

Réflexions sur les logiciels d'aide à la démonstration en géométrie

D. GUIN avec la collaboration du groupe IREM Intelligence Artificielle de Strasbourg

La réalisation d'un logiciel d'aide à la démonstration en géométrie nécessite à notre avis une modélisation de la compréhension d'un énoncé et de l'activité de démonstration . Les logiciels d'aide à la démonstration en géométrie sont actuellement élaborés à partir d'une analyse préalable insuffisante sur les plans cognitif et didactique de l'activité de démonstration géométrique : c'est , dans la plupart des cas , le fonctionnement du système informatique (et non le fonctionnement humain) qui détermine la modélisation de l'activité . Nous présentons ici quelques éléments d'analyse cognitive et didactique nécessaires à la modélisation de cette activité. Ces réflexions conduisent naturellement à l' ébauche d'un cahier des charges pour un logiciel d'aide à la démonstration en géométrie .

Introduction

Jusqu'à ces dernières années , les logiciels d'aide à l'enseignement s'étaient essentiellement développés dans le domaine algébrique plus proche du calcul automatique que la géométrie . Avec l'apparition de langages informatiques tels que PROLOG et de systèmes experts de démonstration automatique de théorèmes (D.Pastre) , de nombreux chercheurs se sont lancés dans l'élaboration de logiciels d'aide à la démonstration en géométrie à un niveau élémentaire . Ces nouveaux outils , en permettant une implémentation informatique , faisaient naître l'espoir de débloquer , grâce à l'ordinateur , la situation actuelle : la démonstration en géométrie au niveau 4^{ème} est une activité intellectuelle qui présente de grosses difficultés pour les élèves .

Nous avons participé à cette recherche en réalisant une simulation des processus de lecture et compréhension d'un énoncé de géométrie (D.Guin , F.Rousselot) . Il s'agissait , dans un premier temps , de réaliser la simulation en ce qui concerne l'expert ou l'élève idéal . Cette phase de compréhension de l'énoncé nécessite une modélisation de l'organisation des connaissances qui nous paraissait indispensable pour la réalisation d'un tel logiciel . Nous avons abordé ensuite la modélisation de l'activité de démonstration (toujours pour l'expert) et

nous avons été amenés à expliciter les démarches faisant appel à des "évidences" ou des "réflexes" (qui ne le sont pas pour les élèves) .

Ces modélisations nécessitent d'exprimer précisément les modèles de fonctionnement de l'activité et de les mettre en oeuvre pour simuler le comportement : c'est le rôle de la *psychologie cognitive* . Nous avons du constater que les recherches dans ce domaine étaient insuffisantes en ce qui concerne l'activité de démonstration en géométrie . C'est pourquoi nous avons sollicité l'aide de R.Duval pour pouvoir atteindre notre objectif : les deux articles de ce volume (R. Duval et M.A Egret *loc.cit.*) en sont la preuve concrète .

Les résultats mis en évidence par cette analyse cognitive nous ont obligés à remettre en question notre manière d'enseigner : ils nous permettaient de construire des situations pouvant rendre l'activité de démonstration plus accessible par les élèves . Nous présenterons succinctement dans les deux premiers paragraphes nos réflexions sur ce sujet.

Nous ferons ensuite dans le troisième paragraphe un rapide survol des logiciels d'aide à la démonstration en géométrie . Nous essaierons de dégager dans quelle mesure ils prennent en compte une modélisation de la compréhension d'un énoncé et de l'activité de démonstration , et quels sont leurs choix didactiques .

Nous terminerons par une ébauche de cahier des charges d'un logiciel prenant en compte les résultats mis en évidence dans les deux premiers paragraphes .

I Expliciter l'activité de démonstration : quelques éléments d'analyse cognitive

Nous présenterons succinctement quelques résultats de nos réflexions , pour une lecture plus détaillée , il est possible de consulter différents articles (Groupe Intelligence Artificielle , R.Duval et M.A Egret *loc.cit.*). Un résultat essentiel de R. Duval porte sur la distinction dans l'activité de démonstration entre l'*organisation déductive des énoncés* et la *découverte de la solution* ou de son idée (*tâche heuristique*).

a) organisation déductive

Nous laisserons de côté l'organisation déductive qui est l'objet de l'article précité , en rappelant que cette activité ne débute , pour R. Duval , qu'à partir du moment où l'on dispose de *tout le corpus d'énoncés (théorèmes à appliquer)* nécessaires à la démonstration. Puisque nous ne nous intéressons pas ici à la mise en forme en langage naturel , il s'agit alors :

- d' *organiser* ces énoncés dans un certain ordre ,
- de *contrôler pas à pas les substitutions* correspondant à l'application d'un théorème (A.T.S.) .

La première activité nécessite d'avoir compris les *règles du jeu* de la démonstration, les différents *statuts* des assertions de l'énoncé du problème . La deuxième activité demande d'avoir une connaissance *procédurale* (Groupe Intelligence Artificielle) et non seulement déclarative des théorèmes : il s'agit du premier seuil défini dans (M.A Egret et R. Duval *loc.cit.*) qui exige une connaissance *opératoire* des théorèmes . Nous verrons dans le paragraphe suivant comment on peut faciliter ces prises de conscience .

b) découverte de la solution

La résolution de problème présente des difficultés spécifiques dans le domaine de la géométrie , nous avons donc essayé d' *explicitier* notre démarche d' "expert". Il nous est apparu que nous utilisions , sans nécessairement les expliciter , un certain nombre de règles pour *orienter* la recherche (en *éliminant a priori* une partie de la base de connaissances à la lumière des hypothèses) et effectuer le *choix* des connaissances à appliquer . Ces règles ne nous permettaient pas de trouver instantanément , mais de définir *un plan d'action* et d'aboutir à une solution éventuellement après plusieurs essais infructueux de tels plans . Celles-ci sont rarement enseignées , car elles ne sont en général même pas explicitées .

Définir un plan , c'est *imaginer* un chemin possible entre les hypothèses et la conclusion . Nous considérons donc que la découverte de la solution nécessite la recherche d'un plan (qui *n'aboutit pas forcément* à la solution contrairement à un algorithme) et que les heuristiques sont des aides à la recherche d'un plan , même si, pour l'expert , tout ce travail est implicite . G. Polya a déjà longuement développé cette idée (G.Polya) . Il nous

faut donc expliciter notre fonctionnement pour résoudre un problème de géométrie : *élaboration* d'un plan permettant de s'engager dans une direction précise quitte à en changer s'il y a impasse . Nous avons déjà mis en évidence quelques éléments d'une *méthode* (Groupe Intelligence Artificielle) destinée à la gestion des heuristiques et explicitant une démarche efficace d'approche des problèmes dans le domaine spécifique de la géométrie élémentaire . Cette méthode devrait en particulier permettre d'élaborer un plan d'action en fonction du *contexte* et de décider l'abandon éventuel d'une voie initialement choisie .

Nous sommes conscients qu'il n'est pas simple de mettre en évidence des heuristiques efficaces et que beaucoup d'expériences dans ce domaine ont échoué . Alan Schoenfeld (A. Schoenfeld) explique ces échecs par le faible niveau d'explicitation de ces règles . Toutefois , il ne faut pas perdre de vue que l'accumulation d'heuristiques spécifiques reporte la difficulté au niveau de la mise en oeuvre de ces heuristiques . Mais si nous formulons de manière assez précise notre fonctionnement , nous pourrions réaliser un système informatique ayant une structure de contrôle basé sur cette modélisation . La réalisation informatique n'est pas une utopie , nous rappelons que D.B Lenat (R.Cuppens) a mis au point un système basé sur les *heuristiques* capable de redécouvrir des *concepts* mathématiques et de *conjecturer* des théorèmes .

II Comment rendre plus accessible cette activité : quelques éléments d'analyse didactique

Nous rappelons l'importance de l'activité de construction et exploration de figures en amont de toute activité de démonstration (F.Pluinage , J.-C.Rauscher) . Ce travail doit être ensuite effectué en *liaison avec un énoncé* de manière à pouvoir mettre en évidence le statut des assertions : c'est ce que nous appellerons l'exploration de la figure .

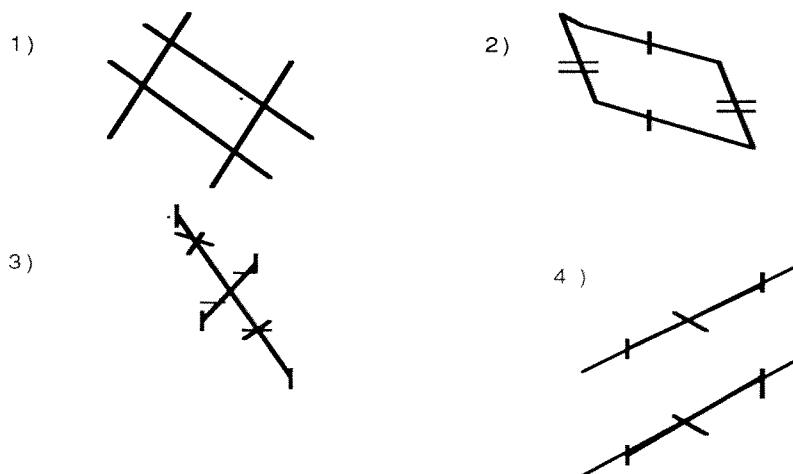
L'enseignement de la géométrie est souvent trop déclaratif : on se contente souvent d'exposer les définitions , les théorèmes, et ensuite les démonstrations sans *justifier* le choix des théorèmes utilisés. La justification du choix apparaît très rarement dans le corrigé qui est, en général , la mise en forme de la démonstration . Ainsi , si nous arrivons à expliciter nos méthodes , nous pouvons formuler l'hypothèse que l'*enseignement des méthodes* apportera une aide sensible aux élèves (J.Rogalski) . Dans toutes les démonstrations proposées aux élèves , le *choix* d'une méthode devra être *expliqué* . L'exposition d'une méthode a priori dont on ne voit pas l'utilité ne motive pas : il s'agira d'aider l'élève à *découvrir progressivement* cette méthode .

Considérons les deux aspects mis en évidence dans l'activité de démonstration : ils ne sont pas assez distingués dans l'enseignement . R.Duval estime que l'organisation déductive doit être maîtrisée avant d'aborder la découverte de la solution : il nous semble clair qu'une activité de résolution de problème ne peut avoir lieu si les *règles du jeu* ne sont pas connues. L'assimilation d'une méthode de recherche n'est possible que si l'on a *pris conscience* de la manière dont fonctionne une démonstration .

Les travaux dans le cadre de l'intelligence artificielle ont imposé la représentation par réseau comme un outil pour la représentation des connaissances.Nous avons constaté que nous pouvons apporter une aide sensible aux élèves en leur proposant différentes *représentations* car elles leur permettent d'*organiser* leurs connaissances géométriques pour aborder l'un des aspects de l'activité de démonstration . Naturellement , ces représentations ne doivent pas être fournies a priori aux élèves , elles doivent être mises en évidence et élaborées avec eux au cours de situations choisies à cet effet .

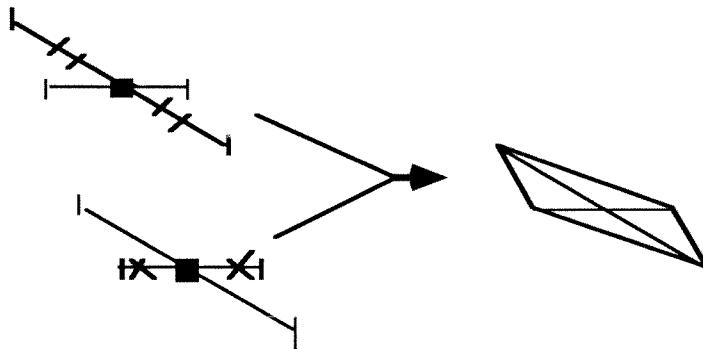
a) représentations

Pour un même objet géométrique , nous avons mis en évidence des représentations *non équivalentes* du point de vue cognitif (Groupe Intelligence Artificielle) . Par exemple, nous avons quatre figures prototypes pour le parallélogramme :



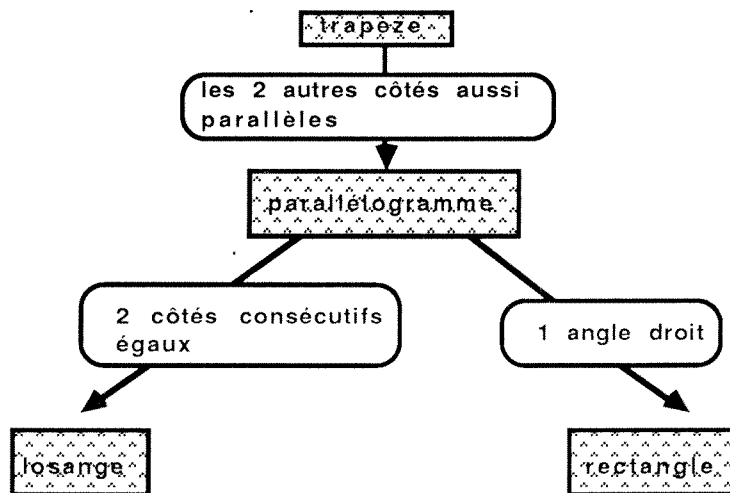
Ces figures prototypes sont déduites d'une représentation des théorèmes mettant en évidence l'aspect *procédural* des théorèmes . Cette représentation concrétisant la *distinction* entre les différentes hypothèses nécessaires pour appliquer le théorème facilite l'application correcte du théorème (premier seuil dans l'organisation déductive).

exemple : Théorème (DIAGONALE 2) : Tout quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme .



Nous pouvons aussi mettre en évidence l'aspect *procédural* des définitions des objets géométriques grâce à la définition de réseaux sémantiques associés aux objets géométriques :

exemple :



b) organisation déductive

Nous ne reviendrons pas sur cette activité qui , nous l'avons vu , est grandement facilitée par l'utilisation de réseaux d'A.T.S (M.A Egret et R.Duval *loc.cit.*) .

c) découverte de la solution

Nous devons essayer de faire jouer un rôle plus actif à l'élève et l'aider à élaborer sa méthode par la résolution de problèmes judicieusement choisis . Il est possible de réfléchir au choix du groupement de plusieurs exercices pour dégager des configurations de base ou *figures prototypes* , puis des *heuristiques* (Groupe Intelligence Artificielle). Nous devons entraîner les élèves à *réorganiser* leurs connaissances en fonction du problème à résoudre .

exemple : Si le but en cours est de démontrer qu 'un point X est milieu d'un segment [YZ], l'élève doit savoir utiliser ses connaissances pour établir la liste suivante :

Essayer - l' identification d'une figure prototype diagonale 1 dont l'une des diagonales est [YZ] et le centre X .

- l' identification d'une figure prototype milieu 2 dans lequel il existe une parallèle à un autre côté que [YZ] passant par X et le milieu du troisième côté .

(L'identification d'une figure extraite ou prototype comprend deux étapes : *exhiber* la figure , puis vérifier qu'elle a le *statut* de figure extraite ou prototype)

L'*organisation* des connaissances joue un rôle fondamental dans l'activité de résolution de problèmes . Pour J.-M. Hoc , l'activité de résolution de problèmes est conçue comme le développement d'une interaction entre deux fonctions essentielles : la *compréhension* du problème et l'*élaboration* d'une solution (C. Bonnet et alii).L'intérêt de son " système de représentation et de traitement "(SRT) est qu'il réintègre explicitement la compréhension de la situation dans l'activité et lie les représentations et les traitements .La compréhension du problème se traduit par la construction d'une représentation du problème . C'est pourquoi , de même que la représentation sous forme de réseau est un outil de contrôle dans l'organisation déductive, nous émettons l'hypothèse que l'utilisation d'un *réseau associé à un plan* peut aussi jouer un rôle dans la découverte de la solution . Le réseau

associé à un plan ou *réseau de planification* représentera des connaissances procédurales , ses noeuds seront des actions . L'utilisation de la représentation sous forme de réseau *associé à un plan* n'implique pas forcément une recherche *pas à pas* . Elle peut permettre une représentation du problème mettant en évidence une *décomposition en sous-problèmes* et débouchant sur un *plan d'action* (chaque sous-problème correspondant à un sous-réseau). Ainsi une telle représentation ne privilégie aucun type de recherche : elle peut se faire soit pas à pas en "marche avant" ou "marche arrière", soit par décomposition en sous-problèmes qui , à leur tour , peuvent être résolus "marche avant" ou "marche arrière".

Cette année , nous comptons expérimenter une telle démarche avec les élèves ayant participé à l'expérience décrite en (M.-A. Egret et R.Duval *loc.cit*) . Si , comme nous l'espérons , la représentation d'un plan sous forme de réseau s'avère un outil efficace dans la résolution de problème , nous pourrions envisager d'intégrer dans la réalisation informatique du système la possibilité d'*élaboration par l'élève* de ses *propres réseaux* (réseau associé au plan , réseau de démonstration) associés à un problème donné.

III Quelques logiciels d'aide à la démonstration en géométrie

a) logiciels de construction de figures

Voici un rapide aperçu des logiciels de construction de figures . Il est évident que c'est un module indispensable dans un logiciel d'aide à la démonstration en géométrie . Parmi ceux dont nous parlerons , Euclide et Géométrie plane sont les seuls disponibles sur un matériel Education Nationale , donc les seuls qui peuvent être testés auprès d'un grand nombre d'élèves . Il n'existe toujours pas à l'heure actuelle de matériel Education Nationale permettant la réalisation de logiciels ayant les possibilités de Cabri-géomètre ou Géophile .

- *Euclide (J.C Allard)*

Ce logiciel a le mérite de tourner sur Nanoréseau . C'est une extension du langage LOGO permettant la construction de figures géométriques. Il nécessite une alphabétisation informatique en LOGO . Si l'élève acquiert une compétence suffisante , il a ensuite un rôle plus actif (comme dans l'environnement LOGO) : il peut définir des *constructeurs de base* agissant sur les objets de base . Le logiciel comporte plusieurs modules : triangle , barycentre , transformations , comparaisons .Le module *triangle* contient les objets

remarquables correspondants : hauteur , médiane , cercles inscrits , exinscrits , tangents, d'Euler , orthocentre etc ... Les *transformations géométriques* (symétries centrales et orthogonales , translations , rotations , homothéties , projections) sont disponibles sous forme de procédures, on peut les appliquer *globalement* à un objet grâce à la représentation sous forme de liste. Elles nécessitent l'écriture de procédures LOGO (de même que pour l'étude des lieux géométriques). Il est possible de consulter certaines relations (module comparaison) entre les objets qui peuvent s'écrire sous forme de prédicats (parallélisme , appartenance , orthogonalité) . Notons que l'effaçage partiel , bien utile dans ce domaine est difficile sur le nanoréseau .

- Géométrie plane (Pilat informatique éducative)

Ce logiciel a le mérite de tourner sur compatible PC . Il ne nécessite pas d'alphabétisation informatique . Les *transformations géométriques* suivantes sont disponibles uniquement point par point : translation , rotation , symétrie axiale, affinité, similitude, symétrie centrale, symétrie axiale , inversion . On peut en créer d'autres grâce à des options . Cependant son utilisation avec des élèves présente peu de souplesse : les noms des objets géométriques sont imposés par le programme , on ne peut créer un objet sans le tracer , il n'est possible d'étudier des lieux géométriques (grâce au mode répéter) que s'il s'agit de faire varier un seul point dans la figure . On peut consulter les données analytiques des objets qui ont été mémorisés (ils ne le sont pas systématiquement), les relations métriques entre les objets , les relations d'alignement, de parallélisme et d'orthogonalité .

- Cabri-géomètre (P.Bellemain)

Ce logiciel a été élaboré par une équipe d'informaticiens , de mathématiciens , de didacticiens et d'enseignants : c'est assez rare malheureusement . Il fonctionne actuellement sur Macintosh . Il possède donc les nouveaux standards de communication homme-machine en particulier les menus déroulants , et le multi-fenêtrage . Le but de ce logiciel est de conduire les élèves à élaborer des *conjectures* à propos des figures géométriques . Il permet d'aborder très vite avec les élèves l'*exploration* des constructions géométriques , puisqu'il ne nécessite aucun apprentissage de la programmation . Les déplacements géométriques sont possibles , c'est donc un outil mieux adapté que les logiciels précédents à l'*étude de lieux géométriques* . Cependant, pour le moment , il n'est pas possible de définir des constructeurs de base . L' effaçage d'une partie de la figure est très aisé . Cabri-géomètre

comporte un *module pédagogique* permettant à l'enseignant de cacher des primitives .Il est prévu qu'à moyen terme ce logiciel dispose de plusieurs fenêtres (possibilité d'avoir simultanément la figure et des relations entre les objets) et *des transformations géométriques*.A plus long terme l'utilisateur aura la possibilité de définir de nouvelles primitives permettant de faire de nouvelles constructions .

- *Géophile (G. Braun)*

Ce logiciel fonctionne actuellement sur SM 90 sous Unix .C'est un outil performant pour la construction de figures . La création d'un langage-objet a permis de choisir une représentation des connaissances bien adaptée aux constructions de figures : *le réseau de construction* (G.Braun). Ce langage permet la gestion des réseaux de constructions :

- création de réseaux (construction *descendante ou remontante* , ou combinaison des deux modes de constructions avec un *contrôle* de la complétude)
- manipulation (consultation des sommets , relations entre les sommets , expression d'un sommet en fonction d'autre sommets , sommets dont dépend un sommet, etc..., consultation globale du réseau , consultation par classe d'objets , suites définies à partir d'un réseau, définition de constructeurs de base)
- modification pour n'importe quel réseau
- gestion de l' affichage indépendante de la création du réseau .

Ce logiciel est donc particulièrement bien adapté à l'études de lieux et d'invariants géométriques . Par contre , le problème des transformations géométriques n'a pas été encore entièrement traité : mais la représentation des connaissances et le langage LISP devraient permettre de le résoudre de *manière globale* .L'outil informatique répondra alors aux exigences que l'on peut avoir dans l'enseignement des mathématiques en ce qui concerne la construction de figures.La communication homme-machine devra être améliorée avant une implantation sur un matériel Education Nationale : il faudra l'adapter à une utilisation par des élèves . L'idéal serait d'avoir une communication homme-machine aussi agréable que celle de Cabri-géomètre ...

b) logiciels d'apprentissage

Ces logiciels ont pour objectif d'apporter une aide à la démonstration en laissant de côté la mise en forme en langage naturel .

- *Logiciel de Rennes (M.D.Fontaine , Régis Gras)*

Ce logiciel est écrit en PROLOG sur MAC+ , il comporte deux modules . L'un porte sur l'*exploration de la figure* , l'autre sur la démonstration . Le premier module nous paraît intéressant , car l'exploration de la figure est un travail indispensable en amont de l'activité de démonstration.Mais , pour préparer efficacement à la démonstration , il doit être fait en *liaison* avec l'énoncé du problème de manière à pouvoir mettre en évidence les *statuts* des propriétés de la figure: ce module devrait inclure un sous-module *compréhension* de l'énoncé . De plus cela permettrait de mettre en évidence les figures *prototypes ou extraites* qui seraient ensuite une aide sensible à la découverte de la solution.

Le module démonstration ne nous a pas paru convaincant : parce qu'il exige une démarche pas à pas (sans doute imposée par le fonctionnement PROLOG ...), un bon élève et même un professeur qui connaît parfaitement la solution de son problème peut perdre le fil de sa démonstration ! "La contrainte de la démonstration à un pas n'est pas aisément comprise et admise" observe R. Gras durant l'expérimentation . Nous pensons même qu'elle peut être un obstacle à la découverte de la solution , car elle ne permet pas de prendre en compte une idée ou un plan de solution .Quand aux élèves qui sont en difficulté , rien ne leur permet de comprendre les *règles du jeu* , le *sens* de l' activité de démonstration , de plus l'aide heuristique est faible . Par contre , il faut noter trois éléments intéressants : d'abord la possibilité de consulter un fichier "théorèmes " , ensuite la possibilité à tout moment d'avoir un *bilan* de son travail avec les propriétés conjecturées et celles démontrées , enfin l'accès à un travail par sous-problème (à un pas) avec obligation d'une restructuration des "mini-tâches " .

Signalons le système expert de Holland (G.Holland) qui est lui aussi écrit en Prolog et qui pour l'instant ne permet qu'une démarche pas à pas avec une possibilité d'aide uniquement en "marche arrière " .

- *The Geometry Tutor* (Anderson J. R. et alii)

Nous devons mentionner que malgré tous nos efforts (commandes répétées), nous n'avons pu nous procurer ce logiciel . Nous savons qu'il a tourné sous forme de prototype, mais la version définitive ne semble pas disponible .

J.R.Anderson affirme , et nous le soutenons sans réserve, que le rôle le plus important de la psychologie cognitive dans l'apprentissage est de *fournir explicitement les modèles de fonctionnement de l'élève idéal et de l'élève standard* . Il insiste sur la distinction entre la connaissance *déclarative* et *procédurale* d'un théorème . Il met aussi en évidence les notions de *plan* et d'*heuristique* . Par bonheur , sa modélisation du fonctionnement de l'élève idéal , sa notion de plan , sa notion d'heuristique se trouvent être exactement celles du fonctionnement de son système informatique : fonctionnement exclusif " *en marche avant* " ou " *en marche arrière* " pas à pas (c'est à dire une *seule inférence* "avant " ou " arrière "), plan et stratégies exclusivement liées à ce fonctionnement . Il en résulte qu'une *vision globale* de la démonstration , une notion de plan telle que nous l'avons défini , une méthode d'*identification* de figure prototype ne peuvent être pris en compte dans ce logiciel .

De plus, l' étude pour l'élève idéal des *représentations des connaissances* et de la phase de *compréhension de l'énoncé* par une modélisation de l'organisation des connaissances est inexistante. Cela se traduit dans la réalisation du logiciel par une représentation de l'énoncé sous forme de propositions où les *statuts* d'hypothèse et de conclusion sont déjà *différenciés* , alors que, comme nous l'avons vu précédemment , l'analyse didactique montre qu'une difficulté essentielle pour aborder l'activité de démonstration est la *reconnaissance* de ces statuts par l'élève . Enfin , le domaine des connaissances géométriques étudié le plus précisément est celui des *cas d'égalité des triangles* , ce qui paraît assez restrictif en ce qui concerne la démarche démonstrative .

Dans ce logiciel , l'élève n'a pas la tâche d'*organisation des connaissances* puisque le problème lui est donné sous une forme prédigérée . Il doit s'en tenir à une progression pas à pas , ce qui privilégie une vision très locale de la démonstration , sans pouvoir faire de prévisions à plus long terme . Notons , à ce propos , que J.R.Anderson estime qu'il ne faut laisser à l'élève comme chemins possibles de démonstration que ceux qui aboutissent : c'est

une attitude peu propice à développer l'*heuristique* . Enfin la solution de l'expert de la démonstration est présentée en deux colonnes :

- la première est une suite d'assertions : $AD = AB$, M est le milieu de CD etc ...
- la seconde a pour titre "raisons" , elle veut être une justification de la démonstration.

Elle donne soit le *statut* de l'assertion , soit le *théorème* appliqué . En fait, c'est une justification du réseau de la démonstration : elle rend compte de l'*organisation déductive* , mais ne donne aucune justification sur le *choix* d'un théorème qui relève de la *découverte* de la solution . Il y a donc une fois encore confusion entre les tâches d'organisation déductive et les tâches heuristiques . Il est peu probable qu'un tel logiciel facilite le développement des aptitudes *heuristiques* des élèves .

- *Conception d'une base de connaissances (Chouraki E., Inghilterra C.)*

Le but de ce travail est à long terme une réalisation d'un système expert d'enseignement pour l'apprentissage de la démonstration en géométrie (niveau 4^{ème}) possédant les fonctions suivantes :

- " - créer ou modifier les connaissances géométriques et la banque d'exercices,
- saisir et agencer une progression pédagogique de l'apprentissage ,
- résoudre tout exercice qu'il propose ou que l'utilisateur lui propose , dans le cadre de ces capacités ,
- justifier la trace de sa résolution ,
- suivre le chemin démonstratif de l'élève et le guider en cas d'erreur , de blocage ou d'appel d'aide , et enfin ,
- évaluer et mémoriser les acquisitions de l'apprenant pour mieux définir son profil scolaire et modifier ou adapter sa progression pédagogique " .

Nous ne pouvons être qu'en parfait accord avec un tel programme ! L'article cité porte sur la définition de la base de connaissances qui contiendra la *description* des objets géométriques et les *méthodes* nécessaires à la résolution de la classe de problèmes visée . Ici encore , il est apparent qu'on est parti d'un *choix de représentation informatique* (représentation orientée objet) qui paraît bien adapté au domaine de la géométrie : on y retrouve les notions d'objet générique , d'héritage des propriétés . Mais ce choix en vue d'une implantation informatique est-il *cohérent* avec notre fonctionnement ? la question n'est pas abordée .

Dans la partie résolution de problèmes , la notion de *contexte d'application* d'un groupe de règles paraît intéressante : elle est vue comme l'ensemble des prémisses communes qui se factorisent dans le groupe (par exemple , pour montrer qu'une droite (X) est perpendiculaire à (Y) , il y a sept contextes de base , dans le contexte du cercle , il y a deux règles) , et nous avons retrouvé cette notion de *contexte* dans l'analyse cognitive qui est nécessaire pour préciser les heuristiques .

Une récente discussion avec un membre de cette équipe met en évidence les difficultés rencontrées actuellement pour continuer ce projet : il est sans doute prématuré , compte-tenu des analyses cognitives et didactiques dont nous disposons pour le moment , d'envisager la réalisation d'un tel logiciel .Toutefois , nous pouvons tenter , dès maintenant , de prendre en compte les réflexions émises dans les paragraphes précédents pour préciser notre projet pour un logiciel d'aide à la démonstration en géométrie .

IV Vers l'élaboration d'un cahier des charges

Le but d'un tel logiciel n'est pas la démonstration automatique de problèmes . Il doit être plus orienté vers la *recherche d'un chemin* pour la démonstration que vers une mise en forme de cette démonstration . Un tel système doit pouvoir *commenter , expliquer , justifier* son cheminement (M.Vivet). Ce système (appelé généralement *tutoriel intelligent* ou logiciel D'E.I.A.O) doit comporter :

- un module *expert* capable de résoudre les problèmes et de *justifier* sa démarche,
- un module *apprentissage* capable de fournir de l'aide et des explications à l'élève,
- un module *diagnostic* capable d'évaluer le travail de l'élève .

(Evidemment , c'est l'élève qui garde l'initiative de la démarche et du dialogue)

a) *Le module expert*

Le module expert doit comporter :

- un sous-module de *base de connaissances* ,
- un sous-module de *construction* de la figure,

- un sous-module d'*exploration* de la figure en *liaison* avec l'énoncé permettant de mettre en évidence les statuts , puis les propriétés de la figure et les figures prototypes ou extraites intéressantes ,
- un sous-module de *représentation* du problème sous forme de réseau mettant en évidence les statuts des assertions (traduisant la *compréhension* du problème) .
- un sous-module d'*élaboration d'un plan* ,
- un sous-module d'*organisation déductive* à partir d'un corpus d'énoncés (permettant de contrôler la démonstration d'un problème ou un sous-problème)

- Le sous-module de base de connaissances , ou encore dictionnaire

La partie expertise de ce module est presque achevée . Pour faire des démonstrations, l'élève a besoin d'une base de connaissances . Le logiciel doit donc lui permettre de consulter les définitions , théorèmes et propriétés , un peu comme dans une encyclopédie . Pour chaque objet , il y a une dizaine de rubriques qui reprennent les idées mises en évidence précédemment , comme , par exemple :

- définition avec différentes représentations , animations des figures .
- théorèmes avec exemples et contre-exemples animés . Etude systématique des réciproques et de l'effet de l'absence d'une des entrées du théorème .
- figures extraites, figures prototypes , sur - figures .
- arbre des *spécialisations* et des *généralisations* de l'objet , sous forme de réseau sémantique (cf ci-dessus le réseaux sémantique du parallélogramme).

Pour une réalisation informatique , la représentation orientée objet est particulièrement bien adaptée . Le logiciel HYPERCARD (Macintosh) donne actuellement la possibilité d'une réalisation rapide de ce module par des non spécialistes : c'est le premier objectif de notre groupe I.R.E.M.

- Le sous-module de construction de figures

Un module ayant les caractéristiques mises en évidence auparavant dans Géophile et une communication homme-machine analogue à celle de Cabri-géomètre conviendrait parfaitement .

- *Les sous-modules exploration de figures et représentation du problème* nécessitent , à notre avis , une représentation des connaissances adaptée à la modélisation de la compréhension dont nous ne disposons pas actuellement .

- *Le sous-module d'élaboration d'un plan*

Ce sous-module doit comporter des méta-règles pour effectuer le *choix* des connaissances à appliquer . Ces méta-règles manipulent des heuristiques et permettent de calculer un coût et un espoir pour chaque plan candidat en fonction du *contexte* .Le plan choisi est le meilleur vis à vis d'une note calculée à partir de ces valeurs coût / espoir (M. Vivet) . En cas d'échec du plan , le système refait un nouveau choix de plan . Nous avons déjà mis en évidence un certain nombre de méta-règles , mais le travail est loin d'être terminé. L'expérimentation menée avec les élèves sur l'élaboration de plans nous apportera , sans doute , de éléments supplémentaires .

b) Le module apprentissage

Nous rappelons que c'est l'élève qui doit garder l'initiative de la démarche et du dialogue . En particulier , dans l'élaboration de réseaux , l'élève doit avoir la possibilité de les *organiser* comme il le désire . Le module *apprentissage* doit comporter :

- un sous-module de *construction* de la figure,
- un sous-module d'*exploration* de la figure en *liaison* avec l'énoncé
- un sous-module de *représentation* du problème sous forme de réseau mettant en évidence les statuts des assertions (traduisant la *compréhension* du problème) .
- un sous-module d'*organisation déductive* à partir d'un corpus d'énoncés (permettant de contrôler la démonstration d'un problème ou un sous-problème)
- un sous-module d'*élaboration d'un plan*
- un sous-module de *démonstration*

Une telle structure permettrait de commencer l'apprentissage de la démonstration en occultant le sous-module d'*élaboration d'un plan* correspondant à la partie heuristique de la démonstration pour en faire comprendre les *règles du jeu* .

- le sous-module d'exploration de la figure

L'élève peut entrer ou choisir un exercice dans un fichier .Il construit la figure . Il y a ensuite un contrôle de la figure en liaison avec l'énoncé :

a) la figure prend-elle en compte toutes les hypothèses de l'énoncé ?

b) la figure prend-elle en compte uniquement les hypothèses de l'énoncé (pas de figure particulière)?

Si l'une des deux réponses est négative , le logiciel doit pouvoir le signaler immédiatement à l'élève avec une justification , afin qu'il recommence sa construction.Cela nécessite pour le logiciel une comparaison des caractéristiques de la figure avec les hypothèses de l'énoncé de l'exercice .

c) recherche de figures extraites ou prototypes .

- un sous-module d'organisation déductive

Dans un premier temps, ce module doit permettre de travailler les seuils 1 et 2 définis en (M.-A. Egret et R.Duval) à partir d'énoncés sur lequel le travail d'exploration de la figure aura été mené .

Dans un second temps , il permettra à partir du corpus d'énoncés (fourni pour un problème particulier) de contrôler l'organisation déductive .

Enfin , il permettra le contrôle d'une démonstration dont le plan a été explicité .

- un sous-module d'élaboration d'un plan

L'élève a la possibilité de construire et de faire contrôler un plan de démonstration pour un problème ou un sous-problème .Le logiciel doit pouvoir *s'adapter au niveau* de l'élève :

- plan complet : Le logiciel ne doit pas imposer de recherche à celui qui a trouvé , ni exiger trop de justifications quand il n'y a pas de difficultés de résolution .

- plan incomplet : Le logiciel doit accepter un plan incomplet et proposer des aides adaptées pour le compléter .

- plan inexistant : Si l'élève est complètement bloqué , le logiciel doit proposer une aide pour trouver un plan .

Le logiciel doit pouvoir contrôler la *cohérence* du plan , compte-tenu des hypothèses , proposé par l'élève.

- *un sous-module de démonstration*

L'élève doit avoir le choix entre plusieurs possibilités :

a) Démontrer la première question de l'exercice (s'il pense savoir faire), construction du réseau de démonstration correspondant.

b) Démontrer une étape intermédiaire (s'il pense savoir faire), construction du réseau de démonstration correspondant .

c) Supposer la première question et démontrer la deuxième : plus généralement démontrer une étape du plan , construction du réseau de démonstration correspondant .

d) Assembler les différents réseaux de démonstration déjà construits.

- *différents types d'aide :*

a) aide " marche arrière " : mise en évidence des buts et sous-buts (statuts), proposer des heuristiques (comme elles ont été présentées ci-dessus) pour prouver tel but.

b) aide " marche avant " : mise en évidence des hypothèses (statuts), proposer des heuristiques en fonction du contexte (hypothèses et ce qui a été démontré).

c) aide pour trouver un plan

d) possibilité de consulter la base de connaissances (définitions et théorèmes , avec les représentations qui en ont été données et réseaux sémantiques des objets géométriques).

e) Possibilité de retour en arrière : en cas d'échec du plan , possibilité de récupérer tout le travail encore valable : les sous-réseaux de démonstration corrects sont conservés et disponibles .

f) Possibilité de faire le point sur l'état du travail : à tout moment , l'élève doit pouvoir savoir où il en est , avoir un bilan de son travail (les étapes démontrées , le plan en cours).Une représentation claire de l'état du travail doit être fournie. Cette représentation sera donnée sous forme de *réseaux* (réseau associé au plan , réseaux de démonstration associés aux sous-problèmes) avec mise en évidence du *contexte* .

c) Le module diagnostic

Il nous paraît prématuré de réfléchir à ce module qui devrait , comme le disaient E.Chouraki et C.Inghilterra , évaluer et mémoriser les acquisitions de l'apprenant pour mieux définir son profil scolaire et modifier ou adapter sa progression pédagogique !

Conclusion

Les logiciels d'aide à la démonstration en géométrie existant actuellement ont été élaborés à partir d'une modélisation du comportement humain en fonction du système informatique disponible .C'est une attitude naturelle et conseillée si l'on veut aboutir assez rapidement à des réalisations concrètes . Encore faut-il que ces réalisations soient des *aides efficaces* à l'apprentissage . A long terme , il est sûrement préférable de *modéliser* d'abord le comportement humain , et de concevoir un dispositif informatique prenant en compte cette modélisation . L'efficacité des logiciels s'en ressentira .

Actuellement , parmi les logiciels d'aide à la démonstration en géométrie , aucun module expert n'est satisfaisant : la partie *compréhension de l'énoncé* par la modélisation de l'organisation des connaissances de l'expert n'est pas prise en compte .Il n'existe pas encore une représentation des connaissances adaptée à une telle modélisation (La représentation des connaissances de Géophile bien adaptée à la construction de figures , n'est pas adaptée à une modélisation de compréhension et de démonstration).La démarche démonstrative de l'expert n'est pas encore suffisamment explicitée : l' analyse cognitive en ce qui concerne *la découverte de la solution* est encore insuffisante . Ensuite, la réalisation d'un tutoriel intelligent passe par la réalisation d'un module de *diagnostic* de l'élève et d'un module *d'apprentissage* : ces modules ne sont pas réalisables sans une analyse didactique approfondie . Ensuite , on pourra envisager la réalisation informatique de ces modules .

Pour l'instant , il est possible de réaliser des modules *plus modestes* destinés à être intégrés ensuite dans un projet plus ambitieux de tutoriel intelligent comme un module de dictionnaire , de construction de figures , et d'exploration de figures .

REFERENCES

- Allard J.-C., Pascal C.**, 1986 , Euclide , un langage pour la géométrie , *Logedif* , IREM de Grenoble , Cedic-Nathan .
- Anderson J. R., Boyle C.F., Farrell R., Reiser B..J.**, 1987, Cognitive principles in the design of computer tutors , in *Modelling Cognition* , Editeur P Morris , John Wiley & Sons Ltd .
- Bonnet C. , Hoc J.-M. , Thiberghien G.**, 1986 , in *Psychologie et intelligence artificielle et automatique* , Pierre Mardaga Editeur .
- Bellemain F.**, 1988, Cabri-géomètre : un cahier de brouillon informatisé pour la résolution de problèmes en géométrie plane , in *Petit X n°16* , Editeur IREM de Grenoble .
- Braun G.**, 1989 , Géophile : un outil pour la construction géométrique , in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* , vol n° 2 , Editeur IREM de Strasbourg .
- Cuppens R.**, 1987, AM de Douglas B. Lenat : I am that I am , in *Actes de l'Université d'Intelligence artificielle et enseignement des mathématiques* , Editeur IREM de Toulouse .
- Chouraki E., Inghilterra Carlo** , 1987 , Conception d'une base de connaissances orientée objet pour l'EAO de la géométrie , in *Actes de l'Université d'Intelligence artificielle et enseignement des mathématiques* , Editeur IREM de Toulouse .
- Groupe Intelligence Artificielle : Egret M.- A., Guin D., Kuntz G. , Métivier G., Vogel N.**, 1988, Réflexions sur l'apprentissage de la démonstration en géométrie de 4^{ème} autour d'un logiciel in *L'ouvert n° 52* , Editeur IREM de Strasbourg .
- Fontaine M.D.**, 1987, Logiciel d'aide à la résolution de problèmes de géométrie, in *Actes de l'Université d'Intelligence artificielle et enseignement des mathématiques* , Editeur IREM de Toulouse .
- Gras R.**, 1988, Aide logicielle aux problèmes de démonstration géométrique dans l'enseignement secondaire , in *Petit X n°17* , Editeur IREM de Grenoble .
- Guin D., Rousselot F.** , 1987 , Aide à la recherche d'une démonstration (géométrie de 4^{ème}), *Actes de l'Université d'Intelligence artificielle et enseignement des mathématiques*, Editeur IREM de Toulouse .
- Holland G.**, 1988, Un logiciel de résolution de problèmes de preuve en géométrie utilisé en tant qu'expert en système tutoriel , in *Actes du premier colloque franco-allemand de Didactique des mathématiques et de l'informatique* , Editeur La Pensée Sauvage , F-38002 Grenoble .

- Pastre D.**, 1987, Représentation et expression de connaissances mathématiques pour démontrer automatiquement des théorèmes, in *Actes de l'Université d'Intelligence artificielle et enseignement des mathématiques*, Editeur IREM de Toulouse .
- Pilat Informatique Educative**, 1988, Géométrie plane , *St Appolinard 42410 PELUSSIN*.
- Pluinage F., Rauscher J.-C.**, 1986, La géométrie constructive mise à l'essai , in *Petit X n°11*, Editeur IREM de Grenoble .
- Polya G.**, 1965 , Comment poser et résoudre un problème , Editeur Dunod .
- Rogalski J., Samurcay R.**, 1987, Enseigner des méthodes , in *Cahier de didactique des mathématiques* , Paris VII .
- Schoenfeld A.** , 1985, Mathematical problem solving , Editeur Academic Press .
- Vivet M.** , 1988, Présentation d'un système expert en mathématique CAMELIA , un logiciel pour raisonner et calculer . Une approche des tutoriels intelligents , in *Bulletin de liaison n° 1 commission inter-IREM Mathématiques et Intelligence Artificielle* , Editeur IREM de Toulouse .