

ECARTS SEMANTIQUES ET COHERENCE MATHÉMATIQUE :

Introduction aux problèmes de congruence

R. Duval.

Substituer une formulation, ou une présentation, à une autre qui lui est référentiellement équivalente est un processus essentiel pour la pensée mathématique. Et cela va souvent à l'encontre d'une condition nécessaire pour qu'il y ait sens dans la pensée naturelle : la continuité sémantique et associative entre les expressions à substituer. La distinction, pour tout ce qui est considéré comme référentiellement équivalent, entre une relation de congruence sémantique et une relation de non-congruence, commande le problème du sens dans la démarche mathématique : elle se trouve corroborée par une variation importante de coût dans le traitement cognitif. Des difficultés apparemment hétérogènes de l'apprentissage mathématique trouvent dans cette perspective une interprétation précise et féconde.

La distinction entre sens et référence "Sinn" et "Bedeutung" s'est révélée être une des plus fécondes pour tous les domaines dans lesquels le rapport à des concepts et à des idées s'effectue par la manipulation de signes, de symboles ou d'expressions [10]. Elle a conduit à bien séparer la signification, laquelle dépend du registre de description choisi, et la référence, laquelle dépend des objets exprimés ou représentés. Par exemple $4/2$, $(1+1)$, $\sqrt{4}$,... sont des écritures qui désignent un même nombre, c'est à dire sont des expressions qui réfèrent à un même objet. Mais elles n'ont pas la même signification puisqu'elles ne relèvent pas du même domaine de description ou du même point de vue : la première exprime le nombre en fonction de propriétés de divisibilité et de rapport, la seconde en fonction de la récurrence de l'unité...Un simple changement d'écriture permet d'exhiber des propriétés différentes du même objet, tout en conservant la référence. La distinction entre sens et référence est étroitement liée au principe de substitution essentiel dans toute démarche de calcul ou de déduction : deux expressions ayant même référence peuvent être remplacées l'une par l'autre, dans une phrase ou dans une formule, sans que la valeur de vérité change.

La distinction introduite par Frege a eu pour effet de privilégier le sens référentiel au détriment de ce que nous appellerons le sens associatif interne (à un domaine, à un registre,

à une théorie ou à un contexte). Cela était normal puisque la notion de référence ainsi dégagée soulevait de nouvelles questions sur lesquelles logiciens et linguistes se sont longuement penchés [17, 6]. Mais cela a détourné l'attention d'un problème fondamental, *celui de la possibilité cognitive de la substitution entre deux expressions référentiellement équivalentes*. Cette substitution constitue souvent, pour les individus en situation d'apprentissage ou même de recherche, un saut, entre deux réseaux sémantiques, tel qu'ils n'y pensent pas d'eux-mêmes, et que, si on la leur indique, elle leur paraît arbitraire. En d'autres termes, du point de vue de la constitution objective du savoir, la substitution qui permet de développer calcul et démonstration fonctionne par rapport à la référence. *Mais du point de vue de l'appropriation subjective d'un savoir mathématique la substitution fonctionne d'abord par rapport au sens associatif interne* : tout dépend alors de ce que nous appellerons la **congruence** ou la **non congruence sémantiques des expressions à substituer**. Deux expressions peuvent être synonymes ou référentiellement équivalentes (elles peuvent "vouloir dire la même chose", elles peuvent être vraies ou fausses ensemble) et ne pas être sémantiquement congruentes : dans ce cas il y a un coût cognitif important pour la compréhension.

Entre deux expressions, entre deux présentations d'information, il y a deux relations indépendantes à envisager : la relation d'équivalence référentielle et la relation de congruence sémantique. Deux expressions différentes peuvent être référentiellement équivalentes sans être sémantiquement congruentes. Inversement, deux expressions peuvent être sémantiquement congruentes sans être référentiellement équivalentes. Nous en verrons des exemples plus loin. Le mathématicien examine en priorité l'équivalence référentielle. Mais cette démarche va souvent à l'encontre d'une *condition nécessaire pour qu'il y ait sens dans la pensée naturelle : la continuité sémantique et associative entre les expressions à substituer*. Un élève qui ne perçoit pas l'attitude intellectuelle exigée par les mathématiques, fait spontanément de la congruence sémantique la condition nécessaire, et parfois suffisante, de l'équivalence référentielle. Il trouvera et se satisfera des substitutions sémantiquement congruentes; en revanche, il résistera aux substitutions non sémantiquement congruentes mais référentiellement équivalentes. Les mathématiques, hormis le domaine du calcul arithmétique élémentaire, apparaissent plus souvent arbitraires que "logiques".

La substitutivité des expressions est une propriété inhérente à tout registre sémiotique de présentation d'une idée ou d'une information. Elle permet par exemple le développement du

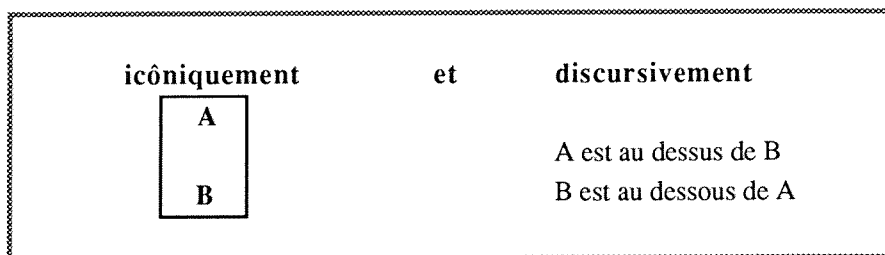
discours au plan du langage naturel : l'emploi de termes synonymes, la possibilité de la paraphrase en sont des modes de fonctionnement. Mais cette substitivité est aussi essentielle dans tout changement de registre sémiotique. Or en mathématique, plus que dans toute autre discipline ces changements sont à la fois importants et fréquents. Il suffit d'ouvrir n'importe quel manuel de n'importe quel niveau pour voir sur une même page le passage d'une phrase à une formule arithmétique ou algébrique, d'un énoncé à une figure géométrique, ou d'une écriture algébrique à un graphique. La démarche mathématique implique une substitivité aussi bien inter-registre qu'intra-registre sur la base d'une invariance de référence. Hormis le rapport d'illustration, entre un texte et une figure, rapport souvent admis comme évident et immédiat, ces changements de registre obéissent à des procédures élémentaires de codage pour passer, par exemple, à une écriture symbolique ou à une représentation graphique, et donc, aussi, pour effectuer le passage inverse vers les registres discursif ou algébrique. Or, là aussi, la substitivité se heurte à des difficultés d'écart sémantique, malgré l'apparente simplicité des règles de correspondance entre registres.

Un des obstacles rencontrés par beaucoup d'élèves dans leur apprentissage des mathématiques tient au fait que l'équivalence référentielle l'emporte sur la congruence sémantique, alors que le fonctionnement spontané de la pensée suit, en priorité, la congruence sémantique. La substitution d'une expression relevant d'un réseau sémantique à une expression d'un autre réseau sémantique apparaît parfois comme un saut difficilement franchissable. C'est la spécificité de ce type de difficulté que nous allons mettre en évidence. Pour cela nous présenterons d'abord quelques expériences psychologiques qui ont montré l'existence de ce phénomène de congruence sémantique; puis nous présenterons sommairement quelques exemples de ce phénomène en mathématiques.

I Coût de la non congruence dans des tâches de vérification

Des expériences sur des situations élémentaires de comparaison entre une image et une phrase décrivant cette image ont mis en évidence la variation de temps de réaction lorsque l'image et l'énoncé sont ou ne sont pas congruents [3].

La position de deux objets A et B, l'un par rapport à l'autre, peut être présentée de deux façons :



Si on se limite à l'image ci-dessus, on remarque tout de suite que nous avons quatre énoncés différents pour exprimer la même situation que celle donnée par l'image : les deux énoncés mentionnés à droite de l'image et les deux énoncés niant les réciproques. On remarque aussi que ces quatre énoncés doivent être distingués de quatre énoncés faux : A est au-dessous de B, etc..

Deux questions se posent :

- la reconnaissance de l'équivalence référentielle, ou de la non équivalence référentielle entre la présentation icônique et la présentation discursive a-t-elle un même coût pour chacune des huit expressions ?
- le sens de la comparaison, de l'image à la phrase ou de la phrase à l'image, est-il négligeable ?

En admettant que le traitement de la présentation icônique et celui de la présentation discursive passent par un codage propositionnel interne, la comparaison entre l'image et la phrase est en fait la comparaison des deux suites internes respectives. Deux cas alors se présentent :

- *les éléments des deux suites internes peuvent être appariés à une différence près* : elles explicitent les mêmes unités d'information dans le même ordre. Une décision d'équivalence référentielle peut être prise s'il n'y a aucune différence ; et s'il n'y a qu'une seule différence la décision de non équivalence référentielle s'impose. Par conséquent deux suites ne présentant pas le même ordre, ou présentant plus d'une unité

Ecart sémantique et cohérence mathématique :

différente, ne peuvent pas être appariées à une différence près.

- les éléments des deux suites ne peuvent être appariés à une différence près, parce qu'elles n'explicitent pas les mêmes unités ou parce que l'ordre ne correspond pas : il faut alors procéder à la transformation de l'une des deux suites pour les rendre comparables.

Dans le premier cas les deux présentations, l'image et l'énoncé, sont dites congruentes. Dans le second cas, les deux présentations ne sont pas congruentes. Deux présentations pourront être dites plus ou moins congruentes selon le nombre de transformations nécessaires pour appairer leurs suites internes.

Dans l'exemple ci-dessus nous avons pour les huit énoncés trois variations possibles pour coder la relation entre **A** et **B**:

- une variation de trait sémantique : au-dessus de \wedge , au-dessous de \vee .
- une variation de point d'ancrage : A sujet, ou B sujet.
- une variation de forme : affirmation, ou négation N.

Pour les huit énoncés possibles, vrais ou faux, relatifs à l'image codée comme $A \wedge B$, nous avons donc les huit suites internes suivantes :

		Forme positive			Forme négative		
		Suite interne	Temps	Valeur	Suite inter.	Temps	Valeur
Même ordre	même trait sémantique	$A \wedge B$ (1)	1783	V	$N(A \wedge B)$ (5)	2354	F
	trait antonymique	$A \vee B$ (2)	2077	F	$N(A \vee B)$ (6)	2499	V
Ordre inverse	même trait sémantique	$B \wedge A$ (3)	2130	F	$N(B \wedge A)$ (7)	2614	V
	trait antonymique	$B \vee A$ (4)	2139	V	$N(B \vee A)$ (8)	2678	F

Les temps indiqués sont les moyennes, en millisecondes, des temps de réaction enregistrés par Clark et Chase [3]

Écarts sémantiques et cohérence mathématique

Sur ce tableau nous pouvons constater que :

- la phrase ayant (1) pour suite interne est congruente à l'image : la reconnaissance de l'équivalence référentielle prend nettement moins de temps que pour les autres phrases,
- la phrase ayant (2) pour suite interne est plus congruente à l'image que la phrase ayant (4) pour suite interne, bien que cette dernière soit référentiellement équivalente à l'image : aussi, tout en étant non référentiellement équivalente à l'image, elle est plus rapidement traitée que la phrase ayant (4) pour suite interne qui, elle, est référentiellement équivalente à l'image. La différence entre la suite (1) et la suite (2) peut s'expliquer, selon le modèle de traitement proposé par Clark, par un coût particulier pour une décision de fausseté par rapport à une décision de vérité. Sous cette hypothèse les phrases ayant pour suites interne (1) et (2) sont donc également congruentes : elles peuvent être directement appariées avec l'image à une différence près. On voit d'ailleurs que ces deux phrases prennent moins de temps que toutes les autres, dans une tâche de vérification, bien que l'une soit vraie et l'autre fausse.
- les quatre phrases référentiellement équivalentes (valeur V) présentent, du point de vue cognitif, des écarts sémantiques, écarts dont le coût varie avec le degré de non-congruence.

Ce n'est pas seulement dans la situation de comparaison image-phrase que le phénomène de congruence sémantique joue un rôle important, mais aussi à l'intérieur d'un même registre, et plus particulièrement dans celui du discours naturel. *Cela apparaît de façon particulièrement nette dans toute situation où il s'agit de répondre à une question.* Si la formulation de la question est congruente à la formulation des informations données dans l'énoncé du problème, et si cette formulation est aussi congruente à une formulation possible de la réponse, cette réponse sera plus rapide que s'il y a non-congruence. Ce phénomène a été mis en évidence par Clark pour les problèmes à trois termes. Ces problèmes sont devenus classiques parce qu'ils faisaient partie d'une batterie de tests d'intelligence, au début de ce siècle, et qu'ils ont été repris par Piaget, lequel en a tiré argument pour affirmer la priorité de l'action sur le langage dans le développement de l'intelligence logique [14 p.7-9,75-76]. Clark a repris ce type de problème en variant systématiquement la formulation :

A est *meilleur* que B, B est *meilleur* que C, lequel est le *meilleur* ?

A est *meilleur* que B, B est *meilleur* que C, lequel est le *pire* ?

A est *pire* ...

La lecture des moyennes géométriques des temps de réaction montre que la réponse est plus rapide lorsque la question est congruente à la deuxième proposition de l'énoncé que lorsqu'elle ne l'est pas, puis lorsque les deux propositions de l'énoncé sont congruentes entre elles [2]. Ces résultats sont intéressants lorsqu'ils sont rapprochés du décalage entre les réussites aux épreuves de sériation et celles aux problèmes à trois termes. Contrairement à ce que Piaget a supposé pour justifier la priorité de l'action sur le langage, les deux tâches ne sont pas de même nature : il y a des difficultés cognitives propres au discours naturel. Et pour une part non négligeable ces difficultés relèvent de la non-congruence sémantique entre expressions référentiellement équivalentes. Les problèmes à trois termes sont cognitivement plus complexes que les épreuves de sériation.

Le problème de la congruence ou de la non-congruence sémantique de deux présentations d'un même objet est donc celui de la distance cognitive entre ces deux présentations, qu'elles appartiennent ou non au même registre. Plus la distance cognitive est grande, plus le coût de passage d'une présentation à l'autre risque d'être élevé et plus, aussi, ce passage risque de ne pas être effectué ou compris. En d'autres termes *l'équivalence référentielle n'est pas une raison suffisante pour réunir dans un même réseau sémantique, et, a fortiori, pour assurer l'évidence et l'immédiateté de la substitution d'une expression à une autre non-congruente*. Cette difficulté, la majorité des élèves s'y heurte, aux différents niveaux et dans les différents domaines de l'apprentissage mathématique. Et elle est d'autant plus importante qu'elle n'est pas explicitement et systématiquement prise en compte.

II Ampleur de la non-congruence sémantique en mathématique

Pour montrer l'importance de la non-congruence dans l'apprentissage des mathématiques, nous prendrons trois exemples bien connus. Le premier concerne le passage entre la représentation géométrique de la droite et la représentation symbolique des nombres réels par le recours à une écriture décimale, à une écriture fractionnaire, à des procédures d'encadrement... Le second reste dans le registre du discours naturel : il porte sur la compréhension d'un énoncé de problème. Le troisième se rapporte au passage de l'énoncé d'une relation à l'écriture algébrique de cette relation.

A. *Non-congruence sémantique entre le tracé d'une droite et l'ensemble des nombres réels.*

Pour le mathématicien, l'un des intérêts de la droite est de donner une représentation du continu, propriété spécifique de l'ensemble des réels par rapport à l'ensemble des rationnels qui est seulement dense. De par leur caractère discret et individualisant, les écritures décimales et fractionnaires des nombres réels tendent à occulter cette propriété de continuité : les règles génératives d'écriture des nombres permettent tout au plus de "réaliser" algorithmiquement la densité. Comment passe-t-on, dans l'enseignement, du registre symbolique de l'écriture, registre par excellence de la manipulation des nombres, au registre figuratif de la droite ? Il est, en effet difficile, dans l'enseignement de parler de "droite mathématique " sans se référer en fait à la représentation figurative d'une droite.

Ce passage s'effectue par la notion de "point". La droite est interprétée comme un "ensemble infini de points" (ensemble infini ayant la puissance du continu) et cet ensemble est en bijection avec l'ensembles des nombres réels : à chaque point correspond un nombre réel. Or c'est justement cette notion de "point" qui fait problème : un ensemble de points sur le registre figuratif est discret, il ne peut être continu. En effet :

- 1) la figure d'une droite est étrangère à toute représentation de point : son tracé se génère dans un mouvement et la propriété de continuité relève de cette représentation dynamique (au sens physique).
- 2) la figure d'un point relève d'une autre procédure de représentation que celle d'une droite: elle est le marquage d'une pure localisation, résultant d'une visée déictique, ou du croisement de deux droites tracées.
- 3) figurativement, le point se surajoute au tracé de la droite.
- 4) faire apparaître beaucoup de points sur une droite, c'est faire apparaître une graduation avec un marquage de plus en plus serré.
- 5) Il y a un décalage important entre la figure d'un point et la notion géométrique de point. Cette notion est évoquée sans être jamais définie. On glisse sur cette notion parce que toute description oscille entre deux représentations hétérogènes : celle d'un point matériel marquant une *position* et celle de *limite d'un processus en soi illimité* de réduction et

d'évanouissement du point matériel [11,p.156-158]. La première représentation est atomiste, la seconde est dynamique (au sens opératoire) et échappe à toute représentation figurale (à la différence de la représentation du tracé d'une droite). Il y a donc un écart sémantique irréductible entre ces deux "représentations" que l'on cherche implicitement à réunir pour donner un sens à la notion de point.

De ces cinq remarques il ressort que

- il y a congruence sémantique entre la configuration "droite plus une série de points-position sur cette droite" et un sous-ensemble, aussi grand que l'on veut, des nombres décimaux.
- la propriété de continuité, en tant que différente de la densité, n'a pas exactement le même sens si on la présente à partir de la trace d'une trajectoire ou à partir de l'inaccessibilité d'une limite dans la répétitivité d'un processus d'approche, même si on postule l'équivalence référentielle de ces deux présentations. Or c'est ce que l'on postule effectivement, lorsqu'on met les nombres réels en bijection avec la droite en recourant nécessairement pour cela à la notion de point.
- une représentation atomiste est la représentation pertinente *dès que l'on présente* la droite mathématique (un ensemble infini de points) ainsi que l'indéfinissable notion de point *dans le registre figuratif*. La tentative, dans les années 1970, d'éliminer le registre figuratif de l'enseignement mathématique avait l'avantage de contourner inconsciemment tous les obstacles relevant de la non-congruence sémantique, ou tout au moins ceux liés à l'articulation entre le discours naturel et le registre figuratif. Cela était une erreur d'un point de vue cognitif et s'est révélé être un échec. Mais sur cet exemple, comme sur d'autres, cette tentative historique a mis en évidence le fait que le recours à plusieurs registres posait des problèmes, bien qu'il soit nécessaire.
- la non-congruence sémantique entre la droite et l'ensemble des nombres réels est autrement plus complexe que les exemples que nous allons présenter ensuite, exemples dont nous verrons qu'ils arrêtent déjà des élèves. Comment s'étonner alors de la conclusion d'une enquête récente auprès d'élèves de 17-18 ans : "il est insuffisant de donner l'exemple de la droite pour faire "sentir" aux élèves des propriétés de \mathbb{R} comme celle de "continu", en effet 41% d'entre eux voient en la droite un assemblage de points de type atomique ; et 32% qui peuvent expliciter que \mathbb{R} est en bijection avec la droite ont encore cette vision plutôt atomiste de la droite." [16, p.385].

Ce résultat n'étonnera aucun enseignant. En revanche, l'une des questions posées est surprenante : " Si on *grossissait* avec un microscope électronique (ou avec un ordinateur) la droite, qu'est-ce qu'on obtiendrait *comme dessin "ultime "* (même question pour la parabole)". Et l'auteur de l'enquête précise que cette question "a été posée pour tenter d'approfondir le sens d'une réponse de type géométrique à la première question (comment vous représentez-vous les nombres réels ? Si vous avez une image décrivez-la)" [16, p.381]. La formulation de la question centre très explicitement sur le registre figuratif et plus particulièrement sur la composition du support matériel du tracé de la droite : on espère ainsi un glissement d'image perceptive de la droite comme tracé à une autre image perceptive simplement possible (puisque pouvant être obtenue avec un appareil qui n'est pas à portée de main pour vérification), celle de la droite comme ensemble de points. Mais cette question, ou toute proposition d'enseignement, exploitant cette utilisation du registre figuratif n'est-elle pas un piège? Non seulement elle appelle une interprétation de type atomiste, mais en fait elle a peu à voir avec une image mentale correcte de la droite des réels, puisqu'il y a risque de "mélange entre l'image mentale et l'image perceptive", ou "entre modèle mathématique et modèle physique"! [16, p.382]. Par cette remarque, qui laisse entendre que l'image mentale s'oppose d'une certaine façon à l'image perceptive, ne reconnaît-on pas l'écart sémantique entre la droite géométrique, que deux points suffisent à définir et que l'on représente par un tracé continu, et l'ensemble des réels ? N'est-ce pas sur cet écart que l'enseignement devrait en priorité se centrer au lieu de postuler sa réduction du seul fait que l'on définit l'équivalence référentielle ? Une approche entièrement différente, comme celle de la construction point par point d'un cercle à partir du tracé de nombreux rectangles ayant un sommet commun et des diagonales de longueur égale, donne aux élèves l'occasion de commencer à surmonter la non-congruence sémantique entre la continuité d'une droite, ou d'une courbe, et leur interprétation comme "ensemble de points". F. Pluvinage et J-C. Rauscher concluent ainsi les observations faites à propos de cette tâche réalisée par des élèves de 11-12 ans : "serait-il excessif de parler de révélation pour certains ? Peut-être pas, si nous essayons de nous représenter ce que peut être l'enchantement de voir surgir une figure que l'on n'a pas dessinée : on a tiré des traits droits, et voilà qu'apparaît un cercle comme ensemble de points (alors que de dire "un cercle est l'ensemble des points..." n'a jamais suscité une once d'émerveillement)..."[15, p.33]. On remarquera que, dans cette tâche, la continuité perceptive et géométrique de la droite surgit de la figure d'un ensemble de points : il n'y a aucune opération évoquant la décomposition de la continuité en points ou l'individualisation possible de l'un quelconque de ces points comme limite d'intervalles (emboîtés) de plus en plus petits. De même la signification de la continuité perceptive ne se trouve plus associée au mouvement d'un tracé.

B. La non-congruence sémantique dans les énoncés de problème .

Le deuxième exemple va nous rapprocher des situations étudiées dans les expériences psychologiques que nous avons évoquées. Nous reprendrons ici des résultats enregistrés par E. Koleza sur des problèmes de proportionnalité.

A partir d'un énoncé aussi simple que "j'ai payé 51 Francs pour 6 kg d'oranges", deux questions sont possibles :

- 1) Quelle quantité d'oranges aurais-je avec 85 francs ?
- 2) Combien devrais-je payer pour 4kg d'oranges ?

la première question est congruente à l'énoncé. Elle renvoie directement à l'utilisation de l'opérateur "fonction" : a (kg) coûtent b (F), pragmatiquement présupposé par l'énoncé. La deuxième question en revanche n'est pas congruente à l'énoncé. Elle demande une inversion de l'opérateur "fonction" [12, p.69-70]

Le simple fait de poser la seconde question, au lieu de la première, fait chuter les réussites de de 85% à 61% [12, p.131]. Et lorsque l'énoncé n'impose pragmatiquement aucune opérateur (comme par exemple dans l'énoncé "Une voiture a consommé 28 litres d'essence pour 350 kilomètres"), les élèves qui réussissent choisissent, en très grande majorité, la procédure qui rend l'énoncé congruent à la question. Ainsi deux questions étaient posées :

- combien la voiture a-t-elle consommé aux cent 100 kilomètres ?
- quelle distance la voiture peut-elle parcourir si son réservoir contient au départ 42 litres ?

A la première question les élèves ont calculé : $28l. : 350km = 0,08 l./km$. Et à la deuxième question, qui suivait immédiatement, ils ont calculé : $350 : 28 = 12,5 km/l$ [11, p.135-136].

Tout cela peut être schématisé de la façon suivante [12, p.123]:

énoncé :	pour 4 personnes ----->	150 gr.
question congruente	pour 6 personnes ----->	?
question non congrue.	pour ? personnes <-----	200 gr.

L'opposition du sens des flèches indique un écart de codage pour les suites internes tout à fait analogue à la variation du point d'ancrage dont nous avons vu l'importance plus haut lors de la comparaison image-phrase. Nous avons ici le même phénomène cognitif. L'intérêt de cet exemple par rapport au précédent est de faire apparaître la non-congruence sémantique comme une source de difficultés *indépendante du contenu mathématique* : une tâche mathématique peut

être réussie si sa présentation et son déroulement ne demandent aucune transformation entre des expressions, des formulations ou des représentations congruentes, et la même tâche mathématique, donnée avec une variante impliquant une manipulation de données non congruentes, peut conduire à des échecs. Nous verrons ultérieurement que ce point est particulièrement important pour l'heuristique des problèmes de géométrie et pour l'éveil au raisonnement en ce domaine.

C. Non-congruence entre phrase et formule .

Le passage d'un énoncé du discours naturel à une expression écrite symboliquement avec des variables, des symboles de relation, ou d'opération, constitue pour beaucoup d'élèves un fossé difficilement franchissable. L'utilisation d'équations du premier degré pour résoudre des problèmes est le lieu traditionnel, et toujours actuel, où les enseignants se heurtent, de façon spectaculaire, à la non articulation des registres de l'expression discursive et de l'écriture symbolique. Déjà les manuels anciens consacraient tout un chapitre sur "les problèmes du premier degré" [1], ou sur "les problèmes d'algèbre" [13]. En deçà de cette tâche complexe d'utilisation des équations du premier degré, nous voudrions signaler l'effet du phénomène de non-congruence sémantique. Le problème suivant nous servira d'exemple :

Un homme a *23 ans de plus que* son fils, *31 ans de moins* que son père. La somme des âges des trois personnes est 119 ans. Calculez les âges.

En désignant par x l'âge du père et par y l'âge du fils, nous pouvons écrire la première équation de deux façons différentes :

$$x - 23 = y \quad \text{c. à d. l'âge du père moins } 23 \text{ est égal à l'âge du fils.}$$

$$x = y + 23 \quad \text{c. à d. l'âge du père est égal à l'âge du fils plus } 23.$$

On remarque tout de suite que la paraphrase des deux équations n'est pas congruente à la phrase de l'énoncé : "un père a 23 ans de plus que son fils". En revanche il y a une équation qui est sémantiquement congruente à cette phrase, mais qui ne lui est pas référentiellement équivalente : $x + 23 = y$. En raison de cette congruence, cette équation risque de s'imposer comme la transcription algébrique évidente de la phrase.

Dans un travail ancien, et dans une tâche beaucoup plus simple que l'utilisation des équations du premier degré, nous avons pu observer le poids du phénomène de non-congruence [7]. Il s'agissait de donner l'écriture symbolique correspondant à l'expression discursive d'une opération portant sur des nombres et inversement de paraphraser des écritures symboliques

exprimant aussi une opération entre nombres. Pour l'expression " la somme de deux produits de deux entiers, tous les entiers étant différents", 90% des élèves de 13-14 ans transcrivaient "a.b + c.d", mais seulement 48% réussissaient à transcrire " a.b + a.c " pour l'expression " la somme des produits d'un entier avec deux autres entiers"! Dans le premier cas il y a congruence puisque les *deux produits symétriquement distribués* autour du symbole de la somme *sont explicitement mentionnés dans la phrase* : d'autres observations montrent en effet que toute formule s'organisant symétriquement de part et d'autre d'un symbole de relation (ou d'opération) central sont mieux appréhendés par les élèves que les autres types de formule. Dans le second cas, en revanche, il n'y a plus congruence puisque les *deux produits symétriquement distribués* autour du symbole de la somme ne sont *plus explicitement mentionnés par l'expression discursive*.

Sans nous étendre davantage sur l'articulation entre le registre de l'expression discursive et celui de l'écriture symbolique, nous terminerons par une anecdote que F. Pluinage nous a rapportée. Lors d'une séance de travail pour la rédaction d'un manuel, un des participants fait la proposition suivante:

" Si deux fractions ont même dénominateur alors elles s'ordonnent comme leurs numérateurs. *Autrement dit* : Si $a < b$, alors $a/k < b/k$."

Un autre participant refuse alors "autrement dit" et propose de remplacer cette expression par "ainsi", "d'où", car le deuxième énoncé n'est pas une simple transposition du premier. Le premier participant mettait l'accent sur l'équivalence référentielle, le second était sensible à la non-congruence sémantique des deux expressions.

III Congruence et fonctionnement cognitif de la pensée .

A la différence du discours en langage naturel, le *discours mathématique* se développe par le fait qu'il *opère principalement par substitution et non par adjonction ou par accumulation* [8, p.45-46,52]. C'est ce qui confère à tout développement mathématique un ordre linéaire plus strict que pour le développement d'un texte français ordinaire. A chaque pas du raisonnement, du calcul ou de la procédure de résolution, la nouvelle expression ne vient pas compléter ou enrichir les expressions antérieures et les données initiales, comme dans le texte d'une description, celui d'une histoire ou celui d'une discussion. Cette nouvelle expression vient, au contraire, se substituer à l'expression du pas précédent en vertu de définitions, d'axiomes, de théorèmes, de tables d'opérations...*qui sont autant de règles de substitution* pour le progrès de

la pensée à partir des données initiales : dans un développement qui opère par substitution le rapprochement de deux expressions éloignées n'a pas de sens, alors que dans un texte, où l'on opère par accumulation d'informations, de précisions, le rapprochement de deux phrases éloignées peut permettre de saisir la cohérence du discours développé [8, p.80-86]. La substitivité est l'une des caractéristiques fondamentales du fonctionnement cognitif de la pensée mathématique. Et c'est relativement à cette substitivité que les phénomènes de congruence et de non-congruence sémantiques sont importants.

Pour montrer, par exemple, que la somme des angles d'un triangle équivaut à 180° , on trace par un sommet la parallèle au côté opposé. Cet acte présuppose que l'on voie *une droite* comme *un angle de 180°* , c'est à dire que l'on substitue indifféremment l'une à l'autre deux présentations sémantiques différentes. Or, figurativement, un angle c'est un "coin", ou deux segments partant d'un même point : pour voir une droite comme un angle de 180° , il faut lui adjoindre une perpendiculaire. La notion de droite et celle d'angle plat n'appartiennent pas au même réseau de sens associatif interne. Une démarche spécifique favorisant le saut, en faisant prendre conscience de l'équivalence référentielle, est donc nécessaire. C'est d'ailleurs, dans le développement de cette démonstration élémentaire, la seule substitution non-congruente. Cela risque donc, dans une phase d'apprentissage ou de recherche, d'en être le point décisif.

L'utilisation de formules très simples exige aussi cette activité de substitution. Nous avons relevé dans une classe de seconde la difficulté à utiliser la formule : $t = d/v$.

Les élèves avaient le problème suivant : un cycliste parcourt une certaine distance à la vitesse de 18,4 km à l'heure. Quelle est cette distance, sachant qu'il aurait gagné un quart d'heure en roulant à la vitesse de 20 km à l'heure ?

Certains ont posé $t_1 - t_2 = 1/4$, mais se refusaient à remplacer t_1 et t_2 par $d/18,4$ et par $d/20$, tout en ayant la formule sous les yeux. Les deux membres n'étaient pas formellement congruents puisque d'un côté nous avons un symbole unique et de l'autre un rapport : malgré l'égalité écrite, "d/v" ne signifiait pas pour eux le temps, il ne pouvait donc être substitué au symbole "t" posé comme la variable temps.

La congruence et la non-congruence sémantiques jouent un rôle important dans l'activité de substitution, que cette activité soit inter ou intra-registre. Cela explique pourquoi la cohérence d'un texte mathématique soit d'un autre type que celle d'un texte non mathématique et qu'elle soit, par conséquent, si difficilement accessible à une majorité d'élèves (au moins jusqu'à 16-17 ans et au delà, dans les filières non-scientifiques). Et surtout cela montre que ce qui a été

appelé le "jeu de cadres" constitue un objectif, mais peut se heurter à de nombreux obstacles dûs à la non-congruence sémantique [4]. La situation qui a été didactiquement présentée comme exemplaire était une situation dans laquelle la substitution inter-registre et les traitements intra-registres ne se heurtent à aucune difficulté de non-congruence : il s'agit fondamentalement d'un fractionnement homogène de rectangles et de carrés et du codage numérique de leurs différents comptages selon la relation partie-tout. La définition du "cadre" proposée est d'ailleurs étrangère à toute prise en compte d'éventuels écarts sémantiques : "un cadre est formé par des objets mathématiques, par les relations qu'ils ont entre eux, par leurs différentes formulations et aussi par les images mentales qui sont associées à ces objets" [5, p.40]. Et l'auteur précise ensuite que changer de cadre c'est :

- produire différentes formulations pour un problème, ces différentes formulations n'étant pas forcément similaires (c'est-à-dire n'étant pas forcément sémantiquement congruentes).
- reconnaître dans une formulation l'emploi d'outils ou de techniques non utilisables dans une autre formulation .

Il apparaît donc qu'un cadre est beaucoup plus vaste que ce que nous avons appelé "registre" et que le changement de cadre, qui doit offrir une véritable compréhension mathématique, présuppose le dépassement des écarts sémantiques. Or c'est là que commence, et que s'arrête aussi pour un nombre non négligeable d'élèves, l'apprentissage des mathématiques.

CONCLUSION.

Les signes, les symboles, et aussi tous les éléments icôniques permettant de construire une représentation donnent lieu à deux opérations essentielles pour le fonctionnement de la pensée: l'association et la substitution.

L'association se fait, de façon interne, selon des liens de contexte et d'appartenance à un même réseau sémantique. Elle se fait aussi, de façon externe, selon des règles de combinaison des signes en expressions ou en configurations, règles qui sont propres au registre sémiotique choisi. On admet en général que la pratique de l'association externe reflète le jeu de l'association interne: cela correspond grossièrement à notre pratique spontanée de la parole, dans le discours quotidien. Dans cette situation, la pratique du discours remplit une fonction d'échange et de communication et non une fonction de traitement et de transformation d'information. Pour qu'un registre sémiotique, y compris celui de la langue naturelle, puisse répondre à cette fonction de traitement, il faut introduire des conditions sémantiques de

substitution par équivalence référentielle. Dans la langue naturelle, cela se fait par le jeu des définitions et des distinctions. C'est de cette manière que la géométrie euclidienne utilise le registre du discours naturel, et a développé dans les possibilités du langage naturel une fonction de traitement. La géométrie euclidienne a culturellement imposé l'image d'un raisonnement "more geometrico" lié au discours. *Ce raisonnement "more geometrico" fonctionne par substitution et non par accumulation ou par adjonction*. Cela implique un saut par rapport au jeu de l'association interne, lequel se fait selon des contextes reconnus et intégrés par le sujet. En ce sens le raisonnement géométrique qui s'exprime à travers les ressources de la langue naturelle, diffère radicalement de l'argumentation [9]. L'argumentation est un raisonnement qui fonctionne d'abord par accumulation ou par adjonction et non par substitution. L'argumentation ne présuppose aucune définition, aucun axiome pour ouvrir un ensemble d'équivalences référentielles. Lorsque dans l'argumentation, on recourt à des équivalences référentielles, c'est localement, pour les besoins de "réduire" une affirmation adverse, réelle ou possible : le plus souvent elles sont suggérées et non affirmées ... (sinon elles pourraient être récusées ...).

La logique d'une argumentation relève de l'appréhension de la cohérence globale du discours, et non de la rigueur du pas à pas de la démarche comme dans un raisonnement mathématique. Cette différence de fonctionnement entre le raisonnement mathématique (qui privilégie la substitution et les équivalences référentielles) et l'argumentation (qui garde le principe d'accumulation et la congruence sémantique propre au discours naturel) est importante à prendre en compte pour la didactique des mathématiques... En résumé, tant que l'association externe des signes ou des symboles reste subordonnée au jeu de l'association interne, l'individu ne peut pas se heurter à des problèmes de congruence. Mais dès que l'activité cognitive exige un minimum de traitement (au plan de la langue naturelle cela commence à apparaître avec la pratique de l'expression écrite) l'association interne doit respecter les contraintes propres au registre de traitement choisi : les problèmes de congruence sémantique deviennent alors primordiaux, surtout lors de l'apprentissage en fin de primaire et dans les Collèges.

Avec les exemples présentés, nous avons privilégié l'examen de congruence pour la substitution inter-registre au détriment de la substitution intra-registre. La première est plus manifestement indépendante du contenu mathématique que la seconde. Mais cela n'implique pas qu'il n'y ait pas de sérieux problèmes de congruence intra-registre ou que ceux-ci soient liés à des difficultés mathématiques de contenu. Bien au contraire. Dans le registre de l'écriture symbolique, écriture qui permet par excellence le jeu de la substitution d'expressions ou de

Ecarts sémantiques et cohérence mathématique :

symboles les uns aux autres, les difficultés liées à la non-congruence peuvent être importantes. Mais les problèmes de congruence liés à la substitution inter-registre présentent un intérêt particulier pour l'enseignement général de mathématiques, c'est-à dire pour l'enseignement des mathématiques jusqu'à 16 ans. Non seulement ils constituent le premier "mur" à franchir pour une grande majorité d'élève, et cela ne semble pas sérieusement pris en compte dans l'enseignement et dans la réflexion sur l'enseignement; mais encore apprendre à articuler plusieurs registres de présentation de l'information et apprendre à différencier plusieurs types de fonctionnements cognitifs pourraient être une finalité de l'enseignement des mathématiques qui apparaisse intéressante et utile aux non-mathématiciens.

Comme on le voit, les problèmes de congruence donnent une nouvelle approche à la question du langage en mathématique. Le langage naturel ne peut être opposé, de façon simple et globale, aux langages logico-mathématiques, et aux représentations figurales ou graphiques : la véritable frontière, celle qui arrête beaucoup d'élèves est entre congruence et non-congruence sémantique est dans le jeu de la substitution d'une expression à une autre, ou d'une représentation à une autre. Les deux autres articles ("sur l'approche cognitive des problèmes de géométrie" et "sur graphiques et équations") en fournissent des exemples plus détaillés.

REFERENCES

- [1] Borel E., Montel P.,1922, *Algèbre (3ème, 2nd,1ère)*, Armand Colin, Paris.
- [2] Clark H.H., 1969, Linguistic processes in deductive reasoning, in *Psychological Review*, 76, p.387-404,1969.
- [3] Clark H.H., Chase W.G.,1972,On the process of comparing Sentences against Pictures, in *Cognitive Psychology* ,3, p.472-517, 1972 .
- [4] Douady R., 1984, *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques* ,Thèse,Paris VII.
- [5] Douady R.,1985, Interplay between different settings, in *Proceedings of the ninth Int.Conf.for the Psychology of Mathematics Education*, p.1985
- [6] Ducrot O.,1972, *Dire et ne pas dire*, Hermann, Paris.
- [7] Duval R.,1971, La compréhension du langage mathématique par un enfant de 4ème,in *Langage mathématique et formalisation* ,Colloque Inter-Irem, Irem de Bordeaux.
- [8] Duval R. 1986, *Lecture et Compréhension des Textes*, IREM Strasbourg
- [9] Grize J.B. 1982, *De la logique à l'argumentation* - Droz, Genève.
- [10] Frege G., 1971, *Ecrits logiques et philosophiques*(trad. Imbert), Seuil, Paris.
- [11] Heath T.L.(Ed.,Trad.), 1956, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Vol.I, Doner New-York .

[12] Koleza-Adam E.,1987, *Décalages cognitifs dans les problèmes de proportionnalité*, Thèse, Strasbourg.

[13] Lebossé C.,Hemery C.,1951, *Algèbre,Arithmétique et Géométrie (4ème)*,Nathan, Paris.

[14] Piaget J.,1967, *Le Jugement et le raisonnement chez l'enfant* Delachaux-Nestlé, Neuchâtel.

[15] Pluinage F., Rauscher J.C., C. Soumoy, 1985, *Rapport sur l'expérimentation "Pédagogie Différenciée" conduite en Mathématiques au Collège d'Ostwald en 1984-85* - IREM, Strasbourg.

[16] Robinet J.,1986, Les Réels,quels modèles en ont les élèves ? in *Educational Studies in Mathematics*, 17, p.359-356.

[17] Quine,W.V.O., 1977, *Le mot et la Chose* (trad.Dopp,Gochet), Flammarion, Paris.