LES FIGURES AIDENT - ELLES A VOIR

EN GEOMETRIE ? .

V. PADILLA

1
The figures are generaly admitted as illustration of a geometrical situation : they guide the intuition during research. But perception of geometrical figures requires recognition of different possible reconfigurations, which are not all immediately obvious. This recognition and the selection of the relevant reconfiguration for a given situation takes a long time for most of students. Very often they don't succed.

Le rôle intuitif des figures en géométrie est une opinion communément admise. Les figures permettent un accès plus direct, plus riche et moins coûteux qu'un texte à une situation mathématique " En fait et notamment en géométrie du plan , la figure est l'objet d'étude premier "et" la figure permet à l'élève une prise de contact concrète quasi-physique avec la situation étudiée ".(BESSOT, 1983, page 35) .
Les figures dispensent même d'explications ou de justifications .
Régine DOUADY commente ainsi un problème proposé : "dans le problème ci - dessus, on a compté les demi-carreaux : 2 demi-carreaux valent un carreau, ça se voit sur le dessin " (DOUADY, 1984, page 91) .
Tout cela reflète la conviction généralement partagé qu'il suffirait de "faire une figure" pour que les élèves voient ! .
En fait on confond la perception de formes élémentaires isolées comme celle d'un trait, celle d'un carré, ou d'un rond, et la perception de figures illustrant des situations géométriques et qui sont des combinaisons de ces formes élémentaires. La perception de formes élémentaires donne lieu à une reconnaissance immédiate : on les voit tout de suite. Mais la perception des secondes ouvre sur plusieurs reconfigurations possibles, lesquelles ne se voient pas toutes et tout de suite La reconnaissance des différentes reconfigurations possibles et la sélection de la reconfiguration pertinente pour un problème peut prendre du temps. Et même beaucoup d'élèves peuvent ne pas y parvenir

---

1 © Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
3 (1990) (p. 223-252) IREM de Strasbourg

Cela est vrai pour des figures complexes illustrant un problème difficile, mais aussi pour des figures très simples illustrant des exercices élémentaires de géométrie. "Voir" sur une figure relève d'un apprentissage dont l'importance reste trop souvent ignorée.

L'intuition que donne une figure géométrique ne relève pas seulement des lois gestaltistes de la perception. Elle dépend aussi d'autres types d'appréhensions comme l'appréhension opératoire ou l'appréhension discursive (DUVAL, 1988). Dans l'initiation au raisonnement en géométrie, les situations relevant de l'appréhension opératoire, et plus particulièrement celles qui correspondent à des modifications méréologiques, jouent un rôle privilégié . Ce sont celles dans lesquelles une figure est partagée en sous-figures, lesquelles peuvent être recombinées en une autre reconfiguration. Ces modifications méréologiques jouent un rôle important pour illustrer nombre de traitements mathématiques relatifs à la comparaison et au calcul des surfaces. Le rôle intuitif d'une figure pour cette classe de problèmes repose sur l'opération de reconfiguration intermédiaire. Le partage d'un carré ou d'un rectangle en petits carreaux en est un exemple trivial. Il donne lieu à des reconfigurations intermédiaires qui sont loin d'être évidentes pour tous les élèves .

Dans le cas de cette appréhension opératoire, le rôle intuitif d'une figure géométrique dépend de plusieurs facteurs :

- le fait que le regroupement pertinent des parties élémentaires forme une reconfiguration qui est convexe ou non convexe
- le fait que le fractionnement de la figure en parties élémentaires soit donné au départ ou qu'il doive être trouvé
- le fait qu'une même partie élémentaire doive entrer simultanément dans deux regroupements intermédiaires à comparer " (DUVAL, 1988, page 66, 67) .

Ces facteurs permettent d'évaluer le rôle intuitif d'une figure et d'analyser le type de difficultés qu'elle peut présenter .

C'est dans cette perspective que nous avons choisi 6 exercices élémentaires de géométrie, dont les figures exigent l'opération de reconfiguration intermédiaire. Nous les avons présentées à 7 binômes de 6ème et à 7 binômes de 5ème (11-13 ans), pris dans des classes différentes . Nous avons enregistré les temps de résolution (ceux-ci pouvant aller de 1 à 20 minutes pour le même exercice) ainsi que les échanges entre les élèves .

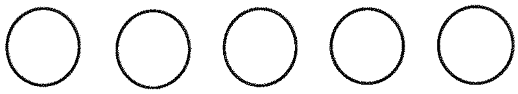
Toutes les données recueillies mettent en évidence que voir sur une figure est une démarche complexe et que, dans le cas des modifications méréologiques, cette vision dépend bien des facteurs que nous venons d'indiquer.

PRESENTATION DE PROBLEMES .

Les problèmes ont été présentés dans l'ordre suivant:

PROBLEME N° 1:

On a cinq gâteaux égaux. Comment les partager entre 4 enfants, de façon à ce qu'ils reçoivent des parts égales ?.

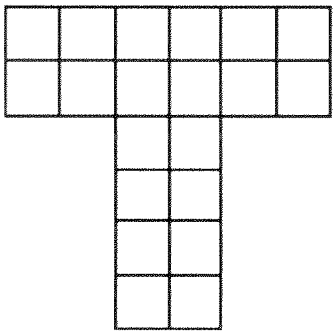


Le traitement de ce problème ne requiert aucune opération de reconfiguration. Il exige au contraire que l'on coordonne deux opérations : l'une de correspondance, l'autre de partage.

L'élève peut mettre en correspondance 4 gâteaux et 4 enfants et puis partager le gâteau restant et mettre en correspondance les morceaux et les enfants.
Ou encore, partager les 5 gâteaux et mettre en correspondance les morceaux et les enfants.

PROBLEME N° 2

Cette figure est formée de cinq carrés. Peut-on la découper en quatre morceaux superposables ?.Marquer les traits du découpage sur la figure.

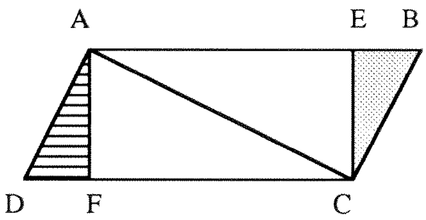


Ce problème demande explicitement une reconfiguration par assemblage de carrés à partir d'un fractionnement en carrés déjà donné Cette reconfiguration est le but du problème. Le regroupement pertinent de parties élémentaires forme des sous-figures qui sont non convexes et cela peut être aussi un facteur qui joue un rôle.important pour trouver la reconfiguration pertinente parmi celles qui sont possibles.

Ce problème a été utilisé dans le questionnaire pour l'Evaluation du Programme de Mathématiques Fin de Sixième, 1987, réalisé par l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public).
Selon les auteurs de cette évaluation, la solution de ce problème n'est pas évidente, car il n'existe pas de procédure apprise directement utilisable.

PROBLEME N°3:

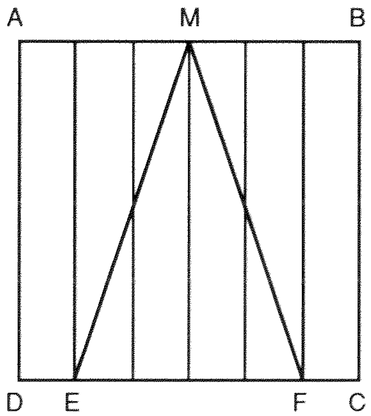
ABCD est un parallélogramme et (CE) // (AF). Pourquoi peut-on dire que l'aire hachurée et l'aire en pointillé sont égales ?.



Ce problème présente une reconfiguration mais avec une difficulté supplémentaire: le dédoublement de certaines sous-figures. En effet, les aires AEC et AFC appartiennent simultanément aux parallélogrammes ABCD et AECF.

PROBLEME N° 4:

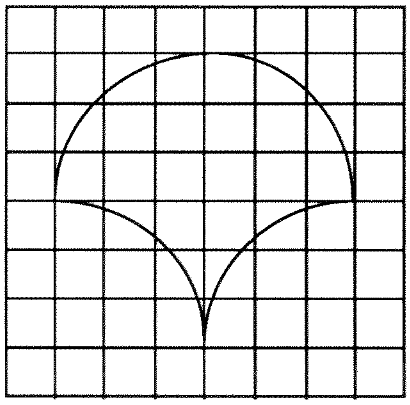
ABCD est un carré partagé en bandes égales. Prouve que les aires AMED, MEF et MBCF sont égales.



Ce problème présente une reconfiguration intermédiaire mais non explicitement demandée. L'élève peut faire le regroupement approprié de parties élémentaires, mais elles sont déjà données. Le fractionnement en 6 parties est indiqué.

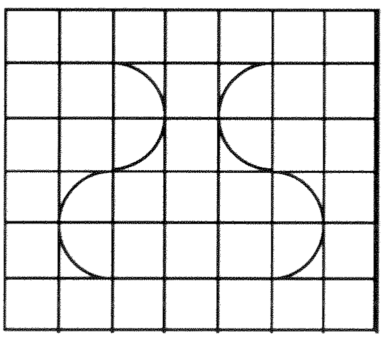
PROBLEME N° 5:

Quelle est l'aire (en carreaux) de cette surface ?.



PROBLEME N° 6 :

Quelle est l'aire (en carreaux) de cette surface ?.

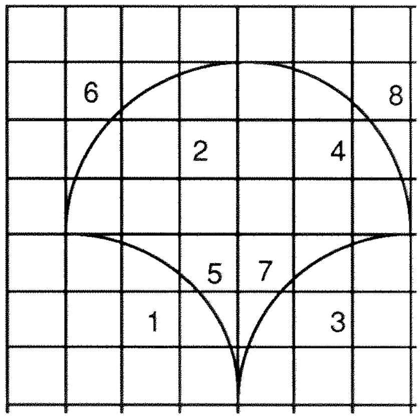


Ces problèmes présentent une reconfiguration par complémentarité de formes mais sur fond de quadrillage. Le fait d'avoir un fond quadrillé peut jouer un rôle très important sur les différents types de reconfigurations intermédiaires .

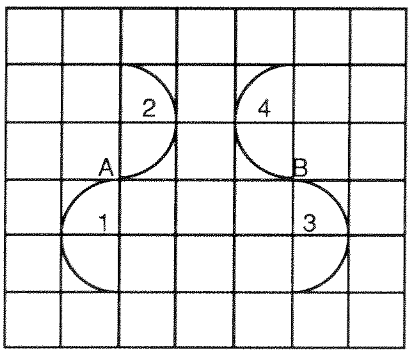
Le quadrillage peut induire une procédure de comptage des petits carreaux. Dans ce cas il y aura une reconfiguration pour les petits carreaux qui ne sont pas entiers. C'est une reconfiguration où le support quadrillage est privilégié Le quadrillage peut induire, aussi, une reconfiguration de la forme globale (vase) en une autre forme globale (rectangle). C'est une procédure plus gestaltiste, où la forme est privilégiée .

Par exemple pour le problème N° 5 :

l'élève peut mettre le quart de cercle 2 à la place de 1 et le quart de cercle 4 à la place de 3; ou la parcelle 5 à la place de 6 et la parcelle 7 à la place de 8, privilégiant de cette façon la figure et non le fond ; mais dans chaque cas, les parcelles sont différemment orientées et cela peut aussi constituer un obstacle pour la reconfiguration intermédiaire, qui donnera dans chaque cas un rectangle de 3 sur 6



Dans le problème N°6:



l'élève peut aussi faire une reconfiguration intermédiaire en mettant le demi-cercle 1 à la place de 2 et le demi-cercle 3 à la place de 4, pour former une figure plus simple : un rectangle de 4 sur 3.

Mais de même que dans le problème N° 5, l'élève peut rencontrer des obstacles pour réaliser l'opération de reconfiguration intermédiaire. En effet, les demi-cercles 1 et 3 sont intérieurs, alors que 2 et 4 sont extérieurs à la figure ; les paires de demi-cercles 1 et 2, 3 et 4 sont en sens contraires. Il y a des centres de symétrie en A et en B qui pourraient rendre plus facile cette opération dans le problème N° 6 que dans le problème N° 5.

C'est, du moins, une idée à-priori que nous avons eus.
Nous présentons ci-dessous un tableau qui résume les caractéristiques de chaque problème.

TABLEAU N° 1

Problème	*Opérations constituant la productivitéheuristique*	*Modes de sollicitation de la reconfiguration*
N°1	- Correspondance et partage du gâteau restant entre les enfants - ou partage des gâteaux et correspondance	- Pas de reconfiguration
N° 2	- Reconfiguration par assemblage	- Reconfiguration demandée explicitement - Fractionnement donné - Caractère non convexe des sous-figures résultant du regroupement pertinent.
N°3	- Reconfiguration	- Obstacle du dédoublement des sous-figures
N°4	- Reconfiguration intermédiaire.	- Reconfiguration non demandée explicitement - Fractionnement donné
N° 5 et N° 6	- Reconfiguration par complémentarité de formes.	- Fond quadrillé - Reconfiguration non demandée explicitement - Reconfiguration locale ou globale

METHODE DE L'EXPERIMENTATION.

L'expérience a été menée durant les cours de mathématique, aux mois de mai-juin 1988. Après avoir formé les binômes, nous sommes allés dans une salle très calme. Les élèves ont été informés du but de ce travail. Chacun a trouvé un magnétophone et un micro et l'expérimentateur a donné les consignes (nous avons fait une adaptation des consignes utilisées par Antoine BODIN dans la recherche pour son Diplôme de D.E.A.).

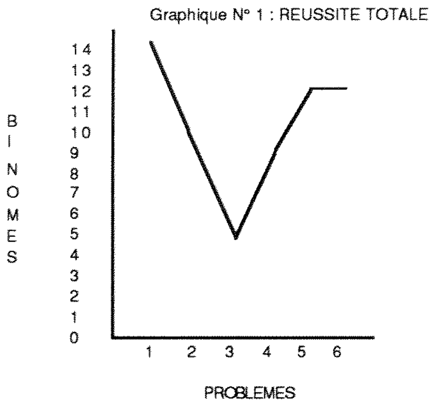
- Je vais vous proposer 6 problèmes que vous allez faire ensemble, en parlant normalement.
- Un magnétophone enregistre votre conversation pour me permettre de mieux com-

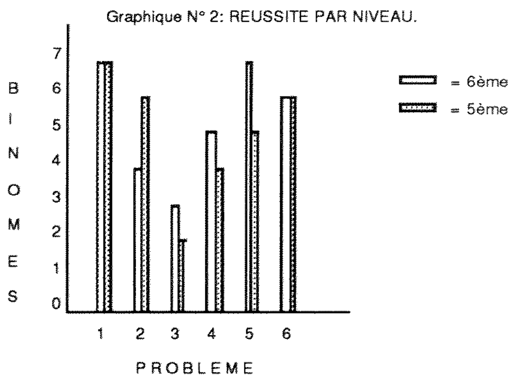
prendre ce que vous aurez fait. Je pourrai ainsi vous écouter plusieurs fois, mais personne d'autre que moi ne pourra vous écouter.
- Si vous ne réussissez pas un exercice, cela n'est pas grave, essayez seulement de faire pour le mieux possible .
- Vous pouvez me poser des questions, mais il n' est pas certain que je réponde à toutes vos questions .
- Vous travaillez directement sur la feuille que je vais vous donner ; la présentation est sans importance, vous pouvez faire des ratures .
- Vous allez commencer par le problème N°1 et une fois que vous l'aurez fini je vous donnerai le suivant .
- Vous ne devez pas avoir de souci de temps. Vous avez tout le temps nécessaire pour réfléchir.

Nous avons fait une fiche d'observation pour chaque binôme indiquant autant que possible les comportements observés, l'ordre de déroulement, les procédures utilisées et les temps de traitement (T T). La transcription des cassettes enregistrées a été réalisée très rapidement après les séances.

PRESENTATION GLOBALE DES PERFOMANCES.

Pour l'analyse des résultats nous nous sommes intéressés au comportement des élèves face aux 6 problèmes. Nous avons essayé d'analyser les différentes opérations qui ont constitué leur production heuristique, ainsi que les facteurs qui jouent sur la visibilité et les temps de traitement que chaque binôme a pris pour résoudre chaque problème.
Pour cette analyse nous avons déterminé six intervalles de temps :
A = 0"--- 30"
B = 1'--- 2'
C = 3'--- 7' (autour de 5')
D = 8'--- 12' (autour de 10')
E = 13' --- 20' (autour de 15')
F = plus de 20'
Ci-dessous nous avons des graphiques qui montrent :
- la réussite totale pour chaque problème (graphique N°1)
- la réussite totale de chaque niveau (6ème et 5ème) à chaque problème (graphique N°2) et
- l'allongement des T T (tableau N°2).





Dans le tableau suivant les chiffres représentent le nombre de binômes ayant réussi le problème, dans chaque classe de T T. Nous avons voulu, ainsi, représenter l'allongement des T T .

TABLEAU N°2: allongement des T T

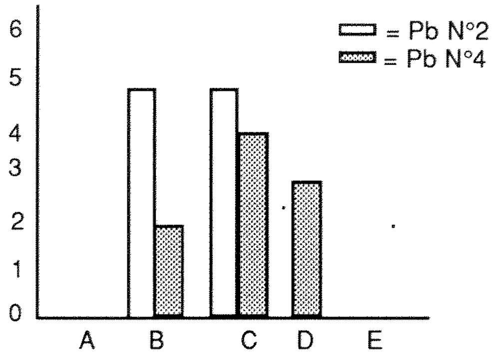
Problème	A 0"-30"	B 1'-2'	C 3'-7'	D 8'-12'	E 13'-20'
N°1	7	6	1		
N° 5	1	4	4		3
N° 6	4	2	4	2	
N° 2		5	5		
N° 4		2	4	3	
N° 3			2		3

Comme nous pouvons le constater, le problème N°1 a été le seul à obtenir 14/14 de réussite et en plus il a pris le plus petites T T (temps de traitement), des T T qui soulignent le caractère facile de la tâche demandée.

Nous voudrions rappeler que ce problème N°1 est différent de tous les autres, parce qu'il ne demande pas l'opération de reconfiguration. Constatons que l' opération constituant la productivité heuristique, est la correspondance et le partage; cela signifie que l'opération de correspondance et partage est beaucoup plus facile que l'opération de reconfiguration, pour les élèves de cette tranche d'âge .

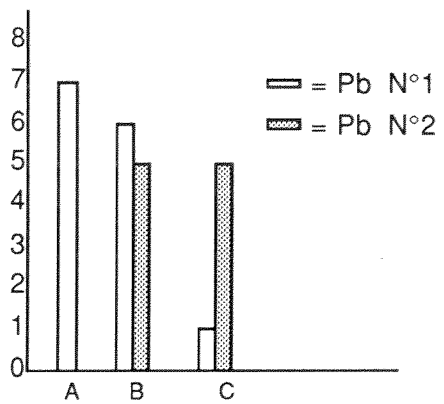
Les problèmes N°2 et N°4 ont un taux de réussite voisin (10/14 et 9/14 respectivement).Pour ces deux problèmes le fractionnement en sous-figures est déjà donné, mais dans le problème N°2 la reconfiguration est explicitement demandée tandis que dans le problème N°4 elle ne l'est pas.

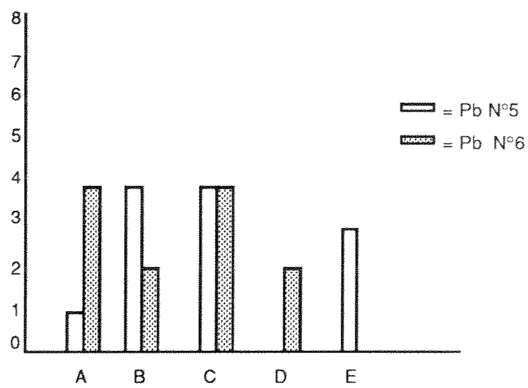
Cette différence se traduit par un allongement des T T pour le problème N°4.



Dans le graphique suivant , les chiffres réprésentent le nombre de binômes ayant résolu le problème dans chaque classe de T T .

Si nous faisons aussi une comparaison entre les problèmes N°1 et N°2, (le traitement du problème N°1 ne requiert aucune opération de reconfiguration, mais mise en correspondance et partage.Le problème N°2 demande explicitement une reconfiguration), nous pouvons observer une chute considérable de réussite (14/14 et 10/14 respectivement) ainsi qu'un allongement des T T ; nous pourrons en conclure que l'opération de reconfiguration n'est pas une opération évidente et que le caractère non-convexe des sous-figures résultant du regroupement pertinent, est un facteur-obstacle pour la visibilité de l'opération de reconfiguration.





Les problèmes N°5 et N°6 ont le même taux de réussite (12/14), et les mêmes caractéristiques (voir tableau N°1), mais le problème N°5 a pris le plus grand T T, différence qui pourrait provenir de l'ordre de présentation : d'abord le N°5 et après le N°6. Le problème N° 5 a été beaucoup plus réussi en 6ème qu'en 5ème (7/7 et 5/5 respectivement) et le problème N° 6 a eu le même taux de réussite pour chaque niveau (6/7), (voir graphique N°2).

Le problème N°3 a eu la plus faible réussite (5/14, graphique N°1) et a pris le plus grand T T (tableau N°2), nous pensons que l'obstacle du dédoublement d'objets a joué un rôle négatif très important pour la visibilité de l'opération de reconfiguration dans ce problème, parce qu'aucun des binômes n'a eu l'idée de une reconfiguration intermédiaire pour essayer de trouver la solution ; les cinq binômes qui ont donné une réponse acceptable ont recouru à l'action de mesurer.

En plus, nous pouvons dire qu' à l'exception du problème N°2, tous les autres ont eu un taux de réussite égal ou plus grand en 6ème qu'en 5ème (graphique N°2) et en général les élèves de 6ème ont pris les plus petits T T. Comme nous le verrons plus loin, cette différence s'explique par les procédures employées : les élèves de 5ème que nous avons eu ont moins fait appel que les élèves de 6ème à des procédures fondées sur la reconfiguration.

Cette différence des T T entre les niveaux (6ème et 5ème) est liée à l'opération qui a constitué la productivité heuristique de chaque binôme pour chaque problème.
Nous avons relevé, pour les problèmes N°5, N°6 et N°4, deux procédures utilisées :
- Reconfiguration
- Autre opération, que nous présenterons dans l'analyse particulière de chaque problème.
Nous obtenons les résultats suivants :

Problème	Réussite totale	Reconfiguration 6ème	5ème	Autre opération 6ème	5ème
N°4	9	4	2	1	2
N°5	12	5	1	2	4
N°6	12	5	3	1	3
		14	6	4	9

Il y a eu en total 33 cas de réussi parmi lesquels 20 l' ont été par utilisation de l'opération de reconfiguration : 14 cas de 6ème et 6 cas de 5ème .

PRESENTATION DE PROCEDURES POUR CHAQUE PROBLEME ET COMPARAISON DE LEUR "EFFICACITE".

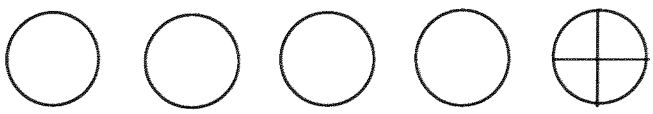
PROBLEME N°1:

Il a été réussite par 14/14 binômes . Nous avons observé deux types de procédures:
a - la procédure correspondance-partage-correspondance
b - la procédure correspondance-partage.

a- Correspondance-partage-correspondance

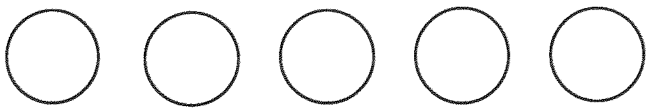
Dans ce cas les élèves ont fait d'abord la mise en correspondance de 4 gâteaux et des 4 enfants puis le partage du gâteau restant et la mise en correspondance des morceaux et des enfants, comme nous pouvons le voir dans quelques exemples du travail des élèves, ci-dessous:

BINOME K - H 6ème
On a cinq gâteaux égaux. Comment les partager entre 4 enfants de façon à ce qu'ils reçoivent des parts égales ?.



On donne un gâteau à chacun, et le dernier, on le partage en quatre parts égales

BINOME S - M 6ème

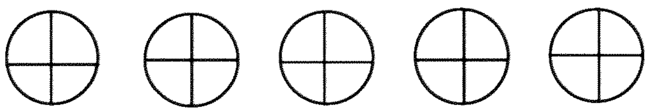


On partage 1 gâteau en 4 parts égales = 1/4
On donnera 1 gâteau à chaque enfant plus 1/4 du 5ème gâteau .

b - <u>Partage - correspondance :</u>

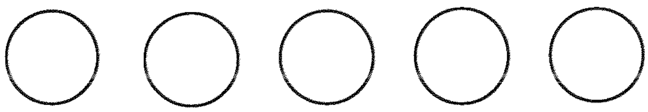
Les élèves ont fait d' abord le partage des 5 gâteaux en 4 morceaux égaux et puis ont mis en correspondance les morceaux et les enfants.

BINOME V - A 6ème.



Chaque enfant recevra 1 gâteau un quart.

BINOME F - M 5ème:



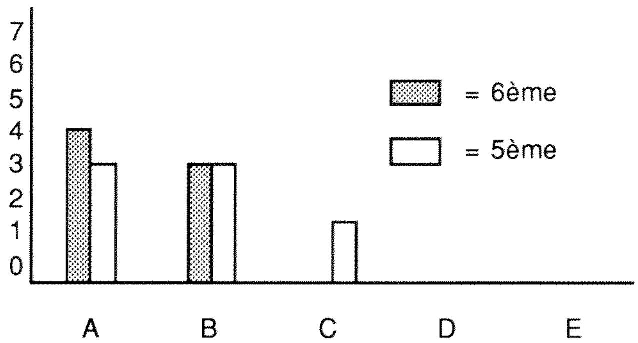
On partage chaque gâteau en 4 parts égales et on donne une part de chaque gâteau à chaque enfant.

Dans les deux types de procédures, le partage des gâteaux a été fait soit en l'indiquant sur la figure, soit mentalement .

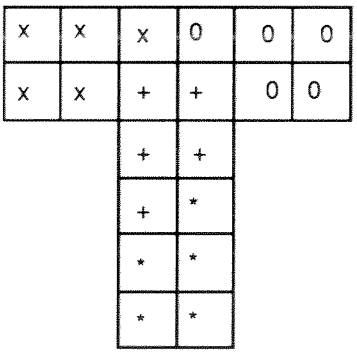
A la suite, nous avons établi un graphique qui montre les T T pour ce problème N°1 et un tableau avec le nombre de binômes de chaque niveau qui ont utilisé chaque procédure et les T T nécessaires pour chaque cas .

T T / Procédure	6ème			5ème			
	A	B	C	A	B	C	
a	2	1		2	2		7
b	2	2		1	1	1	7
	4	3		3	3	1	14

Problème N° 1

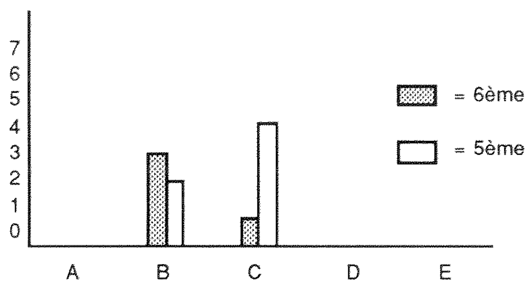


PROBLEME N°2 :



Il a obtenu une réussite de 10/14 binômes (4 de 6ème et 6 de 5ème). Le but de ce problème est une reconfiguration par assemblage, explicitement demandé, à partir d'un fractionnement donné ; c'est pourquoi la façon de procéder est unique. Ci-dessous, nous avons le travail du binôme F-I de 5ème .

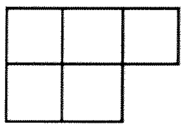
A la suite nous avons les T T utilisés dans ce problème :



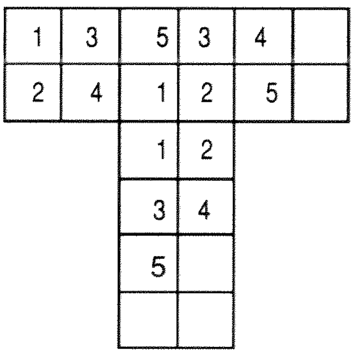
T T / NIVEAU	A	B	C	
6ème		3	1	4
5ème		2	4	6
		5	5	10

Quand ce problème a été utilisé dans l'Evaluation du Programme de Mathématiques fin de 6ème, par l'APMEP, il a eu une réussite de 22 %. Nous avons eu 4/7 binômes de 6ème qui ont réussi. Probablement la recherche du problème par binômes est un peu plus facile. Dans cette étude de l' APMEP, ce problème était considéré comme "une tâche pas facile".

Ce résultat peut être dû au fait que le regroupement pertinent des parties élémentaires forme une sous-figure non convexe

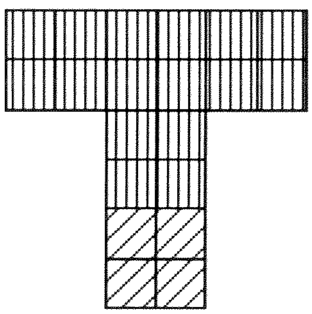


qui a été un obstacle, que nous avons constaté chez nos élèves, comme nous pouvons le voir ci -après dans le travail du binôme G-B de 5ème.



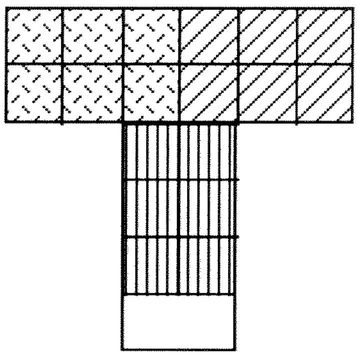
Ces élèves ont numéroté chacun des 5 petits carreaux qui forment chaque morceau superposable, mais ils n'ont pas réussi à cause d'un mauvais regroupement "Une sous-figure non convexe est plus difficile à détacher de la figure qu'une sous-figure convexe, car la loi perceptive de l'unité de contour n'est plus respectée". (MESQUITA A, 1989).

Pour les élèves de 6ème, faire la reconfiguration pour trouver les quatre morceaux superposables n'est pas facile ; nous avons le binôme F - H qui au lieu de trouver la "bonne reconfiguration" s'est limité à trouver l'axe de symétrie de la figure donnée ; et les élèves K - H ont fait deux piles de petites carrés, comme nous le pouvons constater ci-dessous



On fait deux piles : une pile de 4 grands carrés et une deuxième pile de 4 petits carrés.

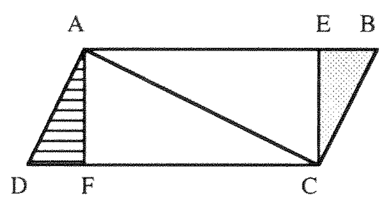
Et V- A a trouvé, de façon plus simple, seulement 3 morceaux superposables, sans "se préoccuper" des deux petits carrés qui restent.



On ne peut pas superposer les morceaux car il en manque un.

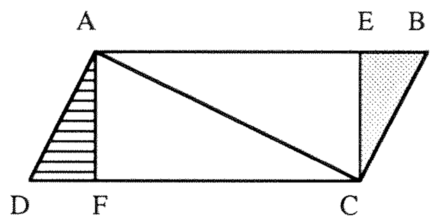
PROBLEME N° 3

Il a eu une réussite de 5/14 binômes (3 de 6ème et 2 de 5ème)
Tous les binômes qui ont eu une réponse acceptable ont recouru à une procédure reposant sur l'action de mesurer.
L'obstacle de dédoublement a joué un rôle très important pour la visibilité de l'opération de reconfiguration intermédiaire parce que parmi les 14 binômes que nous avons eus, aucun n'a pu le surmonter.
Aucun des binômes n'a fait la démarche qui consiste à considérer les aires AEC et AFC comme appartenant en même temps aux parallélogrammes ABCD et AECF, pour trouver les aires EBC et FDA comme le résultat de la différence entre ABC et AEC d'un côté et ACD et AFD de l'autre .



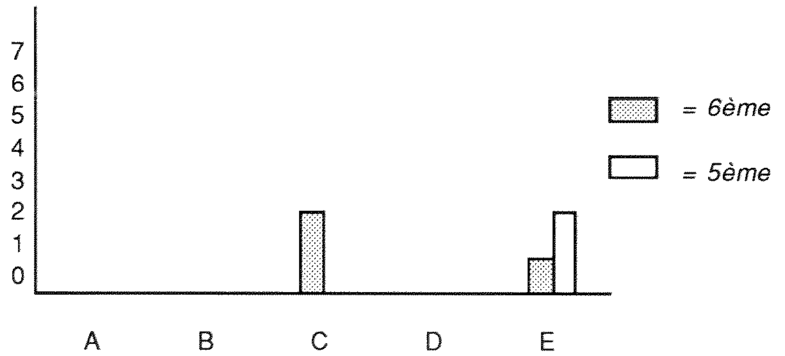
Tous les 5 binômes ont mesuré avec la règle et le rapporteur et ont trouvé (AF) perpendiculaire à (DC) et (CE) perpendiculaire à (AB). Ils ont dit que les triangles ADF et CBE sont rectangles, et après ils ont fait appel aux propriétés des côtés opposés d'un parallélogramme

Ci-dessous nous présentons, comme exemple, le travail du binôme F - F de 5ème.



Donc (EC) a même longueur que (AF)
Comme ABCD est un parallélogramme (AB) a même longueur que (DC) car se sont 2 côtés opposés
(AB) = (DC) et (AE) = (FC) donc (EB) = (DF)
AFD = EBC car leurs bases sont égales.

Le graphique suivant indique les T T de ce problème:



Nous pouvons conclure que ce problème a été une tâche très difficile pour les élèves que nous avons eus.

PROBLEME N° 4:
Il a eu une réussite de 9/14 binômes (5 de 6ème et 4 de 5ème).
L' appréhension opératoire des figures a joué un rôle essentiel pour la recherche de la solution, elle a conduit des modifications perceptives qui ont donné les types de procédures utilisés par les élèves .

Nous avons observé deux types de procédures :

a - La procédure de reconfiguration intermédiaire
b - La procédure de calcul par recours à des formules

a - Reconfiguration intermédiaire :

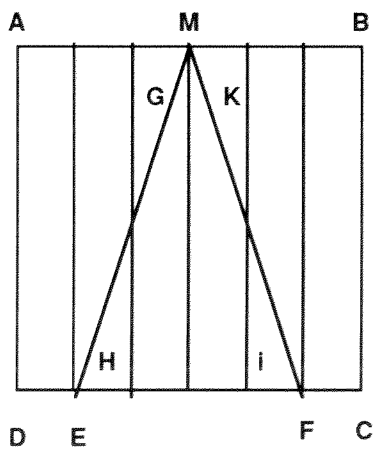
Cette procédure n'a pas besoin d'une formule, elle est centrée sur la perception de l'élève, il "voit" ou "ne voit pas". Dans ce problème, nous avons trouvé deux types de reconfigurations intermédiaires :

a1 - Complément de bandes égales :

L'élève perçoit chacune des aires MBCF, MFE et AMED comme formée par deux bandes égales; cette procédure a été possible quand l'élève a perçu que les deux morceaux des bandes étaient équivalents et, de plus, qu'en mettant un des morceaux à la place de l'autre, on obtient une bande complète .

Cette procédure a été utilisée par 5 binômes sur 9 qui ont réussi (3 de 6ème et 2 de 5ème).

Nous présentons un exemple de l'application de cette procédure, réalisée par le binôme F - H de 6ème et quelques expressions données par les élèves au moment où ils ont visualisé l'opération de reconfiguration.



ABCD est un carré partagé en bandes égales.
Prouve que les aires AMED, MEF et MBEF et MBCF sont égales

Le morceau H peut être mis dans la place G . Le morceau i peut être placé dans la place K. On obtiendra alors trois rangés de 2 bandes égales.

Binôme G - B (5ème) :

G : "Heureusement nous sommes d' accord que chaque figure a deux bandes , mais comment l'expliquer ?

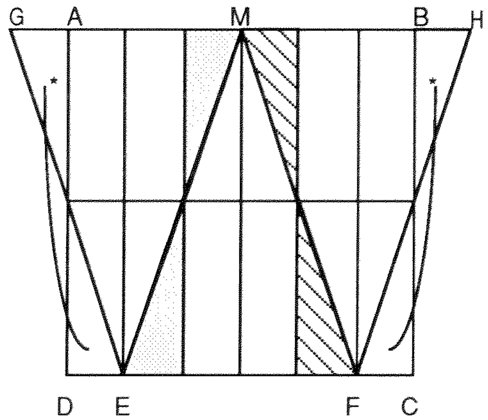
J'arrive à le sentir, à le prouver en pensant, mais disons, en écrivant j'ai plus de mal"

Binôme C - G (6ème) :
C : " Oui, les aires sont égales .
G : Pourquoi ?
C : Parce que ce morceau est égal à cet autre .
G : Mais , ça n' est pas mathématique.
C : Mais oui, parce que c'est une question de raisonnement . Regarde, chaque aire a deux bandes .
G : Mais il faut prouver, ça je ne sais pas comment ça se fait .
C : ça on le voit, c'est tout et c'est aussi un truc avec les fractions ."

Binôme A - E (6ème)
E : " C'est très facile ! Regarde. Chaque morceau a deux bandes, seulement elles sont découpées de différentes manières."

a 2 - Transformation de trapèzes en triangles :
Dans ce cas la reconfiguration intermédiaire a été la transformation des trapèzes AMED et MBCF en triangles congruents au triangle MFE.Elle a été appliquée seulement par un binôme (S - M de 6ème). Voici son travail .

PROBLEME n° 4
ABCD est un carré partagé en bandes égales.
Prouve que les aires AMED, MEF et MBCF sont égales.



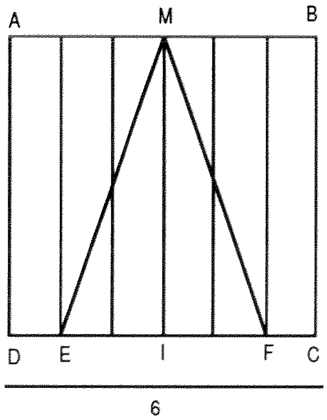
Les deux parties pointillées sont égales. En rajoutant la parcelle triangulaire dont l'angle droit a pour nom D sur le point A donne le triangle EGM égal au triangle MEF .
Les deux parties hachurées sont égales. En rajoutant la parcelle triangulaire dont l'angle droit a pour nom C sur le point B donne le triangle FMH égal au triangle MEF .

b - Calcul par recours à des formules :

Cette procédure a demandé à l'élève de se rappeler des formules pour faire les calculs des aires AMED, MFH et MBF. Elle a été utilisée par 3 sur les 9 binômes qui ont réussi.

Ci dessous nous avons un exemple de l'application de cette procédure, réalisée par le binôme V-C de 5ème. Elle a été utilisée par 3 sur les 9 binômes qui ont réussi. Ci-dessous nous avons un exemple de l'application de cette procédure, réalisée par le binôme V-C de 5ème .

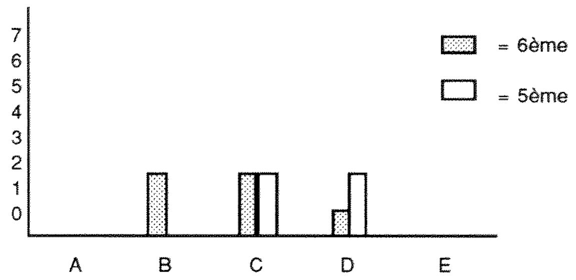
PROBLEME N° 4 :
ABCD est un carré partagé en bandes égales.
Prouve que les aires AMED, MEF et MBCF sont égales



MFE = 6 x 4 : 2 = 12
MBCI = 3 x 6 = 18
MIF = 2 x 6 : 2 = 6 donc
MBCF = 18 - 6 = 12
et comme on sait que AMED = MBCF (par superposition)
donc AMED = MBCF = MEF

Le tableau ci-dessous présente les procédures et les T T nécessaires de chaque niveau :

TT / Procédure	6ème				5ème				
	A	B	C	D	A	B	C	D	
a1		2	1				1	1	5
a2			1						1
b				1			1	1	3
		2	2	1			2	2	9



Nous voudrions faire remarquer que 2 sur 4 binômes qui ont échoué, ont appliqué la procédure de type b (calcul par recours à des formules). Ils ont fait soit une mauvaise application des formules d'aire, soit une erreur de calcul .

Le binôme V - A de 6ème a argumenté : "les aires AMED et MBCF sont égales, parce qu'elles ont le même forme, mais pas EMF parce qu'elle a une forme différente "
De l'analyse antérieure, nous pouvons conclure que les deux types de procédures employées se traduisent par :
- Une différence du réussite : tous les binômes qui ont recouru à une procédure reposant sur l'opération de reconfiguration ont réussi .
- Une différence des T T : tous les binômes qui ont appliqué l'opération de reconfiguration ont pris, généralement les plus petits T T .

PROBLEME N° 5 :
Il a eu une réussite de 12/14 binômes (7 de 6ème et 5 de 5ème)
Nous avons observé deux types de procédures :
a - La procédure de reconfiguration intermédiaire
b - La procédure de calcul par recours à des formules

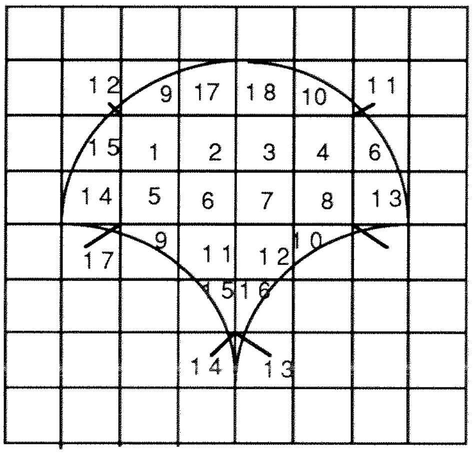
a - Reconfiguration intermédiaire :

L' appréhension perceptive de l'élève a joué ici un rôle essentiel ; le fond de quadrillage, support de la figure, a été aussi un facteur important. Nous avons trouvé deux façons différentes pour réaliser l'opération de reconfiguration intermédiaire :

a1 - Reconfiguration des petites carreaux :

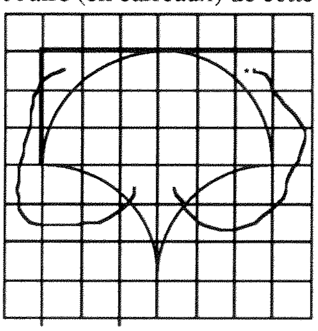
La perception a favorisé le fond quadrillé ; l'élève perçoit quelle est la parcelle qui complète chaque petit carreau incomplet. Cette procédure a été appliquée seulement par les élèves de 6ème. Ils ont compté d'abord les carreaux entiers et après ont trouvé la parcelle qui complètait les 10 petits carreaux qui ne l'étaient pas, pour en avoir au total 18. Ci - dessous nous avons un exemple de l'application de cette procédure, réalisé par le binôme C-G de 6ème et une expression donnée par ce binôme pendant son travail .

Quelle est l'aire (en carreaux) de cette surface ?



Il y a en tout 18 carreaux .
C : "Attends, il faut seulement compléter et compter, regarde....
G : Ah, oui , mais il faut justifier
C : Mais non, c'est pas nécessaire, tu est bête, tu te compliques la vie, on doit pas le démontrer, ça se voit ."

a 2 - Reconfiguration du rectangle global :
Dans cette reconfiguration la perception de l'élève a favorisé surtout la forme et pas le fond quadrillé, il a fait une certaine abstraction de la figure, en prenant le demi-cercle de la partie inférieure, ce qui donne un rectangle global, de 3 sur 6. En partageant le demi-cercle supérieur de la figure et en ajoutant ces deux quarts de cercle à la partie inférieure de la figure, on forme un rectangle global de 3 sur 6 (ou deux carrés de 3 sur 3) .
Ci-dessous nous avons deux exemples de l'application de cette reconfiguration du rectangle global, réalisés par les binômes A - E de 6ème et F - H de 6ème, respectivement et un dialogue entre les élèves A - E
Quelle est l'aire (en carreaux) de cette surface ?.

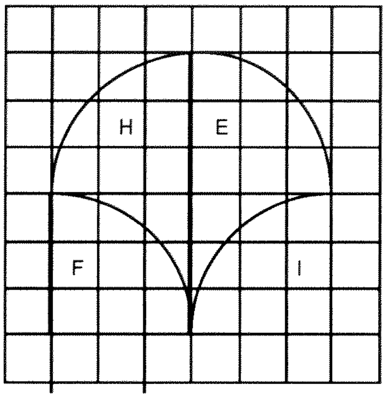


A-E :

On prend le demi - cercle et on y ajoute le reste au - dessus ce qui nous donne un rectangle de 3 sur 6

6 x 3 = 18

F-H :

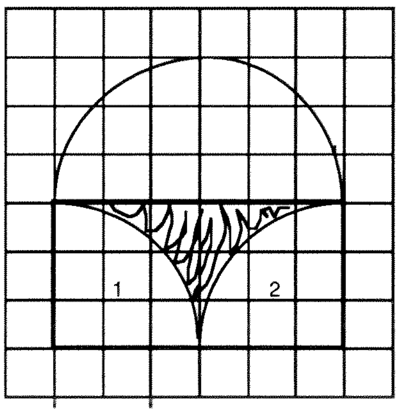


La partie H est à mettre dans la partie F et la partie E dans la partie I.On obtient alors 2 carrés de 3 carreaux de côté.
1er carré : 3 x 3 = 9
2ème carré : 3 x 3 = 9
Aire de la surface : 9 + 9 = 18

Binôme A - E
E - "Attends, ...Regarde .....ça, ça vient là tout simplement .
A - Ah voilà ....., c est bien ce que je t'ai dit .
E - ça donne un rectangle, ça 3 et ça 6, ça donne 3 x 6 = 18 carreaux
A - Vas - y. Comment on peut justifier ?
E - On demande pas de justifier. Il demande juste qu'elle ai l'aire en carreaux. Tu marques ce qui est demandé
A - Mais c'est très important de savoir comment on a trouvé
E - Ah ....., attends, je vais te montrer le truc, on prend le reste au-dessous et on le met au - dessus, comme ça vous le verrez."

b - Calcul par recours à des formules :
Cette procédure a été fondée sur l'application de formules d'aires et quelques calculs numériques qui parfois ont conduit les élèves à faire des erreurs
En général, les démarches suivies ici par les élèves ont été : la décomposition de la figure donnée en un demi-cercle supérieur, deux quarts de cercle inférieurs et en dehors de la figure, et un rectangle global, inférieur, de 3 sur 6. Après, ils ont fait le calcul respectif de chaque aire .

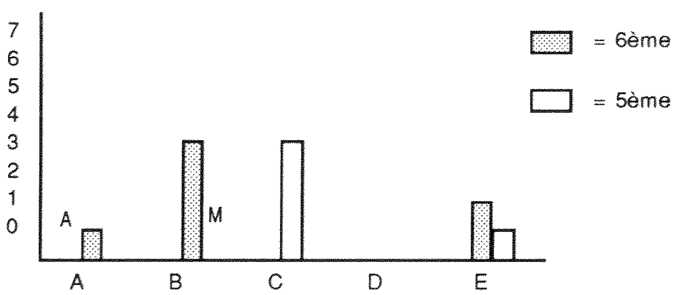
Ci-dessous nous pouvons voir un cas de l'application de cette procédure, fait par le binôme F - F de 5ème :
Quelle est l'aire (en carreaux) de cette surface ?.



Je calcule l'aire du demi-cercle
3 x 3 x 3,14 ÷ 2 = 28,26 ÷ 2 = 14,13
Nous calculons l'aire du rectangle
3 x 6 = 18
Nous calculons l'aire de 1 + 2
3 x 3 x 3,14 ÷ 2 = 14, 13
Nous calculons l'aire hachurée = aire du rectangle - (aire de 1 + aire de 2)
= 18 - 14,13 = 3,87 carreaux
Aire de la surface = 3,87 + 14,13 = 18 carreaux

Le tableau suivant montre le nombre de binômes de chaque niveau qui ont appliqué chaque procédure et les temps de traitement (T T).

T T / Procédure	6ème					5ème					
	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	
a1	1	3									4
a2		1						1			2
b					2			3		1	6
	1	4			2			4		1	12



Comme conclusion, nous pouvons dire que ces deux types de procédures se traduisent par :

1 - Une différence de réussite :

Tous les binômes qui ont recouru à une procédure reposant sur l'opération de reconfiguration ont réussi .

2 - Une différence des T T :

Tous les binômes qui ont recouru à une procédure reposant sur l'opération de reconfiguration ont pris moins de temps .

PROBLEME N° 6 :

Il a eu une réussite de 12 sur 14 binômes (6 de chaque niveau).Nous avons trouvé les deux mêmes types de procédures que pour le problème N° 5, à savoir :

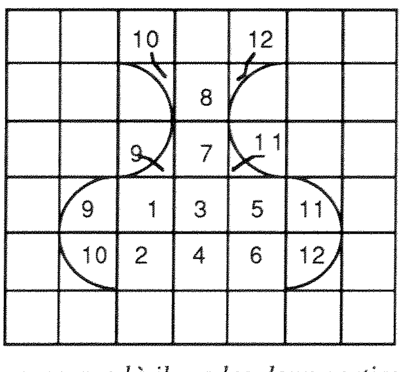
a - La procédure de reconfiguration intermédiaire

b - La procédure de calcul par recours à des formules

a - Reconfiguration intermédiaire :

a1 - Reconfiguration des petites carreaux:

Elle a été appliquée par 4 binômes de 6ème et 1 binôme de 5ème. Ci-dessous, nous avons un exemple de l'application de cette procédure, réalisé par le binôme C - G de 6ème et le dialogue entre les élèves du binôme K - H de 6ème pendant qu'ils appliquaient l'opération de reconfiguration des petits carreaux .



Il y a en tout douze carreaux.

On remarque que les carreaux 9 - 9, 10 - 10, 11 - 11, 12 - 12 , assemblés par deux forment un carreau .

Binôme K - H

K - "La surface de tout ça ?

H - Oui .

K - Il faut d'abord compter les carreaux entiers. On a .... 1, 2, ...7, 8 ......, 8 carreaux entiers. Maintenant ont doit compter les autres carreaux....

H - 9, parce que là il y a les deux parties. Quand on fait ça, là ....., c'est parce que ce morceau là y manque un bout qui est là .

K - Ah, oui

K - H ça là avec ça ..., ça donne .....et ça avec ça ...., ça avec ça ....., et la partie là .....

H - Voilà ... , en fin de compte on a .....1 , 2 , 3, ...8 , 9 , 10 , 11, ,12 on a 12 carreaux . On va les colorier . ...c'est là rouge avec ce bout aussi rouge

Vas - y tu prends le vert ...

K - Ben on a fini

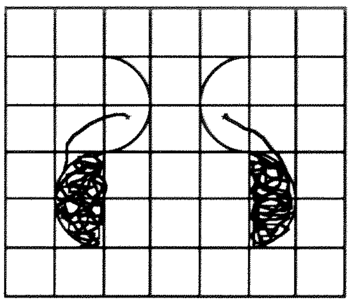
H - Ecris-toi la réponse, l'aire de cette surface est 12 carreaux .

Les indications sont schématiques ."

a2 - Reconfiguration du rectangle global:

Cette procédure a été appliquée par un binôme de 6ème et 2 binômes de 5ème. Nous présentons un exemple de cette procédure réalisée par le binôme F - M de 5ème .

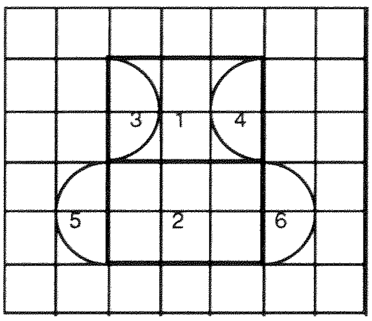
Quelle est l'aire (en carreaux) de cette surface ? .



Si on prend la partie hachurée et on la met comme l'indiquent les flèches, l'aire de la figure revient à un rectangle de 3 sur 4 carreaux, donc, la surface mesure 12 carreaux

b - Calcul par recours à des formules :

Elle a été appliquée par 1 binôme de 6ème et 3 binômes de 5ème . Ci-dessous nous avons, comme exemple, le travail du binôme V - A de 6ème.



aire des deux demi-cercles 3 et 4 : 1 x 1 x 3, 14 = 3, 14

aire des deux demi-cercles 5 et 6 : 1 x 1 x 3, 14 = 3, 14

aire du rectangle 1 : 3 x 2 = 6

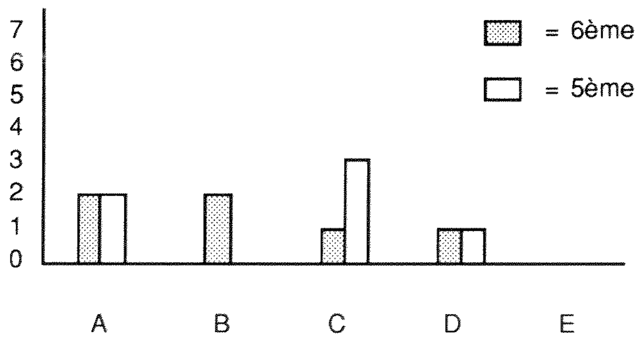
aire du rectangle 2 : 3 x 2 = 6

aire du rectangle 1 - aire des deux demi-cercles 3 et 4 : 6 - 3, 14 = 2, 86

aire de la figure : 2, 86 + 6 + 3, 14 = 12

Le tableau suivant montre le nombre de binômes de chaque niveau qui ont appliqué chaque procédure et les T T . Le graphique montre les T T par niveau .

Procédure \ T T	6ème				5ème				
	A	B	C	D	A	B	C	D	
a1	2	1	1				1		5
a2		1			2				3
b				1			2	1	4
	2	2	1	1	2		3	1	12



Comme conclusion nous pouvons dire que ces deux types de procédures se traduisent par :

1 - Une différence de réussite :

Tous les binômes qui ont recouru à une procédure reposant sur l'opération de reconfiguration ont réussi .

2 - Une différence des T T :

Tous les binômes qui ont recouru à une procédure de reconfiguration ont pris les plus petits T T .

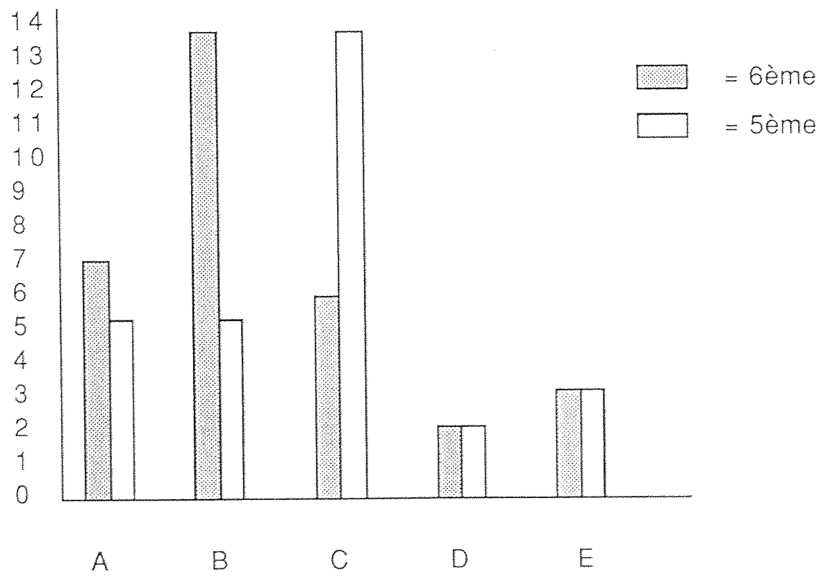
Nous voudrions faire remarquer que les élèves qui ont échoué à le problème N°6 ont fait l'application d'une procédure type b .

COMPARAISONS

Nous avons constaté quelques différences remarquables :

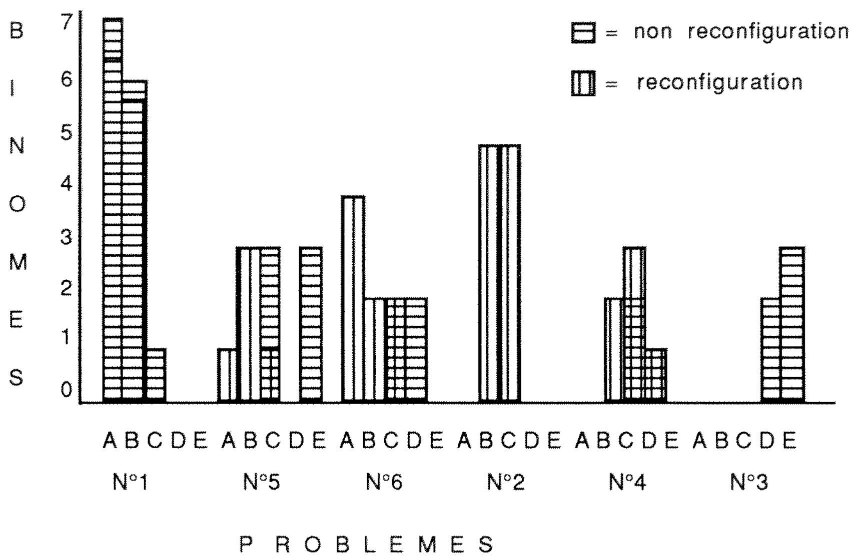
1 - En général les élèves de 6ème ont travaillé beaucoup plus librement que ceux de 5ème, en se laissant conduire par leur perception.Cette attitude peut s'expliquer par l'acquisition récente de plusieurs formules, règles et concepts que les élèves, surtout de 5ème, essayent de se rappeler au moment de résoudre un problème, au lieu de manifester de la spontanéité, en faisant par exemple, une reconfiguration, opération d'avantage appliquée par les élèves de 6ème. Remarquons que : "La perception et la capacité de prise en compte des caractéristiques d'un énoncé ou d'une figure sont probablement plus importantes que la connaissance des concepts géométriques et des structures" (PLUVINAGE et RAUCHER, 1986, cité par MESQUITA et RAUCHER, Annales de Didactique 1988, page 105) .

2 - Les élèves de 6ème ont pris des T T plus faibles que ceux de 5ème, pour réussir les différents types de procédures appliquées, comme nous le pouvons constater dans le graphique ci-dessous :



3 - Le recours à une procédure reposant sur l'opération de reconfiguration a pris moins de temps que le recours à des calculs reposant sur les formules; comme nous pouvons le voir dans le graphique de la page suivante :

Les figures aident-elles à voir en géométrie ?.



NOTE : il n' a pas eu des chevauchements ; c'est-à-dire, il n'a pas eu des binômes ayant appliqué au même temps les deux opérations, reconfiguration et non reconfiguration .

Dans le graphique ci-dessus, on doive lire, par exemple pour le problème N°5, dans en temps C, 1 binôme a appliqué l'opération de reconfiguration et 3 binômes ont appliqué non reconfiguration .

4 - Les procédures fondées sur l'opération de reconfiguration ont toujours conduit à la réussite alors que celles fondées sur des calculs par recours à des formules ont conduit quelques binômes à l'échec .

C O N C L U S I O N

Notre expérience auprès de cette population scolaire nous a menée à une interrogation sur l'attitude des élèves confrontés à des problèmes de géométrie où l'appréhension perceptive peut jouer un rôle fondamental dans le processus de résolution. Nous avons observé, spécialement , une perte de spontanéité dans l'apprentissage des premières règles et formules géométriques. Il est remarquable que pour ces types de problèmes, les élèves de 6ème utilisent spontanément leur perception, alors que chez les élèves de 5ème cette spontanéité tend à diminuer, remplacée par une tendance à appliquer des formules apprises et à se rappeler des méthodes du professeur. De plus, l'observation des élèves de 5ème révèle de leur part, un souci exagéré de répondre à l'attente du professeur, réel objet d'inhibition .

Il est aussi remarquable, que même les figures les plus simples, comme celle du vase (problème N°6), ne sont pas si évidentes pour les élèves de cette tranche d'âge, et prennent des T T qui peuvent aller de 1' jusqu'à 20' pour trouver la solution. Cette différence entre les temps de traitement est liée à l' opération qui a constitué la productivité heuristique de chaque problème . Toutes les procédures reposant sur l' opération de reconfiguration ont pris les plus petits T T . En conclusion , nous voudrions dire , que "voir" sur une figure est une démarche complexe et qui relève d' un apprentissage qui ne doit pas rester ignoré .

REFERENCES

1 - APMEP,1987. Evaluation du programme de mathématiques fin de 6ème .

2 - BESSOT D , 1983 . Problèmes de représentation de l'espace. Enseignement de la géométrie. *Bulletin Inter - IREM*, n° 23 .

3 - BODIN Antoine . 1980, Mise au point d'un questionnaire : observations, entretiens de binômes et individuels .

4 - DUVAL R., 1988.Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 1, IREM de Strasbourg .

5 - DOUADY Régine, 1984. *Jeux de cadres et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques.* Thèse, Paris VII .

6 - FISCHER Jean Paul, 1986. *Eléments de Psychologie pour l'apprentissage des Mathématiques*, IREM de Strasbourg .

7 - GLAESER Georges , 1985 . *La didactique expérimentale des Mathématiques*, IREM de Strasbourg .

8 - MESQUITA Ana , 1989 . Sur une situation d'éveil à la déduction en géométrie . *Educational Studies in Mathematics*, 20 . 1 , 55 - 77 .

9 - PIAGET J. et INHELDER B., 1971. *La Psychologie de l'enfant,* PressesUniversitaires de France .

10 - VERGNAUD G ., 1981. *L'enfant la Mathématique et la Réalité*, PETER LANG.