0 est, selon une faute de raisonnement classique, interprétée comme la valeur 50 000. Un cas particulier de multiplication de deux puissances (entières) de dix fournit le moyen de rectifier cette erreur en justifiant l'égalité

10̦=√10

après laquelle les sujets montreront une bonne anticipation collective de ce que

10̦

(avec la virgule placée « au tiers du 0 ») est égal à $\sqrt[3]{10}$.

Le point central que révèle la discussion est la surprise de plusieurs sujets devant cette notation originale (« C'est autorisé, comme écriture ? »). La confiance qui s'est installée entre eux et l'expérimentateur au fil des années n'est pas de trop pour les convaincre du bien-fondé de telles expressions. Certains estiment que $10^{4,5}$ est plus légitime que

10000̦0000

et il faut consacrer un moment à expliquer en quoi ces notations procèdent toutes deux de conventions.

La question suivante est destinée à se familiariser avec cette nouvelle notation.
3) Ordonner les nombres suivants par ordre croissant.

a=100,000	*b*=100̦00
c=100,0	*d*=10̦000
e=1000	*f*=100̦
g=1000,	*h*=100̦0

Il est précisé oralement que les virgules de *a* et de *c* sont « entre les 0 », que celle de *b* est « plutôt à droite », celle de *d* « plutôt à gauche », et celles de *f* et de *h* « à la verticale l'une de l'autre ». Une bonne majorité de réponses sont correctes, le seul point litigieux étant, pour certains sujets, la question des 0 superflus, qui crée parfois une hésitation sur le classement entre valeurs en réalité égales (*a* et *c*, *e* et *g*, *f* et *h*). Une copie exprime explicitement des doutes : « Pour moi, ce qu'il y a après la virgule ne compte pas ! Ai-je bien compris 100,000=100,0 ? » La question ne suscite pas d'autres commentaires théoriques, comme ce sera le cas, d'ailleurs, pour les autres expériences, à l'exception de la quatrième (*cf. infra*, où des détails sont présentés sur les problèmes posés par cette question 3)).

Au moment de l'annonce de la question suivante, l'un des sujets s'exclame : « *Ouh ! J'abandonne* ! ». Le ton est badin et le sourire de rigueur mais le propos exprime sans doute une certaine fatigue, fort compréhensible après plus d'une heure de travail et l'heure tardive (19 heures 30 passées). La bonne volonté collective permettra tout de même de traiter la question, qui sera la dernière (et suivie d'un exposé plus général sur les motivations de l'expérience). Elle constitue une incursion dans le domaine des opérations :
4) Multiplier :

$$10\underset{,}{0} \times 100\underset{,}{0}$$

Il est précisé par écrit que la première virgule est « à la moitié » et la seconde « aux trois quarts ». L'explication donnée précédemment de l'égalité

$$1\underset{,}{0}=\sqrt{10}$$

avait déjà permis d'exposer le principe général de la multiplication (par addition des 0 situés avant les virgules).

Quelques copies écrivent sans problème la réponse en virgule glissante, quelques autres oublient un 0 avant la virgule, n'ayant peut-être ajouté que les nombres de 0 entièrement à gauche de la virgule et donc placé celle-ci dans le quatrième 0 au lieu du cinquième. D'autres copies encore choisissent de revenir au formalisme des racines carrées, l'une proposant notamment la forme « 10 000 □ $\sqrt[4]{10}$ », une autre réécrivant l'expression de l'énoncé sous la forme « 10 □ $\sqrt{10}$ □ 100 □ $\sqrt[?]{10}$ », débouchant après calculs sur le résultat

$$1000\underset{,}{0} \times 1\underset{,}{0}$$

2.2. Avec des élèves ingénieurs (« Expérimentation de Villetaneuse »)

La seconde expérimentation s'est tenue dans le cadre d'un cours d'histoire des sciences destiné aux élèves de l'école d'ingénieurs de l'Institut Galilée (Université Paris-13, Villetaneuse, Seine - Saint-Denis). Ce cours était facultatif, sans examen final et donc assez informel d'une manière générale. Il s'est tenu au second semestre, le mercredi de 12h30 à 13h30. L'expérimentation a été menée lors de la dernière séance, le 30 mai 2012, avec sept étudiants de première année de la filière Énergétique, qui n'avaient pas été prévenus de l'expérience au préalable. Tous disposaient d'un bagage scientifique et mathématique de niveau universitaire.

Pour des questions de temps, les questions 3 et 4 n'ont pas été posées mais une question a été ajoutée après 2)b) :
2)c) Même question si les grains sont triplés.

Bien qu'apparemment intéressés par l'expérience, les sujets se sont montrés plus réservés dans leur participation que ceux de l'expérimentation de Bondy. D'autre part, eux aussi semblent n'avoir pas entièrement suivi la consigne qui était de n'écrire sur leur copie que ce qui venait d'eux et non des réponses données par l'expérimentateur. Notons que, bien qu'aucune consigne n'ait été donnée à ce propos, aucun des sujets n'a voulu utiliser une calculatrice, à aucun moment.

La question 1)a) n'obtient la réponse 1 024 mm que sur une seule copie. Quatre autres font figurer l'expression 2^{10} et deux autres commettent des erreurs de calcul (une copie ne répond pas, peut-être s'agit-il de celle d'un étudiant arrivé un peu en retard). Deux copies utilisent des expressions littérales pour l'épaisseur au lieu de s'en tenir à la valeur numérique proposée. Certaines copies indiquent l'épaisseur au fil des plis, parfois en s'arrêtant en cours de route pour finir par écrire 2^{10}, peut-être dans une démarche visant à déterminer le bon exposant à considérer. Contrairement à la première expérience, cette question du juste exposant a été considérée avec une certaine attention par le groupe.

Lors de la discussion, la question du caractère irréaliste de la réponse, provenant en fait du choix d'une épaisseur anormalement grande, se pose à nouveau mais de façon brève et sans conséquence sur la suite. La question de l'exposant à attribuer au 2 est aussi évoquée (9 ou 10 ?).

La réponse à la question 1)b) est « plus de 100 km » pour cinq copies, « entre 10 m et 10 km » pour les deux autres. Contrairement à la première expérience, il n'y a pas eu de discussion particulière sur cette question car, au vu du niveau mathématique des sujets, une telle discussion aurait fait doublon avec 2)b).

Deux sujets connaissent l'histoire des grains sur l'échiquier, les deux l'ayant appris durant un cours de mathématiques (à l'université pour l'un, l'autre indiquant : « *Depuis la 4ème. Exercice de math[ématiques] sur les puissance* »).

À la question 2)b), deux copies se contentent de la réponse 2^{63}, après s'être focalisées sur la recherche du bon exposant, sans tenir compte de la consigne de donner une réponse approchée. Un doute existe sur une troisième, dont l'auteur a probablement recopié des propos discutés ensuite. Une copie propose 2^{64} puis tente d'obtenir une valeur explicite à l'aide d'un algorithme d'exponentiation rapide (« $2^{64} = (2^8)^8 =$ [illisible] $= (93612)^4$ ») sans parvenir au but. Un sujet écrit 2^{64}, expression qu'il approche ensuite par 100 000 000 sans explication. Une sixième copie propose 2^{63} puis ajoute « plus de 1 000 000 grains de blé », des mots ultérieurement rayés et suivis d'un début de résolution approchée : « 2^{10} 1000 2^{20} 1 000 000 », qui s'arrête là peut-être par manque de temps. La dernière copie, enfin, écrit « $2^{63} = 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 10^{10} \times 10^{10} \times 10^{10} \times 8$ » ; le glissement des 2^{10} aux 10^{10} n'altère pas la suite du calcul qui débouche, *via* l'approximation « $2^{10} = 1024$ », sur la valeur 10^{20} « = 100 milliards de milliards ». Le sujet donnera ensuite une explication orale de cette valeur 10^{20} : étant parvenu à 8×10^{18}, il a tout d'abord arrondi à 10^{19} avant de décider de redresser cette valeur à 10^{20} pour compenser la sous-évaluation de 2^{10} par 1 000.

La question 2)c) a donné lieu à des réponses variées. Toutes ont tenté de réinvestir l'idée institutionnalisée lors de la discussion de la question 2)b) mais plusieurs sont restés prisonniers de l'exposant 10 du cas antérieur et ont ramené 3^{63} à $3^3 \times (3^{10})^6$. Une faute de calcul a permis à un sujet, ayant obtenu 17 223 pour 3^{10} (au lieu de 59 049), d'effectuer l'approximation $3^{10} \times 2 \times 10^4$ à partir de laquelle il atteint 3^{60} de façon cohérente avec l'erreur initiale. Une copie écrit « $3^{63} = (3^9)^7$ » sans parvenir à aller plus loin. Une copie (la même que celle ayant donné 10^{20} comme réponse à la question 2)b)) approche 3^7 (= 2187) par 2000 et en déduit que $3^{63} = (3^7)^9$ est approché par 2000^9 soit 512×10^{27} (arrondi ensuite à 10^{28}). Une copie, heureusement isolée, multiplie par 3/2 la valeur 8×10^{19} du doublement des grains !

2.3. Avec des élèves du secondaire en cursus mathématique ordinaire (« Première expérimentation de Genève »)

Cette expérimentation a été menée le 29 janvier 2013 au collège Rousseau de Genève (Suisse). Elle a rassemblé des élèves de Deuxième (l'équivalent de la Seconde en France), âgés normalement de 16 ans. Leur cursus mathématique est ordinaire (2^e MA 1) à la seule différence que les cours de mathématiques leur sont donnés en anglais. Puisque les élèves comme l'expérimentateur étaient francophones, il a néanmoins été décidé que l'expérience aurait lieu en français pour éviter tout parasitage par des problèmes de langue.

L'expérimentation a rassemblé 19 élèves (dont 17 filles) ainsi que leur enseignant, Peter King, qui n'est pas intervenu (et a fort obligeamment permis que l'expérimentation se déroule durant l'une de ses séances de cours, ce dont je le remercie chaleureusement ici). Les élèves n'avaient pas été prévenus de l'expérience. Celle-ci a duré deux fois 45 minutes, avec une pause intermédiaire trop brève (5 minutes) pour avoir une quelconque incidence. L'expérimentation étant arrivée à son terme au bout d'environ 1h15, le dernier quart d'heure a été consacré à un petit exposé sur l'histoire de la perception de l'exponentielle chez différents auteurs des XVIII^e et XIX^e siècles.

Pour éviter les problèmes de vraisemblance rencontrés lors des deux premières expérimentations, la question 1)a) a été cette fois formulée de la manière suivante :
1)a) Une feuille (épaisseur 0,1 mm) est pliée en deux 10 fois. Quelle est l'épaisseur totale ?
Les questions suivantes, elles, n'ont pas été modifiées par rapport à l'expérience de

Bondy, aux différences près que la question 1)c) a été supprimée et que deux questions supplémentaires ont été ajoutées en fin de séance (*cf. infra*).

Contrairement à l'expérience de Bondy, la question 1)a) n'a pas été illustrée par le pliage d'une feuille (simple oubli de l'expérimentateur). Le fait d'avoir affaire à des dixièmes de millimètres n'a posé aucun problème ; il est donc clair que cette autre formulation, plus vraisemblable, est meilleure que l'autre à tout point de vue.

Pour répondre à la question, certains élèves utilisent leur calculatrice tandis que d'autres se lancent dans le pliage d'une feuille. Une nette majorité de copies (au moins 13) répond à la question en donnant l'épaisseur atteinte au bout d'un pliage, puis de deux, de trois, et ainsi de suite jusqu'à dix pliages. Deux d'entre elles tentent aussi une autre méthode mais en viennent finalement aux doublements successifs, pour des raisons différentes : la première y vient après avoir proposé d'abord le calcul « (0,1×2)10 » qui donne 2 mm, résultat jugé « *pas très vraisemblable (t[ro]p fin)* » ; la seconde copie, elle, indique : « *Peut-être qu'on aurait pu faire* $0,1^{10}$*, mais comme la calculatrice ne me donnait pas le résultat sous forme de chiffre à virgule (elle le laissait sous la forme d'une puissance), j'ai préféré faire toutes les étapes*. » Une prudence qui a involontairement conduit à éviter une grossière erreur… Quoi qu'il en soit, la plupart des copies obtiennent la bonne réponse.

Aussi bien à l'oral qu'à l'écrit, la question 1)a) suscite des doutes sur la faisabilité de l'expérience : « *L'épaisseur totale sera de 102,4 mm (si on arrive à la plier 10 fois…)* », indique une copie. Mais « *est-ce possible de pli[er] une feuille dix fois ?* » demande une autre. « [*i]l est possible que ce soit impossible* » lui répond sans le savoir une troisième, qui précise qu'« *il y a aussi la place que prend l'air*. » La deuxième copie précédente reviendra sur le problème lors de la question 1)b), en indiquant « *entre 10 m et 10 km mais c'est impossible de pli[er] une feuille A4 50 fois… c'est un peu abstrait. C'est plus large que long…* »

Lors de la résolution orale, l'approximation de 2^{10} par 1 000 est spontanément proposée par plusieurs élèves. En revanche, le listage de la suite des puissances de 2 est problématique, peu d'élèves semblant en connaître les premiers termes.

Les réponses à la question 1)b) (sur l'ordre de grandeur atteint en pliant 50 fois) se partagent plus ou moins équitablement entre les quatre possibilités offertes : deux choisissent 10 m, six entre 10 m et 10 km, deux entre 10 km et 100 km, cinq plus de 100 km (trois copies donnent une expression du genre $2^{50}\times0,1$ sans en déduire d'ordre de grandeur). Quant à la question 2)a) sur la légende des grains sur l'échiquier, cinq copies indiquent la connaître, deux autres sont incertaines. Pour la plupart, l'histoire évoque des souvenirs de travail mathématique, principalement scolaire : « *On y a eu droit en cours de math[ématiques] lorsque on f[ai]sait des exerci[c]es sur les puissances* », explique une copie. Deux élèves indiquent que c'est leur père qui la leur a raconté et une autre évoque un roman.

Lors de la discussion qui suit la question 1)b) et accompagne les réflexions sur le nombre de grains de la 16e case qui préludent à l'introduction de la virgule glissante, les élèves semblent intégrer sans problème le fait que la valeur approchée 1 000 est non seulement un nombre de grains (le nombre de grains sur la 11e case et non sur la 10e : ce point-là, en revanche, pose quelques soucis, heureusement mineurs) mais aussi un facteur multiplicatif (le facteur qui s'applique au nombre de grains lorsqu'on avance de 10 cases). « *C'est si facile* ? » s'étonne même une élève.

Pour l'expression du nombre de grains de la 16e case, des élèves proposent pertinemment la valeur 32 000. Avec l'interdiction supplémentaire d'utiliser d'autres chiffres que des 1 et des 0, certains tentent d'expulser le 3 et le 2 en les mettant en facteur (32×1000,00000). Lorsque les élèves renoncent à ce type d'expédients, l'idée leur vient de « *faire une moitié de multiplication par mille* ». La valeur 500 est citée mais brièvement car le groupe sent bien que le problème est plus profond.

Les élèves ne parviennent pas d'eux-mêmes à l'écriture en virgule glissante, en revanche l'idée est très bien acceptée. Aucun problème psychologique n'apparaît, aucune contestation ne se manifeste. Interrogés par l'expérimentateur, les élèves insistent même sur le caractère raisonnable de la représentation. « *Tant qu'on sait de quoi on parle…* », considère une élève avec confiance. Une autre va plus loin et explique que l'écriture « *donne un ordre de grandeur : 10 000* ». L'expérimentateur affine cette dernière proposition en parlant plutôt d'encadrement entre 10 000 et 100 000.

Les réponses à la question 3) confortent la légitimité de cette assurance collective. Toutes les copies ordonnent correctement les nombres proposés (sauf deux pour qui on a $f < h < b$, $c < a$ et $e < g$; dans ces deux cas sans doute, les 0 placés après la virgule ont été source de confusion). Une copie s'inquiète même de la facilité de la question : « *[J]e sens qu'il y a un piège avec les nombres après les virgules… ça m'a l'air trop simple* ». La question 4), en revanche, révèle beaucoup plus de difficultés. Sept copies proposent la bonne réponse. Une autre, prudemment, utilise des encadrements de facteurs pour proposer finalement : « *en gros, réponse entre 1000 à 100'000…* »[2]. Les autres éprouvent des difficultés dans la manière de compter les 0 qui doivent venir avant la virgule (plusieurs copies n'en mettent que trois) ou bien tentent d'en revenir à la numération ordinaire, typiquement en approchant le premier facteur par 50 et le second par 750.

2 Rappelons qu'en Suisse les grands nombres sont notés avec des apostrophes séparant chaque groupe de trois chiffres, comme par exemple dans 100'000 pour écrire 100 000. Une copie a été gênée par ce point, de façon localisée et sans incidence grave, à la question 3).

S’agissant de cette question 4), deux copies méritent une attention particulière pour leur créativité. La première commence par faire le calcul « 100×1000 = 10000 » puis ajoute « *et avec 2/4+1/4 virgules en moins* » pour écrire le résultat correct avec la virgule placée « *aux 1 quarts* ». Soustraire des portions de 0 en trop plutôt qu’ajouter les 0 à gauche des virgules est une possibilité à laquelle l’auteur n’avait pas songé. Une seconde copie, elle, colorie en bleu l’intérieur des trois 0 à gauche des virgules des deux facteurs, en violet la moitié de 0 du facteur de gauche, également en violet une moitié du 0 sur la virgule du facteur de droite et enfin, en orange le quart de ce même 0 qui reste à gauche de la virgule. La réponse proposée, correcte, est présentée sous la forme d’un 1 suivi de trois 0 coloriés en bleu, d’un 0 colorié en violet et d’un 0 colorié en orange dans son quart de gauche, la virgule étant placée immédiatement après ce dernier coloriage. Un commentaire ajouté (en vert) au-dessus du 0 non colorié du facteur de gauche (« *je ne sais pas où le mettre…* », la partie droite de ce 0 étant cerclée de vert) semblant néanmoins indiquer un certain manque d’assurance. L’élève a-t-elle eu du mal à identifier la place, dans sa réponse finale, de la partie non coloriée de ce 0 ?

Les deux questions ajoutées en fin de séance ont été celles-ci :
5) Ajouter

100x1000

6) Calculer la racine carrée de 1000.

La question 5) n’est traitée correctement par aucun élève. La plupart d’entre eux tente de poser une addition selon la méthode usuelle, en ignorant le problème du placement des virgules à la verticale l’une de l’autre. Des réponses comme 1100 sont données, avec une virgule placée selon une règle improvisée. La discussion, où la réponse est proposée à partir de considérations sur les ordres de grandeur et l’argument « grand plus petit égale grand », n’emporte que faiblement la conviction. Nous touchons visiblement là aux limites des compétences des élèves sur la notion d’ordre de grandeur et des développements plus longs et des exercices complémentaires auraient à l’évidence été nécessaires.

La question 6) a davantage de succès, avec un majorité de copies (12) qui propose la réponse attendue d’une virgule « dans » le second 0. Le fait que c’est « à la moitié » est régulièrement signalé, même si deux copies placent explicitement la virgule au premier tiers.

2.4. Avec des élèves du secondaire en cursus mathématique de spécialité (« Seconde expérimentation de Genève »)

Cette quatrième expérimentation s’est déroulée le même jour que la précédente, juste après et dans les mêmes conditions générales, avec cette fois 14 élèves (dont 7 filles). La seule différence initiale était que les élèves suivaient un cursus de spécialité mathématique. Pour cette raison, nous reprenons les résultats de cette expérimentation principalement dans l'objectif de la comparer avec la précédente.

La réponse à la question 1)a) ne pose pas de problème et ni cette question ni les suivantes ne suscitent de question sur la vraisemblance de 10 ou 50 pliages. La question 1)b), elle, montre une différence importante avec l'expérimentation précédente. En effet, lors de l'écriture au tableau des quatre possibilités proposées, de petits rires étouffés se font entendre et vont crescendo au fil de la rédaction de la question. Les premiers pouffements se font entendre dès la proposition « entre 10 m et 10 km », une épaisseur de 10 km semblant déjà visiblement excessive à certains élèves.

Les copies portent pourtant un message assez différent. Deux copies seulement proposent « entre 10 m et 10 km », cinq proposent « entre 10 km et 100 km » et les sept autres vont au-delà des 100 km. De nombreuses copies tentent un calcul, exact ou approché, pas toujours valide (l'une d'elles atteint la valeur de… 102 km, ce qui lui permet de répondre juste à la question !). Cinq copies mentionnent explicitement leur « intuition », trois autres éprouvent le besoin d'expliquer qu'ils ne font que donner un avis (« je crois », « Mon chiffre choisi me semble probable », « à mon avis »), un phénomène qui apparaît moins dans l'expérimentation précédente (au cours de laquelle les élèves avaient par ailleurs peu tenté de calculer).

La connaissance de la légende des grains sur l'échiquier est proportionnellement importante, avec sept copies qui répondent oui à la question 2)a). Le contexte scolaire est moins souvent cité, au profit du contexte familial. Une copie indique une bande dessinée[3], une autre mentionne un cours de biologie illustrant « la croissance exponentielle des bactéries » à l'aide de « l'exercice avec la feuille que l'on plie ».

La discussion destinée à présenter l'écriture en virgule glissante se révèle très différente de celle de l'expérience précédente. D'un côté, en effet, les élèves arrivent assez vite à parler d'« un zéro et demi » au sujet du nombre de grains sur la 16e case. En revanche, voir un zéro coupé en deux provoque stupeur et doute chez de nombreux élèves. « C'est contre les règles des mathématiques », s'indigne l'une tandis qu'une autre demande : « On a le droit ? » Chez ces élèves de bon niveau

3 La copie précise : « dans un « Picsou magazine » (Donald demandait à Picsou 1 pièce pour la première case…) ». L'histoire des grains sur l'échiquier est mise en scène dans *Paperiade* de Guido Martina & Luciano Bottaro (*Topolino*, n°202-204, 1959), paru en français dans *Mickey Parade* n°25, janvier 1982 sous le titre *La Bataille des héros*. Ce n'est toutefois pas Donald qui demande à Picsou de doubler des grains. J'ignore si l'élève avait une autre histoire en tête, quoi qu'il en soit les souvenirs sont parfois trompeurs : lors de l'expérimentation de Bondy, l'un des participants avait cru se souvenir avoir lu l'histoire des grains sur l'échiquier dans un roman de Katherine Neville, *Le Huit* (Pocket, 2004). En réalité, bien que le roman tourne effectivement autour du jeu d'échecs, l'histoire des grains n'y apparaît pas.

scolaire en mathématiques, le côté transgressif de la virgule glissante est difficile à accepter. Une copie exprime son angoisse à la question 3) : « *Très perturbant, les virgules au milieu des zéros* ». Une autre, répondant à la question 4), écrit tout d'abord « *On ne peut pas multiplier 2 ordres de grandeur (je pense), mais j'ai sans doute tort* » puis barre cette phrase et écrit en-dessous : « *Je ne sais pas comment faire et n'arrive pas à me les représenter* ».

L'obstacle ne vient pas d'une difficulté technique. Une fois l'écriture acceptée bon gré mal gré, la suite des questions montre une compréhension fine des mathématiques en jeu, qui va jusqu'à prendre l'expérimentateur à revers en montrant une faille dans la formulation de la question 3). En effet, lors de la présentation de l'écriture en virgule glissante, il est beaucoup insisté sur le fait que ce sont des ordres de grandeurs qui sont représentés, bien davantage que des nombres. Dans ce cas, la réponse à la question 3) pose divers problèmes théoriques majeurs. Par exemple, est-il licite d'écrire $b = f$, et n'est-il pas plus prudent d'écrire $b \approx f$? D'autre part, l'expression e a la forme d'un nombre tandis que la virgule du g suggère un ordre de grandeur. Est-il alors légitime d'écrire $e = g$, ou même seulement de vouloir comparer ces objets de nature différente ? Enfin, comme le remarque une élève, écrire $f < a$ est contestable : si f peut être n'importe quelle valeur entre 10 et 100 alors il est possible que f soit égal à a et il faut donc plutôt écrire $f \leq a$.

Si l'essentiel des copies classe correctement les expressions données à la question 3), il est toutefois notable que les signes < ou ≤ sont plusieurs fois absents au profit d'une notation alternative, par exemple « *d*/*f*/*h*/*b*/*c*/*a*/*e*/*g* » (parfois, des parenthèses ou des accolades rassemblent les expressions considérées comme égales), un phénomène que l'on retrouve beaucoup moins dans les copies de l'expérience précédente. Dans une respectable prudence, les élèves choisissent de manier l'écriture en virgule glissante avec précaution, lui refusant l'usage des notations usuelles permettant de comparer des nombres.

La question 4) produit la réponse attendue sur cinq copies. Cinq autres reformulent les facteurs typiquement sous la forme « 50×750 » et deux utilisent des encadrements. Oralement, une élève propose la même idée apparue lors de la troisième expérience consistant à écrire 10000 et à déterminer ensuite où placer la virgule en « enlevant » les 0 et portions de 0 en trop.

La question 5) est l'occasion de tentatives variées, souvent infructueuses, mais trois copies se distinguent tout de même par leur emploi pertinent d'encadrement, proposant que la réponse est « entre 110 et 1100 ». Une élève, dont la copie est à l'évidence l'une de ces trois, explique oralement qu'elle a procédé ainsi car elle « *a du mal avec ces notations* » (en virgule glissante).

Enfin, 10 copies répondent correctement à la question 6), confirmant le caractère relativement facile de cette question et suggérant que le calcul de racines carrées serait peut-être une introduction plus simple aux opérations en virgule glissante que la multiplication.

2.5. Réactions à froid des élèves des expérimentations de Genève

Peter King a eu l'heureuse idée de demander à ses élèves leurs réactions quelques jours après l'expérimentation. Les élèves ont ainsi répondu par écrit, et de façon anonyme, à trois questions ainsi rédigées :

- *Qu'avez-vous appris lors de la présentation de M. Rittaud ?*
- *Qu'avez-vous apprécié lors de la présentation de M. Rittaud ?*
- *Qu'est-ce que M. Rittaud peut améliorer ?*

Les réponses montrent des éléments généraux sur la tenue de l'expérience mais aussi plusieurs remarques plus ciblées. Parmi les éléments généraux qui reviennent, mentionnons (outre l'importance, pour les élèves, d'un exposé dynamique, ludique, fait dans la bonne humeur et avec une bonne diction) l'intérêt largement partagé pour les questions historiques. Les élèves ont également pris leur rôle très au sérieux : ils apprécient beaucoup d'avoir pu pouvoir participer, tout en regrettant de n'avoir pas été suffisamment éclairés sur les objectifs de l'expérimenation. Ils expriment leur satisfaction d'avoir fait des mathématiques d'une manière qui leur a semblé originale : l'un explique avoir apprécié de « *découvrir un autre aspect des math[ématiques], pour une fois pas aussi préci[s] et exact que les math[ématiques que l'on fait en classe* », un autre indique avoir appris « *à développer des manières de penser [plus] logiques* », un troisième « *[à] voir les mathématiques un peu différemment, de façon plus large* » et non simplement « *résoudre telle équation* ». Un quatrième estime que la séance lui a permis d'« *exerc[er] [s]on sens logique* », et un cinquième, dans une tournure un rien paradoxale, écrit : « *J'ai aimé apprendre des choses qui [sont] intéressantes même si elles ne sont pas importantes pour l'avenir (comme la* <u>plupart</u> *des mathématiques du collège). Il est plus agréable d'étudier des sujets réels ou de la vie de tous les jours*».

Pour ce qui est du sujet de l'expérience lui-même, les élèves semblent y avoir trouvé un réel intérêt. L'exponentielle (que plusieurs appellent « exponentialité ») est un sujet nouveau pour eux et ils se sont plu à en découvrir la rapidité de croissance (« *j'ai appris qu'il était difficile de se représenter l'exponencialité (sic) parce que l'on ne pense pas que cela va faire un si grand nombre* » ; « *la vitesse incroyable* » ; « *le nombre peu devenir très grand en `peu de temps'* »…). Plusieurs élèves évoquent le caractère « étonnant », « perturbant et déroutant », « impressionnant »… mettant en balance « l'impact énorme » de la croissance exponentielle en regard des valeurs « anodines » initiales. Si plusieurs rappellent combien « le cerveau humain est souvent dépassé », certains ne manquent pas d'affirmer leurs progrès (« *J'ai appris à ne plus être surpris en entendant le* *résultat d'une grandeur exponentielle*» ; « *[cela] m'a d'abord laissée perplexe, mais je m'y suis vite habituée*»)

Le thème des ordres de grandeur et la façon de les visualiser fait partie de ce que plusieurs élèves écrivent avoir appris (« *la notation dépend de ce que l'on considère* »). La virgule glissante est, bien sûr, l'objet de commentaires divers, parfois intrigués mais le plus souvent positifs : « *la virgule au milieu du zéro était une idée assez intéressante* » ; « *Maintenant on sai[t] qu'on peut mettre des virgules dans des chiffres* » ; « *on peut mettre des virgules un peu partout* », et même… « *j'ai appris* 1000 *choses* ».

Le dernier élément saillant de ces retours des élèves est l'intérêt considérable éveillé par les histoires qui mettent en scène la croissance exponentielle. En particulier, l'histoire des grains doublés sur les cases de l'échiquier a marqué les esprits : elle est citée au moins aussi souvent que celle de la feuille pliée, bien que cette dernière ait mobilisé nettement plus de temps au cours de l'expérimentation.

3. Conclusions et perspectives

La variété des résultats produits par les quatre expériences montre qu'il est sans doute peu de lignes directrices universelles sur le sujet et qu'à des publics différents correspondent des problématiques différentes. Quelques points généraux semblent néanmoins pouvoir être dégagés.

1) L'étonnement que provoque la rapidité de la croissance exponentielle se manifeste à tous les niveaux ; il n'est que partiellement corrélé aux compétences mathématiques. Ainsi, les élèves de la seconde expérimentation de Genève, en principe plus avancés en mathématiques que ceux de la première, montrent une surprise bien plus considérable[4].

2) De même, l'idée de la virgule glissante n'est pas nécessairement mieux acceptée par des sujets de niveau plus avancé, les sujets des expérimentations de Genève mais aussi ceux de l'expérimentation de Bondy semblant même suggérer partiellement une corrélation inverse. Une piste d'explication est la suivante : le niveau avancé en mathématiques de certains sujets peut tenir à une certaine docilité dans l'apprentissage, qui les conduit à se conformer aux prescriptions de l'institution. Le caractère évidemment transgressif de la notation en virgule glissante est ainsi susceptible de poser des problèmes particuliers à ces sujets, qui

4 En passant, il conviendrait de réfléchir à une formulation de la question 1)b) plus neutre, le choix des options proposées pouvant être considéré comme biaisé en faveur des réponses erronées. Une idée serait de proposer davantage d'ordres de grandeur, jusqu'à atteindre des ordres dépassant la bonne réponse - mais cela constituerait peut-être un biais inverse.

se retrouvent davantage que d'autres placés dans une situation d'inconfort[5]. Certains sujets de l'expérimentation de Bondy, pourtant éloignés depuis fort longtemps des bancs de l'école, ne sont pas les moins gênés par cette transgression avec l'institution, la question de la « légalité » de l'écriture en virgule glissante étant revenue plusieurs fois (« *on a le droit de mettre de virgules dans un zéro* ? » ; « *C'est autorisé* ? »), même si un réflexion finale à l'issue de la séance montre que ces réticences ne sont pas insolubles (« *Finalement, ça devient clair après un moment* »). L'expérimentation de Villetaneuse suggère par ailleurs que des compétences suffisamment élevées sont une condition suffisante pour vaincre l'obstacle psychologique d'une virgule à l'intérieur d'un zéro.

3) Toutes les expérimentations montrent que la légende des grains sur l'échiquier est connue d'une fraction non négligeable de la population (une vingtaine de personnes parmi les 54 sujets des expérimentations, réparties de manière relativement homogènes entre 25 % et 50 % des quatre échantillons) et que le cours de mathématiques est le lieu le plus courant où cette histoire est apprise (environ la moitié du temps). Cela témoigne du potentiel émotionnel considérable de cette histoire plus que millénaire.

4) De même, les premiers termes de la suite des puissances de 2 jusqu'à 1024 constituent une connaissance assez répandue, bien qu'elle ne soit jamais institutionnalisée à l'école.

5) Les expérimentations de Genève suggèrent que, de façon un rien paradoxale, un éventuel enseignement des opérations entre expressions en virgule glissante devrait commencer par l'extraction de racines carrées, continuer par la multiplication (et la division) et finir par l'addition. Toutefois, au vu des difficultés théoriques qui se sont révélées lors de la première de ces deux expériences, et de la nécessité qui est apparue de l'utilisation d'outils fins sur les ordres de grandeur, il paraît sans doute prudent de s'en tenir à la rectification de l'intuition et de limiter les ambitions arithmétiques.

6) Le problème ne s'est manifesté explicitement que lors de l'expérimentation de Bondy mais il convient de réfléchir à la question de savoir dans quelle mesure l'aptitude à nommer un très grand nombre est important pour en permettre l'appropriation. Pour une partie au moins des sujets de Bondy, un nombre n'est « réel » que s'il désigne une quantité accessible ; le fait d'être capable de l'écrire et de mener sur lui toutes les opérations que l'on veut n'est pas spontanément identifié comme un élément décisif.

---

5 Par-delà cette dimension transgressive, une analyse psychanalytique plus fine révèlerait peut-être des éléments symboliques d'ordre sexuels susceptibles de poser des problèmes, notamment à des sujets adolescents (je songe ici à la pénétration d'une virgule, de forme phallique, dans un zéro, de forme vaginale).

BIBLIOGRAPHIE

BOLTON L. E., WARLOP L. & ALBA J. W., (2003). Consumer Perceptions of Price (Un)Fairness. *Journal of Consumer Research*, *29*, 474-491.

CHRISTANDL F. & FETCHENLAUER D., (2009). How laypeople and experts misperceive the effect of economic growth. *Journal of Economic Psychology*, *30* (3), 381-392.

ITENBERG I., (2008). Introduction à la géométrie tropicale. *In* : *Géométrie tropicale* (ed.: P. Harinck, A. Plagne, and C. Sabbah), Journées mathématiques X-UPS 2008, Éditions de l'École Polytechnique, 1 - 25.

JONES G., (1977). Polynomial perception of exponential growth. *Perception & Psychophysics*, *21*, 197-198.

JONES G., (1979). A generalized polynomial model for perception of exponential series. *Perception & Psychophysics*, *25* (3), 232-234.

MACKINNON A. J. & WEARING A. J., (1991). Feedback and the forecasting of exponential change. *Acta Psychologica*, *76* (2), 177-191.

ROHRBASSER J.-M., (1999). William Petty (1623-1687) et le calcul du doublemnet de la population. *Population*, *4-5*, 693-705.

STANGO V. & ZINMAN J., (2009). Exponential Growth Bias and Household Finance. *The Journal of Finance*, *LXIV* (6), 2807-2849.

TIMMERS H. & WAGENAAR W., (1977a). Inverse statistics and misperception of exponential growth. *Perception & Psychophysics*, *21* (6), 558-562.

WAGENAAR W., (1977b). Polynomial perception of exponential growth: A reply to Jones. *Perception & Psychophysics 21* (2), 199.

WAGENAAR W. & SAGARIA S., (1975). Misperception of exponential growth. *Perception & Psychophysics*, *18* (6), 416-422.

WAGENAAR W. & TIMMERS H., (1978). Extrapolation of exponential time series is not enhanced by having more data points. *Perception & Psychophysics*, *24* (2), 182-184.

WAGENAAR W., (1979). The pond-and-duckweed problem; Three experiments on the misperception of exponential growth. *Acta Psychologica*, *43* (3), 239-251.

Benoît RITTAUD
Université Paris-13
rittaud@math.univ-paris13.fr