

QUI élevé au carré donne 7 ?

Activité extraite de la brochure de l'IREM « Découvrir de nouveaux nombres au collège »
collection « Dans nos classes » n°2

Niveau : 3^{ème} et 2^{nde}

Énoncé : Peux-tu trouver un nombre décimal dont le carré est 7 ? Quelle est ta réponse ?
Explique la méthode que tu as utilisée ?

Objectifs : prouver que certains nombres ne sont pas décimaux, faire découvrir qu'aucun
nombre décimal ne peut avoir pour carré 7 et le démontrer.

Prérequis : définition d'un nombre décimal, produit et comparaison de nombres décimaux,
carré de nombres et ordre.

Notions abordées et travaillées dans le problème : Ordre sur les nombres positifs, dernier
chiffre du carré d'un nombre entier, dernier chiffre et nombre de décimales du carré d'un
nombre décimal.

Comment intégrer ce problème dans la progression : en 2^{nde} ce problème peut être fait à
n'importe quel moment mais de préférence avant l'introduction de la notion d'intervalles

Durée indicative : 1h

Matériel : calculatrice ou logiciel de calcul formel

Écueils et « déblocages » :

- Ne pas savoir démarrer.
 - La question pourra être précisée : « chercher un entier dont le carré est égal à 7 »,
puis étendue aux nombres décimaux.
- Affirmer, sans avoir fait d'essai, que c'est impossible
 - Pour les inciter à faire des essais, on peut reformuler le problème ainsi : « chercher un
nombre décimal dont le carré est très proche de 7, le plus que tu peux ».
- Proposer comme réponse $\sqrt{7}$.
 - Il faudra alors demander si $\sqrt{7}$ est un nombre décimal.
Selon la réponse fournie par l'élève, on sera ramené au cas précédent ou au cas
suivant.
- Proposer le nombre décimal affiché par la calculatrice en utilisant la touche $\sqrt{\quad}$.
 - Demander si le carré de ce nombre est égal à 7. Si l'élève obtient effectivement 7 en
utilisant sa calculatrice, deux options sont possibles :
 - Option 1. Lui donner la multiplication suivante, en précisant qu'elle est juste pour
invalidier ce résultat (en préparer quelques copies que l'on pourra distribuer).

$$\begin{array}{r}
 2,645751311 \\
 \times 2,645751311 \\
 \hline
 2645751311 \\
 7937253933 \\
 2645751311 \\
 13228756555 \\
 18520259177 \\
 13228756555 \\
 10583005244 \\
 15874507866 \\
 5291502622 \\
 \hline
 6,999999999658218721
 \end{array}$$

lui demander ensuite :

« Penses-tu qu'on peut obtenir 7 en prenant un nombre avec moins de 9 décimales, par exemple 2,64 ou 2,65? »

« Penses-tu qu'on pourrait y arriver en rajoutant une dixième décimale ? Laquelle pourrais-tu essayer ? »

- Option 2. Lui proposer d'effectuer la multiplication $2,645751311 \times 2,645751311$ à l'aide d'un logiciel de calcul formel. Ceci ne sera possible que si la recherche a été démarrée dans une salle informatique. Demander alors si on peut espérer obtenir le résultat en augmentant le nombre de décimales. Le logiciel de calcul formel devrait permettre de pousser les essais plus loin qu'avec une calculatrice. On pourra faire remarquer que l'on peut se contenter d'effectuer les multiplications avec des entiers, quitte à rajouter la virgule à la main.

Remarque. Si, dès le début de la recherche, on propose aux élèves d'utiliser un logiciel de calcul formel plutôt que leur calculatrice, il y a peu de chances qu'un élève propose directement un nombre à 9 ou 10 chiffres comme solution puisque la commande pour obtenir une racine carrée n'est pas encore connue.

Une fois que les élèves sont dans la « bonne » recherche, il s'agit de s'assurer :

- qu'ils écrivent tous les essais faits à la calculatrice pour pouvoir optimiser leur recherche et aussi pour permettre au professeur de les aider ;
- qu'ils ne font pas des essais totalement aléatoires, ce qui leur donnerait peu de chance d'aboutir et qui risque de les décourager. Dans ce cas, on peut leur suggérer de classer leurs calculs en deux colonnes, selon que le carré est plus petit ou plus grand que 7.

Pistes pour guider la recherche de preuve

On pourra poser l'une ou l'autre des questions suivantes:

- Y a-t-il toujours le double de chiffres après la virgule quand on élève au carré ?
- Peut-on réduire le nombre de chiffres après la virgule quand on élève au carré ?
- Comment faire, quand on pose une multiplication, pour que le résultat se termine par 0 ?
- Un nombre « qui marche », combien doit-il avoir de chiffres après la virgule ?

Quel bilan avec les élèves ? Aucun nombre décimal n'a pour carré 7.

- On peut amender leurs preuves pour arriver à une version finale du type :
 - Comme $2^2=4$ et $3^2=9$, le nombre décimal cherché est strictement compris entre 2 et 3.
 - En particulier ce n'est pas un nombre entier.
 - Ce nombre décimal comporte donc au moins 1 chiffre après la virgule. Son carré en possède alors au moins 2.

Or 7 n'a pas de chiffre après la virgule donc aucun nombre décimal positif n'a pour carré 7.

- On peut aussi arriver à une version finale utilisant le tableau ci-dessous, après avoir montré que
 - le nombre n'est pas entier (cf ci-dessus)
 -

| | | | | | | | | | |
|-----------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dernier chiffre de a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Dernier chiffre de a ² | 1 | 4 | 9 | 6 | 5 | 6 | 9 | 4 | 1 |

Quel que soit le dernier chiffre du nombre décimal cherché, le dernier chiffre de son carré ne sera jamais 7. Or le dernier chiffre de 7 est 7, donc aucun nombre décimal n'a pour carré 7.

Prolongements possibles : Prouver l'existence d'un nombre dont le carré est 7 en faisant construire aux élèves un carré d'aire 7 (exemple : un segment de longueur 1 étant donné, construire, à la règle non graduée et au compas, un triangle rectangle dont le carré de la longueur de l'hypoténuse est 7, puis un carré d'aire 7)

A ne pas faire : choisir 5, 6, 10 ou 11 à la place de 7, la fin du raisonnement ne pouvant s'appliquer à ces cas.

Remarques pour le professeur :

Il est nécessaire au début de cette activité de préciser ce qu'on appelle dans cette activité « nombres de chiffres après la virgule » : c'est le nombre de chiffres figurant dans la partie décimale de l'écriture d'un nombre après avoir supprimé les 0 superflus. Exemple : $2,3500 = 2,35$; il a donc 2 chiffres après la virgule.

Dans la brochure d'où est extraite cette activité se trouvent des exercices permettant de travailler les prérequis, des activités sur les racines carrées n'utilisant pas le théorème de Pythagore, des remarques didactiques et des compléments « culturels » pour le professeur.