JEAN-FRANÇOIS MAHEUX ET JEROME PROULX

VERS LE *FAIRE MATHEMATIQUE*: ESSAI POUR UN NOUVEAU POSITIONNEMENT EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

(Débat : article original)

Abstract. Toward *mathematical doing*: Attempts at a new positioning in didactics of mathematics. In didactics of mathematics, reflections and observations on the nature of mathematical “knowledge” and “knowing” have led to a broader view of what is meant by learning mathematics. Progressively taking distances from perspectives in which mathematical “knowledge” is the object of reference, studies have come closer to the contexts in which students do mathematics. There is still, however, a tendency in our field to focus on what students might know, understand or learn in relation to a specific “knowledge”. In contrast, the epistemological perspectives in which we as authors are positioned view the local and emergent character of the mathematical activity as so central that it invites us to “replace” questions of knowledge with ones about *mathematical doing*. In this article, we investigate this path, both theoretically and empirically. In so doing, we look into the theoretical and ethical foundations of such a positioning and offer a practical illustration of its implications for research in mathematics education (through analyses of data from a study on mental mathematics). We show how important aspects of studies in didactics of mathematics continue to be relevant and significant in this positioning and how new questions emerge and others disappear.

Résumé. En didactique des mathématiques, les réflexions et observations sur la nature de la « connaissance » ont conduit à une vision de plus en plus large de ce que signifie apprendre en mathématiques. En s’éloignant progressivement de perspectives dans lesquelles le « savoir » mathématique est l’élément de référence, les travaux se sont pour ainsi dire rapprochés des contextes dans lesquels les élèves font des mathématiques. Reste néanmoins une forte tendance, en didactique des mathématiques, à se préoccuper de ce que connaissent, comprennent ou apprennent les élèves, et de surcroît par rapport à un « savoir » spécifique. Dans les perspectives épistémologiques où nous, auteurs, nous positionnons, le caractère local et même émergeant de l’activité mathématique est si central qu’il invite à « remplacer » les questions de savoirs et de connaissances pour nous intéresser au *faire mathématique*. Dans cet article, nous proposons d’examiner cette avenue de manière à la fois théorique et empirique. Pour y arriver, nous examinons les fondements éthiques et théoriques d’un tel positionnement, pour ensuite offrir une illustration pratique de cette possibilité à l’aide de données tirées d’une recherche sur le calcul mental. Nous montrons comment des parties importantes du travail habituel de recherche en didactique des mathématiques trouvent toujours leur sens et leur intérêt dans ce positionnement, alors que d’autres questions émergent ou disparaissent.

Mots-clés. Faire des mathématiques, activité mathématique, éthique, énaction, socio-culturel, calcul mental.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 19, p. 17 - 52.

Introduction

Au cours des trois dernières décennies, les réflexions et observations sur la nature de la « connaissance » et des « erreurs » mathématiques des élèves ont conduit à une vision de plus en plus large de ce que signifie apprendre en mathématiques (voir e.g. Proulx et Maheux, 2012). Nous éloignant progressivement des perspectives dans lesquelles le « savoir » mathématique est l'élément de référence, nous nous sommes pour ainsi dire rapprochés des contextes dans lesquels les élèves *font* des mathématiques. Ce rapprochement, permettant d'apprécier (et donc d'analyser) le caractère local d'une erreur/connaissance, nous a également conduit à porter une attention grandissante aux diverses formes dans lesquelles l'activité mathématique prend place : dessins, paroles, gestes, sons, etc. On y voit une prise en compte grandissante de la complexité de l'activité mathématique des élèves qui conduit certes à intégrer à nos analyses de nouveaux éléments, mais également à en délaisser certains par le fait de visions renouvelées.

Le présent texte est un essai qui provient de nos travaux en épistémologie, travaux nous ayant menés à penser qu'un élément clé de ces renouvellements consiste à mettre de côté les idées de savoirs et de connaissances au profit d'une entrée par le *faire mathématique*. Une telle proposition s'inscrit par exemple dans les propos de Sfard (1998), qui discute de l'émergence des approches « participatives » en réponse aux limites d'une vision « acquisitionnelle » de l'apprentissage :

> A far-reaching change is signaled by the fact that although all of these titles and expressions refer to learning, none of them mentions either "concept" or "knowledge." The terms that imply the existence of some permanent entities have been replaced with the noun "knowing," which indicates action. This seemingly minor linguistic modification marks a remarkable foundational shift (Sfard, 1998, p. 6)

Une telle observation convoque déjà un positionnement significativement différent de celui dans lequel « savoir » et « connaissance » sont habituellement entendus. Elle contraste par exemple avec la proposition de Larochelle et Désautels (1992, voir aussi Fourez, Engelbert et Mathy, 1997) visant à définir les *savoirs* en tant que « modèles socialement standardisés » et les *connaissances* comme « structures conceptuelles » des individus. Autre exemple, la définition qu'offrait François Conne, il y a de ça plus de 20 ans :

> Lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible, il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable, dans ce sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation. (Conne, 1992, p. 225)

Reformulant de telles distinctions, le travail de Mason et Spence (1999) illustre bien le changement de cap dont il est ici question. Ils distinguent d'une part savoir et connaissance en associant l'un à une familiarité avec des objets/processus mathématiques (« knowing of », au sens de « s'y connaître ») et l'autre à des éléments plutôt déclaratifs sur ceux-ci (« knowing that », comme dans « savoir que »). À ces distinctions s'ajoutent d'autres formes de savoir/connaissance (« knowing-why », « knowing-how ») formant un ensemble dont les auteurs ont pour objectif principal de distinguer l'habileté à agir avec ou à partir de ces savoirs/connaissances. Nos efforts comme communauté de recherche, argumentent-ils, devraient aller vers le développement de telles habiletés qui ne sont pas quelques « choses » que possèdent les élèves, mais une sorte de *sensibilité* aux situations qui se manifesteraient dans l'action elle-même : « some degree of sensitivity to features of a situation, some degree of awareness in the moment » (p. 151). L'essentiel serait donc dans ce que *font* effectivement les élèves en situation, et l'attention donnée aux expériences mathématiques à vivre, à rappeler.

Dans ces discussions de fond, la tentation est forte de chercher un apaisement des tensions entre de nouvelles approches et les perspectives qui les ont précédées. Ne pourrait-on pas, comme le suggère Sfard (1998) à l'époque, accepter que différentes approches donnent accès à différents éléments qui se compensent l'un l'autre, voire se complètent ? Une lecture dialogique de l'histoire des sciences nous incite plutôt à travailler les différences et, pour ce faire, bien marquer les ruptures (épistémologiques) aux moyens desquels une approche est fondée[1]. C'est d'ailleurs la position que Sfard semble avoir adoptée dans ses travaux plus récents (e.g. Sfard, 2008), discutant l'importance d'une approche « désobjectifiée » de l'activité mathématique. Donner pleine attention au *faire mathématique*, proposition que nous développons dans cet essai, requiert un repositionnement par rapport aux préoccupations centrées sur la connaissance, sur lequel il nous semble alors important d'insister.

De nombreux arguments en faveur ou en défaveur d'une position tranchée sur la possibilité ou l'intérêt de voir coexister ou non différents paradigmes pourraient être avancés. Une question intéressante tourne autour du terrain sur lequel ces argumentations pourraient avoir lieu. Nous avons choisi, pour cet essai, de nous tourner vers ce qu'on peut nommer « le fondement philosophique » de l'éducation mathématique (et donc, pour nous, de la recherche dans le domaine). La proposition que nous développons dans cet essai, soit d'adopter une entrée par le *faire mathématique*, est discutée en trois temps : d'abord sur le plan de son fondement *éthique*, ensuite par son ancrage *théorique* et finalement par son illustration *pratique* pour la recherche dans notre domaine. Plus précisément, nous

[1] Le pragmatisme qu'évoque la proposition de Sfard (1998) est lui-même un paradigme auquel il est possible d'adhérer… ou non.

puisons dans un premier temps aux travaux autour des écrits d'Emmanuel Lévinas, qui voit la connaissance comme une impossibilité par rapport à la responsabilité pour l'autre. Nous nous tournons ensuite vers les écrits sur la théorie biologique de la cognition de Maturana et Varela, puis vers d'autres s'inscrivant dans une approche sociale historique et culturelle inspirée de Vygotsky et Leyontiev. Enfin, nous examinons de manière pratique cette possibilité en présentant un travail de recherche dans un contexte de calcul mental, où des élèves font des résolutions d'équations algébriques.

1. Le fondement éthique d'une entrée par le *faire* de l'activité mathématique

[la connaissance] est encore et toujours une solitude
Lévinas, 1982, p. 61

La philosophie nous propose de réfléchir sur le monde et l'existence humaine, donnant aux thèmes du savoir et de la connaissance, de la vérité et du bien, une place de choix dans ses propositions diverses. Or, travailler en termes de savoirs et de connaissances pose une difficulté importante si nous reconnaissons *l'éthique* comme notre « philosophie première », c'est-à-dire comme fondement de l'éducation mathématique. À la suite de plusieurs chercheurs s'étant récemment penchés sur ces questions (e.g. Atweh, Brady, Neyland, Roth, Radford), nous avons défendu cette position (e.g. Maheux, 2010 ; Maheux et Thom, 2009) en prenant appui sur les travaux du philosophe Emmanel Lévinas, dont Ernest (2009) nous donne un bel aperçu :

> Levinas maintains that our subjectivity is formed in and through our subjectedness to the other, arguing that subjectivity is primordially ethical and not theoretical. That is to say, our responsibility for the other is not a derivative feature of our subjectivity; instead, this obligation provides the foundation for our subjective being-in-the-world by giving it a meaningful direction and orientation […] Thus one can say that as social creatures our very nature presupposes the ethics of interpersonal encounters, even before they occur, and even before we form or reflect on our practices, let alone our philosophies. This is why Levinas asserts that ethics is the 'first philosophy' presupposed by any area of activity, experience or knowledge, including mathematics education. If we accept his reasoning, then […] Ethics is the 'first philosophy' of mathematics education. (pp. 38-39)

En examinant la question du savoir et de la connaissance mathématique sous l'angle du travail de Lévinas[2], on découvre la *nécessité* éthique d'un changement

---

[2] Nous faisons ici l'effort de ne présenter que quelques idées de manière à ce qu'un lecteur peu familier avec les questions éthiques (et, en particulier, le travail de Lévinas) puisse en apprécier la nature.

épistémologique (Radford, 2008) dans lequel peut s'inscrire cette entrée par le *faire mathématique*. En effet, pour Lévinas, le savoir et la connaissance posent une impossibilité éthique profonde parce qu'ils nous empêchent d'aller à la rencontre de l'autre dans ce qu'il a d'*in*connaissable :

> La connaissance est toujours adéquation entre la pensée et ce qu'elle pense. Il y a dans la connaissance, en fin de compte, une impossibilité de sortir de soi ; dès lors la socialité ne peut avoir la même structure que la connaissance (Lévinas, 1982, p. 61)

Lévinas fait ici appel à une idée qui n'est pas nouvelle en philosophie, en éducation, ou en recherche en didactique des mathématiques. La connaissance est depuis longtemps associée à l'idée de domination, de contrôle. Il s'agit, d'une part, du Savoir que l'on développe sur quelqu'un ou sur quelque chose. Lévinas parle alors de « tout ce qu'il y a de "prendre" dans le "comprendre" » (p. 61). Mais on peut aussi penser au Savoir comme objectif, quand « faire apprendre » est synonyme de conduire, bon gré mal gré, vers une forme donnée de connaissance. Nous avons offert dans nos travaux une illustration intéressante de ce problème autour de la notion de « conception » en didactique des mathématiques (Maheux, 2010). À la manière de Holzkamp (1983), qui demande comment la recherche sur la motivation peut servir autre chose que la manipulation (du moment où la connaissance de ce qui motive une population sert à lui faire faire quelque chose qu'elle ne ferait pas autrement, e.g. travailler la nuit, faire des mathématiques), on peut se demander comment la notion de conception mathématique vise (implicitement) autre chose que de mesurer et de juger l'élève. Interpréter des conduites d'étudiants en les comparant à un soi-disant savoir de référence revient à les ramener à du connu (prenant pour négligeable leur irréductible originalité et tout ce qui peut être d'inconnaissable en elles, et donc aussi chez les élèves qui les produisent). Et cela dans quel but, sinon pour mettre en place des mécanismes amenant les élèves à la « maitrise » de telle ou telle notion (ou processus) mathématique telle que *nous* la (ou le) concevons ? Cet esprit de « contrôle », enraciné dans l'idée même de savoir ou de connaissance, faisait dire à Nietzsche (Fragments posthumes) par exemple : « en vérité, l'interprétation elle-même est un moyen pour dominer quelque chose ».

La réflexion proposée par Lévinas aborde la question de la domination et du contrôle du point de vue proprement éthique, c'est-à-dire au sens d'une *responsabilité pour l'autre*. Selon Lévinas, cette responsabilité éthique est un appel à sortir de soi, à ne pas se restreindre à soi, et donc à ce qui est connu ou connaissable, pour aller à la rencontre de ce qu'il y a d'inconnaissable afin d'éviter de réduire l'autre à nous-mêmes (et donc à du connaissable, du connu). Il s'agit donc d'aller à la rencontre de l'Autre, et de répondre à/de son expression : « la réponse ou la responsabilité […] est cette relation authentique [car] parler, répondre à [l'autre c'est] déjà répondre de lui » (Lévinas, 1982, pp. 92-93).

On peut traduire ces propos dans le contexte de la didactique des mathématiques en mettant de l'avant le « faire ensemble » comme alternative aux idées de connaître, d'apprendre ou même d'enseigner (du latin *insignire* « signaler, désigner », qui suggèrent une séparation de celui qui « sait » et de celui qui « apprend »). Faire ensemble de manière à se rapprocher de l'autre en s'intéressant (de manière mathématique) à des phénomènes (mathématiques ou autres) sans chercher à communiquer ou à faire saisir « quelque chose », car même dans la communication du savoir on se trouve déjà « à côté » d'autrui plutôt qu'en relation avec lui (Lévinas, 1982, p. 58).

Nous l'avons évoqué, certains ont déjà entamé un travail en ce sens, puisant aux écrits de Lévinas pour repenser le monde de l'éducation mathématique et ce que nous y faisons. C'est le cas par exemple de Atweh et Brady (2009) qui proposent de voir l'éducation mathématique en termes de développement « responsable » d'une « habileté à répondre » (jeu de mots sur *response-ability*) qui se joue dans la rencontre entre élèves et enseignant :

> Ethical response-ability places the primacy of ethical considerations in the teacher-student *encounter* […] ethical response-ability discussion applied to mathematics education posits the primary aim of mathematics education to enable the response-ability of the student in their current and future lives a1( )-119.787250]TJ -22.13
> r

l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, de même que la recherche autour de ceux-ci, relativement à l'idée de « mise en commun » (*togethering*) :

> we propose the concept of *togethering* to theorize the intricate aspects of the coordination of perspectives: […] This requires an attunement of perspectives (as opposed to direct teaching); such an attunement is precisely the outcome of the joint attention to the emergence of a common object for a common understanding of the activity that it stimulates. […] neither teacher nor student can be certain that what they say makes sense to the other. Each participant, in speaking to the issue at hand, thereby exposes not only a way of thinking but also him/herself. Joint activity is an opportunity for producing and ascertaining that the object is reflected similarly in the consciousness of all participants. Togethering captures the ethical commitment all parties make to the object, which becomes a common object of activity because of togethering (Radford et Roth, 2010, p. 17)

Cette idée de *togethering* s'approche aussi du travail que nous avons fait dans Maheux (2010), où l'accent est mis sur *l'action* de « connaître-ensemble » (au moyen du gérondif *knowing-with*) en tant que relation à l'autre et relation avec l'autre. On peut alors s'intéresser à l'activité mathématique comme manière d'être dans le monde, noter des différences entre manières d'être ensemble mathématiquement, et pousser la réflexion éthique afin d'apprécier comment élèves et enseignants s'y rencontrent (Maheux et Thom, 2009).

Sans en avoir nécessairement fait un thème principal, tous ces travaux vont dans le sens d'une orientation vers le *faire mathématique*, évitant de parler en termes de connaissances des élèves ou de savoirs de référence. Qui plus est, on y voit apparaître l'importance, significative du point du vue éthique, d'abandonner le *langage* du savoir et de la connaissance, le remplaçant par de nouvelles manières de parler (e.g. *togethering*, *knowing-with*) qui maintiennent l'attention sur ce que *font* élèves et enseignants. Cette préoccupation bien connue des philosophes (on pense en particulier à Heidegger, Rorty) fait dire qu'il n'est peut-être pas judicieux, comme on l'a fait souvent, de « redéfinir » le savoir ou la connaissance (par exemple en terme d'action), pour ensuite utiliser ces termes plus ou moins comme nous le faisions avant. La plus grande prudence ne nous met pas à l'abri du langage, dont les jeux nous prennent au piège le plus souvent à notre insu. Il est fort injuste de dire que quiconque s'intéresse à l'activité mathématique en termes de savoir et de connaissances cherche à réduire ou à s'approprier l'autre, mais choisir de parler du *faire mathématique* sans évoquer les idées de savoirs et de connaissance contribue à adopter un langage qui soit au plus proche du monde que nous cherchons à évoquer :

> For any discourse, I may have – say, in science, philosophy, epistemology, therapy, etc. – [my rule of ethics is] to master the use of my language so that

> ethics is implicit. […] In its function, my language reaches out for the other: this is the root of conscience. And this is where Ethics invisibly manifests itself through dialogue (von Foerster, 1995).

Toutefois, un tel changement de paradigme (et de langage) est-il possible pour la didactique des mathématiques ?[4] Peut-on encore développer notre discipline sans faire référence aux savoirs/connaissances? Dans la prochaine section, nous examinons l'ancrage théorique d'une telle possibilité, ce qui nous mène ensuite à en donner une illustration pratique. Ces entrées, théoriques et pratiques, permettent de voir le potentiel de ce positionnement pour la recherche, et quelques avancées possibles pour la didactique des mathématiques.

2. L'ancrage théorique d'une entrée par le *faire mathématique*

Dans quelle mesure est-il possible, sur un plan théorique, de concevoir l'activité mathématique (des élèves, par exemple) sans y voir la manifestation de connaissances possédées *a priori* (par ces mêmes élèves) cherchant à s'approcher de savoirs prédéfinis ? Peut-on vraiment considérer l'activité mathématique des élèves comme quelque chose d'émergeant, de produit *sui generis hic and nunc* (i.e. de par sa nature même ici et maintenant) ? Pour discuter de cette possibilité, nous offrons à titre illustratif les perspectives développées à l'intérieur de deux de nos ancrages théoriques et épistémologiques, soit à l'aide de concepts tirés de travaux en énaction et autour de l'approche socioculturelle. Précisons qu'il ne s'agit pas ici d'une proposition visant à rapprocher ou a distinguer ces deux courants théoriques (nous avons déjà mené un réflexion sur le sujet dans Maheux, 2010), mais plus modestement d'aller puiser dans ces travaux des éléments permettant de développer une approche en termes de *faire mathématique*, en même temps que d'y reconnaître l'origine de nos réflexions. Qui plus est, il s'agit de deux traditions dans lesquelles on s'est fait un devoir explicite de repenser ce que « connaitre » signifie, y compris dans leurs développements autour de l'éducation mathématique. Cela dit, un travail similaire peut *certainement* être réalisé en prenant appui sur les écrits inspirés de la théorie des situations didactique ou de la théorie anthropologique du didactique, par exemple, ou du côté des *realistic mathematics education*. Comme première instance de cette proposition audacieuse d'un abandon des idées de savoir et de connaissance, une telle approche nous semble à la fois plus modeste et moins provocatrice : ouverte en vérité à ce que le lecteur intéressé voudra bien y contribuer.

---

[4] Sfard (e.g. 2005), dont nous avons parlé plus haut, montre le lien entre une posture épistémologique et le langage qui lui est associé (par exemple, concernant la communication en classe de mathématiques), ainsi que les défis que pose l'adoption de l'un et/ou l'autre.

Dans la mesure où cette proposition d'un abandon du savoir et de la connaissance trouve preneurs dans notre communauté, il est alors envisageable de nous engager plus formellement dans une formulation de cette approche en ses propres termes. Cela dit, et en lien avec ce que nous avons noté à propos du langage, il est aussi important de souligner que les travaux vers lesquels nous nous tournons (choisis parce que ce sont ceux avec lesquels nous, auteurs, travaillons le plus régulièrement) font fréquemment appel au vocabulaire du savoir et de la connaissance, qu'ils souhaitent redéfinir. La proposition que nous faisons ici consiste à nous intéresser à certaines des idées (dépouillées de ce langage) qui sont développées dans ces travaux afin d'illustrer ce qu'ils rendent possible : soit l'ancrage théorique d'une entrée par le *faire mathématique*.

2.1 Le *faire mathématique* comme émergence d'une action jugée adéquate

Les travaux de Maturana et Varela (Maturana, 1988; Maturana et Varela, 1992, 1994; Varela, 1999; Varela, Thompson et Rosch, 1991), souvent évoqués sous le vocable *énaction*, offrent un excellent point de départ pour une entrée par le « faire *mathématique* ». L'énaction adopte un point de vue biologique, en regardant l'organisme comme interagissant dans son environnement. La perspective biologique a souvent été utilisée en tant que métaphore pour penser la connaissance et l'apprentissage (e.g. Piaget, Glasersfeld, Siegler, Morss, Dewey, Davis), par exemple avec l'idée de mécanismes d'adaptation, d'évolution, etc. Toutefois, pour Maturana et Varela, ce qu'on nomme généralement « connaissance » *est* un phénomène biologique. L'élève est ainsi regardé comme un organisme qui évolue avec son environnement de façon adaptée : ses stratégies ou solutions mathématiques ne sont pas nécessairement optimales, mais sont fonctionnelles (ce que Reid, 1996, et Zack et Reid, 2003, 2004, appellent « good-enough ») par rapport au contexte mathématique dans lequel il évolue. Plutôt que de connaissance, on parle alors d'action adéquate (ou adaptée) qui permet de maintenir la relation (fonctionnelle) entre un organisme et son environnement, lesquels sont liés, couplés, s'influençant et évoluant l'un avec l'autre dans cette relation[5]. Ainsi, que ce soit une araignée tissant sa toile, une plante orientant ses tiges vers le soleil ou un élève répondant à une question mathématique, tous réalisent un acte qui leur permet de continuer à évoluer avec leur environnement (lui-même en évolution). Parlant de l'éducation mathématique, Kieren, Calvert,

---

[5] En effet, l'environnement n'est pas vu comme simple sélecteur ou causant les réactions chez l'organisme: on parle plutôt d'un « déclencheur » de changements chez l'organisme – qui agît en retour comme déclencheur de changement pour l'environnement. À ce sujet la définition de la didactique des mathématiques proposée par René de Cotret (2000, p. 21), influencée par les travaux de Maturana et Varela, nous paraît fort intéressante: « La didactique des mathématiques étudie les phénomènes d'enseignement et les phénomènes d'apprentissage "déclenché" des mathématiques ».

Reid et Simmt (1995) affirment : « Knowledge is not in the book or in the library; Knowledge is not in our heads; Knowledge is in the inter-action » (p. 1)[6].

Cette activité mathématique n'est pas considérée comme existant *a priori* (ni *a posteriori*) du moment de son apparition : elle est le produit en temps réel de l'interaction entre l'organisme et son environnement, elle émerge de cette rencontre. Ainsi, on ne parle plus des connaissances en termes représentationalistes (i.e. quelque chose résidant dans une quelconque structure cognitive et se révélant dans l'activité) ni de savoirs objectifs (i.e. quelque chose existant en dehors de l'expérience) (Varela et al, 1991). Il n'y a pas de connaissance comme chose qu'on possède, et dont on se sert pour acquérir d'autres connaissances. Ce qu'on appelle la connaissance est *action*, elle est émergente et momentanée :

> In our usual view of knowledge there must be a content to it, something that knowledge somehow embraces and reveals. What I am saying, however, is something completely different. I am saying that knowledge is never about something. I am saying that knowledge is adequate action in a domain of existence […] (Maturana, dans Simon, 1985, p. 37)

Parler d'action adéquate, d'une chose qu'on réalise, est bien de l'ordre du *faire mathématique*, point de vue à partir duquel c'est l'action mathématique (e.g. la résolution d'équation algébrique) en contexte scolaire qui devient l'objet d'étude :

> Thus, if someone claims to know algebra – that is, to be an algebraist – we demand of him or her to perform in the domain of what we consider algebra to be, and if according to us she or he performs adequately in that domain, we accept the claim. (Maturana, 1988, pp. 4-5)

Cette citation met de l'avant un autre point important de la perspective de Maturana, soit l'observateur : « Knowledge is adequate action in a domain specified by a questionner » (Maturana, dans Simon, 1985, p. 37). On attache ainsi l'aspect adéquat de l'action non pas à quelque référentiel objectif, mais au regard d'un observateur qui *juge* celle-ci sur la base de ses propres critères. Il reste alors tout à fait envisageable de proposer des tâches mathématiques aux élèves, ou plus largement de les faire inter-agir avec un environnement mathématique, mais en étant bien conscient du fait que la nature « mathématique » de ces tâches ou de cet environnement n'est jamais donnée (Davis et al., 1996 ; René de Cotret, 1999), et dépend en fait de l'observateur (e.g. l'enseignant, tel ou tel élève, un chercheur). De même l'action n'est pas prise en soi, mais abordée comme acte de distinction, de propos, de lecture qui détermine ainsi l'objet de l'observation. Cette entrée par

[6] Voici un bel exemple de la persistance du langage du savoir et de la connaissance toujours présent dans ces approches. Passage obligé, sans doute, pour faire entendre ces idées nouvelles le temps qu'elles se développent et imposent un langage qui leur soit propre.

l'énaction est donc particulièrement importante pour nous, chercheurs, qui tentons de parler (d'apprécier?) du *faire mathématique* de l'élève : les actions mathématiques des élèves sont en fait des observations, des *conceptualisations* faites par nous, chercheurs-observateurs (voir Maheux, 2010).

Différents chercheurs du domaine ont travaillé sur ces idées. Centrés sur l'émergence, l'adéquation et l'inséparabilité des apprenants et de leur environnement, la « connaissance » mathématique est alors définie comme un processus dynamique qui *émerge dans l'action et l'interaction* avec l'environnement (Kieren et Simmt, 2009; Pirie et Kieren, 1994), plutôt que d'être vue en termes de représentations mentales construites par des individus, de façon plus ou moins isolée, dans leur tête :

> [Cognition] is something that is normally seen to be done with others. In [the] classroom, children's mathematics occurred along with that of their peers. […] An enactivist view suggests that cognising, thinking, or doing mathematics with others in some way is the norm. Of course, human beings think mathematics for themselves but this thinking is done, at least in anticipation of, communicating with others and acting in a community of others interested in mathematics (Kieren, 1995, p. 7)

L'attention est alors portée sur les manières dont les élèves s'intéressent (mathématiquement) à des objets ou phénomènes (mathématiques ou autres), aux moyens et stratégies mis en œuvre par les élèves, dont on a soin de montrer qu'ils sont le fait de leur interaction avec la tâche/le contexte. L'apprenant qui réalise une tâche mathématique fait émerger une stratégie en lien avec celle-ci, stratégie située dans la tâche et son contexte (Thom et al., 2009). Ce n'est plus de la « connaissance de » quelque chose qu'il s'agit, mais bien de l'activité mathématique elle-même. C'est l'*action* mathématique, le *faire mathématique*, et non quelque discours formulé sur l'action qui nous intéresse alors :

> In a typical mathematics class, the temptation […] have been to focus on the final products of the students' efforts – i.e. their symbolic representations and their logical arguments – in order to assess the appropriateness of their actions and to judge the worth of the activity. Enactivism prompts us to attend as closely to the preceding actions – the unformulated exploration, the undirected movement, the unstructured interaction, wherein the body is wholly engaged in mathematical play – as to the formal mathematical ideas that might emerge from those actions. (Davis, Sumara et Kieren, 1996, p. 156)

Cette activité mathématique est liée à l'apprenant et à la tâche elle-même (Davis, 1995), mais ne se réduit ni à l'un, ni à l'autre. Par exemple, René de Cotret (1999) explique comment on ne peut jamais tenir pour acquis que des propriétés instructionnelles sont présentes de façon inhérente dans des tâches ou situations offertes aux élèves, et que celles-ci vont commander l'activité de l'élève. L'élève joue un rôle fondamental dans la façon dont la tâche est travaillée, ce qui fait dire à Davis et al. (1996) que le curriculum mathématique co-émerge de la rencontre des élèves et de la tâche mathématique. C'est entre autres une orientation développée par Lozano (2009) dans son étude sur l'apprentissage de l'algèbre, alors qu'elle considère *l'évolution des actions efficaces des élèves* pour résoudre les tâches, pour continuer à fonctionner dans l'environnement mathématique proposé par la classe.

Permettant de concevoir l'activité mathématique sans y voir la manifestation de connaissances possédées par les élèves et mises en relation avec des savoirs prédéfinis, les travaux autour de l'énaction attirent notre attention sur ce qui *se réalise* dans/avec une situation particulière pour y apprécier les mathématiques en jeu, déployées par les élèves. L'énaction propose donc de nombreuses idées permettant de concevoir l'ancrage théorique d'une entrée par le *faire mathématique* même si, on l'aura remarqué, les termes « savoir » et « connaissance » sont souvent présent, bien que revisités, dans ces travaux. En ce sens, nous pouvons nous arrêter ici. Toutefois, présenter une autre approche, la tradition de recherche dite *socioculturelle*[7], pour illustrer la possibilité d'un ancrage théorique permet trois choses. D'une part nous évoquons un peu plus de la richesse que possède une entrée par le *faire mathématique*. Ensuite, nous nous assurons d'éviter que cette possibilité de s'intéresser au *faire mathématique* ne soit perçue comme appartenant à une seule tradition théorique. Enfin, nous initions un mouvement auquel d'autres voudront peut-être participer, faisant l'exercice d'aller puiser aux travaux en didactique des mathématiques dont ils s'inspirent pour poursuivre la réflexion proposée dans cet essai. Il ne s'agit donc pas de suggérer quelques liens de compatibilité ou de complémentarité entre ces deux approches, ou de les présenter comme les seuls courants théoriques permettant de dégager l'idée d'une centration sur le *faire mathématique*. Ce sont, plus modestement, des théorisations avec lesquelles nous, auteurs, avons l'habitude de travailler et dans lesquelles, pour cette raison, nos réflexions autour du *faire mathématique* ont leur origine.

2.2 Le faire mathématique comme action dans une activité socioculturellement organisée

L'approche socioculturelle s'est développée à partir de certaines idées de Vygotsky (e.g. 1978, 1986), qui ont conduit à formuler la question de la « connaissance »

[7] Nous avons évoqué ailleurs les ressemblances et différences entre les propositions de l'énaction et de l'approche socio-culturelle (Maheux, 2010), soulignant par exemple le travail de Leontyev (1981) sur l'origine biologique de l'activité humaine (et la rupture qu'il propose), de même que les efforts répétés mais périphériques de prise en compte des questions socio-politiques du côté de l'énaction (e.g. Maturana et Verden-Zöller, 2008). Mais là n'est pas notre propos dans ce texte.

individuelle et du « savoir » collectif en termes de *comportements* et d'*activités* (e.g. Roth et Lee, 2007) : quelque chose qu'il est possible d'interpréter comme étant de l'ordre du *faire mathématique*. Beaucoup reprise dans la recherche autour de l'éducation mathématique (e.g. Radford et Roth, 2011), cette entrée praxéologique (i.e. sur l'action humaine) définit par exemple les « concepts » (mathématiques ou autres) comme des *fonctions* (à prendre au sens premier d'activité, et non de propriété ou de capacité), d'où le célèbre :

> Dans le développement culturel de l'enfant, toute fonction apparaît deux fois : dans un premier temps, au niveau social, et dans un deuxième temps, au niveau individuel […]. Toutes les fonctions supérieures trouvent leur origine dans les relations entre les êtres humains. (Vygotsky, 1978, p. 57)

Avec cette citation, on constate également que les questions qui se posent du point de vue socioculturel portent sur *l'origine* des activités ou comportements que l'on observe. Or, l'origine ne doit pas être prise uniquement au sens ontogénique, mais peut concerner aussi l'origine immédiate de l'action, son développement ici et maintenant. En effet, ces fonctions (cognitives) sont en constante évolution, fruit de l'interaction entre l'individu (ou une collectivité) et son environnement (voir les travaux de Vygotsky et Luria, 1993, par exemple). Un concept clé dans cette perspective est celui d'*outil* (dont le langage, mais aussi, en mathématiques, le symbolisme, les représentations graphiques ou la calculatrice par exemple, c.f. Radford, 2011a). Les outils sont des objets historiquement et socialement constitués, et dont les propriétés orientent l'action « psychologique » :

> By their nature [psychological tools] are social, not organic or individual. They are directed toward the mastery or control of behavioral processes […] Thus, in the instrumental act, a new intermediate link – the psychological tool […] is inserted between the object and the psychological operation toward which it is directed. Any behavioral act then becomes an intellectual operation (Vygotsky, 1981, pp. 137-139).

On y voit donc l'action (par exemple, mathématique) distribuée à travers l'ensemble de l'environnement matériel, et comme fruit d'une activité sociétale historiquement organisée plutôt que comme le fait d'individus isolés dans le temps ou l'espace. Distinguant « actions » et « activité », Leontiev (1981) explique qu'il est nécessaire de considérer l'ensemble de l'activité afin de pouvoir donner un sens aux actions posées par quelqu'un, sans quoi on ne peut apprécier le sens. Il illustre ceci en parlant de la chasse, l'activité, qui permet de faire sens des actions du rabatteur, par exemple, dont le travail consiste à effrayer les animaux qui vont fuir devant lui. Si on oublie « la chasse » et son motif, les actions du rabatteur sont réduites à des (inter)actions avec son environnement immédiat qui semblent ne mener nulle part; alors que c'est clairement autre chose qui les « stimule » :

> What the processes of his activity were directed to did not, consequently, coincide with what stimulated them, i.e., did not coincide with a motive of his activity; the two are divided from one another in this instance. Processes, the object and motive of which do not coincide with one another, we shall call "actions". We can say, for example, that the beater's activity is the hunt, and the frightening of the game his action. (p. 210)

Reprise dans le monde de l'éducation par Galperin, par exemple, qui enrichit plusieurs de ces propositions pour parler de « l'activité de penser » tout en considérant le développement cognitif du point de vue de son origine dans l'action concrète et observable, cette entrée permet de parler du caractère situé de l'action (voir e.g. Rambusch, 2006). L'éducation mathématique est alors une activité que l'on analyse du point de vue historique et culturel, mais aussi locale et contextuelle, dans les actions concrètes des élèves et des enseignants. En retour, ce que font les élèves et les enseignants est considéré en fonction de cette activité (Chaiklin & Lave, 1993)[8]. Ainsi, ce qu'on associe généralement à des jeux de savoirs et de connaissances est plutôt vu ici comme le produit de la participation dans la réalisation de tâches socialement motivées : par exemple, quand des élèves résolvent des équations algébriques à la demande de leur enseignant, ils se trouvent sujets à une activité dans laquelle ils mettent en œuvre des objets, des règles, des gestes (socialement, culturellement et historiquement constituées) qui en retour définissent la tâche qui leur est proposée. C'est alors la *pratique* mathématique (e.g. de l'algèbre, de la géométrie) en contexte scolaire et l'entrée des élèves dans ses manières de faire qui deviennent objet d'étude (e.g. Roth, 2011), et non plus le savoir ou les connaissances au sens où on l'entend habituellement.

Dans cette tradition de recherche, cette posture est rendue possible parce qu'on considère qu'il n'y a pas de savoir ou de connaissance au sens ontologique : savoirs et connaissances sont plutôt vus comme des propriétés de l'action en commun. Volosinov (1973) explique par exemple que tout ce qu'on appelle connaissance, intention, perception, etc., n'a d'existence que dans nos « pratiques discursives incarnées », c'est-à-dire que c'est *dans l'action* même d'en parler, d'en faire usage, que ceux-ci prennent corps (il en est de même pour les « objets » auxquels on suppose une réalité extérieure, voire objective : c'est toujours et uniquement dans l'action que ceux-ci sont constitués comme « objets »). On s'intéresse alors aux actions concrètes en tant qu'elles produisent (et *re*produisent) des relations entre sujets et objets d'une activité au moyen d'entité (on parle de médiation par des outils comme l'écriture algébrique, les représentations graphiques, etc.) constitutives de l'activité en question (celles faisant que l'on peut reconnaître que

[8] Et, bien entendu, les chercheurs eux-mêmes.

nous sommes en situation de résolution d'équation algébrique en contexte scolaire, par exemple) (Bakhtin, 1986; Engeström, 2001)[9].

On voit que l'activité mathématique est alors examinée en termes de *réalisation* en commun *d'événements* (poser un problème mathématique, proposer une solution) au moyen de manière de faire, de raisonner, voire de sentir (et faisant appel à des instruments, dont le langage). Il n'est donc pas question « d'acquérir » des connaissances ou de « maîtriser » des savoirs, mais bien de *contribuer* (à) une action mathématique dans le cadre d'une activité sociétalement organisée telle que « l'éducation mathématique ». L'enseignant, dont le rôle n'est plus de faire apprendre des savoirs mathématiques mais d'initier les élèves à une façon de penser, occupe toujours une place primordiale dans le développement mathématique de l'élève. On pense ainsi à son rôle de médiateur entre le *faire* des élèves et une tradition mathématique, quand on examine par exemple comment les élèves contribuent à des manières géométriques d'aborder le monde, où le sensuel et le conceptuel se rejoignent dans le travail de la classe (e.g. Radford et Roth, 2011). Toucher des objets en attirant l'attention sur certains aspects, les nommer, les discuter, faire de ces distinctions des manières d'aborder d'autres objets, proposer des relations entre objets ou propriétés, c'est *cela* « connaître géométriquement » : de telles actions ne sont pas le résultat de connaissances, ce sont *des événements* qui ont lieu dans le cadre d'une activité mathématique (scolaire, par exemple). On croise aussi ces idées chez Sfard (2008), par exemple, qui propose une entrée sur l'activité mathématique en termes de communication et donc de forme et de genre (en référence à Bakhtin), sans faire référence à des « entités ». Elle discute ainsi le cas du nombre en termes de participation à une pratique discursive (une certaine façon de parler), et non la présence de « quelque chose » dans l'esprit l'élève. Cette entrée résonne avec celle proposée entre autres par Radford (2011b), qui, sous l'angle sémiotique, met l'accent sur le « processus d'élaboration active de signifiés », quelque chose que les élèves *font* et qui relève d'une « attitude » à l'égard de formes culturelles de réflexion. C'est l'élaboration elle-même (l'action de préparer, de produire) qui retient l'attention, avec une préoccupation à l'égard de ce qui permet la mise en route de cette attitude mathématique (van Oers, 2001), de ces différentes activités par lesquelles un élève *devient* mathématique (« *become* mathematical », Lerman, 2001).

Une telle approche ne repose pas sur l'hypothèse du savoir et de la connaissance, qui sont vus par Leontyev comme des « effet du langage ». Ces mots, explique-t-il, donnent *l'impression* que le problème qui doit nous occuper est celui de la

[9] On pourrait également discuter du niveau des « opérations » définie par Leontiev comme des actions non conscientes (e.g. mouvements de la bouche pour parler), pour rendre compte de l'utilisation « spontanée » de procédures par des élèves, et ainsi de suite.

transmission et du développement de savoirs/connaissances, d'individus en individus, alors qu'en fait il n'en n'est rien :

> This problem inevitably confronts any analysis that recognizes the limitations of the idea that meanings in the individual consciousness are only more or less complete projections of the "supra-individual" meanings existing in a given society. The problem is by no means removed by references to the fact that meanings are refracted by the specific features of the individual, his previous experience, the unique nature of his personal principles, temperament, and so on (Leontyev, 1978, p. 18).

L'approche socioculturelle est pour Leontyev la façon de se sortir de cette impasse. En changeant de question (et de langage), s'intéresser à l'action elle-même permet de donner pleine attention à ce que font élèves et enseignants, à comment ils le font, à ce qui permet à cette activité de prendre place et à ce que, en retour, cette activité permet. L'action à laquelle on s'intéresse est alors inséparable de l'activité, et donc de la présence et de l'action d'autres personnes. Ces actions sont précisément ce en quoi et par quoi l'activité se réalise et fait sens, pour soi-même et pour les autres (voir Maheux et Roth, 2011). On parle alors non seulement du « faire », mais aussi et surtout du « faire-ensemble »…

Rappelons en terminant cette section qu'il s'agit là d'une lecture particulière des travaux cités, qui ne cherche pas à confirmer la validité de notre proposition au profit du *faire mathématique*, ni à confronter cette proposition aux éléments ou formulations qui, dans ces travaux, se révèleraient caduques ou contradictoires. La pertinence d'une telle démarche, tout à fait envisageable, dépendra pour nous de l'intérêt porté à la présente proposition, dont cette section avait pour but d'illustrer la possibilité théorique.

2.3 Vers la formulation théorique d'une entrée par le *faire mathématique*

Nous voyons donc, à la lumière de la lecture particulière que nous proposons des travaux autour de l'énaction et de l'approche socioculturelle, la présence de conceptualisation nous permettant de mettre de côté savoirs et connaissances au profit du *faire mathématique*. On reste néanmoins un peu insatisfait dans la mesure où ce que recouvre cette idée de « faire mathématique » est peu précisé. Que peut-on proposer au delà du sens commun du terme « faire », qui évoque des actions telles que « produire, être l'auteur de, réaliser, fabriquer, élaborer, donner forme à, constituer, effectuer, accomplir, être la cause de, déterminer une manière d'être, donner une qualité, un caractère, un état à, changer, transformer », mais aussi, de façon plus abstraite, « agir, se comporter, exercer » ?

Du point de vue de l'énaction, *faire* se définit en terme de transformations, du point de vue de l'observateur, de l'organisme agissant lui-même ou de son environnement. Les gestes d'un élève relevé par l'enseignant ou le chercheur qui y voit l'évocation d'une courbe parabolique ou d'une droite font ainsi partie de ce que fait cet élève du point de vue de l'observateur qui y reconnait une transformation (changement de position des mains, des bras) associée au domaine mathématique. Le *faire* se situe donc au niveau de ce qui est observable pour nous : ce que « pense » cet élève n'en faisant donc pas partie… sauf peut-être pour cet élève lui-même. À noter : être observateur consiste à se transformer soi-même en réaction à ce qui est perçu comme une transformation de son environnement (dans lequel se trouve la chose observée) tout en associant cette transformation à un domaine de signification. Une main qui se dresse peut ainsi signifier « un étirement », « indiquer qu'on souhaite prendre la parole » ou encore « monter, augmenter, accélérer » et ainsi de suite.[10]

Dans les théories d'inspiration vygotskiennes, le *faire* est pris au sens d'une psychologie des observables permettant aussi d'inclure ce que le sujet lui-même observe, tel que le langage interne. Par contre, les efforts dans ce courant théorique portent surtout sur les liens que l'on peut établir entre un acte donné (un geste, une parole, ou des combinaisons d'actes constituant des actions telles que résoudre un problème ou donner une leçon de géométrie) et les constituantes de la situation où il a lieu afin d'en apprécier la valeur socio-historique. Le geste d'un élève semblant évoquer une parabole ou une droite est discuté du point de vue de la manière dont il est exploité par les personnes en présence, et de son origine possible dans une tradition (locale comme la classe, plus large comme les mathématiques) qu'il chose »), on peut donc y inclure, selon les moyens d'observations disponibles, des mouvements tels la prosodie ou des micro-expressions.

Fondamentale à cette définition du *faire mathématique* doit rester présente l'idée que ces transformations ne sont pas dans un rapport de représentation par rapport aux individus (qui disposeraient de « connaissances ») ou à la discipline (les « savoirs » mathématiques). Pris pour et en lui-même, le faire mathématique ainsi défini n'est cependant pas sans lien avec les individus et le domaine qui nous intéresse. Mais ce lien consiste en *un pouvoir de faire sens* dans chacune de ces directions. Cette nuance est importante sans quoi une analyse en termes de *faire mathématique* se distinguerait peu des approches courantes, sinon que par un refus de se prononcer sur l'origine et la pertinence de ces actions. Et, alors, comment reconnaitre ces transformations comme des « faires », et ces faires comme étant « mathématiques » ?

Le pouvoir de faire sens du point de vue d'un observateur (en présence ou distant, incluant l'individu producteur de ladite transformation) répond à la première question. Ainsi, c'est dans la mesure où une transformation apparait comme un observable pouvant participer à l'élaboration de sens (que l'on peut définir formellement comme une coordination d'éléments) que celle-ci entre dans le domaine du faire. Et on prend soin de préciser l'observateur en question, c'est-à-dire la situation à laquelle il participe lorsque ce *faire* est observé (e.g. la classe, la recherche). Il n'y a donc pas de lien représentatif entre le *faire* et une hypothétique « connaissance » chez l'individu l'ayant produit, mais une possibilité d'articulation de ce *faire* à d'autres *faires* (produit par le même individu ou non).

De même, un *faire* est dit *mathématique* dans la mesure où, pour son observateur, il peut faire sens par rapport à d'autres *faires* rattachés par ce même observateur au domaine de l'activité mathématique. Ce domaine ne peut, cela parait évident, se définir clairement et définitivement sinon que de façon trop générale pour être utile (e.g. comme « domaine faisant l'étude des nombres et de l'espace » ou encore plus généralement « des modèles (patterns) »). La présence même de nombreux débats (en rien nouveaux) autour de ce qui est mathématique ou non vient renforcer l'intérêt d'une telle formulation en termes de « possibilité » : tel *faire* peut faire sens dans un domaine mathématique tel que proposé par un observateur, être rejeté ou être autrement situé par un autre. De la sorte, il est clair qu'aucun lien de représentation par rapport à ce qui serait des « savoirs » mathématiques n'est possible, ni même souhaitable. C'est encore une fois la potentielle articulation à d'autres *faires* alors explicitement constitutifs du domaine (ou de tel domaine) de l'activité mathématique (pouvant être l'utilisation de concepts ou des manières de

agir), impliquant une sorte de mise en mouvement liée à des possibilités latentes (comme lorsqu'on parle de guider, de conduire, d'amener à).

faire, par exemple) qui est décisif. Il est aussi nécessaire pour nous de spécifier la situation dans laquelle ce caractère mathématique est posé : par un duo d'élèves résolvant un problème, lors d'une discussion plénière en classe, pour un chercheur les observant, etc.

Cette entrée par des transformations observables liées à un pouvoir de faire sens privilégie une manière d'appréhender l'activité mathématique (des élèves, par exemple) projective plutôt que normative, avec des conséquences au potentiel important pour la recherche et l'enseignement. C'est ainsi qu'on s'intéresse en premier lieu à la richesse en termes de possibilités pour le *faire mathématique* d'une situation donnée : une couleur particulière aux analyses *a priori* pratiquées dans notre discipline depuis de nombreuses années. De même, le travail ou la formation de l'enseignant est prise sous l'angle (du développement) d'une habileté à tirer partie des événements produits en classe en faveur de *faires mathématiques* eux-mêmes potentiellement féconds. Entre « médiateur » et « déclencheur », deux images que l'on rencontre dans les travaux en didactique enracinés dans les approches socioculturelles ou de l'énaction, faut-il penser à l'enseignant lui-même comme à un « faiseur de mathématique » ? L'accent est-il mis alors non sur le rôle régulateur d'un agent social, ni sur la fonction provocatrice d'un interlocuteur externe, mais sur une *présence* aux élèves dont l'enjeu est (simplement, mais pleinement) de faire et faire faire des mathématiques, une présence mathématiquement active, et où le domaine de l'activité mathématique s'offre (pour en revenir à Lévinas) comme lieu de rencontre avec l'autre ? Une attention particulière est alors prêtée aux actions qui donnent (ou non) le caractère *mathématique* aux *faires* qui surviennent, offrant un place de choix au travail « à propos des mathématiques » dans le monde de l'éducation mathématique, tant pour les élèves que pour les (futurs) enseignants.

Il ne s'agit bien entendu que de quelques directions un peu rapidement lancées, à ce stade de développement de notre proposition d'un abandon de l'idée de « savoir » et de « connaissance » au profit du *faire mathématique*. Nous revenons sur certaines d'entre elles dans la suite du texte, mais c'est dans la mesure où notre offre trouve preneurs que l'idée de préciser et nuancer ces orientations, et les liens les rapprochant des nombreux travaux réalisés jusqu'ici en didactique des mathématiques, ouvre à un travail de recherche important. Un travail d'analyse en termes de *faires mathématiques* des données collectées sous l'influence d'autres cadres peut aussi aider à clarifier la manière dont cette entrée se situe par rapport à d'autres approches et, du point de vue théorique, à nourrir le développement d'une présentation de cette approche en ses propres termes (au lieu, comme nous l'avons fait ici, d'aller en retracer l'inspiration dans des courants théoriques existants).

3. L'illustration pratique d'une entrée par le *faire mathématique*

Dans la section précédente, nous proposons quelques éléments théoriques et clarifications autour de la possibilité d'une entrée par le *faire mathématique*. Qu'en est-il maintenant de la possibilité plus « pratique » d'une mise de côté de l'idée de « connaissance » ou de « savoir » tel qu'on les conçoit habituellement ? Quels sens pouvons-nous lui donner pour le travail en didactique des mathématiques ? Il nous semble qu'il est encore trop tôt pour dégager des discussions précédentes une cadre d'analyse à proprement dit ou d'identifier de manière rigoureuse des concepts opératoires. Nous croyons qu'il est néanmoins possible d'illustrer ce à quoi peut ressembler un travail pratique basé sur le *faire mathématique*, et d'en dégager certaines idées utiles pour en apprécier la nature et le potentiel. Pour y arriver, nous présentons quelques données tirées d'une recherche sur le calcul mental en algèbre (on peut préférer parler « d'algèbre mentale »), autour de la résolution d'équations. En voici le contexte (pour plus de détails sur l'étude, voir Proulx, 2013a).

Dans le cadre d'un cours de formation initiale à l'enseignement des mathématiques au secondaire, l'activité suivante a été proposée à un groupe de 12 étudiants :

1. Une équation algébrique habituelle du secondaire (formes $\mathrm{A}x+\mathrm{B}=\mathrm{C}$, $\mathrm{A}x+\mathrm{B}=\mathrm{C}x+\mathrm{D}$, $\mathrm{A}x/\mathrm{B} = \mathrm{C}/\mathrm{D}$, $\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}x+\mathrm{C}=0$, etc.) est écrite sur transparent.
2. Les étudiants disposent de quelques secondes pour « résoudre cette équation » mentalement (i.e. sans papier-crayon)
3. Les étudiants partagent leurs stratégies, chacune étant discutée avec la classe (animée par le formateur), et en proposent de nouvelles qui leur viennent en tête durant les discussions.
4. On reprend l'exercice avec une nouvelle équation.

Sans entrer dans les détails du projet de recherche (impliquant une extension du domaine habituel des mathématiques « mentales » au-delà du calcul arithmétique) pour lequel ces données ont été recueillies, notons que l'expérimentation auprès d'étudiants en formation des maîtres est intéressante sur le plan méthodologique. Nous sommes en présence d'étudiants ayant une assez longue expérience du travail algébrique, et qui fonctionnent donc dans ce domaine sans rencontrer trop de difficultés. Cette situation, analogue à plusieurs contextes de travail en calcul mental où les élèves peuvent généralement faire les calculs par écrit sans erreurs mais mettent en œuvre des stratégies nouvelles quand ils le font sans support matériel, est commode pour s'intéresser directement à ce que *font* les étudiants en algèbre, aux raisonnements et aux stratégies qu'ils évoquent. Nous sommes donc dans des conditions d'études qui diffèrent de celles privilégiées pour ceux qui s'intéressent aux difficultés du travail algébrique : ce sont sur ses *possibilités* que nous nous penchons ici.

Des notes de terrain ont été recueillies détaillant les propos des étudiants, principalement sur leurs façons de procéder pour résoudre les équations et l'argumentaire mis en avant pour expliquer ou justifier leurs approches et solutions. Mais comment aborder de telles données sans faire d'hypothèses sur l'existence de savoirs ou de connaissances ? En effet, de manière assez classique, on peut penser à analyser les données recueillies lors d'une telle expérimentation en se demandant à quelles connaissances ces étudiants font appel dans ce travail plutôt inhabituel de résolution mentale d'équations algébriques. On peut analyser en quoi ces connaissances se rapprochent ou non de ce qui est attendu lors d'une résolution standard, chercher à en dégager des principes permettant de conduire les étudiants vers les formes visées, ou encore tenter de comparer (par des moyens divers) ce que « savent » les étudiants de la résolution d'équation avant et après l'activité.

Une entrée par le *faire mathématique* commande toutefois quelque chose de différent. Parmi d'autres, une façon de s'intéresser à ces données est de se centrer sur ce que nous appelons ici les *premiers mouvements*, soit les façons d'entrer dans les résolutions proposées par les étudiants. Ces mouvements illustrent des manières de faire mathématiques dans un contexte de résolution mentale d'équations algébriques. En tant que possibilités d'action identifiées à partir du *faire mathématique* des étudiants, un tel travail d'analyse nous conduit à apprécier le potentiel de ce genre d'activité sans avoir à faire appel aux concepts de « savoir de référence » ou de « connaissance » tel que nous les entendons habituellement. Dans ce qui suit, nous utilisons cette idée de manière à revisiter ce que peut signifier « résoudre une équation algébrique ».

3.1 Que peut signifier résoudre une équation algébrique ?

De nombreuses recherches autour de l'introduction à l'algèbre suggèrent qu'un enjeu important consiste à dégager les relations mathématiques dans un problème (voir Clement, Lockhead et Monk, 1981). Par exemple, un énoncé tel que « Il y a 6 fois plus d'élèves que de professeurs » peut se traduire par une série d'équations telles que « $6n = N$ » ; « $1/6 = p/e$ » ; « $p/6e = 1$ » et ainsi de suite. Dans chaque cas, on fait une interprétation mathématique du problème donnant un sens particulier aux symboles utilisés et aux relations entre eux, interprétations appelant à un traitement mathématique différent. Ces différences peuvent aller jusqu'à poser (et traiter) de manières dites arithmétiques des problèmes que l'on croyait algébriques (voir Bednarz et Janvier, 1998). Ces possibilités de lectures multiples d'un même énoncé, largement documentées à partir des productions des élèves, nous ont conduit à repenser les liens arithmétique-algèbre et ce en quoi constitue un traitement algébrique (e.g. Bednarz et Lee, 2002). Qui plus est, cette variété d'interprétations s'avère intéressante à travailler avec les élèves : elle est donc inspirante pour la conception de situations d'enseignement-apprentissage permettant l'émergence d'approches multiples, plus ou moins adaptées, d'un même problème. L'efficacité du traitement algébrique de certaines situations se présente alors comme une expérience clé que les élèves peuvent vivre à partir de leur propre activité mathématique. Des observations similaires ne peuvent-elles pas être faites en observant ce que font des étudiants en situation de résolution d'équations algébriques?

Un grand nombre de recherches sur l'apprentissage de l'algèbre soulignent l'importance des liens entre les « manipulations » qui permettent de résoudre une équation *et* le « sens » donné à ces manipulations (e.g. Saboya, 2009; Schmidt, 1994; Brousseau, 1986). Or, la question du sens des manipulations est souvent limitée à ce qu'on appelle le contrôle sémantique et le contrôle syntaxique (e.g. Kouki, 2007; Perkins et Simmons, 1988), l'enjeu étant que les élèves fassent des manipulations algébriques correctes tout en pouvant justifier (l'utilisation de) celles-ci. Une analyse basée sur le *faire mathématique* en situation de résolution d'équation invite ici à nous intéresser aux possibilités de faire sens qui se dégagent du travail des étudiants. On peut donc se pencher sur les *actions mathématiques*, par exemple celles qu'ils posent en guise d'entrée dans la résolution. Dans les paragraphes qui suivent, nous présentons une telle analyse de ce que nous avons appelé les *premiers mouvements* dans la résolution d'une équation algébrique. Évoquant différentes lectures d'une même équation, on voit que ces façons d'approcher la tâche invitent à une conceptualisation enrichie du sens donné aux manipulations sur une équation à travers le prisme plus large de ce que peut signifier « résoudre une équation algébrique ».

3.2 Premiers mouvements dans la résolution d'équation

Nous nous intéressons ici aux propositions des étudiants, à qui a été donnée la tâche de résoudre sans papier-crayon une série d'équations algébriques. En guise d'illustration d'une analyse enracinée dans le *faire mathématique*, nous prenons l'exemple des données recueillies autour des deux équations suivantes :

$$\frac{6}{x} = \frac{3}{5} \text{ et } \frac{1}{3x} = \frac{2}{5}$$

Les étudiants confrontés à ces tâches ont abordé leur résolution au moyen d'actions mathématiques variées, témoignant de lectures différentes de ces équations. Ainsi, on peut d'abord parler de trois premiers mouvements, chacun donnant un sens différent aux manipulations réalisées :

Faire des opérations

- Une première approche consiste à entrer sur l'équation en la transformant au moyen d'une opération. Par exemple, une idée a été de « multiplier par x » les deux termes de l'égalité de sorte que l'inconnue ne soit plus au dénominateur. Pour la première équation, on se retrouve avec « $6 = (3/5)\,x$ », qui sera à nouveau transformé par des opérations jusqu'à déterminer la valeur de l'inconnue. Par exemple, un étudiant propose la multiplication à gauche et à droite du signe d'égalité par 5/3 conduisant à « $6{\times}5/3 = x$ » d'où on tire « $30/3 = x$ », simplifié en « $10 = x$ ».

Utiliser des lois

- Une seconde approche consiste à traiter l'équation en faisant appel à une loi. Par exemple, dans ce cas-ci, l'idée de proportion est suggérée pour faire appel à la règle « le produit des extrêmes est égal au produit des moyens ». Suivant cette stratégie, des étudiants ont ainsi transformé la seconde équation, obtenant « $1{\times}5 = 2{\times}3x$ », soit « $5 = 6x$ ». Dans ce cas, l'équation obtenue donne rapidement la valeur de x.

Raisonner l'inconnue

- Un mouvement différent des précédents consiste à aborder ces équations en raisonnant sur l'inconnue. Ainsi, dans le premier cas, il a été proposé de prendre l'équation comme une égalité entre deux rapports, et en déduire quelque chose comme « 6 est à x comme 3 est à 5, or 6 est le double de 3 ce qui fait de x le double de 5, donc 10 ». Il ne s'agit pas ici d'utiliser des opérations, ni quelque propriété toute faite, mais bien d'examiner des relations entre les nombres présents pour déduire la valeur de l'inconnue.

Les deux premières approches permettent de transformer une équation vers une forme où la valeur de l'inconnue peut être dégagée. Si le premier de ces mouvements est relativement proche du travail sur les opérations avec lequel nous sommes familiers au début du travail en algèbre, le second évoque une forme d'activité mathématique qui rappelle plutôt les substitutions qu'on voit en trigonométrie, par exemple, où on fait régulièrement appel à des « identités » (du genre $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) afin d'obtenir une équation plus manipulable. Ces deux cas montrent bien la possibilité de lire une même équation algébrique de manières différentes, et on voit comment chacune des entrées sur l'équation correspond à un travail différent. En fait, cela suggère qu'une même manipulation, par exemple passer d'une équation du type a/b = c/d à la forme ad = bc, peut en fait avoir *plus d'un sens mathématique*.

Le travail mathématique dans le troisième cas est assez différent, en particulier parce qu'on ne cherche pas à « isoler le x » (une particularité frappante quand on pense à ce qui se fait généralement en contexte papier-crayon). Au contraire même, car résoudre passe ici par la mise en relation de l'inconnue avec (tous !) les autres nombres de l'équation. C'est ici le raisonnement qui prime, l'enjeu n'étant pas d'appliquer correctement un algorithme (mouvement par opérations), de faire appel à un fait mathématique pertinent (mouvement par lois), mais plutôt de mettre en œuvre un travail déductif similaire à celui rencontré autour de la preuve (mouvement par raisonnement[12]). On fait ici appel à la logique, raisonnant par inférence, c'est-à-dire suivant l'idée que « certaines choses étant posées, quelque autre chose en résulte nécessairement », comme l'écrivait Aristote. C'est donc une nouvelle dimension de la résolution d'équation qui apparaît dans ce type de mouvement, en même temps qu'une possibilité de lecture différente du même énoncé. Dans les trois cas, notons bien par ailleurs que le « travail algébrique » se présente à travers ses liens avec d'autres formes de l'activité mathématique. La particularité de ses objets (ce sur quoi on opère, on raisonne, etc.) donne (en partie) à ces *faire mathématique* ce caractère « algébrique », et inversement, c'est ce type travail mathématique avec les équations proposées qui (en partie) confirme que l'expression donnée aux étudiants est abordée algébriquement.

Vue sous cet angle, la question de l'articulation du contrôle symbolique et du contrôle sémantique ou celle des relations arithmétique-algèbre gagne donc en profondeur. D'abord, du point de vue de l'enseignement, se dessine un intérêt pour la comparaison des lectures proposées par les élèves. Ces comparaisons peuvent ouvrir sur un travail de justification et de mise en relation d'idées mathématiques que plusieurs chercheurs semblent souhaiter (e.g. Banerjee et Subramaniam, 2011, qui cherchent à faire apprécier les similarités structurelles entre expressions arithmétiques et algébriques). On peut même imaginer qu'un des enjeux de la résolution d'équations algébrique (dont l'enseignement pourrait se préoccuper) consiste à pouvoir varier ces types de lectures, dont le mérite respectif dépend sans doute des équations en présence. De même, on trouve ici une occasion de mettre en relation « arithmétique » et « algèbre », par exemple : en s'intéressant aux ressemblances et différences entre ces domaines de l'activité mathématique, en se mettant en quête d'autres stratégies pouvant être portées de l'un vers l'autre, voire en voulant faire le pont entre une telle variété d'entrées sur des équations « algébriques » et ce qui est observé dans la résolution de problèmes dits « algébriques » mais que l'on peut traiter de manière « arithmétique » (e.g. Bednarz et Lee, 2002).

Du point de vue de la recherche sur l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre, ce début d'analyse montre l'intérêt de se pencher finement sur les (*premiers*) *mouvements* des étudiants, ce par quoi ils *avancent* dans la résolution d'une équation et ce que cet « avancement » signifie mathématiquement. Une telle approche est centrée sur ce qui est *fait mathématiquement*, mettant en lumière cette activité mathématique qui nous intéresse, et que l'on souhaite continuer à éduquer, à faire avancer, à enrichir. Une telle analyse n'interdit pas de faire intervenir des concepts mathématiques pour discuter du *faire mathématique* des étudiants, mais on les utilise pour produire des interprétations qui *ouvrent* sur le plan mathématique. En effet, il ne s'agit pas, dans une telle analyse, de ramener les

[12] Un mouvement que l'on peut aussi relier à la notion de *calcul raisonné/réfléchi*.

mouvements des étudiants à des processus mathématiques « acceptés » (i.e. en termes de savoirs) ou « internalisés » (i.e. comme connaissances que l'individu possède), et donc de porter un jugement plus ou moins définitif sur ce que savent les apprenants. L'objectif n'est pas non plus de réifier ces approches comme de nouveaux savoirs qu'il faudra enseigner ou utiliser pour comprendre l'activité des étudiants. C'est plutôt la possibilité de donner un sens au travail mathématique qui nous intéresse, possibilité que l'on peut envisager d'exploiter avec les étudiants eux-mêmes, dans le but de *faire des mathématiques*. Ayant identifié ces (*premiers*) *mouvements* dans le travail de résolution des étudiants futurs enseignants, des questions de recherches spécifiques à la formation des enseignants ou au réinvestissement de ces observations pour l'enseignement initial peuvent être posées. Comment différents éléments de la situation ont-ils contribués à l'apparition de cette diversité de lectures ? Peut-on identifier des enjeux liés à l'exploitation de cette diversité dans le contexte où elle apparaît ? Comment des futurs enseignants en retirent-ils des leçons pour leur travail auprès des élèves ? Comment des élèves en plein apprentissage de l'algèbre apprécient-ils cette diversité ? Voit-on une transformation particulière de ce qu'ils font mathématiquement suivant un travail autour de la lecture d'équations algébriques selon leurs (*premiers*) *mouvements* de résolution ?

Sans être en rupture complète, fort heureusement, avec ce que nous connaissons pour façon de travailler en didactique des mathématiques, cette approche par le *faire mathématique*, qui ne pose pas de rapport de représentation entre ce qui est observé et de supposés « savoirs mathématiques » ou « connaissances des élèves », est tout de même particulière, car c'est encore et toujours le potentiel de ce qui est observé qui nous intéresse. Cette orientation devient d'autant plus marquée quand on observe un autre des mouvements proposés par les étudiants dans ces mêmes tâches :

Renverser l'équation

- Un autre mouvement consiste à aborder les équations en les lisant « par en dessous », c'est-à-dire à inverser les positions des numérateurs et des dénominateurs dans chacun des termes. On procède ici suivant l'hypothèse que les relations entre les nombres sont « pour l'essentiel » conservées, et donc que la valeur que l'on peut (peut-être plus facilement) trouver pour x est valable. Dans le cas de la seconde équation, ce mouvement se traduit par exemple de cette façon :

$$\frac{1}{3x}=\frac{2}{5} \qquad \frac{3x}{1}=\frac{5}{2}\Rightarrow 3x=\frac{5}{2}\Rightarrow x=\frac{5}{6}$$

Assez curieuse, cette entrée est intéressante parce qu'elle permet effectivement d'avancer dans la résolution d'une équation, mais aussi en raison du défi d'en faire sens mathématiquement. En effet, inverser une (paire de) fraction(s) n'est pas une opération à proprement dit, ne fait pas clairement appel à une loi ou une propriété et ne se présente pas non plus comme un raisonnement. On pourrait peut-être parler ici d'une lecture structurelle de l'équation où les relations entre les nombres ne sont pas traitées de façon linéaire, mais prises comme un tout. Cette approche n'est pas sans résonnances avec ce que peut exiger la complétion de carré sur une expression du type « $x^2 + 7x + 10$ », basée sur l'observation des coefficients : 10 = 2 x 5 et 7 = 2 + 5, d'où $(x + 2)(x + 5)$. Comme premier mouvement, renverser l'équation est particulièrement efficace pour travailler sur une expression comportant une fraction unitaire ($1/3x$ devient $3x$), et la solution ainsi trouvée est bel et bien valable (5/6 comme valeur de l'inconnue). En revanche, et nous l'avons observé lors de cette expérimentation, cette approche suscite de nombreuses questions : Est-elle mathématiquement correcte ? Sur quelles propriétés repose son succès ? Quelles sont les conditions pour qu'elle fonctionne ? Peut-on considérer l'inversion comme une opération au même titre que la multiplication ?[13]

Ces questions amènent à réaliser que plusieurs des manipulations proposées dans le cas de ces équations reposent sur une relation multiplicative qu'entretient l'inconnue avec tous les autres nombres de l'équation et que la résolution s'est chaque fois faite sans tenir compte des restrictions imposées par le cas $x = 0$. Lire l'équation en fonction de son domaine de résolution peut donc constituer une autre entrée. Lecture efficace pour des équations sans solution, ou qui, pour donner un exemple trivial, ressembleraient à « $5 + x = 5$ ». D'autres propositions en ce sens ont été avancées par les étudiants, par exemple de lire l'équation comme l'égalité posée entre deux fonctions dont on cherche un point d'intersection (voir Proulx, 2013a). La Figure 1 illustre ce à quoi correspond cette approche si elle était utilisée pour l'équation $6/x = 3/5$. Avec ce dernier exemple, c'est la frontière entre « algèbre » et « géométrie (analytique) » que l'on peut mettre à profit. Cet exemple suggère par ailleurs une interprétation à nouveau enrichie de l'idée de « contrôle sémantique/syntaxique », ouvrant sur un nouvel ensemble de possibilités de faire sens des manipulations sur une équation (e.g. ajouter ou soustraire une valeur de chaque côté de l'égalité revient à déplacer le système d'équation verticalement, ce qui ne change pas la valeur de l'abscisse du point d'intersection).

[13] On note à nouveau dans cette analyse que des concepts mathématiques interviennent dans l'interprétation que nous proposons (et, de fait, que les étudiants eux-mêmes ont proposé !) du travail mathématique observé. Mais c'est en tant que possibilité de faire sens mathématiquement de ces actions, de ce *faire mathématique*, que ces concepts interviennent et non de manière à y ramener et y réduire cette activité. De la même façon, nous aurions pu nous pencher sur les explications des étudiants et regarder alors comment ils font intervenir des concepts pour faire sens mathématiquement de leurs actions.

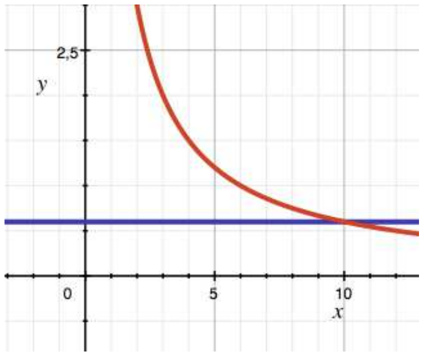

Figure 1. Entrée graphique pour une résolution où la première équation est $x = 10$

Suivre ainsi ce que *font* les étudiants confrontés à ces énoncés nous amène à considérer l'activité de résolution d'une équation algébrique au-delà du cadre ordinaire des manipulations symboliques et des « règles » mathématiques qui les gouvernent. Il est pensable d'entrer sur une équation et d'avancer dans sa résolution sans faire appel ou se limiter aux transformations standard dont il s'agit de respecter les conditions d'application. On réalise de fait que ce que signifie « résoudre une équation » s'est ainsi souvent cristallisé autour de ces manipulations (e.g. les approches de Mason, Graham, Pimm et Gowar, 1985 ; Kieran, 1992; Arzarello, Bazzini et Chiappini, 2002), les processus plus globaux tels que la transformation ou l'anticipation étant ramenés vers ces manipulations (e.g. Boero, 2002) et alors envisagés comme des objectifs à atteindre. Alternativement, notre entrée par le *faire mathématique* invite plutôt à enrichir ce que peut signifier résoudre une équation. Inspirée par l'étude des premiers mouvements des étudiants, une interprétation en ce sens de nos données nous conduit à proposer, par exemple, que « résoudre une équation » peut signifier (voir aussi Proulx, 2013b) :

- Transformer une équation en une autre afin d'isoler l'inconnue
- Chercher une ou des valeurs pour lesquelles l'égalité est vraie
- Raisonner sur la valeur manquante dans une proportion
- Identifier le ou les points d'intersection entre deux fonctions
- Déconstruire les opérations appliquées sur un nombre inconnu (e.g. pour l'équation « $x^2 - 4 = 5$ », on dira : « Mon nombre a été élevé au carré et ensuite on lui a enlevé 4 et ça donne 5, alors j'ajoute 4 à 5 et j'extrais la racine carrée »)[14].

La nature polysémique de ce que peut signifier résoudre une équation est ainsi mise de l'avant à travers la lecture de celle-ci, la manière d'entrer dans sa résolution, le mouvement qui fait avancer vers une solution. Nous voyons là une piste prometteuse pour la recherche en didactique des mathématiques, enracinée dans des *faires mathématiques* mis en relation avec d'autres *faires mathématiques* avec

[14] Approche qui rappelle évidemment celle développée par le célèbre Al- Khwarizmi!

lesquels ils ont la possibilité de faire sens, et libérée du besoin d'en appeler aux concepts de « connaissances » des élèves ou de « savoirs » visés. Dans une étude en cours, nous examinons d'ailleurs plus en détail, sous le thème du travail « mental » en mathématique, la manière dont ces significations émergent et peuvent être exploitées en classe.

3.3 Faire faire des mathématiques, un enjeu didactique

Nous nous sommes intéressés ici au *faire mathématique* d'étudiants en contexte de résolution d'équation algébrique. Dans cette perspective, les questions de l'ordre du « savoir » et de la « connaissance » semblent remplacées par une préoccupation à l'égard des possibilités de *faire faire des mathématiques aux élèves* (comme dit Conne, 1999), l'enjeu étant de développer le potentiel et la richesse (sur le plan spécifiquement mathématique) de ce qui émerge *sui generis hic et nunc*. Ainsi, l'objectif n'est pas de trouver des moyens d'amener les élèves à « posséder des connaissances » en adéquation avec un « savoir » mathématique (aussi complet que possible…) sur la résolution d'équations algébriques. Une ouverture vers les premiers mouvements, soit les multiples façons de lire une équation et les significations diverses que prend l'activité même de « résoudre une équation » à travers ces lectures, a pour but d'enrichir le travail mathématique des élèves, de le « suivre ailleurs », plutôt que de le « conduire vers » une forme prescrite. Du point de vue de l'enseignement, tirer profit des possibilités de ce qui émerge se présente alors comme un défi central. Bien loin de l'idée de conduire vers des « connaissances *sur* » ou de faire construire des « connaissances *de* », c'est la production d'actions mathématiques (e.g. en contexte de résolution d'équations algébriques) qu'il s'agît de favoriser, dont on cherche à préciser le sens et la pertinence mathématiques, et ainsi de suite. On s'intéresse alors à ce qui *est mathématique* (de l'anglais « mathematical », Davis, Sumara et Luce-Kapler, 2008). Une telle entrée nous fait travailler « au plus près » de l'activité mathématique des élèves, pour la « soutenir » et ne pas perdre de vue les mathématiques des élèves eux-mêmes ; plutôt que de la « saisir » ou de la « réduire » à nos propres compréhensions mathématiques, nous engageant dès lors souvent bien malgré nous dans une perspective déficitaire (où l'élève en sait toujours moins que l'étendue du « savoir » !).

Être au plus près de l'activité mathématique des élèves rappelle aussi cette idée de *présence* aux élèves, évoquée plus haut. Ne souhaitant plus faire progresser *vers* nos/des connaissances, mais plutôt *avancer mathématiquement*, sans cibler de fins, de standards, de savoirs-objectifs (Proulx, 2006), l'attention est portée vers le défi d'être mathématiquement avec l'élève. Plutôt que de prendre pour origine et horizon des connaissances et des savoirs mathématiques auxquels l'élève doit répondre, on se place soi-même dans l'obligation de répondre de/à l'élève de sorte que l'on fasse des mathématiques ensemble. Un tel changement d'orientation, à peine esquissé, n'est pas banal. Il a l'avantage de mettre au centre de la relation enseignant-élève le travail mathématique lui-même, plutôt qu'un jeu d'attentes par rapport à un « savoir » ou à ce qui est pris pour sa manifestation. Rappelant à plusieurs égards la vision transformée de l'éducation mathématique d'un Papert (1983) par exemple, il s'agit d'une perspective assez similaire à ce que Davis et al. (2008) proposent :

> That is, we do not see education in linear-causal terms of achieving preset objectives or re-presentation of established truths, but as a participation in the ever-unfolding project of becoming capable of new, perhaps as-yet unimaginable possibilities. (pp. 20-21)

Ainsi, s'intéresser à la manière dont l'activité mathématique s'élabore, aux façons de « signifier » la résolution algébrique, nous place du côté (positif) de ce qui est fait (et non de ce qui devrait être). On s'attarde à détailler les manières dont les élèves réalisent une attitude mathématique, en en cherchant les ramifications possibles, les nuances, etc. L'entrée sur le *faire mathématique* ouvre à l'activité elle-même, et à son déploiement infini, invitant à porter un regard sur l'enseignement en termes de ce qu'il permet : telle situation est-elle riche ? Comment telle approche permet-elle de faire faire des mathématiques aux élèves ? À ce titre, l'activité de résolution mentale d'équations algébriques rapportée ici nous semble offrir un potentiel certain.

Remarques finales – ouvertures

Les faits sont bel et bien faits
M. Douglas

Nous sommes d'avis que les mathématiques n'existent pas en dehors du moment où les gens font des mathématiques. Dans cet essai, nous avons exploré l'importance éthique et la possibilité théorique et pratique de nous intéresser directement au *faire mathématique*, plutôt que de l'aborder en termes de « savoirs » et de « connaissances ». Ce mouvement, rappelons-le, semble faire son chemin assez naturellement dans la recherche en didactique des mathématiques.

Cela dit, il nous semble important de revenir brièvement, en guise d'ouverture, sur la question du langage. Est-il vraiment nécessaire, peut-on se demander, de proposer un changement radical dans nos « façon de parler » et d'évacuer des termes tels que « savoir » et « connaissance » ? Ne peut-on pas plutôt les redéfinir de manière plus ouverte, ou encore se contenter de souligner que nous les utilisons « entre guillemets » ? Nous avons déjà évoqué deux alternatives allant en ce sens, montrant en particulier comment le terme « connaissance » est redéfini dans les traditions socioculturelle et de l'énaction dans leur développement en didactique des mathématiques. Mais une réflexion sur le langage, éthique entres autres, nous appelle à aller encore plus loin. Comme l'explique d'ailleurs Maturana (dans Simon, 1985) les mots sont bien souvent des adversaires : « words – with their power to confer objective status on perceptions – are the adversary, creating a minefield that must be navigated with the utmost circumspection » (p. 34).

Que se passe-t-il quand on met de côtés ces termes pour parler du *faire mathématique* ? Revenons, par exemple, aux définitions proposées par Conne (1992) mentionnées en introduction : « …le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation … une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable… ». Si on y pense bien, il est possible de reprendre une partie importante de l'idée mise de l'avant en se concentrant sur *l'action même de reconnaître* l'intérêt d'un concept ou d'une procédure mathématique par rapport à une situation. Il n'est nul besoin alors de poser l'existence d'une connaissance propre à l'individu ou d'un savoir réifié, ni même d'utiliser le terme « connaissance » pour décrire un tel événement et en déduire quelque chose d'intéressant pour la didactique des mathématiques. C'est un peu de la même façon que nous sommes allés puiser à des traditions théoriques et philosophiques avec lesquelles nous travaillons des éléments permettant de conceptualiser cette entrée par le *faire mathématique*. Si on trouve dans ces travaux beaucoup plus que ce que nous mentionnons ici, on y trouve aussi « beaucoup moins » dans la mesure où l'on y utilise fréquemment le vocabulaire dont nous cherchons à nous distancier, sans doute parce que l'on n'y thématise pas non plus comme nous le faisons ici une approche par le *faire* (*mathématique*) comme moyen de sortir de la pensée en termes de savoir/connaissance. Cependant, ces travaux *rendent possible* une telle entrée.

Certains lecteurs regretteront néanmoins que nous n'ayons pas développé cette proposition à partir de cadres plus utilisés en France par exemple (Brousseau, Chevallard, Vergnaud). Nous voyons néanmoins cette réaction de manière positive, l'idée étant d'inviter le lecteur familier avec ces approches à en faire l'exercice. D'autres regretteront, au contraire, que la proposition puise à des courants de recherche qui existent (et qui se débrouillent bien sans elle !), plutôt que de s'affirmer dans ses propres termes. Là encore, ce type de réaction répond en quelque sorte à nos attentes, suggérant que le lecteur a su apprécier l'idée qui nous occupe et trouve la proposition digne d'être développée. D'autres encore trouveront peut-être ces idées irréalistes, peu prometteuses, ou sans nouveauté. Ces avis nous semblent également importants pour deux raisons : la première est qu'ils aident à apprécier l'intérêt de notre proposition, et la seconde est qu'ils conduisent alors à appeler une discussion des enjeux éthiques soulevés en première partie, et dont la didactique des mathématiques fait encore peu de cas (fort en retard, à ce titre, sur sa « cousine » anglophone en particulier).

Quant à nous, l'examen attentif des perspectives épistémologiques, où nous auteurs, nous positionnons actuellement, révèle que le caractère local et émergeant de l'activité mathématique est si central qu'il ne peut être mis entre parenthèses. Il est si central qu'il *remplace* la question des « connaissances » et « savoirs » mathématiques. Définitivement mettre de côté les savoirs et connaissances pour nous intéresser plutôt au *faire mathématique* semble conduire à un changement de paradigme (Kuhn, 1962) en didactique des mathématiques, c'est-à-dire à une nouvelle manière de cadrer, de questionner et d'investiguer, de même qu'au développement d'un nouveau langage pour notre discipline.

Est-ce à dire qu'il faille renoncer à tout ce qui se fait dans notre domaine si on veut s'intéresser au *faire mathématique* et même (jolie formule !) au *faire mathématique ensemble*, plutôt qu'aux « savoirs » et aux « connaissances » ? Certainement pas. D'ailleurs, les analyses proposées des stratégies en algèbre mentale le montrent bien : on peut toujours s'intéresser aux productions des élèves, aux stratégies ou processus utilisés, aux potentialités des situations d'enseignement/apprentissage, et ainsi de suite. Mais, cette perspective n'est pas non plus sans exigences, invitant à mettre de côté certaines habitudes/attitudes qui s'appuient, même implicitement, sur l'existence de « savoirs » et de « connaissances » des élèves. Il faut ainsi accepter de voir l'enseignement comme un lieu où l'on *fait* des mathématiques plutôt que d'en apprendre, faisant résonner cette assertion de Glasersfeld (1989, p. 368), inspirée de Sierpinska, qui observe que « notre propre culture mathématique peut ne pas être beaucoup plus universelle que celle de nos élèves ». Donner pleine attention au *faire mathématique* est ainsi d'abord une affaire de disposition pour nous, chercheurs. Et ce terme, « disposition », est à entendre avec à l'esprit cette phrase du romancier Dietrich Bonhoeffer, qui nous rappelle à la dimension éthique de la proposition présentée dans ce texte :

> « Action springs not from thought, but from a readiness for responsibility ».

Références

ARZARELLO, F., BAZZINI, L., & CHIAPPINI, G.P., M. (2000). A Model for analysing algebraic processes of thinking. In R.Sutherland, T.Rojano, A.Bell & R.Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 243-262). Washington, Kluwer Academic Publishers.

ATWEH, B., & BRADY, K. (2009). Socially response-able mathematics education: Implications of an ethical approach. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education,* 5(3), 267-276.

BAKHTIN, M. (1986). *Speech genres and other late essays*. Austin, TX: University of Texas Press.

BAUERSFELD, H. (1995). The structuring of the structures. In L. P. Steffe & J. Gale (Eds.), *Constructivism in education* (pp. 137-158). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

BEDNARZ, N. & JANVIER, B. (1998). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool : continuities and discontinuities with arithmetic. In N.Bednarz, C.Kieran & L. Lee (Eds) *Approches to algebra : Perspectives for research and Teaching*. Kluwer, Dordrecht.

BEDNARS, N. & LEE, L. (2002). Articulation arithmétique/algèbre : Implications pour l'enseignement des mathématiques au primaire et au secondaire. *Actes du Groupe Canadien d'Etude en Didactique des Mathématiques* (pp. 59-70). CMESG/GCEDM.

BOERO, P. (2002). Transformation and anticipation as key processes in algebraic problem solving. *Mathematics Education Library, 22*, 99-119.

BUTLEN, D., & PEZARD, M. (1990). Calcul mental, calcul rapide. *Grand N*, *47*, 35-59.

CHAIKLIN, S., & LAVE, J. (1993). *Understanding practice: Perspectives on activity and context*. Cambridge: Cambridge University Press.

CLEMENT, J., LOCHHEAD, J., & MONK, G. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *American Mathematical Monthly*, *88*, 286-90.

CONNE, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*(2-3), 221-270.

CONNE, F. (1999). Faire des maths, faire faire des maths, et regarder ce que ça donne. In G. Lemoyne & F. Conne (Eds.), *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp. 103-120). Montréal, Qc: Presses de l'Université de Montréal.

DAVIS, B. (1995). Why teach mathematics? Mathematics education and enactivist theory. *For the Learning of Mathematics, 15*(2), 2-9.

DAVIS, B., SUMARA, D., & KIEREN, T. (1996). Cognition, co-emergence, curriculum. *Journal of Curriculum Studies*, *28*(2), 151–169.

DAVIS, D., SUMARA, D., & LUCE-KAPLER, R. (2008). *Engaging minds : Changing teaching in complex times* (2e édition). New York : Routledge.

DERRIDA, J. (1967). *L'écriture et la différence*. Paris : Éditions du Seuil.

ENGESTRÖM, Y. (2001). Expansive learning at work: toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work, 14*(1), 133-156.

ERNEST, P. (2009). What is first philosophy in mathematics education? In *Proceedings of PME-33* (pp. 25-42). Thessaloniki: PME.

FOUREZ, G., ENGELBERT-LECOMTE, V. & MATHY, P. (1997). *Nos savoirs sur nos savoirs: Un lexique d'épistémologie pour l'enseignement*. De Boeck Université: Brussels.

GLASERSFELD, E. VON (1989) Commentaires subjectifs par un observateur. In N.Bednarz & C.Garnier (Eds.), *Construction des savoirs: Obstacles et conflits* (pp. 367-371). Montréal, Qc: Agence d'Arc.

HOLZKAMP, K. (1983) Der Mensch als Subjekt wissenschaftlicher Methodik [Man as subject of scientific method]. In K.-H. Braun, W. Hollitscher, K. Holzkamp & K. Wetzel (Eds.), *Karl Marx und die Wissenschaft vom Individuum* (pp. 120-166). Marburg, Germany: Verlag Arbeiterbewegung und Gesellschaftswissenschaften.

KIEREN, T. & SIMMT, E. (2009) Brought forth in bringing forth: theinteractions and products of a collective learning system. *Complicity : An International Journal of Complexity and Education*, *6*(2), 20–28.

KIEREN, T., CALVERT, L.G., REID, D. & SIMMT, E. (1995). *Coemergence : Four enactive portraits of mathematics activity*. Présentation au congrès annuel de AERA. En ligne : http://tiny.cc/KieranCalvert1995

KUHN, T. (1962). *The Structure of Scientific Revolutions*. Chicago: Univeristy of Chicago Press.

LAROCHELLE, M. & DÉSAUTELS, J. (1992). *Autour de l'idée de science: itinéraires cognitifs d'étudiants et d'étudiantes*. Sainte-Foy: Presses de l'Université Laval.

LEONTIEV, A.N. (1981). The problem of activity in psychology. In J.Wertsch (Ed), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 37-71). Armonk, NY: Sharpe.

LEONTYEV, A.N. (1978/2009). *Activity and Consciousness*. Marxists Internet Archive, en ligne : http://www.marxists.org/archive/leontev/works/activity-consciousness.pdf

LERMAN, S. (2001). Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1/3), 87-113.

LEVINAS, E. (1982). *Éthique et infini*. Fayard: Paris.

LOZANO, M-D. (2009). Algebraic learning – accounting for. In J.Proulx, E.Simmt, & J.Towers, RF05: The enactivist theory of cognition and mathematics education research: Issues of the past, current questions and future directions. *Proceedings of PME-33* (vol. 1, pp. 249-278). Thessaloniki, Greece.

MAHEUX, J.F. (2010). *How do we know? An epistemological Journey in the Day-to-day, Moment to-moment, of Researching, Teaching and Learning in Mathematics Education*. Thèse de doctorat, Université de Victoria.

MAHEUX, J.F. & THOM, J.S. (2009). L’activité mathématique comme une manière d’être dans le monde. In F.Spagnolo (Ed), *Actes de la CIEAEM* (pp. 400-414). Montreal, Qc.

MAHEUX, J-F., & ROTH, W-M. (2011). Relationality and mathematical knowing. *For the Learning of Mathematics*, *31*(3), 36-41.

MASON, J., & SPENCE, M. (1999). Beyond mere knowledge of mathematics: The importance of knowing-to act in the moment. *Educational Studies in Mathematics*, *38*(1-3), 135-161.

MATURANA, H. (1987). Everything is said by an observer. In W.I.Thompson (Ed.) *GAIA: A way of knowing* (pp. 65-82) Hudson, NY: Lindisfarne Press.

MATURANA, H.R. (1988). Ontology of observing : The biological foundations of self consciousness and the physical domain of existence. 53 pages. *Texts in cybernetic theory, conférence workbook*. Felton, CA : ASC.

MATURANA, H.R., & VARELA, F.J. (1992). *The tree of knowledge: The biological roots of human understanding* (Rev. ed.). Boston, MA: Shambhala.

MATURANA, H.R., & VARELA, F.J. (1994). *L'arbre de la connaissance: racines biologiques de la compréhension humaine*. Paris: Addison-Wesley.

NEYLAND, J. (2001). *An ethical critique of technocratic mathematics education: towards an ethical philosophy of mathematics education*. Thèse de doctorat, Université de Victoria.

NIETZSCHE, F. (1992). *Fragments posthumes (1885-1886), Tome IX*. Paris, Gallimard.

PAPERT, S. (1983). *Mindstorms. Children, computers and powerful ideas*. New York : Basic books.

PIRIE, S., & KIEREN, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics, 26*(2-3), 165-190.

PROULX, J. (2007). «Objectifs comme points de depart» *versus* «objectifs à atteindre à la fin»: Un défi pour les programmes de formation des maîtres. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF-2006* (CD-ROM). Sherbrooke, QC : Éditions du CRP.

PROULX, J. (2013a). Le calcul mental au-delà des nombres : conceptualisations et illustrations avec la résolution d'équations algébriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *18*, 59-88.

PROULX, J, (2013b). Mental mathematics and algebra equation solving. *Proceedings of CERME-8*. Antalya, Turquie.

PROULX, J., & MAHEUX, J-F. (2012). Épistémologie et didactique des mathématiques : questions anciennes, nouvelles questions. *For the Learning of Mathematics*, *32*(2), 41-46.

RAMBUSCH, J. (2006). Situated learning and Galperin's notion of object-oriented activity. In *Proceedings of the 28th Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 1998-2003). En ligne :
http://csjarchive.cogsci.rpi.edu/proceedings/2006/docs/p1998.pdf

RADFORD, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in* *mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 215-234). Rotterdam: Sense Publishers.

RADFORD, L. (2011a). On the cognitive, epistemic, and ontological roles of artifacts. In G. Gueudet, B. Pepin & L. Trouche (Eds.), *From Text to 'Lived' Resources Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development* (pp. 282-288). New York: Springer.

RADFORD, L. (2011b). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage: la théorie de l'objectivation. *Éléments, 1*, 1 - 27.

RADFORD, L., & ROTH, W.-M. (2010). Intercorporeality and ethical commitment: an activity perspective on classroom interaction. *Educational Studies in Mathematics*.

REID, D. (1996). Enactivism as a methodology. *Proceedings of PME-20* (Vol.4, pp. 203-210). Valencia, Spain: PME.

RENE DE COTRET, S. (1999). Perspective bio-cognitive pour l'étude des relations didactiques. In G. Lemoyne & F. Conne (Eds.), *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp. 103-120). Montréal, Qc: Presses de l'Université de Montréal.

RENE DE COTRET, S. (2000). La didactique des mathématiques et la formation des enseignants: De la réflexion à l'action. In P. Blouin & L. Gattuso (Eds.), *Didactique des mathématiques et formation des enseignants* (pp. 21-28). Montreal, Quebec, Canada: Éditions Modulo.

ROTH, W.-M. (2011). *Geometry as objective science in elementary classrooms: Mathematics in the flesh*. New York: Routledge.

ROTH, W. M., & LEE, Y. J. (2007). Vygotsky's Neglected Legacy: Cultural-Historical Activity Theory. *Review of Educational Research*, 77(2), 186-232.

ROTH, W.-M., & RADFORD, L. (2011). *A cultural historical perspective on teaching and learning*. Rotterdam: Sense Publishers.

SFARD, A. (1998). On two metaphors for Learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, *27*(4), 4-13.

SFARD, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human Development, the Development of Discourses, and Mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press.

SIMON, R. (1985). A frog's eye view of the world. Structure is destiny: An interview with Humberto Maturana. *The Family Therapy Networker, 9*(3), 32-37; 41-43.

THOM, J.S., NAMUKASA, I.K., IBRAHIM-DIDI, K., & MCGARVEY, L.M. (2009). Perceptually guided action : Invoking knowing as enaction. In J.Proulx, E.Simmt, et J.Towers, RF05: The enactivist theory of cognition and mathematics education research: Issues of the past, current questions and future directions. *Proceedings of PME-33* (vol. 1, pp. 249-278). Thessaloniki, Greece.

VALERO P., & VITHAL, R. 1999. Research methods of the "North" revisited from the "South". *Perspectives in Education, 18*(2), 5-12.

VAN OERS, B. (2001). Educational forms of initiation in mathematical culture. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1), 59-85.

VARELA, F.J. (1996). *Invitation aux sciences cognitives* (Trad. P. Lavoie) Paris: Éditions du Seuil.

VARELA, F.J. (1988). Le cercle creatif. In P.Watzlawick (Ed.). *L'invention de la réalité : Contributions au constructivisme* (pp. 329-345), Paris, Seuil, 1988.

VARELA, F.J. (1999). *Ethical Know-how*. Stanford: Stanford University Press.

VARELA, F.J., Thompson, E., & Rosch, E. (1991). *The embodied mind: Cognitive science and human experience*. Cambridge, MA: MIT Press.

VOLOŠINOV, V. N. (1973). *Marxism and the philosophy of language*. Harvard: Harvard University Press.

VON FOERSTER, H. (1995). Ethics and second-order cybernetics. *Stanford Humanities Review, 4*(2), 308-319.

VYGOTSKY L. S. (1978) *Mind in society*. Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press.

VYGOTSKY, L. (1981) The instrumental method in psychology. In J. Wertsch (ed.), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 135-143). Armonk, NY: Sharpe.

VYGOTSKY, L.S., & LURIA, A. (1993). *Studies on the history of behavior, ape, primitive, and child*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

JEAN-FRANÇOIS MAHEUX <maheux.jean-francois@uqam.ca>
JEROME PROULX<proulx.jerome@uqam.ca>

Département de mathématiques, UQAM
C.P. 8888, Succursale Centre-ville
PK-5151
Montréal, Qc H3C 3P8