REFLEXIONS ET EXPERIENCES SUR L'INTRODUCTION DES NOMBRES NEGATIFS

L.HEFENDEHL - HEBEKER

L'histoire des mathématiques montre qu'il s'est passé plusieurs siècles avant que les nombres négatifs soient non seulement reconnus comme un outil indispensable mais aussi philosophiquement acceptés. Il y avait à cela des difficultés de sens sous-jacentes à une compréhension des nombres, selon laquelle le concept de nombre était subordonné à celui de grandeur. Comment représenter des grandeurs qui sont moins que rien ? On a cherché en vain un modèle concret homogène qui explique de façon satisfaisante toutes les opérations de calcul avec les négatifs.

Au début du 19ème siècle il s'est produit un changement de point de vue fondamental. Pouvant se caractériser comme passage du point de vue concret à un point de vue formel, il a conduit à une interprétation correcte des nombres négatifs. Ce changement, commencé avec M. Ohm et G. Peacock, a trouvé son point d'aboutissement chez H. Hankel. Il consiste à fonder le modèle expliquant les négatifs sur un élargissement du domaine des nombres dans le cadre d'une arithmétique formelle, indépendamment de toute considération de contenu comme la quantité ou la grandeur.

L'idée directrice en a été le principe de la permanence des lois formelles. Les opérations de l'arithmétique formelle doivent être définies de telle manière que les opérations de l'arithmétique ordinaire (et par suite celles de l'arithmétique des nombres naturels) y apparaissent comme des cas particuliers. Cette compatibilité formelle règle le conflit entre la signification intuitive et la construction abstraite, de la manière suivante :

— Les nouveaux objets de l'arithmétique formelle, comme par exemple les négatifs ou les complexes, sont de nature purement intellectuelle. Ce sont des "choses pensées" (Hankel) auxquels peuvent correspondre, ou non, des objets réels.

— Ces nouveaux objets ne sont d'aucune manière coupés de toute signification relative à un contenu, au contraire. Avec le domaine élargi des nombres, s'ouvre un espace plus large, d'interprétation et d'utilisation. Si aucun moyen incontestable n'avait été obtenu auparavant pour dégager les nombres négatifs de la lecture des phénomènes, on peut désormais les introduire dans des domaines variés avec un plus grand succès, et, par exemple, les reconnaître en physique comme un moyen économique de description.

Les élèves doivent aussi accomplir ce passage du point de vue concret au point de vue formel, pour l'acquisition des nombres négatifs. Des recherches didactiques ont souligné que, pour cela, ils devaient franchir des obstacles intellectuels analogues à ceux rencontrés dans l'histoire des mathématiques. Pour une didactique des nombres négatifs deux questions surgissent alors :

(1) Jusqu'où un contenu intuitif lié à des données observables donne-t-il accès aux nombres négatifs, conformément au principe didactique selon lequel on va "de l'intuition au concept" c'est-à-dire "du concret au général"?

(2) Le point de vue formel peut-il être développé de façon continue à partir du concret ou un moment de rupture doit-il nécessairement être introduit dans le processus d'apprentissage ? Comment doit-on organiser la situation conduisant à ce saut si une construction formelle d'extension au sens mathématique ne peut pas être exigée des élèves ?

De nombreux modèles didactiques ont été proposés pour l'introduction des nombres négatifs, par exemple celui des flèches. Ceci utilise le fait que le corps des rationels est isomorphe à un espace vectoriel de dimension 1. Mais de tels modèles ne peuvent échapper à la difficulté suivante : certes on peut repérer la structure algébrique dans le modèle, si on possède déjà le point de vue théorique; mais à l'inverse peut-on dégager cette structure à partir du modèle ?

Einführung der negativen Zahlen

A la suite de pré-expériences qui nous ont conduit à cette approche du problème, nous avons entrepris une nouvelle expérience d'enseignement pour introduire les nombres négatifs. Elle s'est déroulée selon les étapes suivantes :

(1) Révision préparatoire des nombres et de leur signification. Une reprise des acquisitions arithmétiques antérieures doit faciliter la thématisation explicite du changement de point de vue nécessaire.

(2) Démarrage : compter en descendant en dessous de zéro; compter dans les deux sens sur la droite numérique Le comptage a été utilisé comme une technique introductive fondamentale et a servi pour s'orienter dans l'ensemble linéairement ordonné des nombres relatifs. Il a été mis en relation avec les opérations d'addition et de soustraction naïvement comprises.

(3) Les nombres positifs et négatifs en situation d'utilisation. A cette étape on a discutré de l'utilisation des nombres négatifs dans des situations pratiques (thermomètres, niveaux, bilans)

(4) Addition et soustraction des nombres rationnels. Cette étape a été la plus difficile ; elle exigeait l'abandon du point de vue naïf et une première familiarisation avec le point de vue formel. A l'aide d'une séquence de problème typiques, des règles de calcul possibles ont été un moment discutées, alors les règles "officiellement valables" ont été révélées par l'enseignante. A l'aide d'un modèle de plaquettes, elles ont été représentées; des séquences de problèmes, destinés à faire apparaître la permanence des lois formelles, ont été proposés pour renforcer la confiance dans leur pertinence.

(5) Multiplication et division des nombres rationels. La procédure coûteuse concernant l'addition/soustraction a tellement ancré la compréhension de l'aspect formel de l'arithmétique que la multiplication s'est trouvée très vite acquise à l'aide d'une table et que la division l'a été plus rapidement encore comme l'opération inverse correspondante.