Décomposition d’un vecteur suivant une base

Niveau : 1ère S

Enoncé : Soit ABC un triangle. Les points D, E et F sont tels que :

- D est le milieu de [AC]
- $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
- F est le symétrique de B par rapport à C

a) Que peut-on dire des points D, E et F ?

b) Le démontrer.

Objectifs : Aborder la décomposition vectorielle d’un vecteur suivant une base en faisant le lien avec les calculs de coordonnées de vecteurs dans un repère adapté au problème.

Prérequis : coordonnées de vecteurs, relation de Chasles, vecteurs colinéaires, équations de droites.

Notions abordées et travaillées dans le problème : Coordonnées de vecteurs dans un repère oblique, traduction vectorielle du symétrique et du milieu, traduction des coordonnées d’un vecteur par une égalité vectorielle, conditions de colinéarité de 2 vecteurs.

Comment intégrer ce problème dans la progression :

- Cet exercice permet de faire des révisions sur les vecteurs et peut donc être fait avant la notion de produit scalaire.
- Le faire après le nombre dérivé et l’équation de tangente permet de bénéficier du travail fait sur les équations de droites.

Durée indicative : 2 heures (1h de « recherche », 1h d’analyse d’écrits et de réécriture)

Remarque sur l’énoncé : Pour les groupes d’élèves un peu plus faibles, on peut leur donner dès le départ un triangle ABC rectangle en B, ce qui évite la difficulté du repère oblique et permet aux élèves de rentrer plus rapidement dans le problème. On leur demande ensuite de généraliser leur raisonnement à un triangle quelconque.

Ecueils et « déblocage » *(questions ou difficultés des élèves en noir, réponse de l’enseignant en bleu, commentaires en orange)*:

- Je ne vois aucune conjecture à faire.

Regarde la figure de tes voisins, n’y a-t-il pas quelque chose de particulier qui se retrouve dans toutes les figures ?

Place 3 points dans le plan, comment peuvent-ils être ?

- Les points sont alignés, mais je ne sais pas comment le démontrer.

Comment peut-on dire autrement que des points sont alignés ? (doivent apparaître les mots « droite » ou « colinéaires ». Dans certaines classes, un brainstorming général a été nécessaire pour débloquer la situation)

- On n'a pas de repère.

Est-on obligé d'avoir un repère ? (question à poser si l'élève cherche à montrer que des vecteurs sont colinéaires.)

Ne pouvez-vous en choisir un ? (si l'élève répond oui à la question précédente car il ne sait pas faire autrement ou s'il cherche à travailler avec une droite)

- On n'a pas les mêmes coordonnées dans le groupe car on n'a pas le même triangle.

Ne pourrait-on pas choisir un repère qui permette à tout le monde d'avoir les mêmes coordonnées ?

- L'élève n'arrive pas à concevoir de prendre un repère oblique ou n'arrive pas à lire les coordonnées dans un tel repère.

Le faire d'abord travailler dans un triangle ABC rectangle

« A ne pas faire » :

- Ne pas dire d'emblée de prendre un repère, ni de ne pas en prendre d'ailleurs.
- Ne pas empêcher les élèves ayant pris un repère non lié au triangle de poursuivre leur raisonnement afin qu'ils puissent développer une méthode pour montrer que 3 points sont alignés.

Quel bilan avec les élèves ?

- Faire une liste de toutes les méthodes possibles pour montrer que 3 points sont alignés, avec des droites et avec des vecteurs colinéaires.
- Remarquer que toutes ces méthodes sauf une (si elle a été trouvée) nécessitent un repère et que pour faire une démonstration générale il faut choisir un repère formé par le triangle et que le choix de l'origine doit être réfléchi (ici prendre l'origine en C est le moins bon choix au vu des données)
- Traduire les coordonnées de tous les points à l'aide des vecteurs du repère choisi puis montrer à l'aide de la relation de Chasles que 2 des vecteurs formés par les 3 points D, E et F sont colinéaires.

Particularité du problème : D'entrée simple, il permet de mettre en évidence le décloisonnement entre géométrie analytique et géométrie vectorielle avec repère et sans repère.

Prolongement possible : Rajouter, par exemple, le point G tel que $2\overrightarrow{AG} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Que remarque-t-on pour les droites (ED) et (BG) ? Le démontrer.