SUR UNE APPROCHE D'APPRENTISSAGE DE LA DEMONSTRATION

A.L. MESQUITA et J.-C. RAUSCHER

Inspirés par une approche méthodologique de la démonstration proposée par Gaud et Guichard (1983 et 1984) et par une application de cette méthodologie en classe de 4ème et 3ème, nous soulevons quelques questions concernant les finalités et l'apprentissage de la démonstration.

La démonstration a eu, jusqu'à présent, une place importante dans l'enseignement de la géométrie en France, à partir de la classe de 4ème (élèves de 13-14 ans). Malgré cela, la démonstration a un statut ambigü, dans les cours de mathématiques. Elle n'a pas vraiment un statut scolaire: elle n'est pas un objet d'enseignement par elle-même, elle est accessible par imitation, aucun temps ne lui est spécifiquement alloué.

"Généralement on fait des démonstrations devant les élèves, on demande ensuite de faire pareil. On sait les difficultés rencontrées". (Compte-rendu du groupe Premier Cycle, Journées Nationales APMEP, 1979).

En fait, les finalités de la démonstration ne sont pas clairement établies. La démonstration peut être utilisée comme un instrument de validation de théorèmes; pourtant la nécessité d'un tel instrument n'est pas en général perçue par les élèves: il s'agit la plupart des fois d'une ratification de propositions antérieurement énoncées.

Indépendamment des problèmes de la place dans l'enseignement au collège, la démonstration soulève 2 grands types de questions : celles relevant de la **nature** et celles relevant de la **procédure**.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 1 (1988) (p.95-109) IREM de Strasbourg*

Nous incluons dans le premier groupe les questions en rapport avec la nécessité d'une démonstration, le statut des différents énoncés constituant une démonstration (axiomes, théorèmes déjà démontrés, définitions, hypothèses, conclusions), bref, avec le statut de la démonstration elle même. Dans le deuxième groupe, nous avons les questions procédurales liées à une méthodologie qui permette d'effectuer une démonstration dans un cadre préalablement fixé, et de la rédiger. Les enseignants de mathématiques en collège sont toujours confrontés aux difficultés de l'apprentissage de la démonstration. Dans les classes à partir de la 4ème, la plupart des élèves sont bloqués devant tout exercice classique de géométrie demandant de démontrer, ou de prouver, ou de justifier. Dans ce domaine les professeurs ont souvent l'impression, très désagréable, que les élèves qui savent démontrer le savent de façon naturelle et qu'on n'arrive pas à l'apprendre à ceux qui ne savent pas.

En fait, quelles sont les **difficultés** que l'on observe chez les **élèves** et quelles sont les difficultés de l'**enseignant** pour apporter une aide dans cet apprentissage ?

Les difficultés des élèves

En observant à travers sa production et ses réactions une population d'élèves confrontée à l'exercice classique que consiste à produire une démonstration on peut distinguer deux pôles autour desquels les élèves se regroupent:

> **pôle 1** : Il regroupe ceux qui ont compris de quoi il retourne. Ils savent distinguer ce qui est à demontrer des éléments qu'on peut faire intervenir pour raisonner (propriétés, hypothèses). Ils ont produit une ou plusieurs fois un raisonnement correct mais peuvent "sécher" devant un nouveau problème. Ce ne sont pas nécessairement les élèves les plus volubiles. Ils ne parlent ou n'écrivent que lorsqu'ils sont assurés d'une articulation correcte du raisonnement. L'exercice a un sens pour

eux. Bref, ces élèves ont saisi la nature d'une démonstration, même s'ils ont des difficultés d'ordre procédural pour trouver et rédiger une démonstration.

pôle 2 : Il regroupe les élèves qui produisent un discours mêlant les hypothèses, la conclusion, les constatations visuelles prouvant ainsi qu'ils n'ont pas encore fait leur la nécessité et les règles d'une démonstration en géométrie. Pour ces élèves, les difficultés sont liées soit à la nature de la démonstration, soit aux méthodes à employer.

Les difficultés de l'enseignant

Comment aider au mieux les élèves des deux pôles ? Le problème est que toutes les aides classiques (exposé-corrigé de la démonstration, guidage par un dialogue à visée maïeutique) semblent échouer : les élèves du pôle 2 n'intégrent pas la nécessité de la démonstration, c'est le maître qui en reste propriétaire exclusif contre son gré; pour les élèves du pôle 1 c'est aussi le maître qui les désaisit de la tâche qu'ils avaient à accomplir et mène la démonstration à leur place. Bien au contraire d'un progrès, de ces aides semble parfois résulter un mimétisme qui s'attache à un semblant qui n'a rien de logique même s'il en revêt le langage. En général, on cache aux élèves **la partie heuristique du travail**, n'en restituant que le produit final rédigé alors que l'essentiel des difficultés se situe déjà en amont de cette tâche.

D'où notre interêt pour l'étude de Gaud et Guichard. Confrontés à un vaste échec des élèves face à la démonstration, Gaud et Guichard ont essayé de mettre en oeuvre des stratégies d'apprentissage de la démonstration. Ces stratégies d'apprentissage se centrent sur des aspects procéduraux de la démonstration, en particulier en essayant d'éclaircir des aspects heuristiques. L'un d'entre nous -Jean-Claude Rauscher- a appliqué dans ses classes de 4ème et 3ème une méthodologie inspirée par celle de Gaud et Guichard, dans l'espoir de pouvoir apporter une aide efficace à ses élèves.

Deux hypothèses de travail de Gaud et Guichard ont attiré notre attention. Une de ces hypothèses est la reconnaissance de difficultés de plusieurs ordres dans une démonstration: la recherche et la rédaction d'une démonstration ont leurs difficultés spécifiques. D'où la séparation, proposée dans leur méthodologie, de ces 2 moments. "La difficulté d'une démonstration est double: logique et rédactionnelle. Il est donc bon de séparer les deux moments au niveau de l'apprentissage" (p.7).
En fait, dans la plupart des classes, la rédaction d'une démonstration se fait en même temps que sa recherche, en accumulant des obstacles heuristiques, de recherche d'une démonstration et d'articulation des raisonnements, à des critères strictes de mise en forme et d'organisation d'une rédaction.

L'autre hypothèse est l'importance donnée aux méthodes de démonstration et à l'explicitation de ces mêmes méthodes en classe. "L'important, en géométrie de 4ème, c'est la méthode. Donc le choix des exercices doit être guidé par les méthodes mises en jeu (comment démontrer que...)." (p.7).

Pour Gaud et Guichard, la démonstration devient donc un objet d'enseignement par elle-même, avec l'explicitation de méthodes normalement utilisées et avec la pratique d'exercices d'application de ces méthodes, développant le savoir-faire des élèves. Cette importance se traduit par la mise en évidence de méthodes souvent utilisés en géométrie, et la création, par les élèves, de fichiers "méthodologiques".

Leur méthodologie vise l'appropriation par les élèves de certaines formes de raisonnement déductif, comme le raisonnement par conditions suffisantes: à partir des conclusions, le but est de trouver des énoncés qui l'impliquerait et ainsi successivement, jusqu'à rencontrer les hypothèses de départ.(1)

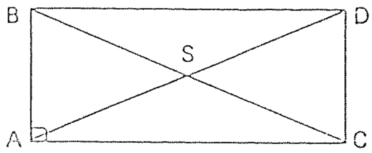
(1) Notons que Gaud et Guichard se sont centrés en certaines formes de raisonnement déductif, récurrent, en excluant volontairement le raisonnemnt par l'absurde ou par contraposition, pas exemple.

Sur une approche d'apprentissage de la démonstration

Nous mentionnons ici un exemple cité par Gaud et Guichard:

ABC est un triangle rectangle en A. S est le milieu de [BC] et D le symétrique de A par rapport à S.

Démontrons que ABCD est un rectangle.



Une première étape de recherche de la démonstration, après l'identification des données (hypothèses/ conclusions) consiste à "faire faire [aux élèves] cette recherche en leur faisant reconstituer eux-mêmes l'organigramme de la démonstration au moyen de pièces de puzzles qu'ils fabriquent eux-mêmes". (p. 10).

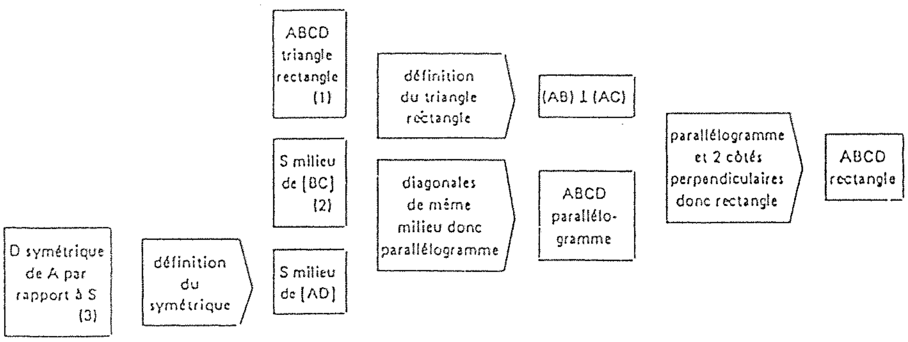
En utilisant la disposition suivante:

Données :	Conclusion :
ABC triangle rectangle en A (1)	
S milieu de [BC] (2)	ABCD rectangle
D symétrique de A par rapport à S (3)	

(p.11)

"Partant de la conclusion, il [l'élève] cherche les étiquettes [...] permettant d'avoir cette conclusion: il en choisit une, en guidant son choix: il compare les hypothèses mises en jeu dans l'énoncé et celles de son exercice mises en évidence sur sa figure et écrites sur ses étiquettes. Il essaie et remonte ainsi petit à petit la chaîne". (p. 11).

Pour pouvoir démontrer que ABCD est un rectangle, les élèves utilisent le fichier méthodologique, et choisissent, face aux données dont ils disposent, quel est la manière la plus appropriée. Et ainsi successivement. A la fin les élèves devront aboutir à un diagramme du type suivant :



(p.12)

"Par la réalisation concrète et pas à pas de son organigramme, l'élève voit où il en est de sa refléxion, peut controler ce qu'il a fait, oublier pour un temps ce qu'il a fait pour se consacrer au nouveau problème à résoudre" (p. 11); dans ce cas, par exemple, le nouveau problème serait vérifier que ABCD est un parallèlogramme.

Après la recherche de la démonstration, sa rédaction sera faite, à partir d'une transcription de l'organigramme.

Une application de la méthodologie de Gaud et Guichard

Les éléments essentiels que nous avons retenus de cette méthodologie pour travailler avec nos élèves sont les suivants:

* constitution d'une liste d'énoncés et de méthodes disponibles en géométrie.(1)
* analyse des énoncés d'exercices en dressant la liste d'hypothèses et la conclusion.
* recherche récurrente de l'articulation logique à partir de la conclusion.

Au cours de ce travail quelles ont été les réactions des élèves et quels ont été les progrès constatés ?

Les élèves qui avaient déjà compris de quoi il retournait dans une démonstration de géométrie, c'est-à-dire, les élèves du premier pôle *n'ont pas eu de difficulté particulière à entrer dans le jeu.* A noter quand même quelques réactions d'étonnement devant cette proposition de recherche récurrente jugée inutile. Mais la plupart se sont appropriés de cet outil pour la recherche de la solution et pour la rédaction lesquelles s'en sont apparement trouvées facilitées. Ainsi les confusions entre un énoncé et sa réciproque ont-elles diminuées.

Par contre pour *les élèves qui n'avaient pas compris* la nature d'une démonstration -ceux du deuxième pôle- *cette méthode a apporté peu de progrès car elle même évidemment n'a pas été comprise.* Dans un sens direct, ou dans un sens récurrent la démonstration reste un

(1) Précédamment, les élèves avaient été mis en contact avec des exercices amenant à conjecturer et argumenter (problèmes de dénombrement par exemple).

objet mystérieux. A noter néanmoins l'un ou l'autre élève qui s'est exclamé: "mais c'est absurde, on peut faire cela à l'endroit". Peut-on interpréter cette exclamation comme une compréhension et une intégration globale de la notion de démonstration par l'effet de la procédure mise en place?

Une première conclusion a été que cette méthodologie permet surtout des progrès aux élèves qui connaissent déjà les règles en jeu dans une démonstration. Très rares sont ceux qui acquierent cette conscience à travers elle, bien que ce ne soit pas à exclure dans quelques cas.

La méthode apporte donc une aide à une partie seulement du travail heuristique qui est à accomplir par les élèves.

Il nous semble que la méthodologie proposée aide - une fois identifiées les hypothèses et les conclusions, et le "stock" de théorèmes dont l'utilisation est permise- à établir une articulation logique entre les hypothèses et la conclusion, et, dans une 2ème phase, à effectuer la rédaction de la démonstration.

Il reste d'autres questions importantes où se posent de grandes obstacles didactiques liées à la nature de la démonstration, comme l'identification des hypothèses et des conclusions, le stock de théorèmes à utiliser. Dans ces questions la méthodologie de Gaud et Guichard nous semble insuffisante. Nous avons donc été incités à chercher des techniques de maîtrise de l'apprentissage de la démonstration qui faciliteraient la appropriation de l'enjeu. Ces questions sont, à notre avis, des préalables à l'apprentissage de la démonstration, et à l'utilisation de la méthodologie de Gaud et Guichard.

Quelques refléxions sur la démonstration...

Nous soulevons maintenant quelques unes de ces questions, résultantes de refléxions sur le travail de Gaud et Guichard, et de l'application en classe de leur méthodologie.

1) Finalités de la démonstration;

2) Rôle de la figure;
3) Explicitation des hypothèses.

1) Finalités de la démonstration

Dans le travail de Gaud et Guichard nous rencontrons une phase de sensibilisation à la démonstration. Cette phase se base sur les illusions d'optique amenant à un certain discrédit de la perception. Autrement dit, le message sous-jacent est celui de l'incertitude résultant de la vue et donc de la nécessité d'une approche d'autre type pour pouvoir faire des affirmations. "Il faut alors donner les "raisons" et pour cela utiliser les propriétés connues dont on dressera la liste au fur et à mesure. Dans ce cas on vise la démonstration comme outil de preuve." (p.9)

Il nous semble que l'apparition de la démonstration comme issue dans ce type de situations ne constitue pas une activité suffisament motivante pour un éveil à la démonstration.

En fait, dans la plupart des propositions à démontrer proposées par Gaud et Guichard la démonstration viendra, au plus, ratifier des affirmations, voire des connaisssances acquises par d'autres procédures. La démonstration apparaît alors comme un discours superflu: elle n'aura pas le statut de "outil de preuve" attendu par Gaud et Guichard.

Des situations que nous avons utilisées ailleurs (Mesquita, à paraître) nous semble plus appropriées à saisir la nature d'une démonstration. Nous avons travaillé avec des situations où les démarches de découverte et de démonstration peuvent être simultanées, c'est-à-dire, où les démarches pour découvrir une conjecture sont suffisantes pour la démontrer. Autrement dit, plusieurs conjectures étaient possibles et seules des démarches de démonstration pouvaient faire le tri parmi ces conjectures. Dans ce type de situations, où il s'agissait de comparer des aires de 2 rectangles, la démonstration a simultanément une fonction de choix et de preuve. Sa finalité y apparaît plus nettement; son utilité est perçue. La démonstration, au lieu d'être une forme de discours scolaire, vide de sens, est alors remplacée par une autre conception, celle d'instrument d'acquisition de connaissances.

Une autre spécificité de la situation que nous avons traitée est la possibilité de recours à des démarches de calcul basées sur la mesure. Mais ces démarches ne sont pas suffisantes non plus pour aboutir à une preuve de la conjecture, et la situation en question permet la confrontation entre ces deux démarches. La démarche de démonstration s'impose alors par son efficacité.

Un autre point de vue abordé par Gaud et Guichard est la question du statut des énoncés.Ils essayent de transmettre en classe le statut que les énoncés (théorèmes, définitions, axiomes) ont pour les mathématiciens. En fait, le statut des énoncés -uniques instruments admis dans la démonstration - est ici placé dans une perspective de droit : il s'agit de donner un pouvoir spécial à certains énoncés, qui sont les seuls instruments qu'on puisse utiliser. Le pourquoi de cette discrimination n'apparaît pas évidente aux yeux des élèves.

2) Le rôle de la figure

Dans une de leurs étapes, Gaud et Guichard mentionnent le dessin de la figure comme une des phases de leur méthodologie. Néanmoins, aucun emphase en est donné, et la réalisation du dessin semble apparaître comme une étape mineure, dans l'approche proposée.

Le rôle de la figure n'est pourtant pas neutre. A une situation peut être en effet associée plus qu'une figure. En d'autres cas, les figures doivent subir des modifications méréologiques (Duval, 1988), c'est-à-dire, des transformations résultantes de l'adjonction de traits sur la figure, préalables à une résolution.

La figure peut être congruente sémantiquement avec le texte du problème (Duval,1988), c'est-à-dire, la figure et le texte peuvent en évidence les mêmes objets, ou non. Le type de raisonnement developpé dans un cas ou dans un autre ne sont pas les mêmes.

D'autre part, la perception de la figure peut avoir une influence dans le type de raisonnement développé. Nous montrons que le rôle joué par la figure peut être une variable importante: ce rôle peut être heuristique, dans le sens qu'il peut conditionner le type de raisonnements développés (Mesquita, à paraître). Le rôle de l'appréhension opératoire de la figure peut conditionner le type de raisonnements développés. Certaines appréhensions peuvent en effet amener à des résolutions plus ou moins immédiates, tandis qu'autres peuvent entraîner des formes de raisonnement plus indirectes.

3) Explicitation des hypothèses

Un des points qui nous semble sous-estimé dans le travail de Gaud et Guichard est celui des potentialités du tracé de la figure, et en particulier en ce qui concerne l'explicitation des hypothèses.

Les observations que nous avons menés (Pluvinage et Rauscher, 1986) suggèrent que "la perception et la capacité de prise en compte des caractéristiques d'un énoncé ou d'une figure sont probablement plus importantes que la connaissance des concepts géométriques et des structures" (p. 9). Ces observations suggèrent encore que la "simple perception de caractéristiques du tracé demande parfois une analyse qui ne s'en tient pas aux apparences"; cela requiert des compétences qui peuvent être développées. Ces compétences se situent à 2 niveaux:

- "au premier niveau, il y a possibilité de procéder à l'**identification**, la **répresentation** ou la **désignation** des objets géométriques en jeu ;

- au second niveau, il y a possibilité de procéder à une exploration des contraintes de la situation (par exemple en traçant plusieurs figures pour les comparer). Ce n'est bien sûr qu'au second niveau que la notion d'hypothèse peut émerger pour les élèves." (pp. 9-10).

Autrement dit, l'activité de tracé de la figure dépasse largement le cadre d'un tracé mécanique, en permettant par l'articulation du tracé de la figure et de la prise en compte des caractéristiques de l'énoncé, l'explicitation de ces mêmes hypothèses.

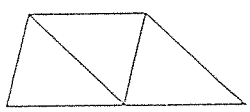
Le tracé de la figure ne doit pas être consideré d'une façon isolée, mais en interaction systématique avec l'énoncé.

Quelles sont précisement les difficultés inérantes aux exercices classiques de géométrie proposant un énoncé décrivant une figure ou une construction suivi d'une proposition plus ou moins suggérée à démontrer ?[1] L'élève a à sa charge la production d'une figure. Ce n'est qu'ensuite que vient la démonstration. Or en réalisant sa figure un élève ne prend pas forcément une conscience claire des hypothèses contenues dans l'énoncé. Au fur et à mesure que la figure se réalise, les contraintes de la figure peuvent être oubliées. A leur place peut surgir par la suite l'évocation des constatations visuelles qui ne font pas partie des hypothèses. Ensuite tout naturellement dans ce cas, l'élève a du mal à réaliser que la proposition dont la justification est demandée résulte bien des hypothèses. Ainsi la réalisation d'une figure n'est pas de nature à conduire les élèves à prendre conscience du jeu des contraintes de l'énoncé, s'ils ne l'imaginent pas d'eux-même. L'exercice suivant est un exemple de ce qui peut être envisagé dans ce domaine.
Il s'agit, pour les élèves, de placer les lettres sur une figure donnée pour satisfaire un énoncé donné:

Enoncé :

Partant d'un parallélogramme ABCD, on mène par C la parallèle à la diagonale DB. Cette parallèle coupe en E la droite AB.

Figure :



(1) Dans l'équipe de l'IREM de Strasbourg du "Suivi scientifique des nouveaux programmes", nous avons continué à baliser la piste ouverte par les travaux de l'IREM de Poitiers

Nous l'avons pratiqué en 5ème et 4ème (IREM de Strasbourg, 1987, p. 135). Les élèves ont droit à plusieurs essais. Tenant alternativement compte de l'une ou de l'autre contrainte de l'énoncé, les élèves échouent et prennent conscience qu'il faut réussir à les rendre compatibles. Cette activité préalable facilite, d'après nos observations, les raisonnements ultérieurs où il s'agit d'articuler correctement hypothèses et propriétés, ces dernières étant à choisir dans un lot proposé, comme dans la méthodologie de Gaud et Guichard.

CONCLUSION

L'étude de Gaud et Guichard nous a permis de clarifier pour nous-même certains aspects de la démonstration, et de son apprentissage.

Il nous semble que le travail de Gaud et Guichard est essentiellement **discursif,** dans le sens qu'il s'agit d'agencer, enchaîner convenablement une suite d'énoncés de façon à qu'on prouve, c'est-à-dire, qu'on passe des conclusions aux hypothèses. Le travail sur la démonstration se situe alors au niveau du discours, et de sa soumission à des règles de déduction bien précises. Mais le problème de la démonstration est en grande partie le problème de la construction des structures logiques. Piaget (1978) nous montre que la pensée verbale constitue le dernier palier de la construction de ces structures. La méthodologie de Gaud et Guichard concerne ce dernier palier, et il nous semble que tout un travail basé sur l'action doit se situer en amont d'un travail discursif.

Le travail de Gaud et Guichard, s'il permet une aide d'un point de vue procédural, de liaison des hypothèses aux conclusions, à partir de la conclusion, en utilisant un corpus d'énoncés admis, ne permet pas une entrée dans les questions, plus délicates, qui relevent de la nature d'une démonstration. En fait, leur méthodologie est destiné à quelqu'un qui a déjà compris qu'est-ce que c'est une hypothèse, et une conclusion. Il nous semble qu'un travail préalable pour lequel nous avons évoqué quelques pistes, est nécessaire.

En outre, l'option prise par Gaud et Guichard de centrer leur méthodologie sur un raisonnement du type récurrent, suscite certains doutes. Certes, selon Glaeser (1971), les "élèves abordent moins spontanément la recherche des raisons suffisantes et y réussissent moins bien" (p.108). Cela n'empêche pourtant pas qu"un effort pédagogique particulier s'impose pour développer l'aptitude à raisonner par conditions suffisantes" (p.108). En fait, on peut penser que si on va de A à B, c'est important savoir où est B, et alors établir une stratégie pour atteindre B. Mais c'est aussi indispensable de prendre en compte la position de A. En fait, cette stratégie entraîne un autre problème, qui est celui de la **réduction,** c'est-à-dire, du découpage du problème en sous-problèmes, en principe plus faciles. Et cela pose aux débutants des problèmes eventuellement plus délicats encore que le problème initial.

REFERENCES

APMEP, 1979, Compte-rendu du groupe Premier Cycle, Journées Nationales APMEP.

R. DUVAL , 1988, Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence, *Annales de Didactique et Sciences Cognitives , (p.57-74).*

D. GAUD et J.-P. GUICHARD, 1983, Pour apprendre à démontrer. Publication IREM de Poitiers.

D. GAUD et J.-P. GUICHARD, 1984, Apprentissage de la démonstration, *Petit x, 4,* 5-25.

G. GLAESER, 1971, *Mathématiques pour l'élève professeur,* Hermann, Paris.

IREM de STRASBOURG, 1987, Le développement de compétences pour la géométrie, Suivi scientifique des nouveaux programmes 1986/1987, *Bulletin Inter-IREM, 125-138.*

A.L. MESQUITA, (à paraître), Sur une situation d'éveil à la déduction en géométrie.

J. PIAGET, 1978, *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant* (8ème ed.), Delachaux et Niestlé, Paris .

F. PLUVINAGE et J.-C. RAUSCHER, 1986, La géométrie construite mise à l'essai, *Petit x, 11,* 5-36.