ASPECTS MULTIDIMENSIONNELS

DU RAISONNEMENT EN GEOMETRIE

F. PLUVINAGE

Geometrical practice involves as many abilities in performing various tasks as properly mathematics knowledges. The growth of these abilities depends on appropriate activities. We intent to determine a hierarchy of geometrical situations parallel to or independent of the teaching of mathematics concepts. We examine as an example an evaluation directed to 180 fourteen-years students about the suggested taxinomy.

This study was partially supported by a government grant under the title "Suivi Scientifique des Collèges" The author worked in an IREM group including MMme. C. HINDELANG, M. KEYLING, D. MAURETTE, M. ORTLIEB and MM. C.MATHERN, J.C. RAUSCHER.

1. L'INSERTION DU RAISONNEMENT DANS LA SCOLARITE.

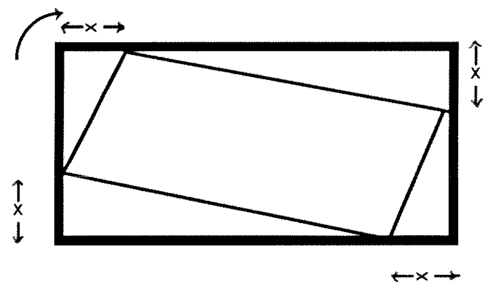
1.1 Le point de vue traditionnel

Certes, le raisonnement ne se réduit pas au raisonnement formel et il convient de mettre les élèves dès leur plus jeune âge dans des situations qui les conduisent à diverses formes de raisonnement, comme l'utilisation de la négation ou le passage au complémentaire, ou encore des comparaisons indirectes de grandeurs, ou ... Mais pour ce qui est du raisonnement dit formel, c'est-à-dire constitué d'une démarche allant d'hypothèses à des conclusions, chaque étape étant une déduction conforme aux règles de déduction, le point de vue traditionnel est celui d'une introduction subite, vers l'âge de 13 ans, et son acquisition est prévue comme fondée sur l'imitation de raisonnements-modèles présentés par les professeurs aux élèves.

Pour que l'imitation puisse être obtenue, il faut, toujours selon le point de vue traditionnel, que la démarche à imiter ne soit pas trop longue. Ainsi faut-il que les premières situations présentées pour le raisonnement soient simples. Par exemple, démontrer qu'un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle est acceptable, alors que démontrer qu'un triangle isocèle qui a un angle de 60° est équilatéral est peut-être déjà un peu trop compliqué, puisqu'il faut distinguer deux cas pour le raisonnement.

© *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*
2 (1989) (p.5-24) IREM de Strasbourg

Cependant, l'observation des élèves fait alors apparaître une difficulté didactique : beaucoup d'élèves ne voient dans la démarche de raisonnement formel, en particulier dans la démonstration, qu'une pratique imposée plus ou moins gratuitement par les professeurs, mais sans utilité réelle. Par exemple, nous avions présenté la figure ci-contre, obtenue à partir d'un rectangle de dimensions données avec pour x une valeur donnée.



Nous n'avions pas explicitement demandé que soit faite la démonstration de la nature *(un parallélogramme)* du quadrilatère obtenu dans le rectangle. *Aucun* des élèves en fin de collège *(âge : ~ 15 ans)* interrogés sur cet exercice n'a éprouvé le besoin de faire une démonstration, ce qui n'a entraîné aucune gêne à parler “du parallélogramme”.

On module alors usuellement le critère de simplicité des raisonnements à imiter par l'adjonction d'un critère de “non évidence”. Autrement dit, “on ne doit pas démontrer des évidences”. Reste alors à trouver des situations pour lesquelles un raisonnement simple conduit à des résultats non évidents, en admettant que l'on dispose effectivement d'une possibilité de savoir ce qui est et ce qui n'est pas évident. C'est difficile, didactiquement.

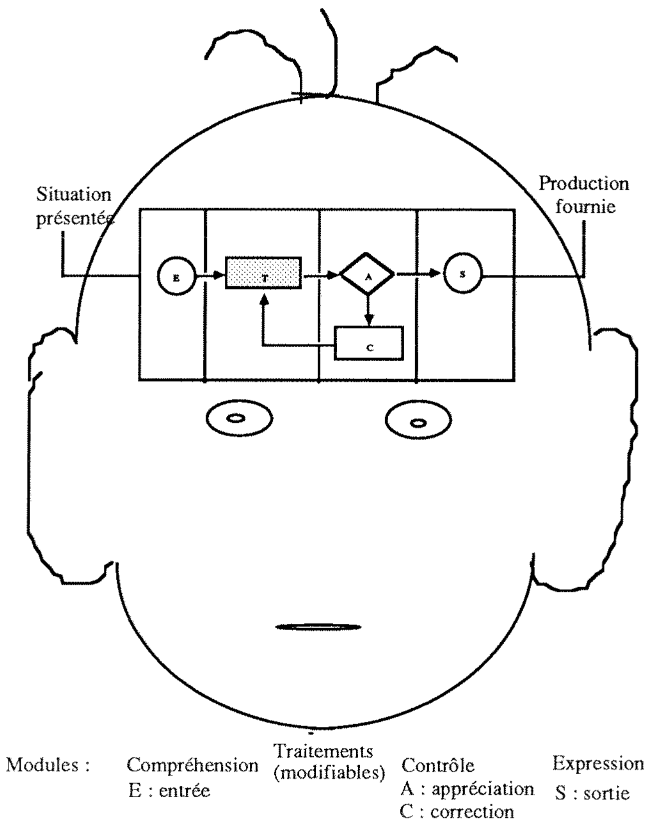
1.2 Quelques éléments récents

Dans sa thèse, Nicolas Balacheff examine les démarches de *preuve*. Pour lui, l'aspect social de la question est important : qui s'agit-il de convaincre, et pour quoi ? Il va donc dans ses expériences organiser des situations dans lesquelles le besoin de prouver devrait être présent. Par ailleurs, il estime que le niveau d'incertitude dans lequel un individu peut être par rapport à un résultat joue un rôle : si un résultat apparaît trop peu sûr, on ne tentera pas de l'établir, s'il apparaît au contraire trop sûr, on le tiendra pour acquis sans besoin de le prouver. Il y a donc un décalage, du caractère d'évidence vers celui de niveau du doute éprouvé par rapport à un résultat.

Dans le préambule des actuels programmes scolaires français de mathématiques pour le collège, parus en 1985, le mot démonstration a tout simplement disparu. Etant l'auteur de la rédaction initiale proposée pour ce préambule et à peine retouchée par la suite, nous pouvons facilement justifier cette disparition. Pour l'anecdote tout d'abord, nous pouvons signaler la bibliographie de Ramanujan, écrite par Hardy *(coauteur avec Littlewood de travaux célèbres)* ; il est signalé que ce grand mathématicien indien n'a véritablement appris l'existence de la démonstration qu'en allant en Angleterre à l'âge de 26 ans, bien après avoir accompli des travaux mathématiques importants. Mais il est vrai que sa direction de recherche l'amenait à établir des formules sommatoires... Remarquons aussi que l'on ne dit jamais de quelqu'un qu'il démontre bien ou mal, alors qu'il est courant de dire de quelqu'un qu'il raisonne bien ou mal. Dans ces conditions, est-il raisonnable de vouloir tenter de faire *apprendre* la démonstration ? De notre point de vue, non, et d'ailleurs les résultats qu'a exposés N. Balacheff sont dans l'ensemble plutôt négatifs : la démonstration pourrait y sembler réservée, dans son accomplissement, à une petite minorité d'élèves.

Notre point de vue est donc radicalement différent : c'est le *raisonnement* qui mérite d'être poursuivi comme l'un des objectifs de la géométrie, en lui appliquant les mêmes techniques d'approches didactiques que pour d'autres thèmes. Précisons donc les techniques d'approche didactique. D'une part elles se composent des aspects touchant à la gestion de l'enseignement, avec différentes phases *(différentes dialectiques selon Guy Brousseau)* . D'autre part, elles mettent en jeu les possibilités d'apprentissage individuel.

Aspects multidimensionnels du raisonnement en géométrie



Nous avons représenté le schéma que nous proposons comme minimal pour tout apprentissage de type mathématique par un individu : après sa compréhension de l'énoncé ou de la tâche assignée, l'individu procède à des traitements pour lui, qu'il va accepter ou refuser au vu de ce qui en résulte, et reprendre en les corrigeant s'il les refuse ; une fois satisfaction suffisante obtenue, il exprimera sous forme communicable à autrui ce qu'il a trouvé.

Enfin, pour ce qui est des *analyses* des phénomènes déclenchés par des séquences d'enseignement, la didactique propose systématiquement une triple confrontation :

- des *contenus* mathématiques,
- des *tâches* effectives proposées,
- des *productions* des élèves.

Dire confrontations, c'est dire que l'examen de chacun des trois volets du triptyque ci-dessus doit être effectué indépendamment des deux autres. Si, par exemple, les productions des élèves ne sont pas envisagées comme tout corpus de données que l'on cherche à analyser, mais sont examinées seulement sur la base de leur adéquation *(en juste ou faux)* aux critères mathématiques régissant les contenus en jeu, toute idée de confrontation aux contenus mathématiques est d'emblée interdite.

Pour que l'analyse des productions soit suffisamment riche, la productivité des élèves doit être satisfaisante. C'est pourquoi, nous exigeons des activités que nous leur proposons qu'elles satisfassent aux quatre critères suivants *(pour lesquels nous signalons la contribution de notre collègue J.C. Sidler, auteur d'un traité de géométrie projective en préparation aux éditions Masson, Paris) :*

1. *Démarrage*	Les consignes doivent permettre que la quasi totalité des élèves se lancent sans problème dans l'activité.
2. *Poursuite*	Le développement de l'activité doit s'avérer intéressant, soit par la curiosité soulevée, soit par l'aspect esthétique des productions qui s'ébauchent, soit pour d'autres raisons ...
3. *Naissance de conjectures*	Des questions réelles doivent surgir du déroulement de l'activité.
4. *Résolution des conjectures*	Les principales conjectures apparues doivent pouvoir être résolues, moyennant apport éventuel d'information, par recours aux outils mathématiques qui constituent l'objectif de l'apprentissage.

Pratiquement, c'est de la confrontation entre l'analyse des contenus mathématiques et celle des tâches que nous pouvons savoir a priori, pour une activité proposée, si elle satisfait ou non aux quatre critères ci-dessus. Si un seul n'est pas vérifié, l'activité envisagée est d'emblée rejetée : elle ne permettrait pas le déroulement complet d'un processus d'enseignement en elle-même.

1.3 Progression

Nous souhaitons entreprendre une démarche d'enseignement du raisonnement en géométrie élémentaire qui constitue une progression pour la totalité des quatre années sur lesquelles s'étend la scolarité du collège.
Pour déterminer cette progression, nous nous appuyons sur l'analyse des tâches proposées, et non pas seulement sur les contenus mathématiques. En effet, il nous est apparu que l'on

distingue des élèves du début et de la fin du collège, sur la base de leurs productions, moins parce que les uns ignorent des concepts connus des autres que parce que les uns n'ont pas recours à des pratiques courantes pour les autres. Par exemple, on ne pourrait pas dire qu'un élève du début du collège ignore la notion de symétrie *(axiale ou centrale)* alors qu'un élève de fin de collège la connaît ; au contraire, nos observations antérieures nous permettaient de bien discriminer ces deux élèves d'après l'utilisation de lettres pour désigner des points : le premier les utilisait quand elles étaient présentes sur une figure à étudier, mais ne les introduisait pas spontanément, alors que le second recourait systématiquement à cette pratique pour toute figure un peu riche *(e. g. un cercle et deux droites).*
Dans le principe de progression, l'utilisation d'un même thème à des niveaux de traitement différents est donc envisagée. C'est l'analyse des tâches qui introduit assez précisément dans les considérations sur les traitements. En géométrie, on procède à des *tracés* et on rédige[(1)] des *textes*. Ces textes peuvent se cantonner à l'emploi de la langue naturelle ou avoir recours au symbolisme mathématique. De plus, il est possible de distinguer plusieurs niveaux de production de tracés ou de textes, selon leurs destinataires : depuis les productions que l'on fait uniquement pour soi-même jusqu'à celles qui sont destinées à un large public, en passant par celles que le professeur a demandées ; on passe ainsi du brouillon aux productions de qualité professionnelle.

Si l'on considère les *entrées* et les *sorties* qui, avec sa gestion, déterminent une situation, on pourra immédiatement distinguer quatre couples d'entrée-sortie à partir des deux éléments texte et tracé. De plus, des enchaînements sont possibles, comme celui du couple tracé-texte suivi du couple texte-tracé dans une situation de transmission de figures *(jeu de messages).*

Voici alors quelques *jalons* de la progression envisagée :

- identification, représentation, désignation d'objets géométriques,
- exploration des contraintes d'une situation géométrique,
- reconnaissance du jeu mutuel de contraintes *(indépendance, incompatibilité, inclusion),*
- distinction entre le contenu et le statut d'une assertion dans un texte,
- démarches “officielles” de raisonnement, en particulier la démonstration.

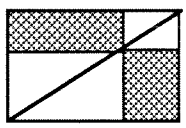
Note :

Bien entendu, les descripteurs de ces jalons sont à usage des professeurs, non des élèves.

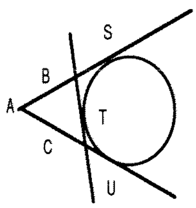
*(1) La production orale joue un rôle important dans la communauté mathématique et la vie de la classe,mais elle ne constitue pas une **référence** usuelle*

Aspects multidimensionnels du raisonnement en géométrie

Jalons d'une progression	Exemples d'activités associées	Activités parallèles
Identification, représentation et désignation d'objets géométriques	Constructions par points ou enveloppes, transformation "carré"	Démonstration "sans hypothèses"
Identification des contraintes d'une situation géométrique	Figures téléphonées, programmes de construction	
Appréhension du jeu mutuel des contraintes : indépendance vs. exclusion ou inclusion	Figures muettes, figures douteuses	
Distinction entre contenu et statut d'une phrase dans un texte	Rédaction d'énoncés (pour des situations données)	Heuristique Générale : Sous-figures, Enrichissement
Présentation de démonstration : hypothèses, substitutions, conclusions	Réseaux (cf. Duval-Egret)	Transformations



Euclide



"Au revoir les enfants"

2. SUIVI SCIENTIFIQUE

2.1 Description du dispositif

Le dispositif expérimental a pu être enclenché comme une composante d'une expérience de *pédagogie différenciée* proposée pour plusieurs disciplines par notre collègue Louis Legrand. Notre objectif d'un enseignement reposant sur l'idée d'évolution de compétences variées chez les élèves était parfaitement en accord avec les hypothèses retenues par notre collègue, qui nous avait donc donné carte blanche pour l'organisation de l'expérience en mathématiques.

Une première année préparatoire a été organisée pour trois classes de sixième*(première année du collège, élèves d'environ 11 ans)* dans un collège. Elle a été suivie d'une deuxième année reprise au même niveau et dans le même collège, concluant cette expérience de pédagogie différenciée.

Par la suite, il nous a paru intéressant de poursuivre l'expérience, mais en l'élargissant quelque peu : d'une part nous nous sommes insérés dans le dispositif intitulé “suivi scientifique”, institué à la demande de la Commission Permanente de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques *(COPREM, actuellement : GREM)* pour examiner les incidences de la mise en place de nouveaux programmes du collège, d'autre part, nous avons procédé à la mise en œuvre dans trois établissements scolaires différemment situés *(centre ville, banlieue résidentielle, banlieue populaire)*. Les deux collèges ajoutés au premier permettent de disposer d'une population d'élèves statistiquement représentative.

Le fonctionnement est arrêté au cours de séances de travail regroupant les professeurs concernés. Ces séances sont consacrées à la mise au point des activités, à l'exposé des impressions et des observations recueillies, à l'étude *(de l'élaboration à l'analyse des résultats)* des évaluations mises en œuvre.

En 1987-88, le suivi scientifique a concerné la classe de quatrième *(troisième année du collège, élèves d'environ 13 ans en début d'année)*. Nos observations ne peuvent être complètes actuellement que pour les deux premières années du collège et partielles pour la troisième année. En particulier, nous ne disposons pas encore pour cette troisième année des références de compétences atteintes, par rapport à celle de la population ambiante. Nous attachons quelque importance à ces comparaisons, car nous nous situons avec le raisonnement en géométrie, dans un domaine où les résultats traditionnels sont à améliorer.

2.2 Articulation entre les activités proposées et les compétences des élèves

Récapitulatif préparé par J.C. Rauscher (début 1988).

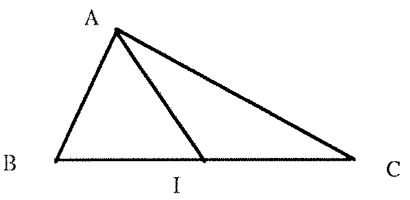
	ACTIVITES PRINCIPALES	COMPETENCES OBSERVEES
6ème	1 Tracé -Tracé : construction points par points 2 Tracé - Texte - tracé : transmission de messages 3 Texte - Tracé : réalisation d'un programme	a) Très bonne technique de tracé (soin et autonomie) → Bonne homogénéité de la population. b) Production d'un texte avec le langage * naturel → Assez bonne homogénéité * symbolique → Hétérogénéité des productions. c) Compréhension d'un texte de programme ou d'une figure codée. → Assez bonne homogénéité.
5ème	Reprise des activités de 6ème + initiation à l'argumentation (Textes argumentés)	Perfectionnement de b) et c) + d) Production de texte argumenté → production très hétérogène encore.
4ème	Reprise des activités précédentes avec systématisation de l'initiation à la production de textes argumentés : - Textes à trous - Textes dans le désordre - Figures à coder - Choisir des propositions pour construire un raisonnement.	

Quelques commentaires méritent d'être faits. Les activités retenues doivent évidemment satisfaire aux critères précédemment énoncés *(cf. fin de 1.2.)*.
Le mot "conjecture" est évidemment à situer au niveau des élèves. Considérons par exemple la transmission de figures par des messages. Pour les élèves concernés, le recours à des éléments auxiliaires non explicitement représentés correspond à une démarche dans laquelle une conjecture *(à leur niveau)* peut être vue : une description est simplifiée par la référence à

des figures-types qui permettent des expressions synthétiques non ambigües, même si une partie seulement de telles figures se trouve représentée. Il s'agit donc ici d'une conjecture quant à l'économie relative de plusieurs possibilités de description. D'autre part, les activités ne constituent nullement des exercices d'entraînement aux évaluations. Celles-ci sont d'ailleurs programmées non en fin d'activité, sauf à titre d'évaluation formative, mais après le déroulement d'autres séquences d'enseignement *("décontextualisation" avec éléments généraux de cours, exercices indépendants de l'activité antérieure)*, postérieures à la pratique de l'activité correspondante.

Le nombre des exercices "non classiques" s'est en définitive avéré important. Il ne s'agissait nullement d'une volonté délibérée d'innovation, mais il y a là une conséquence normale de la prise en compte d'une certaine hiérarchie de tâches. Par exemple, il est apparu que le tracé d'une figure à la lecture d'un énoncé ne conduit pas à la mise en jeu d'effets mutuels de contraintes les unes sur les autres. Un exercice satisfaisant de ce point de vue est celui qui demande de placer des lettres sur une figure, conformément à un programme donné de construction de cette figure *(suggestion de notre collaborateur C. Moritz)*. Autre exemple : la distinction entre le contenu et le statut d'une proposition n'est pas soulevée par les exercices usuels. Un exercice satisfaisant de ce point de vue consiste à présenter une figure accompagnée d'une liste de constatations et à demander, après avoir proposé un programme de construction pour ce type de figure, de rédiger un énoncé mathématique.

Exemple : A vos hypothèses ... prêts ... raisonnez !



Figure

Liste de propriétés vérifiées par la figure →

1. B,I et C sont alignés
2. I est le milieu de BC
3. ABI est un triangle isocèle
4. ICA est un triangle isocèle
5. ABI est un triangle équilatéral
6. $\widehat{B} = 60°$
7. $\widehat{BAI} = 60°$
8. $\widehat{BAC} = 90°$
9. $\widehat{BCA} = 30°$
10. $\widehat{AIC} = 120°$

1° Au vu de la figure et de la liste de propriétés indiquée, écrire un programme de construction en indiquant celles des propriétés utilisées.

2° Faire un énoncé mathématique à partir du programme obtenu en 1°

L'exemple de la page précédente montre une situation très simple qui conduit déjà à une richesse de productions très suffisante dans une classe : il se dégage quatre programmes de construction essentiellement différents, accompagnés de l'une ou l'autre variante *(le triangle rectangle avec le milieu de son hypoténuse, les triangles isocèles côte à côte, le triangle équilatéral "prolongé", le segment BC suivi du placement de A).*

Dans un premier temps, une surprise s'est manifestée, reflétant un doute sur la possibilité de construire des énoncés. Mais au bout d'un certain temps, dû au souci de vérification et de soin *(il ne faudrait sans doute pas mettre de pression sur les élèves à ce moment là, sous peine de dénaturer l'activité)*, des énoncés tout à fait acceptables apparaissent. Nous noterons cependant que la *difficulté* n'a pas été recherchée par les élèves que nous avons vus. Ce sont plutôt des considérations sur la *longueur* des textes produits qui se sont spontanément exprimées *(les plus courts étant jugés les meilleurs).*

Pour permettre le *contrôle* des raisonnements produits, nous entreprenons une mise en œuvre de *représentations* des démarches, conformément à la suggestion de Raymond Duval. Mais, comme il s'agit de la phase actuelle de la recherche, il est trop tôt pour en décrire les conséquences sur les compétences acquises par les élèves.

3 NOTES SUR DES PRODUCTIONS D'ELEVES

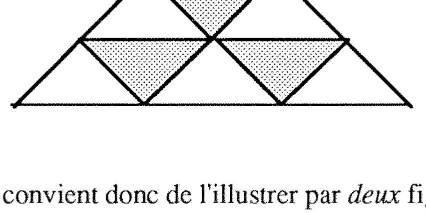
3.1 Reproduction ou production ?

Entre dessin et texte, l'idée de modèle n'a pas du tout la même nature. Une figure modèle est destinée à une reproduction dont la fidélité est vérifiable. Un texte modèle est destiné à donner lieu au contraire à des variations, à partir d'un certain nombre d'éléments de base. La conformité correspond alors à l'observation d'un certain nombre de règles respectées par le texte modèle. Hors les mathématiques, un exemple simple est celui des formules de politesse de lettres modèles. En mathématiques, on trouve bon nombre de manuels qui présentent des démonstrations modèles. L'apprentissage institué comprend deux volets : le volet des définitions et résultats mathématiques et le volet de la métalangue *("hypothèses", "déductions", "conclusions", ...)*, avec un poids préférentiel au premier. Mais le constat d'inefficacité qui ressort des différentes enquêtes effectuées *(moins de 25 % de réussites dès que l'on s'écarte de la restitution de schémas stéréotypés de démonstrations élémentaires)* jette le doute sur la possibilité même de parvenir à des résultats d'ensemble satisfaisants. Plus récemment N. Balacheff *(dans sa thèse)* a poursuivi, en s'inspirant notamment d'idées de Lakatos, le point de vue selon lequel la présentation traditionnelle de la démonstration est didactiquement mal orientée. Selon lui, il convient de créer en milieu scolaire les conditions du fonctionnement de la preuve dans la communauté scientifique. Les résultats obtenus sont certes intéressants, mais nous avons noté qu'ils ne mettent pas en évidence une appropriation de la démonstration par la majorité des élèves concernés. Autrement dit, l'option de susciter plutôt la production que la reproduction ne nous paraît pas décisive pour l'enseignement. Comme nous l'avons dit, notre approche est moins globale : nous considérons l'acquisition de la démonstration comme résultant d'une multiplicité d'appropriations différentes et, après la recherche dont l'article de R.Duval et M.A.Egret rend compte (dans ce même numéro), d'une prise de conscience de la progression par substitution d'énoncés. De plus la capacité visée correspond au raisonnement avec ses diverses phases *(conjecturale, heuristique, rédactionnelle)*. D'où la sollicitation de la production aussi bien que de la reproduction, avec un parti pris de mise en œuvre simultanée, aussi souvent que possible, du registre figural et du registre discursif. Ceci afin de favoriser la fonction de contrôle.

Nous présentons un sujet qui a été proposé en fin de la classe de quatrième comme évaluation. Les résultats auxquels il a donné lieu sont déjà prometteurs, bien que, comme déjà dit *(fin du § 2)*, il convienne d'attendre la fin de l'année scolaire suivante pour recueillir des observations significatives sur l'acquisition du raisonnement. La description du sujet proposé met en évidence sur cette évaluation la sollicitation à la fois de la production et de la reproduction.

3.2 Un sujet pour une évaluation en cours d'apprentissage.

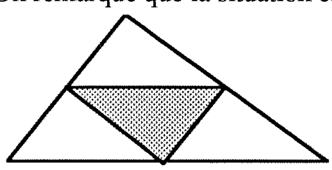
Le sujet retenu exploite la juxtaposition de neuf petits triangles isométriques pavant un grand triangle, comme illustré sur la figure ci-contre, présentée dans le sujet remis aux élèves.



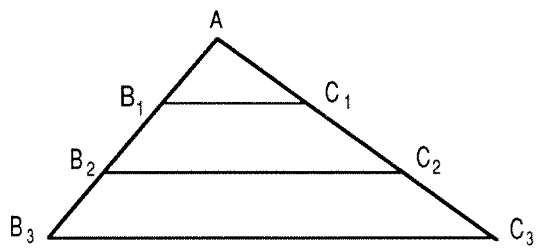
On remarque que cette situation est affine : la forme des triangles ne joue pas de rôle.
Conformément à des observations antérieures, il convient donc de l'illustrer par *deux* figures perspectivement différentes. A défaut de cette double illustration, une partie des élèves

ajouteraient des hypothèses de manière à déterminer une figure unique à similitude près. Une querelle a pu opposer les partisans de la géométrie euclidienne à ceux de la géométrie affine; on voit qu'en fait le type de précautions que demande la présentation de situations affine est d'une simplicité qui tempère une telle querelle.

On remarque que la situation est l'une des plus simples qui étendent la situation standard d'un triangle avec les milieux de ses côtés. Dans d'autres recherches, nous avons pu remarquer le caractère fondamental, pour des acquisitions mathématiques, du passage de 2 à 3.



Observons d'ailleurs que l'extension du théorème des milieux au cas de subdivisions en trois, comme illustré sur la figure ci-contre *(où B1 et B2 subdivisent AB3, et C1 et C2 subdivisent AC3)* utilise non seulement le théorème des milieux mais sa réciproque.



Une démonstration du parallélisme des droites BiCi (i = 1,2,3) demande un tracé auxiliaire *(le segment B3C1 par exemple)*, l'application du théorème des milieux au triangle AB2C2, celle du théorème réciproque au triangle B3B1C1 et enfin à nouveau celle du théorème des milieux au triangle B3C1C3. Il est clair que, sans préparation appropriée, cette démarche est trop subtile pour la quasi totalité des élèves de collège.

La simplicité visuelle de la figure choisie n'exclut donc pas sa richesse ni l'éventuelle complexité des démarches qui s'y rapportent. En fin de collège, elle donnerait lieu à une évaluation portant sur une démonstration. En cours d'apprentissage, le repérage auquel procéder vaut la peine d'être prévu plus varié, incluant des tâches de production de figures comme de textes.

Dans une figure, ce qui est le plus immédiatement prégnant est d'une part le contenu extérieur et d'autre part les unités de base *(ici les petits triangles, mis de plus en évidence par des variations de teinte à la manière des cases d'un échiquier)*. En partant du contour extérieur ou d'un triangle de base, on est amené à mettre en œuvre deux algorithmes différents de construction de la figure. L'évaluation a porté sur les deux constructions, avec leur tracé d'une part, leur description d'autre part.

En dernier lieu, l'évaluation a porté sur la recherche d'un énoncé de problème résultant de la situation présentée. Pour faciliter la correction, la situation a déjà été mise en place *(un triangle à côtés partagés en trois)* et seule une question reste à rédiger pour que l'on obtienne un énoncé complet de problème.

Le sujet est reproduit en annexe. Quelques explications ont été présentées ici en raison de la forme non traditionnelle de ce sujet.

3.3 Résultats de l'évaluation.

Le sujet présenté au paragraphe précédent a été soumis à 180 élèves de quatrième de trois établissements scolaires. Cette population comporte des élèves de tous niveaux ; en particulier, deux des huit classes interrogées correspondent à des groupes faibles. Sans aller jusqu'à pouvoir être qualifié de représentatif, l'échantillon interrogé fournit une image de la variété des comportements de réponse observables sur une telle évaluation.

Reproductions de figures

Plus des 2/3 de la population reproduit correctement la figure à partir des deux points de départ imposés. Mais ceci signifie qu'il reste encore en quatrième près de 1 élève sur 3 à éprouver une difficulté à ce niveau. Il était donc important que cette tâche soit proposée dans le sujet soumis aux élèves.

C'est la deuxième figure qui est, comme prévu, la plus facile, ainsi qu'il apparaît sur le tableau croisé ci-dessous.

Figure 2 / Figure 1	Figure imparfaite ou absente	Figure correcte	
Figure imparfaite ou absente	19	26	45
Figure correcte	12	123	135

Programmes de construction

L'implication "pour rédiger un programme de construction correct, il faut avoir effectué un tracé correct" est excellente si l'on est strict sur la définition de "programme correct". Mais il y a peu d'élèves qui fournissent, et de plus correctement, toutes les indications nécessaires. En admettant une définition plus large de la réussite, c'est à dire un programme correct à *une* omission éventuelle près, l'implication reste encore bonne, alors que la réussite large concerne plus du double des élèves obtenant la réussite stricte. Ci-après, les tableaux détaillent ces observations.

Figure 1 : Croisements tracé-programme (réussites stricte et large)

Prog. / Tracé	Echec	Réussite stricte	
E	40	5	45
R	108	27	135

Prog. / Tracé	Echec	Réussite large	
E	32	13	45
R	63	72	135

Figure 2 : Croisements tracé-programme (réussites stricte et large)

Tracé \ Prog.	Echec	Réussite stricte	
E	29	2	31
R	102	47	149

Tracé \ Prog.	Echec	Réussite large	
E	25	6	31
R	46	103	149

Soulignons que seuls 38 élèves pour la première construction et 25 élèves pour la seconde n'ont pas rédigé de programme ou n'ont produit qu'une rédaction très embryonnaire.

Un palier apparaît donc : *la grande majorité produit des enchaînements corrects, mais omet d'indiquer des précisions importantes*, alors même que celles-ci ont été prises en compte lors de la construction. Seul 1 élève sur 4 environ pour la construction qui apparaît la plus simple, et 1 élève sur 7 environ pour la construction la plus difficile, réussit à *"se voir faire la construction"*.

Dans ce phénomène, ce n'est pas la rigueur mathématique qui est en cause. En effet, nous avons relevé cet aspect lors de la correction, et il apparaît que le nombre d'élèves dont la production est mathématiquement correcte, tant du point de vue lexical que syntaxique, est supérieur aux effectifs de la réussite stricte pour le programme de construction :

52 élèves (soit 29%) s'expriment correctement pour la première construction
80 élèves (soit 44%) s'expriment correctement pour la deuxième contruction.

On voit que ces effectifs s'approchent, sans toutefois les atteindre, de ceux de la réussite large. Mais les gros "écarts de langage", comme de parler de "priorité" (sic) et "d'hypothèses" (re-sic) de triangles-pour dire "propriétés" et "grands côtés" (seuls les triangles rectangles ayant une hypoténuse), vont en général de pair avec d'autres défauts.

Production d'un énoncé. Dans la situation présentée, la production d'un énoncé qui prend en compte *l'ensemble des hypothèses* est le fait d'une *petite minorité* : moins de 11% des élèves interrogés. C'est précisément un résultat qui met en évidence l'intérêt pour l'enseignement de proposer une telle activité à ce niveau et en troisième : la petite population des élèves déjà capables d'une telle production peut faire "boule de neige". Car la difficulté qui apparaît ne consiste pas tellement dans le fait de rédiger un énoncé dans la situation proposée. En effet, près de 45% des élèves produisent un énoncé ne prenant en compte qu'une partie des hypothèses. Au total, il apparaît donc une production d'énoncé pour 55% de la population.

Cette évaluation seule ne suffit pas pour préciser l'obstacle qui se présente par rapport à la prise en compte de l'ensemble des hypothèses. Nous ne pouvons qu'avancer des conjectures, qui sont surtout les deux suivantes :

- attraction vers la figure connue d'un triangle avec les milieux de deux côtés et le segment (ou la droite) qui les joint ; cette figure est une sous-figure (présente en plusieurs exemplaires) non immédiatement perceptible dans la figure complète et l'on comprend que sa découverte puisse satisfaire bon nombre d'élèves.

- multiplicité des définitions du point O, qui constitue le point central de la figure complète : c'est le milieu de trois segments et le point de rencontre de trois droites ; il s'est avéré difficile pour les élèves, dans la deuxième construction, *d'éviter une surcharge des définitions de O.*

Autrement dit, même si aucune démonstration n'est demandée ici, la réussite exige, comme la plupart des démonstrations, d'être attentif à la distinction entre contenu et statut d'une assertion : *aucun élément ne peut se voir a priori attribuer deux définitions.* Après une définition, les assertions ultérieures portant sur le même objet ne peuvent plus avoir elles-mêmes le statut de définition. Une exploration plus fine demandera une classification des énoncés de géométrie selon la façon dont les assertions en jeu peuvent se voir affubler d'un statut. Par "assertions en jeu", il ne faut pas seulement entendre les hypothèses données dans l'énoncé où présentées sur une figure codée, mais également les propositions concernant des objets créés à la suite de l'énoncé.
Afin de nous assurer du caractère complet des observations précédentes, nous avons procédé à une analyse des correspondances. Celle-ci a nettement confirmé un phénomène de réussite à deux niveaux. Après les absences de réponse ou les réponses très peu cohérentes, le premier niveau est celui d'une *productivité demandant à être canalisée* ; c'est précisément une bonne situation d'enseignement, comparée à la situation évoquée traditionnellement d'élèves "secs" sur les problèmes de géométrie. Le deuxième niveau, encore peu atteint, correspond à la mise en place d'une maîtrise des différentes tâches constitutives d'une résolution de problème.

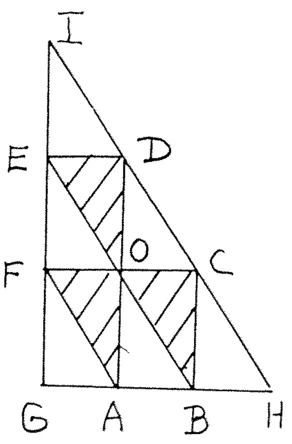
NOM : ....

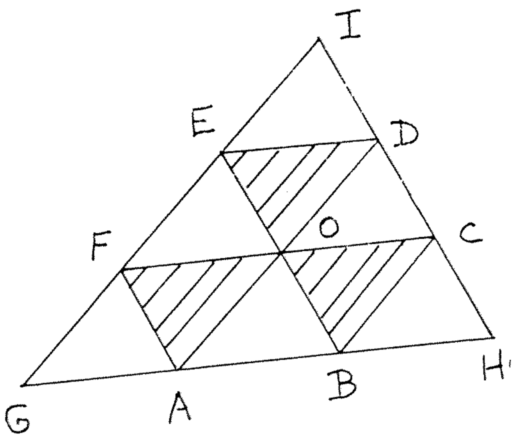
Prénom : ....

Classe : ....

LA MOULINETTE

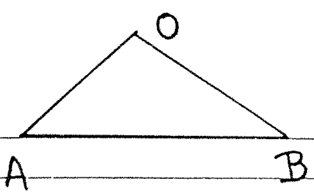
Observer les deux figures ci-dessous. Elles possèdent les mêmes propriétés.





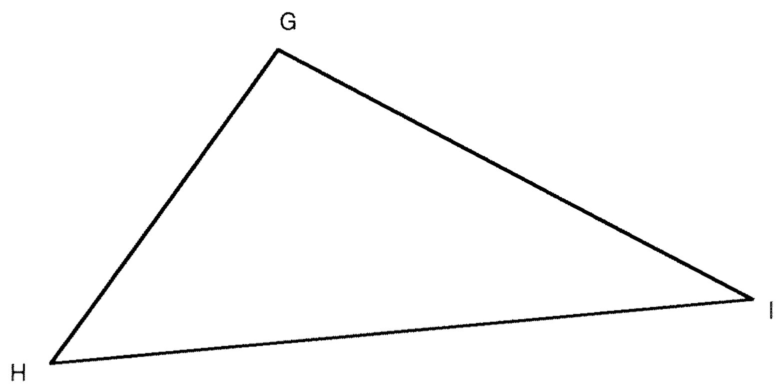
1 A partir des points O, A, B ci-dessous, construire une figure ayant les mêmes propriétés que les figures données en exemple et donner un programme de construction.

Programme de construction



Tests d'évaluation - Géométrie 4ème -

2 A partir des points G, H et I, construire ci-dessous une figure ayant les mêmes propriétés que les deux figures précédentes et donner son programme de construction.



Programme de construction

____
____
____
____
____
____

3 Compléter le texte suivant pour écrire un énoncé avec une ou plusieurs questions.
On partage chacun des côtés d'un triangle en trois.

A et B partagent GH de telle façon que GA = AB = BH
C et D partagent HI de telle façon que HC = CD = DI
E et F partagent IG de telle façon que IE = EF = FG

____
____
____
____

REFERENCES

N. BALACHEFF, 1988, *Une Etude des Processus de Preuve en Mathématique chez des Elèves de Collège* (Thèse), Université Joseph Fourier, Grenoble.

Bulletin Inter-IREM Premier Cycle, *Suivi Scientifique* 1985-86 (classe de sixième), 1986-87 (classe de cinquième), 1987-88 (classe de quatrième), CRDP de l'Académie de Lyon.

G.H. HARDY, 1985 (trad. française), *l'Apologie d'un Mathématicien*, Ed. Belin, Paris.

I. LAKATOS, 1976 (trad.française : 1985), *Preuve et réfutations*, Ed. Hermann, Paris.

Recherche sur la Pédagogie Différenciée dans les Collèges, 1985, Rapport d'Activité, Publication de l'U.E.R. des Sciences du Comportement, U.L.P. Strasbourg.