QUESTION DE REPRÉSENTATION ET DE FORMULATION DANS LA RÉSOLUTION DE PROBLEMES MATHEMATIQUES

G. VERGNAUD

La fonction des signifiants langagiers et symboliques est de favoriser la conceptualisation (identification et objectivation) et de permettre la communication et le débat ; ils jouent en outre un rôle de régulation de l'action dans la résolution de problème. La diversité des signifiants, des signifiés et des référents pose le problème de la congruence sémantique : tous les signifiants ne se valent pas, certains reflètent mieux que d'autres les propriétés du signifié. Les systèmes symboliques sont à la fois une aide à la pensée et un problème à résoudre : la compréhension, la lecture et la production de certains systèmes supposent des opérations de pensée non triviales.

L'analyse des représentations est essentielle pour la recherche en didactique. Mais cette analyse comporte deux versants interdépendants :

- le versant des représentations non explicites, préconceptuelles, et conceptuelles, qui régissent l'action du sujet en situation : choix des éléments à retenir, des buts à atteindre, des procédures et des opérations à utiliser, des combinaisons d'informations et de règles à effectuer.
- le versant des représentations symboliques explicites, langagières et non langagières (graphiques, tableaux, diagrammes, algèbres...) qui expriment les éléments et les procédures que le sujet estime intéressant de retenir, notamment dans la communication avec les autres.

C'est à ce versant que je m'intéresse aujourd'hui, tout en considérant qu'on ne peut pas en parler sans faire référence au premier. Mon exposé comprendra trois parties :

1. L'articulation entre signifiants, signifiés et référents : la question de la congruence signifiant/signifié.
2. La compréhension et l'utilisation des signifiants : quelles opérations de pensée supposent-elles ?

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
1 (1988) (p.33-55) IREM de Strasbourg

3. Les activités langagières et symboliques comme reflets de la pensée et aide à la pensée.

1.Signifiants/signifiés et référents : la question de la congruence signifiant/signifié.

On ne peut pas raisonnablement étudier la formation d'un concept sans considérer trois ordres de choses :

a) l'ensemble des situations de référence qui donnent du sens au concept. Cet ensemble présente en général une certaine diversité ;

b) l'ensemble des propriétés et des relations invariantes que le sujet doit extraire et utiliser pour traiter ces situations. On observe là encore une diversité d'aspects ;

c) l'ensemble des signifiants langagiers et symboliques susceptibles de représenter le concept et ses propriétés, et par voie de conséquence les situations de référence et les opérations de pensée nécessaires pour les traiter.

Alors que le linguiste est davantage tourné vers le rapport signifié-signifiant (b et c), le psychologue qui s'intéresse à la conduite en situation s'intéresse davantage au rapport référent-signifié (a et b), et notamment aux schèmes qui organisent l'action du sujet en situation.

Une première idée importante concerne la diversité de chacun des ensembles : situations, invariants, représentations langagières et symboliques. Il faut étudier et traiter cette diversité.

Une deuxième idée essentielle concerne l'importance de ce que j'appelle, après Piaget, les **invariants opératoires** : objets, propriétés, relations. C'est en effet le mérite de Piaget que d'avoir montré que l'objet-biberon n'est pas donné tout-à-fait pour le bébé mais que celui-ci élabore cet objet par le jeu de certaines coordinations visuo-motrices (main-oeil, bouche) et à travers un ensemble de situations, notamment de transformations spatiales (éloignement, retournement, disparition...). De même la conservation du cardinal d'une collection, ou de la masse d'une boulette de pâte à modeler n'est pas non plus donnée toute faite à l'enfant de 6 ans. Il faut étendre ce concept d'invariant à un grand nombre d'aspects du réel, notamment parce qu'il est essentiel dans le processus de conceptualisation (mathématique, physique ou autre...) du réel. Le concept de théorème-en-acte est issu tout droit de cette problématique.

Une troisième idée importante est que, si un concept ne se forme pas dans un seul type de situation, une situation ne s'analyse pas non plus à l'aide d'un seul concept, et que l'étude des filiations et des ruptures du développement cognitif de l'enfant demande qu'on prenne en charge un ensemble relativement large de situations, de concepts et de représentations symboliques : c'est ce que j'appelle un champ conceptuel.

Ces idées sont loin d'être comprises par nos collègues anglo-saxons. L'idée d'invariant n'est guère comprise par les psychologues même par ceux qui prétendent être cognitivistes ; l'idée de champ conceptuel non plus : par exemple, les chercheurs qui s'intéressent aux concepts de fraction et de rapport, ou à la proportionnalité, étudient les uns indépendamment de l'autre. Le concept de schème lui-même n'est pas bien compris, en dépit du fait que certains concepts comme ceux de frame, de script, de format, sont assez proches de celui de schème. Il leur manque l'aspect fonctionnel et dynamique : le schème organise la conduite évolutive du sujet en situation. C'est une totalité dynamique, une organisation invariante de la conduite pour un ensemble de situations. Invariante ne signifie pas stéréotypée : ni la marche (schème sensori-moteur), ni le traitement d'une équation algébrique de tel ou tel type (schème intellectuel) ne sont des stéréotypes.

Alors que Piaget ne cherchait pas à analyser le schème en ses éléments, il est utile aujourd'hui de distinguer des éléments constitutifs distincts, bien qu'articulés entre eux :

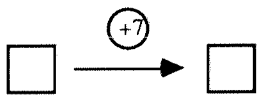
- des invariants opératoires qui permettent d'extraire l'information pertinente de la situation et de la traiter ;
- des inférences qui forment la partie proprement actuelle du traitement de l'information ;
- des règles d'actions qui permettent d'engendrer la suite des actions du sujet en fonction de la situation et du déroulement des évènements ;
- des anticipations et prédictions (anticipations explicites) qui permettent à la fois de finaliser l'action et de contrôler la pertinence de la représentation.

Le signifié est fondamentalement constitué de schèmes, lesquels comportent une certaine conceptualisation du réel, qui reste le plus souvent implicite. C'est cette fonction de conceptualisation implicite que remplissent les invariants opératoires, avant de devenir, grâce au langage et aux autres symbolisations, des concepts explicites.

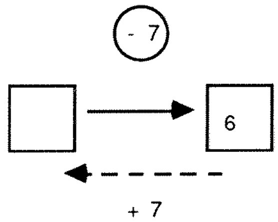
L'exemple le plus simple d'aide à la conceptualisation de situations complexes fournie par un système de signifiants, me paraît être celui des structures additives et, à l'intérieur des structures additives, celui de la représentation par un diagramme sagittal de la relation état initial-transformation-état final.

Ce n'est pas tant pour les problèmes de recherche de l'état final que le diagramme sagittal apporte quelque chose.

Dans le problème :
Pierre avait 5 billes. Il joue une partie et gagne 7 billes. Combien en a-t-il maintenant ? les élèves du cours élémentaire n'ont guère de mal à comprendre la relation qui unit ce qu'on cherche aux données. Et ceux qui ont des difficultés ne sont guère aidés par le diagramme :



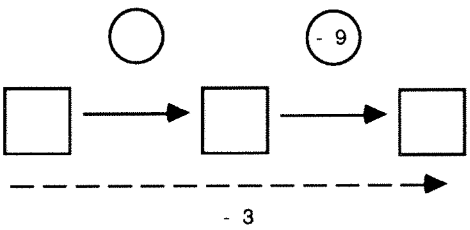
Par contre, dans le problème :
Robert vient de perdre 7 billes en jouant avec Pierre. Il en a maintenant 6. Combien en avait-il avant de jouer ?
les mêmes élèves sont décontenancés et ne savent pas comment opérer. Faire une addition alors qu'il y a une perte est même d'une certaine manière, contre-intuitif.



Ce diagramme présente alors l'avantage de bien marquer état initial, état final et transformation (symboles différents, place différente) et de permettre de symboliser l'opération d'addition par une inversion de la transformation directe, faisant retour de l'état final vers l'état initial.

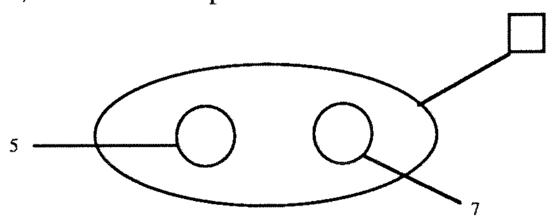
Cette aide à la conceptualisation est également sensible, pour des élèves plus âgés, lorsqu'ils ont à traiter la composition et la décomposition de transformations.

Jean Paul a joué deux parties ; il ne se souvient plus de ce qui s'est passé à la première partie. A la seconde partie il a perdu 9 billes. En tout il en a perdu 3. Que s'est-il passé à la première partie ?



Dans ces exemples, l'élève est amené à distinguer entre transformations, positives ou négatives (symbolisées par un rond), et états, toujours positifs ou plutôt sans signe (symbolisés par des rectangles). Il est amené à repérer le sens du déroulement temporel, de gauche à droite, et à comprendre que rajouter les billes perdues dans le problème Robert, revient à remonter le temps.

En fait la représentation symbolique que je viens d'utiliser permet ces distinctions ; ce n'est pas le cas des diagrammes de type Euler-Venn qui permettent assez bien de représenter le problème Pierre, et en même temps sa situation.



mais qui ne fournissent, pour le problème Robert, qu'une représentation **de la solution** (la même que ci-dessus), mais **pas du problème** : parce que ce système de signifiants ne permet pas de représenter les transformations négatives.

On peut faire remarquer que le diagramme d'Euler-Venn est adéquat pour représenter la composition additive d'éléments de même nature (composition binaire de cardinaux), mais pas la composition d'éléments de nature différente (opération unaire d'une transformation s'appliquant à un état). Les problèmes de conceptualisation sous-jacents sont donc profonds. Or on sait maintenant, depuis les travaux de Gelman et Gallistel (1978) et de Fuson (1983) que la conception du jeune enfant de l'addition et de la soustraction est celle d'une quantité qui s'accroît ou qui décroît. C'est une conception de type opération unaire.
Cette conception, qui ne reflète bien qu'une petite partie des situations d'addition et de sous-

traction, doit être modifiée pour permettre l'extension des opérations d'addition et de soustraction à des situations différentes. Cela suppose à chaque conquête, des opérations de pensée spécifiques. Quel concours les signifiants apportent-ils à ces opérations de pensée ?

Pour la recherche de l'état initial, il existe un théorème-en-acte

$$F = T(I) \Rightarrow I = T^{-1}(F)$$

qui exprime la nécessité d'inverser la transformation. Ce théorème est exprimé dans le diagramme sagittal par l'inversion de la flèche et le changement de signe de la transformation.

Passons aux structures multiplicatives, avec une opération arithmétique simple : 4×5 ou 5×4.
Un gâteau coûte 4 francs. Combien coûtent 5 gâteaux ?
On peut envisager de représenter l'opération soit comme une loi binaire, soit comme une opération unaire.

- loi binaire : $4 \times 5 =$ on ne comprend pas très bien pourquoi en multipliant des francs par des gâteaux on obtient des francs et pas des gâteaux.

-opération unaire, 2 cas : $4 \rightarrow \square$

$5 \rightarrow \square$

il faut là encore un signifiant particulier pour comprendre les différences.

$$\begin{tikzcd}
\text{gâteau} & \text{coût} \\
1 \arrow[r, dashed, "\times 4"'] \arrow[d, "\times 5"'] & 4 \arrow[d, "\times 5"] \\
5 \arrow[r, dashed, "\times 4"'] & \square
\end{tikzcd}$$

On s'aperçoit en particulier que les deux opérations unaires ne sont pas équivalentes en tous points. La première, verticale, relie entre elles des grandeurs de même nature, et le théorème-en-acte correspondant est le suivant :

$$f(n \times 1) = n\, f(1)$$

cas particulier de $$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

La seconde, horizontale, relie entre elles des grandeurs de nature différente (des gâteaux et des francs) et le théorème-en-acte correspondant est :

$$f(x) = ax$$

Dans la première solution (5 fois 4 francs), "5 fois" représente un scalaire ; tandis que dans la seconde solution, où l'on part de 5 gâteaux, la multiplication par 4 représente la multiplication par une grandeur-quotient : "4 francs par gâteau". Ainsi les enfants rencontrent le problème de l'analyse dimensionnelle dès le CE2. Et la commutativité 5 x 4 = 4 x 5 ne va pas de soi.
Prenons le calcul de l'aire d'une chambre de 5 m de long et de 4 m de large. L'opération 5 x 4 a évidemment une autre signification que dans les cas précédents puisqu'il s'agit d'un produit explicite.

Voici encore un autre exemple : 50 enfants partent en colonie de vacances pendant 28 jours. Pour préparer leur départ, ils cherchent dans une documentation quelle consommation il leur faut prévoir. Pour le sucre ils utilisent 3,5 kg de sucre par semaine pour 10 enfants. Quelle quantité de sucre leur faut-il acheter pour la colonie pour toute la durée du séjour ?

Supposons qu'un enfant de CM2 ou de sixième fasse le raisonnement suivant :
5 fois plus d'enfants, 4 fois plus de temps $\Rightarrow$ 20 fois plus de sucre.
La multiplication 5 x 4 a une autre signification encore. Elle exprime, en acte, un théorème concernant les fonctions bilinéaires.

$$f(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \lambda_2 f(x_1, x_2)$$

Ce théorème n'est jamais enseigné aux enfants. Pourtant on le voit fonctionner spontanément dans le raisonnement de certains enfants, pour certaines valeurs numériques simples, et pour des domaines familiers de l'expérience. Il y a là les prémices de la bilinéarité.

On pourrait utiliser divers systèmes de signifiants pour représenter cette connaissance. Par exemple, une formule analogue à $A = L \times l$ (aire = longueur x largeur)

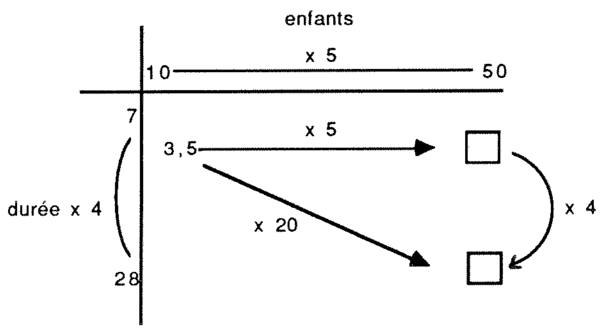
$$C = k \times E \times J$$

(consommation = k x nombre d'enfants x nombre de jours).

La présence de k vient ici du fait que la valeur unitaire f(1,1) n'est pas égale à 1 comme c'est le cas dans le système métrique : il n'y a en effet aucune raison pour que la consommation de sucre par enfant et par jour soit égale à 1. Le système métrique a été construit justement pour que, le plus souvent possible, on ait des produits sans coefficient.

Or une formule comme A = L x l peut être lue de manière très variable, selon le niveau de conceptualisation dont disposent les élèves. A la fin de l'enseignement élémentaire et au début du collège, elle est lue principalement comme un moyen de calculer l'aire quand on connaît la longueur et la largeur, éventuellement comme un moyen de calculer la longueur ou la largeur, jamais comme la reconnaissance de la double proportionnalité de l'aire par rapport à la longueur quand la largeur est constante, et à la largeur quand la longueur est constante. Or cette lecture est en fait la vraie raison de la formule.

On peut se poser la question de savoir si une autre représentation symbolique permettrait de mieux saisir cette relation de double proportionnalité, qui est essentielle à la compréhension de la formule.



Quand l'enfant fait l'inférence : "5 fois plus d'enfants, 4 fois plus de temps ⇒ 20 fois plus de sucre" il utilise en fait la bilinéarité de la consommation par rapport au nombre d'enfants et à la durée du séjour :

- par rapport au nombre d'enfants : 5 fois plus d'enfants ⇒ 5 fois plus de sucre ;
- et par rapport au temps : 4 fois plus de temps ⇒ 4 fois plus de sucre.

Le diagramme commutatif constitue une représentation symbolique du théorème-en-acte utilisé par l'enfant.

$$f(5 \times x_1, 4 \times x_2) = 5 \times 4\ f(x_1, x_2)$$

comme $f(x_1, x_2)$ est connu et égal à 3,5 kg, le tour est joué.

Il n'est pas aisé de parler de ce théorème sous cette forme à des élèves de 6e et de 5e, alors que la lecture et l'utilisation du tableau de double proportionnalité ne soulève pas de grosses difficultés au début du collège, ni même à la fin de l'école élémentaire, pour des valeurs numériques et des rapports simples, et pour des grandeurs familières.

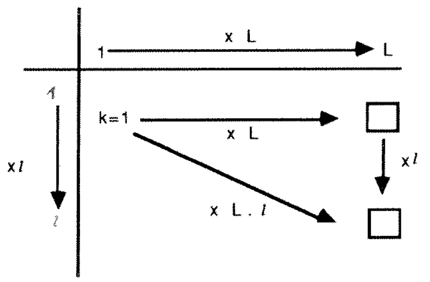
Le tableau met en évidence, d'une part l'indépendance des variables nombre d'enfants et nombre de jours, d'autre part la structure de double proportionnalité : on peut par exemple utiliser deux lignes pour mettre en évidence que, à durée constante, la consommation est proportionnelle au nombre d'enfants, et utiliser deux colonnes pour mettre en évidence que, à nombre d'enfants constant, la consommation est proportionnelle à la durée.

La question psychologique et didactique cruciale ici est évidemment la suivante : **quelles propriétés du signifiant représentent quelles propriétés du signifié** ? Si l'on veut s'attaquer au problème des rapports, dans la pensée, entre signifiant et signifié, il faut se poser cette question : **qu'est-ce-qui est représenté des concepts en jeu ? par quoi ?**

Tout à l'heure, sur l'exemple des structures additives, j'ai montré qu'il n'y avait pas de moyen simple, avec les diagrammes ensemblistes, de représenter les transformations négatives, ni d'ailleurs de représenter l'inversion d'une transformation positive. Ici par contre on utilise des propriétés isomorphes du signifiant et du signifié pour mettre en évidence des relations relativement complexes.

Revenons maintenant à l'exemple de l'aire de la pièce. C'est évidemment la même structure que celle que nous venons de voir du point de vue de la double proportionnalité (non pas de la continuité évidemment) :

- longueur et largeur sont des grandeurs indépendantes ;
- l'aire est proportionnelle à la longueur quand la largeur est constante ; et à la largeur quand la longueur est constante ;
- f(1,1) = k



Il se trouve que, dans le système métrique, on a choisi les unités de telle manière que k = 1. Cela simplifie les calculs. Mais il n'en était pas de même dans les systèmes de mesure anciens, et l'aire n'en était pas moins proportionnelle au produit de la longueur par la largeur.

La bilinéarité n'est évidemment pas liée au système métrique. De même que Brousseau a souvent dénoncé le fait que l'association étroite de l'enseignement des décimaux à celui de système métrique pouvait engendrer ou conforter certaines conceptions erronées des élèves, je ne suis pas loin de penser que la facilité trop grande qui nous est donnée avec le système métrique pour traiter des produits, peut nous empêcher de voir la structure profonde de la bilinéarité et de la trilinéarité. Je pense également qu'il est aberrant de ne pas parler, au niveau du collège, des fonctions de plusieurs variables.

La COPREM s'est préoccupée de ces questions, sans aller assez loin dans la réflexion ; d'ailleurs il n'y a pas beaucoup de recherches. Je me contenterai de citer celles que j'ai faites en LEP, avec des élèves de la section "dessin technique bâtiment". Ces élèves ont des difficultés en mathématiques. J'ai travaillé avec eux en partant de situations comportant des données nombreuses et de nombreuses questions possibles. Ces situations permettaient de considérer des relations de proportionnalité simple : ciment, sable, gravier, coût de chaque ingrédient, béton, volume, longueur de semelle (fondation), etc... et l'on pouvait aussi considérer des relations de proportionnalité double : production et coût de la main d'oeuvre en fonction du nombre d'ouvriers et du nombre de jours de travail.

L'usage de tableaux s'est avéré d'une grande efficacité pour placer les données et les différentes questions qu'on peut se poser, extraire les relations fonctionnelles et comprendre les différents types de composition de fonctions, pour extraire également les relations scalaires et éventuellement mettre en évidence certains raisonnements dits "additifs" qui expriment l'isomorphisme additif :

$$f(x + x') = f(x) + f(x')$$

ou l'isomorphisme entre combinaisons linéaires :

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

Ces tableaux aident beaucoup, y compris dans la formulation de questions et dans la clarification du statut des différents éléments de l'énoncé comme nous le verrons plus loin.

a) Quel est le prix du ciment nécessaire à la fabrication des fondations d'un F4 ?
"Prix du ciment" renvoie à une colonne, "un F4" renvoie à une ligne.

b) Quelle quantitié de ciment faut-il acheter pour fabriquer la semelle de 6 F4 et de 10 F4 ?
"Quantité de ciment" renvoie à une colonne, "semelle de 6 F4" renvoie à une ligne (sous-question b_1) et "semelle de 10 F5" renvoie à une autre ligne (sous-question b_2).

	Longueur de semelle	Béton en m3	Masse Ciment	Sable	Gravier	Béton	Coût Ciment	Sable	Gravier	Béton
F 3										
F 4	52,5						a			
6 F4			b1							
F 5	71									
10 F5			b2							

c) Combien faut-il de jours à 5 ouvriers pour fabriquer les fondations de 10 F5 et 6 F4, soit 1025 mètres linéaires de semelle ?

"1025 mètres linéaires" est une production ; c'est une donnée qui se situe à l'intérieur du tableau ; "50 ouvriers" se situe dans une marge ; "combien de jours" est une question qui se situe dans l'autre marge.

	1	Nombre d'ouvriers 5
1	k	
Nombre de jours		Production 1025
c		

Les tableaux de proportionnalité simple et multiple ont en outre le mérite de faire ressortir ce qui est commun à des relations prises dans des contextes très différents : prix, vitesse, masse volumique, électricité, chaleur massique, consommation, production. Ils permettent ainsi l'abstraction de leur strucutre commune.

Une question s'impose évidemment. Qu'en serait-il de la réussite et de l'échec en mathématiques si l'on recourait à bon escient, dès l'école élémentaire et au collège, à des représentations symboliques comme celles que j'ai évoquées pour les structures additives et les structures multiplicatives ? Il y a là matière à de nombreuses recherches. Il faut aussi être prudent : les difficultés conceptuelles des élèves peuvent être balayées par la simple utilisation d'une représentation symbolique pertinente ? Cependant beaucoup d'éléments permettent de penser qu'on peut aider les élèves de manière significative, surtout si on travaille dans la longue durée. Il faut pour cela recourir, à toutes les étapes du développement conceptuel de l'enfant, aux signifiants les mieux aptes à représenter les propriétés et les relations que les enfants ont du mal à extraire, à transformer et à composer.

2° La compréhension et l'utilisation des signifiants : quelles opérations de pensée supposent-elles ?

Je vais maintenant tenir un discours apparemment contradictoire avec ce que j'ai dit jusqu'à maintenant. Ce n'est pas une véritable contradiction mais elle peut être perçue comme telle.

Mon exemple sera celui de la représentation de données numériques et quasi-numériques (des dates de naissance par exemple) sur une droite : représentation qui a évidemment beaucoup à voir avec la construction du concept de **droite numérique**.
Dans l'expérience que je vais raconter, nous avons utilisé quatre types de données, et nous avons travaillé avec des élèves de CM2, de 6e et de 5e : deux classes par niveau :

- des poids de bébés à la naissance (y compris des prématurés comme vous pouvez le contater) ;
- des lancers de javelot ;
- des âges d'enfants ;
- des dates de naissance.

Le tableau 1 résume les données en question.

Données utilisées pour les quatre tâches du pré-test et du post-test

TABLEAU 1

	Non temporel		Temporel	
Origine proche	Alain	800 grammes	Anne	8 mois
	Barbara	1 kg et 700 grammes	Bernard	1 an et 7 mois
	Claude	1 kg et 900 grammes	Catherine	1 an et 11 mois
	Denis	3 kg et 100 grammes	Daniel	3 ans et 1 mois
	Eric	3 kg et 450 grammes	Evelyne	3 ans et 4 mois et 1/2
	Fabienne	3 kg et 700 grammes	Franck	3 ans et 7 mois
	Guy	4 kg et 400 grammes	Gabriel	4 ans et 4 mois

Echelle
1cm pour 100 grammes

Echelle
1 cm pour 1 mois

Origine en dehors
de la famille

Aurélien	67 m et 75 cm	Alice	15 juillet 1967
Bruno	67 m et 90 cm	Béatrice	30 novembre 1967
Carlos	68 m et 10 cm	Caroline	2 janvier 1968
David	68 m et 95 cm	Dominique	20 décembre 1968
Etienne	70 m et 10 cm	Emilie	3 janvier 1970
Fabrice	70 m et 55 cm	Fanny	13 mai 1970
Gérard	70 m et 60 cm	Gaston	31 mai 1970

Le plan d'expérience utilise deux variables principales :

1° La chronologie et la durée par opposition à des longueurs et des masses ; l'hypothèse étant que les variables temporelles pouvaient induire des difficultés spécifiques.

2° La possibilité ou l'impossibilité de placer à la fois les données et l'origine sur la même bande de papier, compte-tenu de l'échelle proposée aux enfants, et de la longueur de la bande (60 cm).

Une préexpérience nous avait permis de faire l'hypothèse que ces variables pouvaient jouer un rôle important.

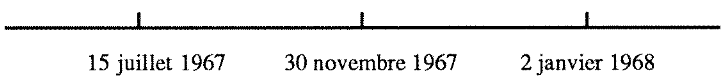
Il est clair qu'en prenant 1 cm pour 100 grammes, on peut placer sur la bande à la fois l'origine et le poids des bébés, tandis qu'en prenant 1 cm pour 10 cm, on ne peut pas placer à la fois l'origine et les lancers de javelot. Même chose pour les dates de naissance, à cette remarque près que la notion d'origine, pour les dates de naissance, pose encore davantage de problèmes : année zéro, 1900, 1960 ?

Nous avons recueilli environ 600 protocoles d'enfants (300 au prétest, 300 au post-test). Parmi ces protocoles, j'ai dû sélectionner 60 exemples différents les uns des autres pour illustrer la variété des protocoles produits par les enfants et des idées auxquelles cette tâche les incite. Certains protocoles, obtenus au prétest, manifestent clairement le fait que les enfants ont été pris à froid. Mais on retrouve les mêmes catégories au post-test qu'au prétest, ce qui signifie à mes yeux que les interprétations et les obstacles rencontrés ne sont pas anecdotiques. Les protocoles les plus curieux sont cependant plus fréquents au prétest qu'au post-test.

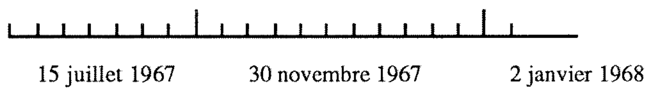
La séquence didactique de 5 ou 6 séances d'une heure, qui est intervenue entre les deux tests, a été construite de telle manière qu'elle permette aux élèves de prendre conscience progressivement des relations mathématiques en jeu dans cette tâche et de dépasser les interprétations surprenantes que nous avions pu observer au prétest.

Le progrès entre le prétest et le post-test est important, mais des difficultés subsistent, pour la majorité des élèves, notamment dans les situations pour lesquelles il n'est pas possible de placer à la fois l'origine et les données sur la même bande. Il s'agit d'une difficulté conceptuelle durable. Nous allons voir pourquoi.
Partons des deux protocoles suivants :

Protocole A



Protocole B

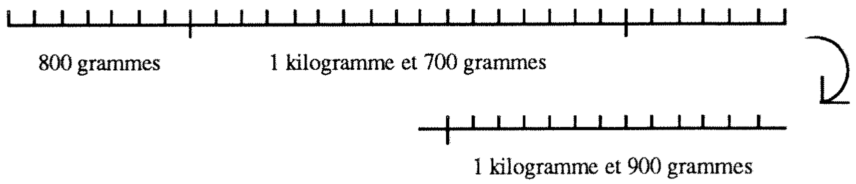


Dans le protocole A, l'élève place à intervalles réguliers (tous les 10 cm environ), et dans l'ordre, la suite des dates de naissance. Il se contente d'utiliser les propriétés d'ordre de l'espace pour représenter les propriétés d'ordre des données.

Dans le protocole B, l'élève représente par un segment de 7 unités la première date (15 juillet 67), puis par un segment de 11 unités la date du 30 novembre 67, placé bout à bout avec le précédent, puis par un segment d'1 unité la date du 2 janvier 68, etc... L'enfant représente donc le numéro d'ordre du mois (nième) par un segment de n unités. Il tronque les données en ne tenant compte ni du jour ni de l'année ; il confond ordinal et cardinal, évènement et durée (si la ligne représente une durée, ce qui n'est pas nécessairement le cas pour ces enfants) ; enfin, il ne représente pas l'inclusion des 7 mois (qui séparent juillet du début de l'année) dans les 11 mois (qui séparent novembre du début de l'année).

Ce protocole pourrait paraître anecdotique si l'on n'avait observé des phénomènes analogues avec les autres types de données. Par exemple pour les poids de bébés, on observe plusieurs protocoles comme le suivant, que nous qualifions de “bout à bout”.

Protocole C

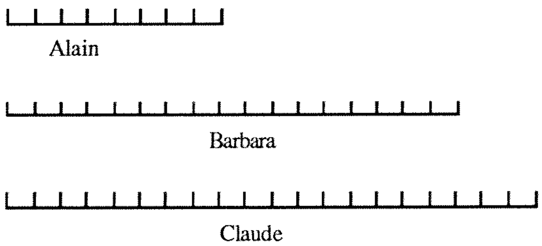


C'est donc une certaine conception de la représentation bout à bout des données qui a conduit les élèves à rechercher dans les dates de naissance, une partie des données qui pourrait jouer cette fonction. C'est le mois qui a été retenu le plus souvent.

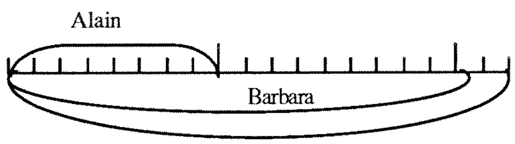
Dans le cas des lancers de javelot c'est la partie centimètres.
D'ailleurs, les enfants font parfois du bout à bout avec la seule partie décimale des poids de bébés. Parfois aussi ils changent d'échelle pour avoir plus de place.

Le premier problème que doivent surmonter les élèves est celui du principe d'inclusion. Dans les rapports entre signifiants et signifiés, le “bout à bout” a le mérite d'exprimer la biunivocité. Lorsque le segment correspondant à la première donnée est inclus dans le segment représentant la seconde donnée, l'enfant perd la biunivocité et il doit utiliser des marques supplémentaires. Il peut d'ailleurs s'en tirer de plusieurs manières :

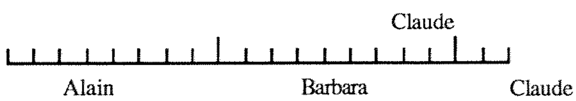
Protocole D



Protocole E



Protocole F



Evidemment le protocole D est très commode car il conserve la biunivocité signifié-signifiant tout en prenant un point de départ commun. Le protocole E est le plus fréquent et correspond à ce que nous pouvions escompter. Mais il est lourd dans sa présentation car il faut beaucoup de marques pour éviter les ambiguïtés. Le protocole F, pour sa part, est beaucoup plus sobre, mais il est ambigü car on ne sait pas si le segment correspond à Barbara part du début de la ligne ou seulement du point d'arrivée d'Alain comme dans le bout à bout.

Quelle conquête intellectuelle supplémentaire faut-il à l'enfant pour aller au-delà ?

C'est la **ponctualisation**, c'est l'utilisation de la bijection entre segments emboîtés et points d'arrivée : cela permet que l'information **distance à l'origine** soit résumée par le point d'arrivée du segment. Ce qui est segment représentant une donnée numérique doit devenir point ; les segments emboîtés deviennent alors des points parfaitement distincts. Mais ceci suppose évidemment le concept d'origine commune.

Quand on y réfléchit, il ne va pas de soi d'associer un nombre à un point, car un point a une mesure nulle ; dans la logique des élèves, qui consiste à utiliser les propriétés mesurables du signifiant-espace, seules les longueurs (et les aires ou les volumes) se prêtent naturellement à la mesure ; pour associer un nombre à un point, il faut une construction intellectuelle.
La situation se complique encore lorsqu'on ne peut pas placer l'objet sur la bande de papier, à cause du choix de l'échelle, comme dans le cas des lancers de javelot, et celui des dates de naissance.

Prenons le cas des lancers de javelot : il faut raisonner sur des segments emboîtés à partir d'un point qui n'est pas sur la feuille ; ou bien il faut raisonner à la fois sur le nombre comme point et le nombre comme segment : le point A et le point B pour 67,75 m et 67,90 m ; le segment AB pour la différence, qui permet de placer le point B quand on a placé le point A.
En résumé, on peut dire que les trois grands principes que l'enfant doit comprendre et maîtriser pour lire et placer des données numériques ou quasi numériques sur la droite sont les suivants :
- le principe d'inclusion des segments représentant les données ;
- la ponctualisation des données, qui permet de résumer l'information sous une forme lisible grâce au concept d'origine commune ;
- la représentation des différences entre données comme des intervalles entre points.

Cette dernière opération de pensée est la plus difficile : au post-test, l'épreuve des lancers de javelot a été réussie par moins de 50 % des élèves de 5e et par un pourcentage beaucoup plus faible encore des élèves de 6e et de CM2.

Pour les dates de naissance, la réussite est encore moins bonne, en dépit du fait que nous avons considéré comme acceptables des protocoles dans lesquels l'ordre des mois est correctement représenté par une suite des points. En fait, dans ces protocoles, aucun statut n'est donné aux intervalles : le 15 juillet 1967 est placé sur le point juillet comme le 30 novembre 1967 sur le point novembre, et comme le 13 mai 1970 et le 31 mai 1970 sur le même point. Seules les propriétés d'ordre du signifiant et du signifié sont utilisées : la suite des points représente une suite des classes d'équivalence (dates du même mois) ; l'ordre temporel n'est que partiellement représenté, la durée ne l'est pas.

Cette idée que l'utilisation d'un système de signifiants suppose des opérations de pensée non triviales est une idée générale. On pourrait faire le même type de recherche sur les tableaux et les diagrammes fléchés, et sur toute autre représentation symbolique ; on découvrirait certainement des difficultés insoupçonnées, même si elles sont sans doute moindres que dans le cas que je viens de décrire. Pour l'algèbre par contre, on sait bien que certains élèves rencontrent de grosses difficultés. Quand on sait l'importance donnée aux représentations graphiques dans l'enseignement, on ne peut que s'interroger sur la signification que leur accordent certains élèves. Claude Janvier a par exemple montré dans sa thèse que des élèves de seconde ou première ne lisent que les coordonnées entières et ne donnent pas de statut à ce qui se trouve entre deux entiers : par exemple ils ne sont pas capables de donner correctement l'abscisse correspondant au minimum de la fonction si ce minimum se trouve entre 2 et 3 ; ils donnent la valeur entière la plus proche. Dans ces conditions, la question de la continuité peut difficilement avoir du sens pour eux.

Pour conclure cette partie, je ferai encore une remarque. La droite, les points et les segments, l'origine et les abscisses forment un système qui permet de représenter des nombres. Pour les élèves du début du collège, c'est essentiellement un outil. Par l'usage répété qui en est fait et par le statut qui lui est socialement donné en classe, cet outil peut devenir un objet au sens que Régine Douady donne à ce qu'elle appelle la dialectique outil-objet : un nouveau concept est d'abord un outil, qui répond à certains problèmes pratiques et théoriques, ici un problème de représentation ; puis il devient un objet, aussi réel qu'un objet matériel, qui entretient des relations avec les autres objets, et est ainsi à son tour source de nouveaux problèmes. La droite numérique est un concept-objet directement issu du concept-outil que nos élèves ont eu à utiliser. Elle suppose une construction plus laborieuse que ne le pensent la plupart des enseignants.

3. Activités langagières et symboliques : reflets de la pensée et aides à la pensée.

Si maintenant on aborde le problème du langage naturel avec la problématique que je viens de développer, il est possible de poser à son propos les deux questions que j'ai soulevées pour les autres types de signifiants :

- quelle aide le langage naturel apporte-t-il à la pensée, c'est-à-dire à la conceptualisation et à la résolution de problème ?
- quelles opérations de pensée la compréhension et l'utilisation des énoncés demande-t-elle ?

Vastes questions que je ne suis nullement en mesure de traiter, mais pour lesquelles je voudrais seulement fournir quelques illustrations.
Les signifiants langagiers qui représentent une même relation mathématique sont parfois d'une grande diversité. Prenons l'exemple de l'expression de la valeur unitaire dans la proportion simple

$$f(1) = a$$

Voici quelques expressions :

- les gâteaux coûtent 4 francs chacun (ou chaque)
- les gâteaux coûtent 4 francs l'un (ou la pièce, ou pièce)
- un gâteau coûte 4 francs
- chaque gâteau coûte 4 francs
- papa a donné deux bonbons à chaque enfant
- papa a distribué deux bonbons par enfant
- maman roule à 120 kilomètres à l'heure (ou kilomètres / heure).

Arrêtons-nous un moment sur ces exemples. L'unité est exprimée de plusieurs manières : chacun, chaque, la pièce, l'heure. Parfois elle est partiellement éludées : pièce, heure. Le quotient de dimension est parfois exprimé : par enfant, à l'heure. Parfois il ne l'est pas. Dans le cas de l'expression kilométres/heure c'est même une expression de type produit (kilogramme / mètre, kilomètre / voyageur) qui est utilisée pour désigner un quotient.

Prenons encore un exemple : - un passager sur trois paie plein tarif.

Cet énoncé n'est pas compris comme l'expression d'une proportion par la plupart des élèves de sixième. Il faut prendre conscience des difficultés que peuvent rencontrer les élèves pour comprendre la signification d'une expression langagière pourtant familière aux adultes. Il ne faut jamais considérer que les choses vont de soi.

Je voudrais terminer cet exposé par quelques exemples concernant la formulation. Ces exemples sont empruntés à l'expérience que j'ai conduite dans une classe de 1ère année de BEP et dont j'ai déjà parlé plus haut. L'une des premières phases de l'expérience, après qu'un certain nombre d'informations aient été fournies aux élèves, a consisté à leur demander de formuler des questions qui pouvaient avoir un sens compte-tenu de ces données et du projet de construire sur un chantier des maisons de différents types F3, F4, F5, F6. Les informations portaient sur les proportions de gravier, de sable et de ciment nécessaires pour faire un mètre cube de béton, et sur les prix.

Le nombre de questions susceptibles d'être posées est très grand. Aussi l'objectif était-il pour nous de voir si les élèves étaient capables de générer ces questions de manière relativement systématique et de voir leurs liens de dépendance. En fait, nous avons aussi été très intéressés par les problèmes de formulations qu'ils ont alors rencontrés.

En ce qui concerne l'engendrement des questions, nous avons observé effectivement que certains élèves adoptaient très rapidement un esprit de système et généraient toutes les questions soit pour un type de maison, (ou un certain nombre de telles maisons) : quantité de matière, coût de chaque matière, prix de revient, etc... ou bien au contraire toutes les questions concernant la même variable, par exemple le prix du sable, pour chacune des différentes possibilités : un F4, un F5, six F6, un mètre cube de béton, telle longueur de semelle, etc... Ainsi les deux variables d'énoncé possibles dans une structure de proportion simple étaient-elles systématiquement soumises à variation : ces élèves ont donc su utiliser des classes paradigmatiques au sens que la linguistique distributionnelle donne à ce terme.

Pour ceux qui avaient abordé spontanément cette variation paradigmatique,

Quelle	quantité de sable	pour	un F4
	quantité de gravier	pour	un F5
	quantité de ciment	pour	un F6
	dépense de sable	pour	n F4
	dépense de gravier	pour	p F5
	dépense de ciment		
	dépense de béton		
			s mètres de semelle
			m mètres cubes de béton

il était relativement aisé de placer dans les colonnes du tableau que nous avons vu plus haut, des lettres correspondant à chacune des questions ainsi étiquetées ; pour les autres élèves, le tableau s'est avéré un moyen efficace de reconnaissance des éléments pouvant être soumis à variation. Le nombre de questions possibles étant très grand, certains élèves ont proposé de mettre des indices aux lettres pour indiquer de quelle question il s'agissait. On mesure ainsi l'usage intéressant d'un signifiant de type tableau pour la proportion simple, dans sa double fonction d'organisation des données et des questions d'une part, de recherche et d'explicitation des procédures de calcul d'autre part.
Dans cette phase de formulation des questions, on observe évidemment des difficultés dans les différents groupes d'élèves : par exemple des formulations redondantes comme dans les énoncés suivants :

- A combien sera évalué le coût de ...
- Combien coûtera le prix...

On assiste alors à un véritable travail collectif de reformulation des questions : dans un groupe de trois élèves par exemple, les questions proposées individuellement par chacun des élèves étaient reprises au compte du groupe tout entier. Elles subissaient alors des transformations de manière à être plus "présentables". Une formulation privée, pour devenir une formulation publique, subit un certain nombre de transformations de syntaxe, de style, de suppression de la redondance ou de réduction de l'ambiguïté.

Prenons quelques exemples :

A combien reviendra le tout en mètres cubes de béton ?

Cette fois, il y a deux idées de question en une seule : "reviendra" renvoie au prix, "mètres cubes" renvoie à la quantité de matière. Cette question évoluera vers deux formulations distinctes.

- quel sera le prix total pour le béton ?
- combien faudra-t-il de béton pour l'ensemble des maisons ?

Autre exemple, relatif à la formulation d'un quantificateur universel :

- pour les semelles **de toutes les maisons**
- pour **toutes les semelles**
- nécessaire à la construction **des semelles**
- nécessaire à la construction **de l'ensemble des semelles.**

Tous ces exemples illustrent un travail spécifique sur le signifiant langagier, qui est significatif du processus de conceptualisation fait en situation par les élèves.

Le terme de "semelle" pose lui-même la question de la formation d'un concept abstrait puisque, la section des semelles étant constante (60 x 40), on peut résumer l'information concernant une semelle par sa longueur. On exprime ainsi un volume par une longueur. Bien que les élèves aient appris cela, y compris pour le calcul de la longueur dans les coins de la maison, on mesure leur inhabileté à travers leurs formulations :

- la longueur totale... (hésitation)
- la longueur totale... (un autre ajoute) des semelles
- pour toutes... de longueur... de semelles
- la longueur totale des semelles pour l'ensemble de toutes les maisons.

Le dernier énoncé fournit le maximum de redondance et pour les semelles et pour la quantification.

Un dernier exemple montre au contraire la non-reconnaissance d'un invariant :
- calculer la masse volumique d'une semelle en béton pour un F4, pour un F5, etc...

Les élèves auteurs de cet énoncé sont très satisfaits d'utiliser le concept de masse volumique, mais ils en font indûment une variable.

La pensée ne fonctionne pas bien sans signifiants, ce qui ne veut pas dire qu'elle n'existe pas sans signifiants. Les signifiants produits par les élèves en situation peuvent être à la fois un reflet de la pensée et une aide à la pensée : désigner une propriété ou une relation pertinentes, exprimer une inférence, annoncer ce qu'on va faire, accompagner ce qu'on fait par le langage, annoncer ce qu'on devrait trouver. Vygotski avait déjà exprimé certaines de ces fonctions du langage il y a 50 ans, notamment la fonction du langage dans la planification et le contrôle de l'action.

Daniele Morange a recueilli des protocoles très intéressants sur la résolution des problèmes de type additif au début de l'école élémentaire et sur les différentes fonctions du langage que je viens d'évoquer.

CONCLUSION

J'ai cherché au cours de cet exposé à donner beaucoup d'exemples, parce que ce sont les exemples qui permettent de comprendre la nature des questions théoriques posées. Pour le sujet qui m'occupe aujourd'hui, ces questions théoriques sont difficiles : elles concernent le rôle des signifiants dans la conceptualisation du réel et la résolution de problèmes. Mais elles n'ont de sens que si on n'identifie pas la pensée avec son expression et si, en même temps, on reconnaît que l'expression par des signifiants joue un rôle dans la pensée.

Ce rôle peut être recherché soit dans l'explicitation et l'objectivation après coup de propriétés et de relations déjà utilisées dans l'action (et donc présentes dans les schèmes de résolution utilisés par les élèves). Il peut aussi être recherché dans le travail qui permet l'élaboration de nouvelles propriétés et de nouvelles relations qui seront ensuite, et seulement ensuite, utilisées dans l'action. La didactique est amenée à utiliser ces deux processus, soit en désignant et en analysant ce que sait faire l'élève (ses théorèmes-en-acte), soit en le conduisant à travers une représentation symbolique ou langagière pertinente à prendre conscience d'une relation qu'il n'avait jusque-là jamais aperçue.

La représentation symbolique, la formulation sont alors un détour utile, un instrument de traitement des situations. On les voit parfois fonctionner comme tels, lorsque les élèves pour résoudre un problème difficile, accompagnent spontanément le processus de résolution par des dessins ou des activités langagières.

Certains enseignants transforment alors ce détour spontané en exigence scolaire, et demandent aux élèves le diagramme correspondant ou l'explicitation correspond à la solution recherchée. On s'aperçoit alors que la représentation symbolique ne joue plus son rôle et qu'elle devient simplement une exigence de plus du contrat didactique, à laquelle les élèves satisfont après coup, après avoir déjà trouvé la solution.

La gestion de la fonctionnalité des représentations symboliques et langagières n'est pas chose aisée. Ce qui est utile et fonctionnel aujourd'hui peut être inutile demain et incompréhensible hier.. Cela concerne évidemment les exemples que j'ai donnés. Aussi bien ma conclusion sera-t-elle prudente. Oui les tableaux et les diagrammes sont utiles, oui les explicitations langagières sont utiles ! Mais on ne peut y recourir sans s'interroger sur les conditions dans lesquelles elles sont didactiquement pertinentes.

REFERENCES

BROUSSEAU G. Problèmes de didactique des décimaux. Recherches en Didactique des mathématiques. 1981, 21, 37-127.

DOUADY R. Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseigenment des mathématiques. Une réalisation dans le cursus primaire. Thèse de doctorat d'état, université Paris VII, 1984.

FUSON K.C. - HALL J.W. The Acquisition of Early Number Word Meanings : A Conceptual Analysis and Review. In Ginsburg M.P. (Ed), The Development of Mathematical Thinking. Academic Press, 1983.

GELMAN R. - GALLISTEL C.R. The child's understanding of number. Cambridge, Masszchusettes, Harvard University Press, 1978.

JANVIER C. The interpretation of complex cartesian graphs representing situations, studies and teaching experiments. Ph. D. Dissertation University of Nottingham, 1978.

MORANGE D. Thèse en préparation, 1987.

VERGNAUD G. L'enfant, la mathématique et la réalité, Berne, Peter Lang 1981.

VYGOTSKI. Langage et Pensée. Paris, Editions Sociales, Messidor, 1986.