# *Un problème décisif pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire : la coordination des registres de représentation*

K. Pavlopoulou

In linear algebra we usually use three registers of semiotic representations of vectors and their properties : graphic, table and symbolic. Many investigations carried out with students of the first year of university revealed systematic failures in converting the different types of representations of a vector or a family of vectors.
This paper analyses the complexity of the operation of conversion of representations from one register to another in linear algebra. It also presents the results of one of these investigations as well as the results of an experiment, whose aim was the coordination of the registers of representations.

L'enseignement traditionnel de l'algèbre linéaire en première année universitaire conduit à un constat d'échec dans la plupart des universités en France. Un échec qui "se traduit chez les étudiants par un apprentissage médiocre des concepts, des méthodes et même des techniques de l'algèbre linéaire" (Rogalski, 1991, p.3). Cet échec a attiré l'attention des chercheurs et les évaluations faites dans des différentes universités ont mis en lumière les difficultés concernant la compréhension de notions de base, comme par exemple celle de vecteur et celle d'espace vectoriel. Très souvent pour les étudiants ces notions ont un aspect beaucoup moins vaste et général que celui qui leur est attribué par leur définition formelle. Comment expliquer cette situation ?

L'éventail des choix pour l'enseignement de l'algèbre linéaire comporte d'une part la présentation des concepts mathématiques par le recours au discours formel (théorie axiomatique abstraite), d'autre part un lot de situations susceptibles de servir d'exemples introductifs ou d'applications. Le mode de présentation de ces exemples peut varier : ils peuvent être donnés sous forme d'une représentation graphique, sous forme d'un tableau ou sous forme d'une écriture symbolique. Mais habituellement, on ne considère pas que la manipulation de ces

© Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
5 (1993) (p.67-93) - IREM de Strasbourg

formes puisse présenter des difficultés propres ou que le passage de l'une à l'autre puisse ne pas aller de soi si l'on a compris les concepts mathématiques. Or la compréhension du fonctionnement des représentations sémiotiques utilisées (graphique, tableau, écriture symbolique) et surtout la compréhension du passage de l'une à l'autre semblent devoir être comptées parmi les prérequis les plus importants pour l'enseignement de l'algèbre linéaire. L'approche usuelle de l'algèbre linéaire a pu donner lieu à la remarque : "il semble clair que les étudiants actuels ne peuvent guère supporter ce genre d'approche, tant pour des raisons tenant à leur état d'esprit qu'à cause de l'absence de prérequis dans un certain nombre de domaines ..." (Rogalski, 1990). Selon nous, sans une compréhension du fonctionnement des représentations sémiotiques et surtout sans une maîtrise de leur conversion, la compréhension des concepts et des méthodes semble difficile à acquérir. Ainsi un vecteur peut être représenté par une flèche, par une colonne à plusieurs lignes ou encore par une lettre. Lorsque ces trois registres de représentation ne sont pas vraiment coordonnés, l'objet "vecteur" peut être confondu avec l'un de ses représentants, et plus particulièrement avec la flèche dessinée dans le plan ou dans l'espace!

Chaque registre de représentation n'explicitant pas les mêmes aspects de l'objet représenté, il est donc essentiel pour un enseignement de pouvoir **mobiliser plusieurs registres de représentation sémiotiques**. "..., ce recours à plusieurs registres semble même une condition nécessaire pour que les objets mathématiques ne soient pas confondus avec leurs représentations et qu'ils puissent être reconnus dans chacune de leurs représentations. Cela indique que la coordination de plusieurs registres de représentation sémiotique est fondamentale pour l'appréhension conceptuelle des objets." (Duval, 1993a). Dans diverses enquêtes que nous avons faites, nous avons pu remarquer qu'une grande part des difficultés tient à la non coordination des trois registres de représentation. Quand par exemple nous demandons l'étude d'une certaine propriété d'une famille de vecteurs donnée dans le registre de l'écriture symbolique, les étudiants recourent immédiatement à des traitements "recettes" dans un autre registre, en ignorant la définition formelle et générale de la propriété demandée. Ce sont les conséquences d'une acquisition partielle des notions mathématiques qui découlent d'un apprentissage monoregistre, basé sur les techniques et les méthodes appliquées sur un seul registre.

Un enseignement de l'algèbre linéaire peut viser explicitement la coordination des trois registres de représentation. Pour cela les différents types de représentation du même objet que nous pouvons obtenir dans les différents registres ne doivent **pas simplement servir comme des champs d'application de l'objet défini**. Ils constituent aussi une approche vers la conceptualisation de l'objet mathématique. Et dans la conceptualisation, c'est **la conversion entre les différents registres** qui joue un rôle essentiel.

C'est une telle approche que nous proposons pour l'enseignement de l'algèbre linéaire. Avant de passer aux définitions formelles de vecteur et des propriétés de vecteurs, nous présentons aux étudiants :
- une variation de situations de familles de vecteurs dans chacun des registres.
- un travail systématique sur la conversion entre les différents registres dans tous les sens possibles.

Ensuite le passage par le registre de la langue naturelle s'avère nécessaire pour pouvoir effectuer des définitions et arriver au discours formel mathématique.

Dans le cadre de cet article, nous allons d'abord présenter les règles de représentation pour chacun des registres. Puis nous montrerons que leur simplicité n'est qu'apparente. Car le passage d'un registre à un autre s'avère très vite une opération complexe. Nous ferons enfin état de résultats d'enquêtes et d'une expérience d'enseignement pour montrer la pertinence et la fécondité de cette approche.

## I. SIMPLICITE DES REGISTRES DE REPRESENTATION UTILISEES EN ALGEBRE LINEAIRE

En algèbre linéaire on utilise généralement trois registres pour représenter les objets définis : le registre graphique, le registre des tableaux et le registre de l'écriture symbolique. Le tableau suivant présente les différentes représentations qui peuvent être utilisées pour un objet.

| **Représentations** | | | **Objet mathématique pouvant être ainsi représenté** |
|---|---|---|---|
| dans le registre graphique | dans le registre des tableaux | dans le registre de l'écriture symbolique | |
| flèche, éventuellement accompagnée d'une désignation (du registre symbolique le plus souvent) | - colonne à deux lignes<br>- colonne à trois lignes<br>- colonne à n lignes | lettre(s), dénotant un objet, éventuellement surmontée d'une flèche | vecteur ou élément d'un espace vectoriel |
| famille de flèches de référence | ensemble de colonnes, chacune composée d'un seul 1 et de 0 dans les autres lignes(1) | famille d'objets de référence | base |
| flèche de même direction qu'une flèche de référence | colonne qui a au plus un coefficient non nul : dans la case qui correspond à la ligne où la colonne de référence a la valeur 1 | objet qui peut être écrit comme un multiple de l'objet de référence | vecteur colinéaire à un vecteur de la base choisie |

Tableau 1

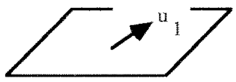
(1) Cette représentation confère à la base choisie le caractère d'une base canonique. Nous la retenons dans cet article non pas pour éliminer d'autres choix de base, mais parce qu'un échelonnement en lignes (ou en colonnes) permet de mettre un tableau en forme échelonnée réduite.

Cette diversité de représentations possibles d'un même objet suppose que l'on puisse facilement passer de l'une à l'autre c'est à dire que l'on puisse convertir une représentation donnée dans un registre à la représentation correspondante dans un autre registre. Et pour pouvoir faire cette conversion facilement, immédiatement, il faut avoir bien identifié les éléments constitutifs de la représentation dans chaque registre.

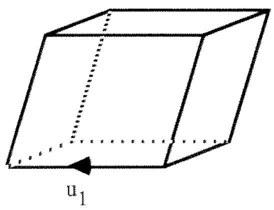
***- Eléments constitutifs de la représentation dans le registre graphique***

Un vecteur soit dans le plan soit dans l'espace peut être représenté par une *flèche*. Ci-dessous, ainsi qu'à la suite de cet article, nous utilisons un parallélogramme pour illustrer une situation de vecteurs dans le plan et un parallélépipède pour une situation de vecteurs dans l'espace. Une flèche peut être éventuellement accompagnée par une lettre pour qu'elle puisse être identifiée, dans le cas où plusieurs flèches sont dessinées sur la même représentation.

Vecteur dans le plan :




Vecteur dans l'espace :

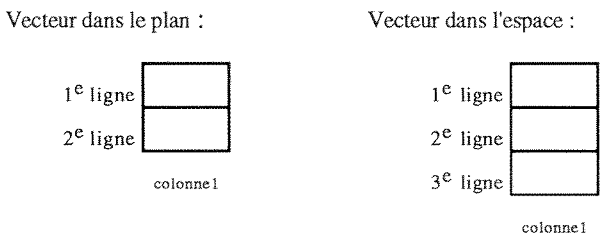



Pour représenter une famille de vecteurs nous dessinons plusieurs flèches sur le même parallélogramme ou parallélépipède. Et pour simplifier l'étude d'une famille de vecteurs nous utilisons des représentations où toutes les flèches sont ramenées à la même origine.

Dans le registre graphique deux difficultés de représentation se posent :
i) la limitation d'une représentation à la dimension 3 (et même quelques fois dans un espace vectoriel de dimension 3 nous n'arrivons pas à faire de bonnes représentations) et
ii) l'impossibilité de représenter le vecteur nul (généralement le registre graphique est impropre à toutes les situations dégénérées).

***- Eléments constitutifs de la représentation dans le registre des tableaux***

Un vecteur est représenté par une *colonne* et une famille de vecteurs du même espace vectoriel est représentée par plusieurs colonnes de même hauteur mises côte à côte, c'est-à-dire par un tableau. La hauteur de la colonne dépend de la dimension de l'espace vectoriel dans lequel les vecteurs de la situation donnée appartiennent. Voici un exemple pour la représentation d'un vecteur dans le plan et dans l'espace :




Pour représenter donc une situation d'une famille de vecteurs dans le plan, nous utilisons un tableau à deux lignes et pour une famille de vecteurs dans l'espace, nous utilisons des tableaux à trois lignes.

Les cases d'une colonne sont remplies par des coefficients réels. Les colonnes dont toutes les valeurs sont égales à 0, sauf une seule égale à 1, nous les appelons *colonnes de référence*. Pour les autres colonnes, quand un coefficient non nul apparaît dans une case, on dit que cette colonne peut être décrite par rapport à la colonne de référence ayant la valeur 1 à la même ligne. Et quand la valeur 0 apparaît dans une case d'une colonne, cette colonne ne peut pas être décrite par rapport à la colonne de référence ayant la valeur 1 à la même ligne.

Dans le registre des tableaux il y a la possibilité de représentation du vecteur nul, en utilisant une colonne où toutes les cases sont remplies par le coefficient 0. En plus, à l'aide de ce registre nous pouvons représenter des situations de vecteurs qui appartiennent dans un espace vectoriel de dimension plus grande que 3, puisqu'un tableau peut avoir autant de lignes et de colonnes que l'on veut. Ceci donc nous permet de décrire des situations qui ne peuvent pas être visualisées dans le registre graphique. Mais, nous sommes toutefois limités à des dimensions finies.

***- Eléments constitutifs de la représentation dans le registre de l'écriture symbolique***

Dans le registre de l'écriture symbolique un vecteur est représenté par une *lettre* dénotant un objet. Nous utilisons d'habitude des lettres avec ou sans indices et la notation **0** pour décrire l'objet nul. Pour préciser la nature de l'objet dénoté, il faut aussi indiquer l'ensemble dans lequel l'objet est situé. Ci-dessous nous donnons la représentation dans le registre de l'écriture symbolique, d'un vecteur dans plan et d'un vecteur dans l'espace :

| Vecteur dans le plan : | Vecteur dans l'espace : |
|---|---|
| $u \in \mathbb{R}^2$ | $u \in \mathbb{R}^3$ |

Pour représenter une situation d'une famille de vecteurs dans le registre de l'écriture symbolique nous avons besoin de la description de chaque objet par rapport aux objets de la famille qui vont servir comme référence. Cette description se réalise à l'aide de la relation de base : la combinaison linéaire.

Le registre de l'écriture symbolique nous permet de décrire toutes les situations possibles de vecteurs, indépendamment de leur nature (vecteurs du plan, de l'espace ou d'un autre espace vectoriel) et de la dimension (finie ou infinie) de l'espace vectoriel auquel les vecteurs appartiennent. En plus, à l'aide du registre de l'écriture symbolique nous pouvons effectuer des définitions, en introduisant des éléments permettant de remplir des fonctions discursives (Pour une analyse plus détaillée sur les trois registres de représentation, cf. Pavlopoulou, 1994).

## II. COMPLEXITE DE LA CONVERSION DES REPRESENTATIONS EN ALGEBRE LINEAIRE

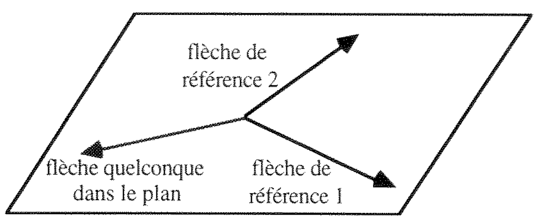
La conversion de la représentation d'un objet est sa transformation en une autre représentation relevant d'un autre registre. Puisqu'en algèbre linéaire on recourt à trois registres différents de représentation, il y a une grande variété de conversions à effectuer. Les règles pour effectuer une conversion peuvent sembler très simples mais le passage de la représentation d'un objet dans un registre à sa représentation dans un autre registre est souvent complexe. Il suppose que l'on ait identifié tous les éléments constitutifs d'une représentation dans chaque registre. Comme nous le verrons plus loin cela est loin d'être le cas pour beaucoup d'étudiants. Notre propos ici est de montrer à partir de quelques exemples, la complexité de la conversion d'une représentation malgré la simplicité des règles de conversion.

### *A. Conversion entre le registre graphique et le registre des tableaux*

Lorsque la représentation est celle d'un vecteur dans le plan, la conversion apparaît relativement simple. Pour représenter graphiquement une situation quelconque de flèches dans le plan nous avons besoin de deux flèches de référence. Une flèche quelconque dans le plan peut être parfaitement définie à l'aide des deux flèches de référence fixées. Pour représenter la même situation dans un tableau nous avons besoin de deux colonnes de référence remplies par 1 et 0, et de deux lignes

Pour deux flèches de référence données dans le plan :

Figure



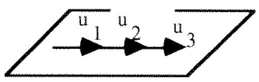

Tableau

| | colonne de référ. 1 | colonne de référ. 2 | autre colonne |
|---|---|---|---|
| 1ère ligne | 1 | 0 | |
| 2ème ligne | 0 | 1 | |

Cependant la conversion peut très vite se reveler plus complexe comme le montrent les deux exemples qui suivent :

**Exemple 1 : Trois vecteurs colinéaires dans le plan**

Dans le registre graphique il suffit de dessiner trois flèches qui ont la même direction, comme ci-dessous :




Voici les correspondances à prendre en compte pour effectuer la conversion :

| **Eléments de la situation donnée, décrite dans le registre graphique** | **Eléments correspondants dans le registre des tableaux** |
|---|---|
| **trois** flèches | **trois** colonnes |
| flèches dans le **plan** | colonnes à **deux** lignes |
| **une** flèche de référence (soit $\mathbf{u_1}$) | **une** colonne de référence (composée d'un seul 1 et 0 partout ailleurs : **la première**) |
| $\mathbf{u_2}$ : **même direction** que la flèche de référence $\mathbf{u_1}$ | **la case** de la deuxième colonne qui correspond à la ligne où la colonne de référence a la valeur 1, sera remplie par un **coefficient non nul** |
| $\mathbf{u_3}$ : **même direction** que la flèche de référence $\mathbf{u_1}$ | **la case** de la troisième colonne qui correspond à la ligne où la colonne de référence a la valeur 1, sera remplie par un **coefficient non nul** |

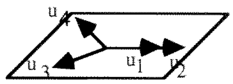
Tableau 2

Nous obtenons donc le tableau suivant qui décrit exactement la même situation que la figure plus haut (trois vecteurs colinéaires dans le plan) dans le registre des tableaux :

$$\begin{pmatrix} 1 & k & m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exemple 2 : Quatre vecteurs dans le plan**

Soit la situation de quatre vecteurs du plan tels qu'ils sont représentés dans le registre graphique ci-dessous :




Voici les correspondances à prendre en compte pour effectuer la conversion :

| **Eléments de la situation donnée, décrite dans le registre graphique** | **Eléments correspondants dans le registre des tableaux** |
|---|---|
| **quatre** flèches | **quatre** colonnes |
| flèches dans le **plan** | colonnes à **deux** lignes |
| **deux** flèches de référence (soient $\mathbf{u_1}$ et $\mathbf{u_3}$, puisque $u_2$ a la même direction que $u_1$) | **deux** colonnes de référence (composées d'un seul 1 et 0 partout ailleurs : **la première et la troisième**) |
| $\mathbf{u_2}$ : **même direction** que la flèche de référence $\mathbf{u_1}$ | **la case** de la deuxième colonne qui correspond à la ligne où la première colonne a la valeur 1, sera remplie par un **coefficient non nul** |
| $\mathbf{u_4}$ : **direction différente des deux directions fixées** par les flèches de référence $\mathbf{u_1}$ **et** $\mathbf{u_3}$. | **toutes les deux cases** de la quatrième colonne seront remplies par des **coefficients non nuls** |

Tableau 3

La même situation que plus haut, représentée dans le registre des tableaux est décrite par le tableau :

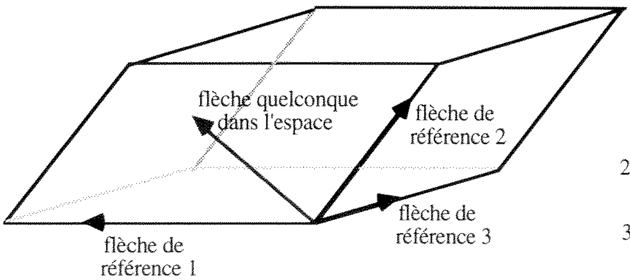
$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & m \\ 0 & 0 & 1 & n \end{pmatrix}.$$

Lorsqu'il s'agit de la représentation d'un vecteur dans l'espace, la conversion devient encore plus complexe, bien que les règles de correspondance restent les mêmes. Pour représenter graphiquement une situation quelconque de flèches dans l'espace nous avons besoin d'une troisième flèche de référence et donc d'une troisième colonne de référence.

| Registre graphique | | Registre des tableaux |
|---|---|---|
| flèche dans l'espace | → | colonne à trois lignes |
| flèche de référence | → | colonne de référence composée par un seul 1 et 0 partout ailleurs dans les autres cases |

Pour trois flèches de référence données dans l'espace :

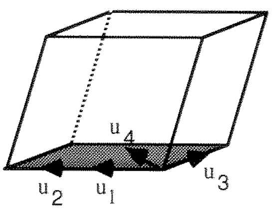
Figure Tableau




| | colonne de référ. 1 | colonne de référ. 2 | colonne de référ. 3 | autre colonne |
|---|---|---|---|---|
| 1ère ligne | 1 | 0 | 0 | |
| 2ème ligne | 0 | 1 | 0 | |
| 3ème ligne | 0 | 0 | 1 | |

**Exemple 3 : Quatre vecteurs de l'espace qui forment un plan**

Soit la situation de quatre vecteurs du plan tels qu'ils sont représentés dans le registre graphique ci-dessous :



Voici les correspondances à prendre en compte pour effectuer la conversion :

| **Eléments de la situation donnée, décrite dans le registre graphique** | **Eléments correspondants dans le registre des tableaux** |
|---|---|
| **quatre** flèches | **quatre** colonnes |
| flèches dans l'**espace** | colonnes à **trois** lignes |
| **deux** flèches de référence (soient $\mathbf{u_1}$ et $\mathbf{u_3}$, puisque $u_2$ a la même direction que $u_1$) | **deux** colonnes de référence (composées d'un seul 1 et 0 partout ailleurs : **la première et la troisième**) |
| $\mathbf{u_2}$ : **même direction** que la flèche de référence $\mathbf{u_1}$ | **la case** de la deuxième colonne qui correspond à la ligne où la première colonne a la valeur 1, sera remplie par un **coefficient non nul** |
| $\mathbf{u_4}$ : **direction différente des deux directions fixées** par les flèches de référence $\mathbf{u_1}$ **et** $\mathbf{u_3}$ | **les deux cases** de la quatrième colonne qui correspondent aux lignes où la première et la troisième colonne ont la valeur 1, seront remplies par des **coefficients non nuls** |

Tableau 4

La situation donc de l'exemple 3 peut être représentée dans le registre des tableaux par le tableau ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & m \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Remarque importante</u> : Les situations décrites dans l'exemple 2 et l'exemple 3 sont très souvent confondues par les étudiants. Plus précisément, pour la situation donnée à l'exemple 3 :
- pendant le passage vers le registre des tableaux, ils écrivent un tableau à deux lignes car *"les flèches forment un plan"* ou car *"la troisième flèche de référence n'est pas donnée"*.

- pendant le passage inverse vers le registre graphique, ils ignorent la troisième ligne car *"elle est nulle"*.

Ce type des difficultés qui conduit à une mauvaise interprétation de la situation donnée, peuvent être dépassées à l'aide d'un travail systématique sur la conversion entre les différents registres.

### B. Conversion entre le registre des tableaux et le registre de l'écriture symbolique

Le passage du registre des tableaux au registre de l'écriture symbolique se réalise en suivant les règles de correspondance suivantes :

*a) format du tableau :*

- le *nombre des lignes* nous indique la dimension de l'espace vectoriel ($R^2$ ou $R^3$) auquel les objets appartiennent, et
- le *nombre des colonnes* correspond au nombre des objets que nous devons définir dans la situation donnée.

| Eléments d'un tableau | Valeurs | Eléments correspondants dans le registre de l'écriture symbolique |
|---|---|---|
| nombre des lignes | - deux | $R^2$ |
| | - trois | $R^3$ |
| | n | $R^n$ |
| nombre des colonnes | k | nombre des objets à définir ( p.ex. $u_1, u_2, \ldots, u_k$ ) |

Tableau 5

*b) éléments dans les cases :*

Les éléments dans les cases correspondent aux coefficients de l'objet de référence qui a la valeur 1 dans la même ligne. A l'aide de ces coefficients et en utilisant la liaison des objets par le signe "+" nous pouvons construire les relations entre chaque objet et les objets de référence.

Pour mieux illustrer ce passage, nous présentons à la suite l'application des règles précédentes pour le cas général d'une situation dans le plan et d'une situation dans l'espace :

*- Représentation d'un vecteur dans le plan :*

| Registre des tableaux | Registre de l'écriture symbolique |
|---|---|
| $\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & \\ \hline 0 & 1 & \\ \hline \end{array}$ | $u_1 \in R^2, u_2 \in R^2, u_3 \in R^2$<br>$u_1 = \mathbf{1}\ u_1 + \mathbf{0}\ u_2$<br>$u_2 = \mathbf{0}\ u_1 + \mathbf{1}\ u_2$<br>$u_3 = \square\ u_1 + \square\ u_2$ |

La troisième colonne qui est vide correspond à un troisième vecteur dans le plan dont nous allons étudier les variations. Les cases vides, devant les termes $u_1$ et $u_2$ pour l'écriture du troisième vecteur $u_3$, marquent la place des coefficients "inconnus" lesquels changent en fonction de la position du vecteur dans le plan.

*- Représentation d'un vecteur dans l'espace :*
Nous présentons ci-dessous la forme du tableau ayant donné trois colonnes de référence dans l'espace. La quatrième colonne correspond à un vecteur quelconque dans l'espace. La même situation de vecteurs, décrite dans le registre de l'écriture symbolique, est notée juste à côté.

| Registre des tableaux | Registre de l'écriture symbolique |
|---|---|
| $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 1 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & \\ \hline \end{array}$ | $u_1 \in R^3, u_2 \in R^3, u_3 \in R^3, u_4 \in R^3$<br>$u_1 = \mathbf{1}\ u_1 + \mathbf{0}\ u_2 + \mathbf{0}\ u_3$<br>$u_2 = \mathbf{0}\ u_1 + \mathbf{1}\ u_2 + \mathbf{0}\ u_3$<br>$u_3 = \mathbf{0}\ u_1 + \mathbf{0}\ u_2 + \mathbf{1}\ u_3$<br>$u_4 = \square\ u_1 + \square\ u_2 + \square\ u_3$ |

**Exemple 4 :**

Soit la situation ci-dessous, donnée dans le registre des tableaux. Nous allons décrire la même situation dans le registre de l'écriture symbolique, sans aucune perte d'informations.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | k | 0 |
| 0 | 1 | m | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |

Voici les correspondances à prendre en compte pour effectuer la conversion :

| **Eléments de la situation donnée, décrite dans le registre des tableaux** | **Eléments correspondants dans le registre de l'écriture symbolique** |
|---|---|
| **trois** lignes | espace de dimension **3** (**R**³) |
| **quatre** colonnes | **quatre** objets à définir, soient : $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$, $\mathbf{u_4}$ |
| **trois** colonnes de référence : la **première**, la **deuxième** et la **quatrième** | **trois** objets de référence : $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ et $\mathbf{u_4}$ |
| **la troisième colonne :** elle a deux cases remplies par des coefficients non nuls, celles-ci qui correspondent à la première et la deuxième colonne de référence, et 0 dans la case qui correspond à la troisième colonne de référence. | l'objet $\mathbf{u_3}$ peut s'écrire comme la somme des multiples des objets de référence, ayant comme coefficient pour chacun le coefficient qui se trouve dans la case qui correspond à la ligne où la colonne de référence (respective) a la valeur 1. C'est à dire le coefficient **k** pour $\mathbf{u_1}$, le coefficient **m** pour $\mathbf{u_2}$, et **0** pour $\mathbf{u_4}$. |

Tableau 6

La représentation de la situation donnée dans le registre de l'écriture symbolique est la suivante :

$$u_1 \in R^3,\ u_2 \in R^3,\ u_3 \in R^3,\ u_4 \in R^3$$
$$u_1 = \mathbf{1}\ u_1 + \mathbf{0}\ u_2 + \mathbf{0}\ u_4$$
$$u_2 = \mathbf{0}\ u_1 + \mathbf{1}\ u_2 + \mathbf{0}\ u_4$$
$$u_3 = \mathbf{k}\ u_1 + \mathbf{m}\ u_2 + \mathbf{0}\ u_4$$
$$u_4 = \mathbf{0}\ u_1 + \mathbf{0}\ u_2 + \mathbf{1}\ u_4$$

Dans les exemples présentés plus haut nous avons mis en lumière la complexité de la tâche de conversion pour quelques situations. Mais puisqu'en algèbre linéaire les trois registres sont utilisés, il faut explorer des situations de conversion pour tous les passages possibles, c'est-à-dire pour :
- le passage du registre graphique au registre des tableaux,
- le passage du registre des tableaux au registre graphique,
- le passage du registre graphique au registre de l'écriture symbolique,
- le passage du registre de l'écriture symbolique au registre graphique,
- le passage du registre des tableaux au registre de l'écriture symbolique et
- le passage du registre de l'écriture symbolique au registre des tableaux.

La coordination des trois registres de représentation requiert que la conversion puisse être aisément effectuée pour tous ces différents changements de registres. Pour favoriser cette coordination, il semble essentiel de proposer une tâche qui conduise à faire "explorer systématiquement les variations possibles d'une représentation dans un registre et à faire prévoir, ou observer, les variations concomitantes de représentations dans l'autre registre." (Duval, 1993b). Il y a donc une grande variété de situations à traiter afin de favoriser la coordination entre ces différents registres. Et un enseignement ne peut pas se restreindre à la présentation des quelques exemples de conversion. C'est avec un travail systématique sur l'articulation des différents registres avec lequel la conversion peut devenir une activité immédiate et spontanée chez les étudiants.

## III. LES DIFFICULTES DE LA CONVERSION : ENQUETES ET EXPERIMENTATION

Généralement on considère que l'utilisation des registres de représentation et les passages de l'un à l'autre découlent naturellement de la compréhension des concepts mathématiques en jeu. Et on considère également qu'il suffirait de savoir produire des représentations d'un objet dans deux registres différents pour être capable de passer de l'un à l'autre. Mais, les résultats d'enquêtes et d'évaluations que nous avons réalisés auprès des étudiants de la première année universitaire montrent le contraire. Beaucoup d'étudiants échouent sur des tâches de conversion relativement simples. En outre, la réussite à certaines tâches de conversion ne permet en rien de prévoir le comportement pour d'autres tâches de conversion apparemment similaires.

Pour montrer l'ampleur de ces difficultés nous allons présenter quelques données tirées de deux enquêtes :
i) au niveau DEUG1 (première année universitaire) au mois de novembre 1992 auprès de 59 étudiants, et
ii) au mois de mars 1993 auprès de 144 étudiants ayant suivi des cours de la Mise à Niveau.

Les deux enquêtes ont conduit à proposer une expérience d'enseignement centrée sur la coordination des registres. Nous en indiquerons brièvement les premiers résultats.

### *A. Quelques observations*

Toutes les questions de deux enquêtes proposaient la tâche suivante : à partir de la représentation d'une situation de vecteurs donnée dans l'un des trois registres (graphique, tableau ou écriture symbolique) construire dans un autre registre fixé la représentation correspondante. Nous avons donc présenté aux étudiants une liste de représentations dans un registre de départ fixé accompagné par l'énoncé suivant en ce qui concerne par exemple le passage tableau → graphique : "Les tableaux suivants décrivent une situation de vecteurs dans le plan ou dans l'espace. Donner une figure qui illustre la situation décrite par le tableau donné".
La tâche proposée donne évidemment lieu à une variété de cas que nous n'avons pas tous présentés. Et ici nous nous limiterons à quelques unes des questions posées.

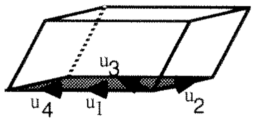
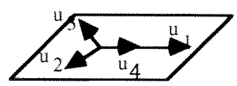
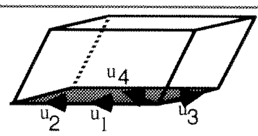
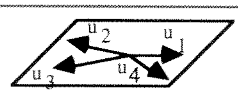
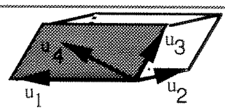
<table>
<tr><td colspan="3">Questions (Mars 1993)</td><td>Taux de réussite</td></tr>
<tr><td>Code</td><td>Registre de départ</td><td>Registre d'arrivée</td><td>effectif : 144</td></tr>
<tr><td>GS</td><td>
</td><td>$u_1 \in R^3, u_2 \in R^3, u_3 \in R^3, u_4 \in R^3$<br>$u_1 = 1\,u_1 + 0\,u_2$<br>$u_2 = 0\,u_1 + 1\,u_2$<br>$u_3 = k\,u_1 + m\,u_2 ; k \in R, m \in R$<br>$u_4 = n\,u_1 + 0\,u_2 ; n \in R$</td><td>.05</td></tr>
<tr><td>TG1</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 0 & k & p \\ \hline 0 & 1 & m & 0 \\ \hline \end{array}$</td><td>
</td><td>.83</td></tr>
<tr><td>TG2</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & k & 0 & m \\ \hline 0 & 0 & 1 & n \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$</td><td>
</td><td>.68</td></tr>
<tr><td>TS1</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 0 & k & p \\ \hline 0 & 1 & m & 0 \\ \hline \end{array}$</td><td>$u_1 \in R^2, u_2 \in R^2, u_3 \in R^2, u_4 \in R^2$<br>$u_1 = 1\,u_1 + 0\,u_2$<br>$u_2 = 0\,u_1 + 1\,u_2$<br>$u_3 = k\,u_1 + m\,u_2$<br>$u_4 = p\,u_1 + 0\,u_2$</td><td>.07</td></tr>
<tr><td>TS2</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & k & 0 & m \\ \hline 0 & 0 & 1 & n \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$</td><td>$u_1 \in R^3, u_2 \in R^3, u_3 \in R^3, u_4 \in R^3$<br>$u_1 = 1\,u_1 + 0\,u_3$<br>$u_2 = k\,u_1 + 0\,u_3$<br>$u_3 = 0\,u_1 + 1\,u_3$<br>$u_4 = m\,u_1 + n\,u_3$</td><td>.05</td></tr>
<tr><td>GT1</td><td>
</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 0 & a & c \\ \hline 0 & 1 & b & d \\ \hline \end{array}$</td><td>.34</td></tr>
<tr><td>GT2</td><td>
</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0 & a \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & b \\ \hline \end{array}$</td><td>.35</td></tr>
<tr><td>ST1</td><td>$u_1 \in R^2, u_2 \in R^2, u_3 \in R^2, u_4 \in R^2$<br>$u_1 = 1\,u_1 + 0\,u_3$<br>$u_2 = k\,u_1 + 0\,u_3 ; k \in R$<br>$u_3 = 0\,u_1 + 1\,u_3$<br>$u_4 = a\,u_1 + b\,u_3 ; a \in R, b \in R$</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & k & 0 & a \\ \hline 0 & 0 & 1 & b \\ \hline \end{array}$</td><td>.72</td></tr>
<tr><td>ST2</td><td>$u_1 \in R^3, u_2 \in R^3, u_3 \in R^3, u_4 \in R^3$<br>$u_1 = 1\,u_1 + 0\,u_2 + 0\,u_3$<br>$u_2 = 0\,u_1 + 1\,u_2 + 0\,u_3$<br>$u_3 = 0\,u_1 + 0\,u_2 + 1\,u_3$<br>$u_4 = c\,u_1 + d\,u_3 ; c \in R, d \in R$</td><td>$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0 & c \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & d \\ \hline \end{array}$</td><td>.72</td></tr>
</table>

Tableau 7 : Résultats d'une enquête sur l'articulation des trois registres mis en jeu en algèbre linéaire : le registre graphique (G), le registre des tableaux (T) et le registre de l'écriture symbolique (S). Il s'agit d'une tâche de construction, c'est à dire de construire une représentation dans le registre d'arrivée qui décrit la situation représentée dans le registre de départ. Les deux lettres de la première colonne désignent le type de conversion demandé : GS désigne la conversion d'une représentation au registre graphique en une représentationcorrespondante dans le registre de l'écriture symbolique.

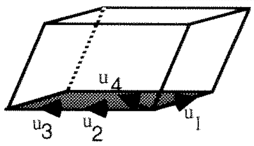
| *Questions (Mars 1993)* | | | *Taux de réussite* |
|---|---|---|---|
| Code | Registre de départ | Registre d'arrivée | effectif : 144 |
| **SG** | $u_1 \in R^3, u_2 \in R^3, u_3 \in R^3, u_4 \in R^3$<br>$u_1 = 1\,u_1 + 0\,u_2$<br>$u_2 = 0\,u_1 + 1\,u_2$<br>$u_3 = 0\,u_1 + k\,u_2 ; k \in R$<br>$u_4 = a\,u_1 + b\,u_2 ; a \in R, b \in R$ |  | .40 |

Tableau 7 (suite)

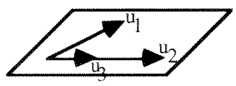
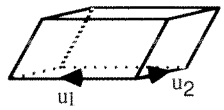
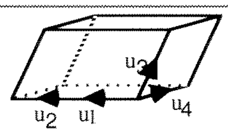
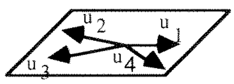
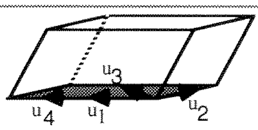
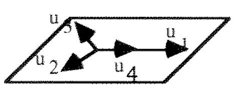
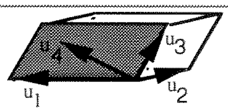
| *Questions (Novembre 1992)* | | *Taux de réussite (effectif : 59)* | |
|---|---|---|---|
| Registre graphique | Registre des tableaux | Reg. graph. → Reg. des tabl. | Reg. des tabl. → Reg. graph. |
|  | $\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & k \\ \hline\end{array}$ | .54 | .81 |
|  | $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline\end{array}$ (1) | .53 | .75 |
|  | $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & k & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$ | .64 | |
|  | $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & a & c \\ \hline 0 & 1 & b & d \\ \hline\end{array}$ | .25 | |
|  | $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & m & k \\ \hline 0 & 1 & n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\end{array}$ | .10 | .36 |
|  | $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & k & p \\ \hline 0 & 1 & m & 0 \\ \hline\end{array}$ | | .61 |
|  | $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & 0 & k \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & m \\ \hline\end{array}$ | | .56 |

Tableau 8 : Résultats d'une enquête (DEUG1, nov. 1992, effectif : 59)

(1) La réponse possible $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a été aussi considérée comme correcte. Cette remarque vaut aussi pour des autres items, au cas où une même situation se présente.

Le résultat le plus frappant, et le plus important, de ces deux enquêtes est l'énorme variation des taux de réussites : de 0.83 à 0.04. Tout se passe comme si devant une tâche de conversion nous ne pouvions observer que des comportements de réponses instables. En tout cas, deux facteurs semblent jouer dans cette variation :

**a) les registres en présence :**

Comme nous l'avons déjà indiqué, le fait de savoir produire une représentation dans l'un ou l'autre registre n'implique pas la possibilité de passer de l'un à l'autre. Et les pourcentages de réussite dépendent de la nature des deux registres mis en correspondance. C'est à dire, **nous ne pouvons pas attribuer le même degré de difficulté à tous les passages ayant le même registre de départ, mais un registre d'arrivée différent**. Ainsi :

- le taux de réussite pour le passage tableau → graphique n'est pas inférieur à 0.36 (cf. Tableau 8), mais celui pour le passage tableau → écriture symbolique peut tomber à 0.06. Cela montre que ce n'est pas seulement le registre de départ qui importe, mais aussi le registre d'arrivée.
- le taux de réussite du passage graphique → tableau varie de 0.64 jusqu'à 0.10, mais le taux de réussite du passage graphique → écriture symbolique ne dépasse pas 0.05!
- le taux de réussite du passage écriture symbolique → tableau est autour de 0.72, mais le taux de réussite du passage écriture symbolique → graphique est autour de 0.40.

**b) le sens de la conversion :**

Lorsque les deux registres en présence sont les mêmes on pourrait croire que la tâche de conversion peut être considérée comme la même. Il n'en est rien "... les règles de conversion ne sont pas les mêmes selon le sens dans lequel le changement de registres est effectué" (Duval, 1993).

Les résultats présentés dans les tableaux précédents montrent que la différence de réussite entre le passage direct et le passage inverse des deux registres devient vraiment spectaculaire quand *l'un des deux registres est le registre de l'écriture symbolique :*

- Nous remarquons une chute importante aux items où le *registre de l'écriture symbolique apparaît comme registre d'arrivée*, ayant comme registre de départ un des deux autres registres (cf. TS1, TS2 et GS au Tableau 7). Ce passage apparaît comme le plus difficile parmi tous ceux demandés dans les deux questionnaires. Les taux de réussite varient entre 0.08 et 0.04.
- Par contre le passage inverse, où *le registre de l'écriture symbolique apparaît comme registre de départ* (cf. ST1, ST2, SG au Tableau 7), est plus facile et les taux de réussite varient de 0.75 jusqu'à 0.35.

Pour compléter ces observations, voici des résultats plus détaillés, par groupe d'étudiants, pour quelques items de la deuxième enquête (Enquête Mars 1993 - Tableau 7). Nous avons retenu les situations de vecteurs pour lesquelles la conversion doit être effectuée dans les deux sens.

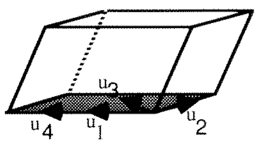
| **Registre graphique (G)** | **Registre de l'écriture symbolique (S)** | Effectifs de chaque groupe d'étudiants | $G \rightarrow S$ | $S \rightarrow G$ | $G \leftrightarrow S$ |
|---|---|---|---|---|---|
| <br> | $u_1 \in R^3$, $u_2 \in R^3$,<br>$u_3 \in R^3$, $u_4 \in R^3$<br>$u_1 = 1\,u_1 + 0\,u_2$<br>$u_2 = 0\,u_1 + 1\,u_2$<br>$u_3 = k\,u_1 + m\,u_2$ ; $k \in R$, $m \in R$<br>$u_4 = n\,u_1 + 0\,u_2$ ; $n \in R$ | E1 : 37<br>E2 : 39<br>E3 : 23<br>T1 : 29<br>T2 : 16 | .03<br>.03<br>.09<br>.10<br>.00 | .30<br>.46<br>.48<br>.34<br>.38 | .00<br>.03<br>.09<br>.10<br>.00 |

Tableau 9 : Pour faciliter la présentation du tableau, la situation présentée dans la deuxième colonne a été légèrement modifiée par rapport à l'item posé : par exemple, un changement d'ordre des vecteurs peut apparaître (p. ex. le vecteur $u_3$ à la place du vecteur $u_4$) sans modification des relations. Dans la dernière colonne figure les taux de réussite pour la conversion directe et pour la conversion inverse.

Nous observons des écarts considérables dans les taux de réussite du tableau précédent. La comparaison des taux de réussites permet de constater que **les deux sens d'une conversion ne sont pas du tout des tâches équivalentes**. Ce phénomène peut être également observé pour la conversion entre le registre des tableaux et celui de l'écriture symbolique :

| **Registre des tableaux (T)** | **Registre de l'écriture symbolique (S)** | Effectif de chaque groupe d'étudiants | $T \rightarrow S$ | $S \rightarrow T$ | $T \leftrightarrow S$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|} \hline 1 & 0 & k & p \\ \hline 0 & 1 & m & 0 \\ \hline \end{array}$ | $u_1 \in R^2$, $u_2 \in R^2$, $u_3 \in R^2$,<br>$u_4 \in R^2$<br>$u_1 = 1\,u_1 + 0\,u_2$<br>$u_2 = 0\,u_1 + 1\,u_2$<br>$u_3 = k\,u_1 + m\,u_2$<br>$u_4 = p\,u_1 + 0\,u_2$ | E1 : 37<br>E2 : 39<br>E3 : 23<br>T1 : 29<br>T2 : 16 | .00<br>.00<br>.35<br>.00<br>.13 | .84<br>.62<br>.74<br>.66<br>.75 | .00<br>.00<br>.35<br>.00<br>.13 |

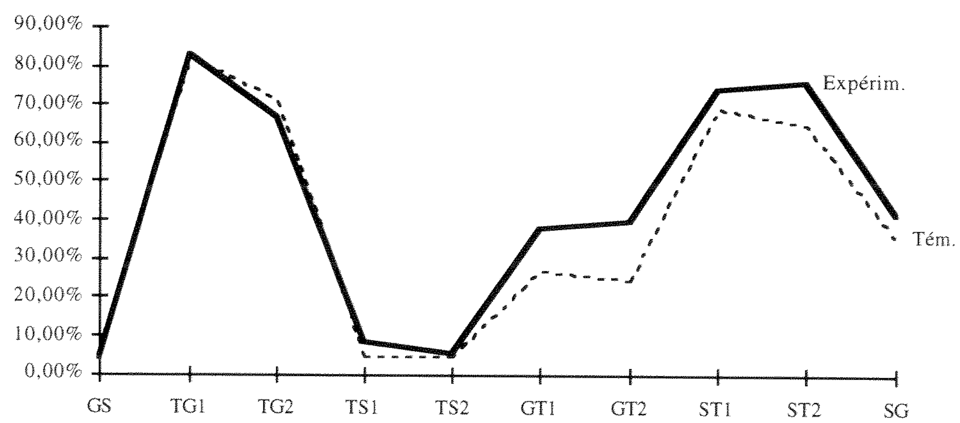
Tableau 10

Nous retrouvons entre *le registre des tableaux et le registre graphique* (voir tableau 8) le même phénomène de variation selon le sens de la conversion à effectuer. Pour la première situation dans le plan (cf. première ligne du tableau 8) nous avons un écart de réussite de 0.15 entre le passage dans un sens et celui dans le sens inverse. De même pour la cinquième situation (cf. cinquième ligne du tableau 8) dans l'espace où deux des trois flèches de référence sont données, il y a aussi un écart de 0.26.

***B. Résultats dans le cadre d'une expérience d'enseignement***

Nous avons organisé en 1993 une séquence didactique de huit heures dans le but de favoriser la coordination de registres. Nous présenterons cette expérience et son organisation dans un travail ultérieur. Le but de cette expérience était double : il s'agissait d'une part de voir *s'il était possible de réaliser un apprentissage de la conversion* et d'autre part de voir, au cas où un tel apprentissage réussirait, de voir *s'il facilitait l'accès aux objets et aux notions mathématiques.* Cette expérience a été faite avec des étudiants de la filière Mise à Niveau. Nous avons fait une première évaluation avant l'expérience (prétest) et une seconde quelques semaines après (post-test).

**Tâche de conversion : résultats globaux du PRETEST**



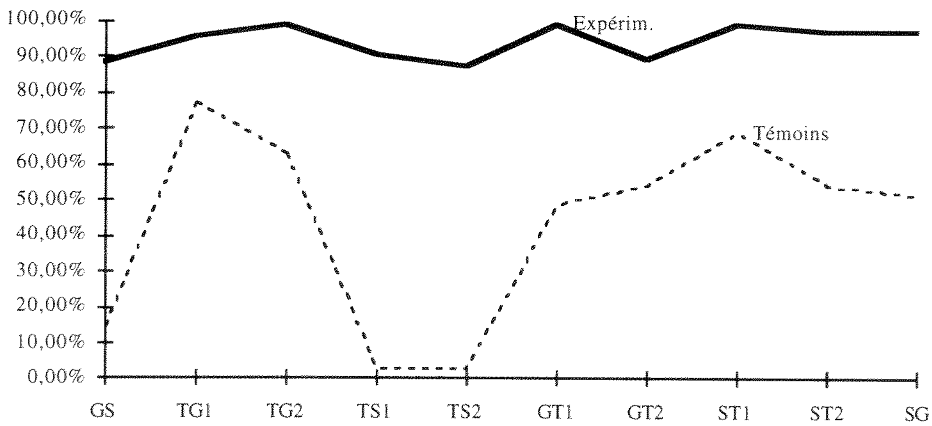

Graphique 1

| | effectif | GS | TG1 | TG2 | TS1 | TS2 | GT1 | GT2 | ST1 | ST2 | SG |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Expériment. | 99 | .04 | .83 | .67 | .08 | .05 | .37 | .39 | .74 | .76 | .41 |
| Témoins | 45 | .07 | .82 | .71 | .04 | .04 | .27 | .24 | .69 | .64 | .36 |

*Rappel :* **G** : registre graphique
**T** : registre des tableaux
**S** : registre de l'écriture symbolique
**GS** : registre **G**raphique vers registre de l'écriture **S**ymbolique, etc. ...

Nous pouvons voir que les deux populations (expérimentale et témoin) sont représentées par des courbes qui se confondent presque. Le comportement des sujets des deux groupes est le même devant des tâches de conversion. Nous pouvons dire qu'elles sont des populations du même niveau : des questions purement mathématiques ont aussi été posées, corroborant la similitude observée pour les tâches de conversion.
Regardons maintenant les résultats du post-test pour les tâches de conversion :

**Tâche de conversion : résultats globaux du POST-TEST**




Graphique 2

| | effectif | GS | TG1 | TG2 | TS1 | TS2 | GT1 | GT2 | ST1 | ST2 | SG |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Expériment. | 83 | .88 | .95 | .99 | .90 | .87 | .99 | .89 | .99 | .96 | .96 |
| Témoins | 35 | .14 | .77 | .63 | .03 | .03 | .49 | .54 | .69 | .54 | .51 |

Nous voyons que les deux courbes sont maintenant complètement séparées. La courbe de la population témoin garde à peu près le même profil que pour l'évaluation du prétest. En revanche celle de la population expérimentale oscille près d'une réussite totale pour tous les items, y compris ceux qui sont les plus difficiles, c'est-à-dire ceux qui demandent une conversion vers le registre de l'écriture symbolique. Cette évolution spectaculaire sur les tâches de conversion s'est accompagnée d'une évolution notable dans toutes les questions plus proprement mathématiques. Réservant la discussion et l'interprétation des résultats pour le cadre d'un autre travail, nous nous contenterons de quelques indications sur les deux points suivants :

**a) La notion de vecteur**

Une question sur la notion de vecteur avait été posée au prétest et elle avait mis en évidence la confusion de l'objet vecteur avec un de ses représentants. Une question analogue a été aussi posée dans le post-test.

La grande majorité des étudiants des groupes expérimentaux (80%) a réussi de *dissocier le vecteur de son aspect purement géométrique*. Leurs justifications s'appuient sur la dimension de l'espace vectoriel qui peut être supérieure à 3, ou sur les différents types de représentation d'un vecteur. Voici quelques réponses typiques :

*" ... un vecteur n'est pas seulement un segment de droite. C'est aussi un élément d'un espace vectoriel qui peut s'écrire comme combinaison linéaire d'autres vecteurs."*

*"Un vecteur peut être une matrice, un tableau, appartenir dans un espace vectoriel dont la dimension est supérieur à 3 ; donc on ne peut pas le représenter comme un segment de droite."*

Par contre aucun changement ne peut être remarqué sur l'aspect de la notion de vecteur chez les étudiants de la population témoin comme nous pouvons voir dans le tableau ci-dessous. La plus grande partie des étudiants s'en tient à l'aspect géométrique pour la notion de vecteur et reste attaché à la définition *"un vecteur est l'ensemble de bipoints équipollents, orientés et normés"*.

| Population expérimentale | | Population témoin | |
|---|---|---|---|
| Prétest (effectif : 99) | Post-test (effectif : 83) | Prétest (effectif : 45) | Post-test (effectif : 35) |
| .09 | .80 | .29 | .20 |

Tableau 11 : L'aspect "algébrique" de la notion de vecteur.

Un enseignement basé sur la coordination des registres de représentation peut donc aider les étudiants à distinguer l'objet défini et son représentant.

**b) Exercices purement mathématiques**

Il s'agit de questions qui n'avaient pas été abordées pendant l'enseignement. Nous avons pu observer chez les expérimentaux une différence significative de réussite. Deux types d'exercices ont été posés :

- les exercices où nous avons demandé de *trouver une famille de vecteurs avec une propriété précise* : la différence des taux de réussite entre les deux populations s'élève à 0.45, et
- les exercices où une *difficulté de type logique intervient* : ce sont les moins bien réussis dans les deux populations, mais nous avons pu constater un taux de réussite nettement supérieure en faveur de la population ayant eu l'enseignement centré sur la coordination des registres (0.09 pour la population témoin et 0.27 pour la population expérimentale).

## IV. CONCLUSIONS

Un travail systématique sur la conversion de différents registres de représentation donne des résultats très intéressants à plusieurs niveaux. Il permet de :

**1/ faire apparaître des difficultés généralement non remarquées parce qu'elles se situent à un niveau considéré généralement comme élémentaire**

Le fait de travailler avec des situations simples, dans différents types de représentations, nous permet de repérer des erreurs très essentielles que nous ne pouvons pas remarquer en traitant une situation beaucoup plus complexe. Par exemple, pendant le passage du registre graphique vers le registre des tableaux (ou l'écriture symbolique), nous avons pu remarquer que la situation donnée : "quatre vecteurs coplanaires dans l'espace" est traduite par "quatre vecteurs du plan", puisque ... la troisième dimension de l'espace n'est pas nécessaire pour les décrire! De même un travail systématique sur le registre de la langue naturelle et le passage vers le registre de l'écriture symbolique que nous n'avons pas présenté dans le cadre de cet article met en évidence des erreurs qui expliquent la grande difficulté de compréhension des formules les plus compliquées, comme celle de la définition de l'indépendance linéaire.

**2/ faire distinguer clairement l'objet mathématique et ses représentants**

En mobilisant plusieurs registres de représentation pour l'appréhension conceptuelle de cet objet, nous mettons en évidence tous les aspects de cet objet en évitant la confusion de l'objet avec un de ses représentants. Plus précisément, pour la notion de vecteur, la grande majorité des étudiants est passé d'un aspect purement géométrique à un aspect "algébrique".

**3/ favoriser un transfert des connaissances acquises**

Un apprentissage centré sur la conversion de représentations aide les étudiants à mobiliser les connaissances acquises, même lorsque l'on sort du contexte dans lequel s'est fait l'apprentissage. Et ceci, grâce à cet apprentissage qui peut fournir aux étudiants un modèle plus familier où les traitements sont plus simples ou plus faciles à réaliser.

Une analyse plus fine des résultats obtenus est en cours. L'interprétation de ces résultats fera l'objet d'une prochaine publication où la grande importance du registre de la langue naturelle apparaîtra aussi, ainsi que son articulation avec le registre de l'écriture symbolique. Et ceci est un passage qui ne peut pas être négligé pour un enseignement de l'algèbre linéaire.

## REFERENCES

DUVAL R. (1993a), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°5, IREM de Strasbourg.

DUVAL R. (1993b), *Sémiosis et Noésis*. Preprint.

ROGALSKI M. (1990), Pourquoi un tel échec de l'enseignement de l'algèbre linéaire?, *Enseigner autrement les mathématiques en Deug A première année,* publication inter IREM.

ROGALSKI M. (1991), *Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année,* Cahier DIDIREM n°11, IREM de Paris VII.

PAVLOPOULOU K. (1994), Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg (à paraître).