ATHANASIOS GAGATSIS ET ANNITA MONOYIOU

LES STRATÉGIES DES FUTURS INSTITUTEURS DANS LA RÉSOLUTION DE TACHES SUR LES FONCTIONS. APPROCHE PONCTUELLE OU APPROCHE COORDONNÉE ?

Abstract. Future teachers' strategies in solving tasks about functions - Point wise approach or coordinated approach?
The aim of this research was to contribute to the understanding of the point wise and coordinated approaches pre-service teachers develop and use in solving function tasks, and to examine which approach is more correlated with their ability in solving verbal complex problems. The study was conducted in three phases. Participants were 548 pre-service teachers. A test consisted of seven tasks was administrated to all the participants. Results were similar in all phases, indicating the stability of teachers' approaches and providing support for their intention to use the algebraic approach. Teachers who were able to use the coordinated approach had better results in problem solving.

Résumé. Le but de cette recherche a été d'une part de contribuer à la compréhension de l'approche ponctuelle et l'approche coordonnée que les élèves-enseignants développent et utilisent dans la résolution des tâches de fonction, d'autre part d'examiner laquelle de ces approches est la plus adaptée à leur capacité à résoudre des problèmes verbaux complexes. L'étude a été conduite en trois phases et 548 élèves-enseignants y ont participé. Un test constitué de sept tâches a été appliqué à tous les participants. Les résultats ont été similaires dans toutes les phases, ce qui montre la stabilité de l'approche des enseignants et confirme leur volonté d'utiliser l'approche ponctuelle. Les enseignants qui ont été capable d'utiliser l'approche coordonnée ont eu de meilleurs résultats dans la résolution de problèmes.

Mots-clés. *Fonction, élèves-professeurs, approche ponctuelle, approche coordonnée*

1. Le concept de fonction dans la recherche en didactique des mathématiques

Bien des chercheurs se sont intéressés aux fondements théoriques des recherches en didactique des mathématiques. Brousseau (1997) propose la théorie des situations didactiques, qui joue un rôle important dans les recherches françaises en didactique des mathématiques. Duval (2002) insiste sur le rôle primordial des représentations pour l'apprentissage des mathématiques et il propose la théorie des registres de représentation, qui constitue le fondement théorique de la présente recherche. Vergnaud propose « Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques » (Vergnaud, 1981) et quelques années plus tard il présente « La théorie des champs conceptuels» (Vergnaud, 1991). La majorité des chercheurs qui ont travaillé sur le domaine théorique de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques ont cherché des relations entre les comportements des étudiants et la connaissance acquise (Balacheff, 1995). Cette relation entre comportement et connaissance est cruciale ; si elle n'était pas apparente comme conséquence de la mise en cause du behaviorisme (Balacheff, Gaudin, 2002), elle a toujours été implicitement présente dans la recherche sur l'éducation. La question des relations entre comportements et connaissances est considérées comme fondamentale dans la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1997). Un de ses postulats est que chaque situation – problème sollicite de la part de l'étudiant des comportements qui sont des indications de la connaissance acquise. Balacheff et Gaudin (2002) présentent plusieurs points de vue sur ces relations entre comportements des étudiants et connaissances acquises :

Une connaissance est caractérisée comme l'état de l'équilibre dynamique d'une boucle d'action/retour en arrière entre un sujet et un milieu sous des contraintes prohibitives de viabilité (p.3).

Ces deux auteurs essaient de donner une caractérisation formelle du mot conception. Ils insistent sur la nécessité d'un meilleur fondement de la définition des conceptions, qui, d'ailleurs, a été signalée par plusieurs chercheurs (Confrey, 1990 ;Vinner 1983, 1987 ; Smith, Disessa, & Rochelle, 1993). En se basant sur la définition de Vergnaud (1991) ils proposent la définition suivante :

Nous appelons conception C un quadruplet (P, R, L, S) dans lequel :

- P est un ensemble de problèmes;

- R est un ensemble d'opérateurs;

- L est un système de représentation;

- S est une structure de contrôle.

Toutes les idées développées dans leur article sont ensuite appliquées au domaine des fonctions et notamment aux conceptions des étudiants liées à ce concept. En particulier, ils analysent les conceptions proposées par différents chercheurs et ils les caractérisent au moyen du quadruplet défini plus haut. Les auteurs mettent l'accent sur l'analyse des conceptions des étudiants à propos du concept de fonction.

Le concept de fonction est central en mathématiques et mathématiques appliquées. Il est donc naturel que l'enseignement et l'apprentissage des fonctions soit un thème qui fasse l'objet de très nombreuses recherches (Dubinsky & Harel, 1992; Artigue, 2009; Vanderbrouck, 2011). La compréhension des fonctions n'est apparemment pas simple : Les étudiants de l'enseignement secondaire, voire même de l'enseignement supérieur, quel que soit leur pays, ont des difficultés à conceptualiser la notion de fonction. La compréhension du concept de fonction constitue donc un souci majeur des éducateurs en mathématique et attire l'attention toute particulière de la part de la communauté des chercheurs en didactique des mathématiques (Dubinsky & Harel, 1992; Sierpinska, 1989, 1992). Bien souvent, les étudiants qui entrent à l'université ne savent pas manipuler des fonctions qui ne sont pas définies par une formule algébrique (Vandebrouck, 2011). Les travaux de Vinner sur le domaine des conceptions des étudiants à propos des fonctions sont classiques.Vinner (1983, 1987, 1992) a identifié plusieurs comportements conceptuels des étudiants à propos des fonctions :

- *La correspondance qui constitue la fonction devrait être systématique et être établie par une règle ;*
- *Une fonction doit être un terme algébrique ;*
- *Une fonction est identifiée par une de ses représentations graphiques ou algébriques ;*
- *Une fonction devrait être donnée par une règle ; une fonction peut avoir différentes règles de correspondance pour des domaines disjoints ;*
- *La représentation graphique d'une fonction doit être régulée de manière systématique ;*
- *Une fonction est une bijection.*

Dans le même esprit, Vinner et Dreyfus(1989) ont étudié les images des étudiants associées aux fonctions et leur relation avec la définition de la fonction. Il faut observer que ces conceptions existent chez les étudiants de pays différents. Ainsi Elia, Panaoura, Eracleous & Gagatsis (2007) ont examiné les conceptions des élèves du second degré de Chypre à propos du concept de fonction et ses relations avec les représentations de fonctions. En utilisant la classification hiérarchique implicative et cohésive à l'aide du logiciel CHIC, plusieurs chercheurs (Lerman, 1981; Bodin, A., Coutourier, R. & Gras, R., 2000) ont trouvé des relations entre les conceptions des étudiants, les conversions entre représentations des fonctions et la résolution des problèmes verbaux sur les fonctions. En se fondant sur un cadre théorique semblable, Elia, Panaoura, Gagatsis, Gravvani & Spyrou (2008) ont trouvé des relations similaires entre les conceptions des élèves du second degré en Grèce et leur résolution de problèmes verbaux sur les fonctions.

Enfin, il faut dire qu'il y a quantité de recherches sur la fonction et sur des concepts relatifs aux fonctions. Ainsi d'autres recherches ont examiné le concept de limite d'une fonction et le rôle des représentations sur la compréhension de ce concept (Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T., & Zoulinaki, F., 2009), ou le concept de tangente au graphe d'une fonction (notamment Castella, 1995).

2. Le rôle des représentations graphiques dans l'apprentissage des fonctions

Un facteur qui influence l'apprentissage des fonctions réside dans la diversité des représentations liées à ce concept (Hitt, 1998). Au paragraphe précédent, nous avons présenté la définition de la conception par un quadruplet (Balacheff & Gaudin, 2002). Une composante de ce quadruplet concerne les systèmes de représentation. En effet, un objectif éducatif important en mathématiques consiste pour les élèves en le fait d'identifier et d'utiliser efficacement diverses formes de représentation du même concept mathématique et de savoir passer avec aisance d'un système de représentation à un autre.

L'utilisation de représentations multiples est fortement liée au processus complexe d'apprentissage en mathématiques, et plus particulièrement, à la recherche d'une meilleure compréhension par les étudiants des concepts mathématiques importants (Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987; Greeno & Hall, 1997), telle que celui de fonction. Etant donné que la représentation ne peut décrire complètement une construction mathématique (un concept mathématique) et que chaque représentation possède différents avantages, l'utilisation de différentes représentations pour la même situation mathématique constitue le noyau de la compréhension mathématique (Duval, 2002). C'est un des postulats principaux theoriques adoptés dans cette étude. Ainsworth, Bibby et Wood (1997) ont suggéré que l'utilisation de multiples représentations peut aider les élèves à développer des idées et processus différents, à retenir des significations et à promouvoir une compréhension plus profonde. En combinant les représentations, les élèves ne sont plus limités par les forces et faiblesses d'une représentation particulière. De plus, l'utilisation de multiples représentations peut aider les élèves à développer des capacités d'interprétation des représentations graphiques dans diverses situations (Bell et Janvier, 1981).

Certains chercheurs interprètent les erreurs des élèves soit comme le résultat d'une mauvaise manipulation des représentations, soit comme un manque de coordination entre les représentations (Greeno & Hall, 1997; Smith, DiSessa, & Roschelle, 1993). Les formes standard de représentation de certains concepts mathématiques, tel que le concept de fonction (la forme algébrique), ne sont pas suffisantes pour que les élèves puissent construire une signification entière et saisissent la portée réelle de leurs applications. Les enseignants de mathématiques, au secondaire, se focalisent traditionnellement dans leur cours sur l'utilisation de la représentation algébrique des fonctions (Eisenberg & Dreyfus, 1991). Sfard (1992) a montré que beaucoup d'élèves étaient incapables de passer d'une représentation algébrique à une représentation graphique des fonctions, alors que Markovits, Eylon et Bruckheimer (1986) ont observé que la conversion d'une représentation graphique à une représentation algébrique était plus difficile que l'inverse. Sierpinska (1992) soutient que les étudiants ont des difficultés à créer des liens entre les différents types de représentation des fonctions, ainsi que des difficultés à interpréter les graphes et à manipuler les symboles liés aux fonctions. De plus, Aspinwall, Shaw et Presmeg (1997) ont constaté dans certains cas que des images gravées dans les esprits d'étudiants peuvent provoquer des difficultés réduisant par exemple leurs possibilités de passer d'une représentation graphique à une représentation algébrique.

Gagatsis, A. Deliyianni, Elia & Panaoura (2011) ont exploré la flexibilité dans le cas du domaine numérique. Même si cet article ne portait pas sur les fonctions, il a paru justifié d'adopter dans la présente recherche les fondements théoriques sur la flexibilité représentationnelle.

Enfin, Artigue a présenté un certain nombre d'outils conceptuels pour aborder l'apprentissage et l'enseignement des fonctions (Artigue, 2009). Nous adoptons trois d'entre eux qui nous semblent particulièrement efficaces pour l'étude des résultats de notre recherche concernant la transition du Lycée à l'Université :

• l'identification de différents registres de représentation de fonctions et l'analyse des caractéristiques des interactions entre ces registres (Duval, 2002).

• l'identification de différents points de vue possibles sur une fonction : le point de vue ponctuel de la correspondance entre un élément et son image mais aussi le point de vue global qui permet de reconnaître les fonctions (Artigue, 2009).

• l'identification de différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances en jeu dans la résolution de tâches mettant en jeu des fonctions (Robert, 1998).

L'outil principal de notre recherche est le premier de ceux proposés par Artigue, celui des registres. En particulier, nous nous intéressons au passage d'un registre à l'autre, autrement dit à la conversion d'une représentation à une autre. Celle-ci conduit à la mise en œuvre du deuxième outil proposé par Artigue, concernant l'identification de différents points de vue possibles sur la fonction : les points de vue ponctuel et global. Ce point de vue théorique a été essentiellement utilisé dans les études d'Even (1998), et de Mousoulides et Gagatsis (2004). Even (1998) s'est attaché à analyser les corrélations entre la flexibilité dans le passage d'une représentation à une autre et d'autres aspects de connaissance et de compréhension. Cette étude a montré que les élèves ont des difficultés quand ils ont besoin de créer un lien flexible entre différentes représentations de fonctions. Un résultat important de l'étude est que beaucoup d'élèves traitent les fonctions de manière ponctuelle mais ne peuvent pas réfléchir sur une fonction d'une manière globale, c'est-à-dire n'accèdent pas à la conception objet d'une fonction au sens de Tall. Des données de l'étude, il apparaît aussi que les sujets qui peuvent facilement et librement utiliser une analyse globale des modifications dans la représentation graphique ont une meilleure et plus profonde compréhension des relations entre la représentation graphique et la représentation symbolique. Mousoulides et Gagatsis (2004) ont aussi adopté l'approche de Michèle Artigue et ont introduit les deux expressions d'approche algébrique et d'approche géométrique. Ils ont analysé les performances des étudiants de l'Université de Chypre dans les activités mathématiques qui impliquent principalement la conversion entre des systèmes de représentation de la même fonction, et se sont intéressés à l'approche opérée par les étudiants dans l'utilisation des représentations de fonction et quant à leur lien avec le processus de résolution de problèmes. Le résultat le plus important de cette étude est que deux groupes distincts se sont formés avec constance : les approches algébriques et géométriques. Les étudiants suivant l'approche algébrique calculent différents points du graphe de la fonction en calculant des valeurs de y pour différentes valeurs de x à l'aide de la formule algébrique de la fonction. Il s'agit donc d'une approche ponctuelle. La majorité des étudiants suit cette approche ponctuelle. De l'autre côté, les étudiants qui suivent l'approche géométrique, c'est-à-dire les ceux qui traitent les différentes tâches en ayant recours aux représentations graphiques des fonctions, réussissent mieux les problèmes verbaux sur les fonctions : ils peuvent plus facilement comprendre les relations entre les représentations symboliques et graphiques qui interviennent dans les problèmes verbaux.

Dans cette étude, le concept de fonction est abordé selon deux perspectives différentes, la perspective ponctuelle et la perspective coordonnée. La perspective algébrique est similaire à l'approche ponctuelle décrite par Even (1998) et à l'approche algébrique décrite par Mousoulides et Gagatsis (2004). Dans cette perspective, une fonction est perçue comme la transition entre des valeurs x et y : pour chaque valeur de x, la fonction possède une valeur y correspondante (Moschkovich et al., 1993). La perspective coordonnée combine les approches ponctuelles et géométriques. Dans cette perspective, la fonction est pensée d'une manière locale (c'est-à-dire ponctuelle) et globale (c'est-à-dire géométrique) en même temps. Les étudiants peuvent « coordonner » (manipuler avec dextérité) deux systèmes de représentation, algébrique et graphique. En d'autres termes, les étudiants sont amenés à tirer des informations à la fois de la représentation algébrique $y = f(x)$ d'une fonction et de sa représentation graphique.

Finalement le troisième outil proposé par Michelle Artigue, c'est à dire l'idée de Robert (1998) des différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances en jeu dans la résolution de tâches de fonction est pris en compte lors de la résolution de problèmes verbaux proposés aux étudiants.

3. Méthode

Le but de cette étude est de contribuer à la compréhension des approches ponctuelle et coordonnée que les élèves-professeurs de l'école primaire développent et utilisent dans les tâches de résolution de fonction et d'examiner quelle approche est la plus adaptée à leur capacité de résolution de problèmes verbaux. Ainsi, l'étude présente, basée sur des recherches précédentes, examine les questions suivantes :

- Quelle approche (ponctuelle ou coordonnée) les élèves-professeurs préfèrent-ils utiliser quand ils résolvent des tâches sur des fonctions simples ?
- Jusqu'à quel point les élèves-professeurs sont-ils capables de résoudre des problèmes verbaux sur les fonctions ?
- Qui sont les élèves-professeurs qui réussissent le mieux aux problèmes verbaux sur les fonctions : ceux qui suivent l'approche ponctuelle afin de dessiner la représentation graphique d'une fonction ou ceux qui suivent l'approche coordonnée ?

Cette étude a été conduite en trois phases. La première phase s'est déroulée en 2005 avec 135 participants, la deuxième phase s'est déroulée deux ans plus tard, en 2007, avec 153 participants et la troisième phase s'est déroulée en 2008 avec 260 participants. Les participants, dans chacune des phases, étaient des étudiants du Département de l'Education de l'Université de Chypre se préparant aux métiers de l'enseignement, c'est à dire des futurs professeurs des écoles. Les sujets étaient pour la plus grande partie des étudiants de bon niveau académique admis à l'Université de Chypre sur la base de leur note au concours d'entrée à l'université. Ils étaient diplômés de lycées de Chypre mais avec un baccalauréat différent : 30% parmi eux avaient un baccalauréat scientifique et les 70% restant un baccalauréat classique. En plus les participants des deuxième et troisième phases étaient diplômés de lycées d'un type légèrement différent, avec des manuels de mathématiques différents et différentes procédures de sélection des cours, du fait de changements majeurs effectués dans le système éducatif du secondaire. En fait, les étudiants de la première phase ont suivi un enseignement de mathématiques dans les trois dernières classes du lycée chypriote (élèves des classes de seconde, première et terminale scientifiques, de 15 à 18 ans). Les étudiants de la deuxième et de la troisième phase ont suivi un enseignement de mathématiques approfondi dans les deux dernières classes du lycée chypriote (élèves des classes de première et terminale scientifiques, de 16 à 18 ans). En tenant compte des informations précédentes nous pourront conclure que notre population expérimentale est très variée : premièrement les étudiants avaient reçu au lycée un enseignement de mathématiques assez différent pendant les trois dernières années de leur scolarité au secondaire ; deuxièmement ils avaient des baccalauréats de types différents. Il est donc naturel de supposer que leurs conceptions et connaissances sur les fonctions puissent être assez différentes.

Le test fut appliqué à tous les participants (Monoyiou & Gagatsis, 2008a; Monoyiou & Gagatsis, 2008b). Le test était constitué de sept tâches. Les quatre premières tâches étaient de simples tâches sur les fonctions (T1a, T1c, T2a, T2c, T3a, T3c, T4a and T4c). Dans chaque tâche se trouvaient deux fonctions linéaires ou quadratiques. Chaque fonction était donnée sous forme algébrique et l'une d'elle était accompagnée d'une représentation graphique. Il y avait toujours une relation entre les deux fonctions (e.g. $f(x)=2x$, $g(x)=2x+1$). Il était demandé aux étudiants de construire la représentation graphique de la seconde fonction. Ces quatre tâches impliquaient des conversions d'une représentation algébrique à une représentation graphique sans que des traitements soient nécessaires. Un premier objectif de ces quatre tâches était de voir si les étudiants allaient se servir de la représentation graphique de la première fonction pour construire celle de la deuxième fonction. Autrement dit, nous voulions examiner si les étudiants suivraient l'approche coordonnée puisque ces quatre tâches impliquaient des conversions d'une représentation algébrique à une représentation graphique sans que des traitements, au sens de Raymond Duval, soient nécessaires. Dans le cas contraire, les étudiants allaient-ils se baser sur des traitements arithmétiques et algébriques pour construire la représentation graphique de la deuxième fonction ?

Les trois autres tâches étaient des problèmes verbaux sur les fonctions :

- Le premier problème était constitué d'une information textuelle à propos d'un réservoir contenant un certain nombre de litres d'essence (600 L) et d'un camion-citerne remplissant le réservoir avec de l'essence. Le camion-citerne contient 2000 L de pétrole et le débit de remplissage est de 100 L par minute. Il était demandé aux étudiants d'utiliser cette information de manière à donner deux équations (Pr1a), à dessiner les graphes des deux fonctions linéaires (Pr1b) et à trouver quand le contenu du réservoir serait égal à celui du camion (Pr1c).

Il est évident qu'une résolution réussie du premier problème, devrait être liée à la réussite des quatre premières tâches de conversion des représentations de fonctions et en particulier à la réussite de la première tâche de conversion de fonctions linéaires.

- Le deuxième problème consistait en une information textuelle et algébrique à propos d'une colonie de fourmis. Le nombre de fourmis (A) augmente selon la fonction : $A=t^2+1000$, où t est nombre de jours). Le nombre de graines que les fourmis conservent dans la colonie augmente en fonction de $S=3t+3000$, où t est le nombre de jours. Il était demandé aux étudiants d'utiliser cette information de manière à dessiner des graphes (Pr2a) des fonctions linéaires et quadratiques et à trouver quand le nombre de fourmis dans la colonie et le nombre de graines seraient égaux (Pr2b).

Il est aussi évident qu'une résolution réussie du deuxième problème, devrait être liée à la réussite des quatre premières tâches de conversion des représentations de fonctions.

- Le troisième problème était constitué d'une fonction dans une forme générale $f(x) = ax^2 + bx + c$. Les nombres *a*, *b* et *c* étaient des nombres réels et $f(x)$ était égal à 4 quand *x*=2 et $f(x)$ était égal à -6 quand *x*=7. Les étudiants-enseignants devaient trouver combien de solutions réelles l'équation $ax^2 + bx + c$ possédait et expliquer leur réponse (Pr3).

Il est évident qu'une résolution réussie du troisième problème devrait être liée à la réussite des quatre premières tâches de conversion des représentations de fonctions par les étudiants qui ont suivi l'approche coordonnée. En effet une solution algébrique du problème n'est pas possible et les étudiants devraient avoir un point d'avis global, d'après Artigue, afin d'arriver à une solution correcte.

La passation du test s'est effectuée en une session de 60 minutes dans le contexte des cours de Didactique des Mathématiques du Département de l'Education de l'Université de Chypre.

Les résultats de l'étude concernant les réponses données par les élèves-enseignants aux quatre tâches ont été codifiés en un T majuscule (tâche), suivi par le nombre indiquant le numéro de l'exercice, suivi encore par une lettre qui indique la manière avec laquelle les professeurs ont résolu la tâche : (a) « a » est utilisé pour marquer une « approche ponctuelle – la fonction en tant que processus au sens de Tall », (b) « c » pour les élèves ayant adopté une « approche coordonnée – la fonction en tant qu'objet ». Une solution est reconnue comme « ponctuelle » si les participants n'utilisent pas les informations offertes par le graphe de la première fonction et procèdent à la construction du graphe de la deuxième fonction en trouvant les valeurs correspondantes pour x et y. Au contraire, une solution est reconnue comme « coordonnée » si les étudiants observent et utilisent la relation algébrique entre les deux fonctions dans la construction du graphe de la deuxième fonction ; par exemple les droites $y=2x$ et $y=2x+1$ ont le même coefficient directeur, par conséquent elles sont parallèles. Dans ce cas, les étudiants utilisent et combinent les deux types de représentations, c'est-à-dire la représentation graphique de la première fonction et les représentations algébriques des deux fonctions. Ils ont relevé la relation entre les deux équations données et l'ont interprétée graphiquement en manipulant la fonction comme un objet. Les symboles suivants sont utilisés pour représenter les solutions des élèves aux problèmes : Pr1a, Pr1b, Pr1c, Pr2a, Pr2b et Pr3. Les bonnes ou mauvaises réponses aux problèmes reçoivent la note 1 et 0 respectivement.

Pour l'analyse et le décryptage des informations collectées, une analyse statistique descriptive a été appliquée en utilisant le logiciel SPSS. Afin d'examiner l'existence ou non de différences statistiques substantielles entre les étudiants des phases A, B et C quant à l'approche qu'ils ont utilisée et quant à leur performance dans la résolution du problème, l'analyse de la dispersion (MANOVA) fut appliquée via le SPSS. De plus, la classification hiérarchique (Lerman, 1981) fut utilisée via le logiciel de statistique C.H.I.C (Bodin, Coutourier, & Gras, 2000). Trois diagrammes de similitude des réponses données par les élèves-professeurs, une pour chaque phase, furent créés. Les diagrammes de similitude permettent de classifier les tâches en ensembles selon l'homogénéité avec laquelle les participants les ont maniées.

4. Résultats

4.1 Analyse descriptive

Selon le tableau 1, la plupart des élèves-professeurs, dans les trois phases, ont correctement résolu les tâches 1 et 2. La tâche 1 impliquait une fonction linéaire ($y = 2x$) et la tâche 2 impliquait un forme très simple d'équation d'une parabole ($y = x^2$). Leur réussite a très fortement chuté sur les tâches 3 et 4 des fonctions quadratiques « complexes » (T3 et T4).

Dans les trois premières tâches, l'approche ponctuelle était prédominante, puisque la moitié, voire plus, des participants l'ont choisie pour les résoudre. Dans la tâche 4, la plupart des étudiants ont choisi une approche coordonnée. Dans cette tâche, une approche coordonnée semblait plus facile et plus efficace que l'approche algébrique (résolution d'un système d'équations) ou l'approche ponctuelle. Les étudiants participant aux trois phases ont donné des réponses similaires aux quatre tâches. La seule différence consistait dans le fait que les étudiants des phases B et C ont moins utilisé l'approche coordonnée et ont donné plus de réponses incorrectes que les étudiants de la phase A. Cela pourrait être expliqué par le fait qu'une proportion importante des étudiants de la première phase a suivi un enseignement approfondi des mathématiques dans les trois dernières classes du lycée chypriote. Au contraire, de nombreux étudiants de la deuxième et de la troisième phase ont suivi un enseignement des mathématiques approfondi seulement dans les deux dernières classes du lycée chypriote.

Dans le cas de la tâche 1 ($y = 2x$, $y = 2x + 1$), certains élèves-enseignants qui ont utilisé une approche ponctuelle ont trouvé des points d'intersection avec des axes x et y et ont construit le graphe. D'autres ont construit un tableau de valeurs afin de les aider à construire le graphe. Les étudiants, qui ont utilisé l'approche coordonnée, ont comparé les deux équations et ont mentionné que l'inclinaison était la même et que les deux fonctions étaient parallèles. Ensuite, ils ont mentionnés que les points de la deuxième fonction étaient « un de plus » que les points de l'autre. Certains d'entre eux ont trouvé un point de manière à vérifier leur assertion.

Tableau 1 : Les réponses des élèves-professeurs aux quatre premières tâches (Phases A, B et C).

Tâches		Approche ponctuelle avec réponse correcte (%)	Approche coordonnée avec réponse correcte (%)	Réponse incorrecte (%)
1	A	54.8	32.5	12.7
	B	56.2	22.2	21.6
	C	55.8	20.4	23.8
2	A	54.8	31.1	14.1
	B	56.9	25.5	17.6
	C	45.4	24.6	30
3	A	56.3	17.7	26
	B	43.8	15	41.2
	C	44.2	11.2	44.6
4	A	24.4	48.1	27.5
	B	24.8	47.1	28.1
	C	29.2	43.1	27.7

Dans le cas des tâches 2 ($y = x^2$, $y = x^2 - 1$) et 3 ($y = x^2 + 3x$, $y = x^2 + 3x + 2$), les élèves-professeurs qui utilisent une approche ponctuelle trouvent les solutions réelles de la deuxième équation et le point minimum et construisent le graphe sans utiliser le premier graphe. Au contraire, les élèves-professeurs qui utilisent l'approche coordonnée en premier comparent les deux équations et réalisent qu'on passe de la première à la deuxième par une translation verticale. Ils mentionnent que le point minimum dans le premier cas est « un en bas » et dans le deuxième cas « deux au-dessus ». Certains d'entre eux trouvent un autre point de manière à dessiner un graphe plus précis.

Dans le cas des tâches 4 ($y = 3x^2 + 2x + 1$, $y = -(3x^2 + 2x + 1)$), les élèves-professeurs qui ont utilisé une approche ponctuelle ont trouvé le point d'intersection avec l'axe y et le maximum. Les étudiants qui ont utilisé l'approche coordonnée ont comparé les deux équations et ont mentionné que les deux fonctions étaient « opposées » et « symétriques » selon l'axe x. Dans cette tâche, l'approche ponctuelle était plus compliquée, car l'équation n'avait pas de solution réelle. La plupart des étudiants, après des efforts infructueux pour trouver les points d'intersection avec l'axe x, ont dessiné le graphe en utilisant l'approche coordonnée. Les performances des élèves-professeurs aux trois problèmes verbaux ont été évaluées et le tableau 2 décrit les résultats.

Tableau 2 : Réponses des élèves-professeurs aux trois problèmes (Phase A, B et C).

Problèmes		Réponse correcte (%)	Réponse incorrecte (%)
1a	A	38.5	61.5
	B	22.9	77.1
	C	42.7	57.3
1b	A	59.3	40.7
	B	45.8	54.2
	C	35.4	64.6
1c	A	70.4	29.6
	B	55.6	44.4
	C	37.7	62.3
2a	A	46.7	53.3
	B	35.3	64.7
	C	32.3	67.7
2b	A	35.6	64.4
	B	27.5	72.5
	C	28.5	71.5
3	A	37	63
	B	20.3	79.7
	C	22.7	77.3

Dans le problème 1, seuls 38.5% des participants de la phase A, 22.9% de la phase B et 42.7% de la phase C ont réussi à utiliser les informations apportées de manière à donner les deux équations. Un large pourcentage des élèves-professeurs ayant participé aux phases A et B ont construit les deux graphes correctement (59.3% et 45.8% respectivement) et ont trouvé leur point d'intersection (70.4% et 55.6%). Plusieurs élèves-professeurs ayant participé à ces deux phases étaient incapables de donner les équations mais ont réussi à construire les graphes en construisant un tableau de valeurs pour x et y. Certains n'ont pas construit les graphes mais ont trouvé leur point d'intersection grâce à un tableau de valeurs. Quant aux élèves-professeurs ayant participé à la phase C, un plus faible pourcentage a réussi à construire les graphes (35.4%) et à trouver leur point d'intersection (37.7%). Dans ce problème, afin de trouver le point d'intersection, les élèves-professeurs avaient à résoudre une équation de second degré et cela a causé quelques difficultés. Le problème 3 était assez difficile pour les élèves-professeurs ayant participé aux trois phases, puisque seulement 37%, 20.3% et 22.7% respectivement ont réussi à le résoudre correctement. En général, les enseignants ayant participé à la phase A ont mieux réussi que les enseignants des phases B et C dans la résolution des problèmes. Une raison pourrait être attribuée aux différences, entre programmes scolaires de mathématiques, manuels scolaires de mathématiques et enseignement des mathématiques en général, existant entre les étudiants de la phase A d'une part et des étudiants des phases B et C d'autre part, différences déjà signalées au § 4.1.

Afin d'examiner s'il y a des différences significatives entre les étudiants des phases A, B et C quant à l'approche qu'ils ont utilisée et quant à leur capacité à résoudre des problèmes, une analyse de la variance (dispersion) (MANOVA) fut appliquée.

Dans l'ensemble, les effets de la phase des étudiants étaient très significatifs (Pillai's $F_{(6,\ 1088)} = 3.08$, $p<0.05$). En particulier, il y avait des différences importantes entre les trois phases quant à l'efficacité de la résolution des problèmes ($F_{(2,\,543)} = 7.69$, $p<0.01$). Les étudiants de la phase A ($\overline{X}=0.48$, SD=0.37) ont eu de meilleurs résultats dans la résolution de problèmes que les étudiants des phases B ($\overline{X}=0.34$, SD=0.34) et C ($\overline{X}=0.33$, SD=0.38). Bien que les étudiants de la phase B aient une performance sensiblement meilleure en résolution de problèmes que les étudiants de la phase C, cette différence n'était pas statistiquement significative. Il y avait des différences statistiques significatives entre les étudiants des phases A, B et C quant aux approches ponctuelle ($F_{(2,\,543)} = 0.51$, $p=0.60$) et coordonnée ($F_{(2,\,543)} = 2.26$, $p=0.11$). Plus particulièrement, les étudiants de la phase A ($\overline{X}=0.47$, SD=0.36) ont utilisé l'approche ponctuelle plus souvent que ceux des phases B ($\overline{X}=0.45$, SD=0.37) et C ($\overline{X}=0.44$, SD=0.37) mais cette différence n'était pas statistiquement significative. Quant à l'approche coordonnée, les étudiants de la phase A ($\overline{X}=0.32$, SD=0.35) l'ont utilisé plus souvent que ceux des phases B ($\overline{X}=0.27$, SD=0.35) et C ($\overline{X}=0.25$, SD=0.32), mais cette différence n'était pas non plus statistiquement significative. Il est remarquable que de manière générale les étudiants des trois phases ont utilisé plus souvent l'approche ponctuelle que l'approche coordonnée dans les tâches de résolution de fonctions simples.

4.2 Analyse hiérarchique de similitude

Les réponses correctes des étudiants participant dans les phases A, B et C aux tâches 1, 2, 3 et 4 et aux problèmes 1, 2 et 3, sont présentées dans les diagrammes