Premières approches pour l'étude de l'enseignement de l'algèbre linéaire à l'Université

Jean-Luc Dorier

This paper describe some aspects of research about the teaching of linear algebra in first year of French science university. We first present a short overwiew of the genesis of elementary concepts in linear algebra. Then we analyse the nature of the teaching of linear algebra through observations of student's productions and we show some procedures that students use according to the tasks.

Tout d'abord précisons que les concepts mathématiques auxquels nous nous sommes intéressés représentent le minimum de ce qui est généralement enseigné en première année du cursus universitaire scientifique (DEUG SSM 1) en cours d'algèbre linéaire, c'est-à-dire : espace vectoriel, sous-espace, famille génératrice, sous-espace engendré, dépendance et indépendance linéaires, familles libre et liée, base, dimension, rang, somme, somme directe, supplémentaire, application linéaire, systèmes d'équations linéaires.

Dans l'édifice mathématique, l'algèbre linéaire n'est apparue en tant que telle qu'au début du siècle, aujourd'hui pourtant , sa place est primordiale. Au niveau de l'enseignement elle est apparue dans le secondaire à la fin des années soixante, et a aujourd'hui entièrement disparu. En premier cycle universitaire ou en classe préparatoire, elle conserve cependant une place importante.

Or l'expérience montre que l'enseignement de l'algèbre linéaire est émaillé de difficultés dont quelques unes sont particulièrement persistantes chez certains étudiants et laissent les enseignants désarmés [RG]. Les étudiants se plaignent par exemple beaucoup du formalisme lié à l'algèbre linéaire et ressentent ce domaine comme étranger à leurs pratiques mathématiques. Ce

© Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
5 (1993) (p.95-123) - IREM de Strasbourg

phénomène est en partie lié à l'absence d'enseignement antérieur d'algèbre, mais il induit des pertes de sens et des dérapages, que les enseignants et les étudiants ont du mal à gérer.

Or peu de travaux traitent de l'algèbre linéaire, en France il y a ceux de A. Robert et J Robinet ([RO3-4] et [RI]), aux USA ceux de G Harel [HR1-4] et en allemagne ceux de B. Artmann [AT1-5].

Nous avons voulu examiner les caractéristiques d'un enseignement standard d'algèbre linéaire et analyser les effets qu'il produit au niveau de l'apprentissage. Pour ce faire, nous avons analysé des sujets de devoirs et les réponses des étudiants sur toute une année universitaire, en première année d'une section scientifique. Ce sont les résultas de ces analyses que nous présenterons ici.

Mais avant d'examiner l'enseignement, il nous paraît important de regarder d'un peu plus près l'évolution historique.

I - Quelques éléments importants de la genèse de l'algèbre linéaire

Dans un fascicule d'une quarantaine de pages [RI], J. Robinet présente une esquisse de la genèse des concepts d'algèbre linéaire enseignés en DEUG. Dans une première approche, cette analyse nous a semblé un outil suffisant pour comprendre les aspects essentiels de cette genèse et pour se faire une idée du sens des concepts en jeu. Pourtant certains points tels que les liens avec l'étude des systèmes d'équations linéaires, la genèse du concept de rang ou le rôle joué par la théorie axiomatique nous ont semblé nécessiter une analyse plus détaillée.

Nous avons donc choisi de faire un travail de synthèse en regroupant le plus grand nombre d'éléments qui permettraient de mieux comprendre ce qui avait participé à l'émergence des concepts élémentaires d'algèbre linéaire et à leur regroupement dans une théorie axiomatisée des espaces vectoriels, en même temps que de développer plus particulièrement et de façon originale les points qui avaient été jusqu'alors, à notre avis, délaissés dans les autres analyses.

Il est difficile de tirer des conclusions générales d'une telle étude, sans en réduire la portée.

Nous allons cependant essayer de résumer les éléments essentiels qui composent la genèse des concepts élémentaires d'algèbre linéaire, comme nous l'avons analysée.

i) Les concepts d'algèbre linéaire ont eu très rapidement une nature polymorphe. Ils apparaissent, implicitement ou explicitement, et en général sous une forme différente de ce que nous connaissons aujourd'hui, à des périodes parfois très rapprochées, dans de nombreux domaines : les systèmes d'équations linéaires, la géométrie, l'arithmétique, l'étude des quadriques, les transformations linéaires, les équations différentielles, etc...

ii) Cependant deux domaines, les systèmes d'équations linéaires et la géométrie, ont joué des rôles privilégiés dans cette genèse, bien qu'ils aient agi à des niveaux très différents.

a) L'étude des systèmes linéaires a été, dès le départ, un domaine privilégié. Elle a été à l'origine de l'émergence des tout premiers concepts, et a aussi été le cadre de l'élaboration des premiers résultats théoriques même informels.

Par ailleurs, même si l'étude des systèmes linéaires a connu une période moins productive entre la fin du XVIIIème siècle et la fin du siècle suivant, la généralisation aux systèmes d'une infinité de variables et d'équations, rencontrés dans des problèmes d'analyse fonctionelle, a été pendant la fin du XIXème et le début du XXème siècle, le cadre principal -si ce n'est unique- où se faisaient les progrès dans l'étude des espaces de dimension infinie.

Ainsi l'étude des systèmes linéaires a eu un rôle durable et important dans la genèse des concepts d'algèbre linéaire, non seulement à leurs débuts, où elle était le cadre principal de leur développement, mais encore récemment même si c'est sous un aspect généralisé.

b) La géométrie, elle, a été le cadre à partir duquel se sont faites des généralisations de plus en plus vastes. C'est une sorte de laboratoire d'essai, qui a permis de mettre au point les idées maitresses, que l'on a exportées ensuite, avec le vocabulaire et certaines méthodes, à d'autres domaines.

Il faut bien distinguer cependant la généralisation par augmentation du nombre de coordonnées (aspect analytique) et la généralisation due à l'émergence du concept de structure algébrique (aspect lié à la recherche d'un calcul géométrique intrinsèque). Ces deux aspects, qui se sont développés à partir du cadre géométrique, sont complémentaires par rapport à l'algèbre linéaire mais ils ont eu des sources et des conséquences différentes.

iii) Le concept de rang a longtemps été, même de façon implicite au centre des idées productrices en algèbre linéaire. Il s'est dégagé pas à pas de l'étude de plus en plus approfondie des systèmes linéaires, depuis le paradoxe de Cramer (1750) jusqu'aux travaux de Frobenius (1875). Notre étude montre que l'émergence de ce concept a nécessité plusieurs adaptations et changements de point de vue.

Schématiquement, au début du XVIIIème on admet d'une part que deux courbes algébriques de degré n se coupent en n^2 points, et d'autre part que $n(n+3)/2$ points déterminent entièrement une courbe algébrique d'ordre n. Si $n \geq 3$, apparaît alors le paradoxe dit de Cramer, puisqu'il semble que deux courbes se coupent en plus de points qu'il n'est nécessaire pour en définir une seule.

En 1750 Euler, s'intéressant à ce problème, introduit pour la première fois la notion de dépendance d'équations linéaires et lève le paradoxe en mettant en évidence la dépendance des n^2 équations linéaires obtenues en écrivant avec des coefficients indéterminés l'appartenance à une courbe algébriques de degré n de n^2 points communs à deux courbes. Il conjecture même pour n=4 et 5 le nombre de relations de liaison qui doivent exister entre ces équations, ce qui peut être vu comme une forme primitive du concept de rang.

Après 1750 et les travaux de Cramer, la théorie des déterminants règne en maître sur l'étude des systèmes linéaires. Le concept de rang se trouve alors quelque peu occulté derrière la notion de déterminant principal. Essentiellement opérationelle donc calculatoire, cette technique ne nécessite pas de mettre en évidence l'invariance de l'ordre des déterminants principaux.

En 1875 Frobenius introduit la notion de dépendance des solutions et la relie avec celle des équations. Il est le premier à donner une définition du rang et à démontrer les premiers résultats qui s'y rapportent.

iv) Longtemps une unification implicite des "concepts linéaires" s'est faite autour de certains aspects de la théorie des déterminants. Et puis la définition descriptive des espaces vectoriels comme n-uplets de nombres a rassemblé la plupart de ces résultats, de façon encore très informelle et sans qu'il y ait de réelle théorie centrale. L'œuvre de Grassmann et les premières approches axiomatiques à la fin du XIXème siècle offraient des outils théoriques plus puissants et proposaient un cadre plus général, mais il furent ignorés pour des raisons diverses, dont la principale est le fait qu'on n'en voyait pas l'utilité.

Le passage à une théorie axiomatique regroupant tous les concepts a été tardif. Les raisons qui l'ont justifié tiennent essentiellement à des soucis d'organisation et de cohérence des savoirs mathématiques permettant d'unifier des domaines a priori distinct et de simplifier la résolution des problèmes aussi bien que la transmission du savoir. Cette unification est un des aspects d'une transformation plus générale de l'édifice des mathématiques qui s'est opérée dans la première moitié du XXème siècle, faisant entre autres de l'algèbre non plus l'étude des équations mais l'étude des structures. Par ailleurs, les applications à des espaces de fonctions, et principalement les travaux de Banach ont montré l'intérêt théorique de l'approche axiomatique pour rendre compte des résultats de l'algèbre linéaire en dimension infinie (par exemple le fait que deux espaces de même dimension linéaire, c'est-à-dire tels que chacun est isomorphe à un sous-espace fermé de l'autre, ne sont pas nécessairement isomorphes)
Ainsi l'utilisation de la théorie axiomatique des espaces vectoriels comme cadre privilégié (voire unique) de l'étude des concepts et des résultats de l'algèbre linéaire constitue une reconstruction du savoir qui est un choix récent, obéissant essentiellement à un souci d'organisatio. Cela aboutit à l'unification et la simplification de l'étude de différents domaines, grâce à des outils et des méthodes généraux et performants.
Ceux-ci ne sont pourtant réellement nécessaires que dans le cadre des espaces de dimension infinie et pour des questions non élémentaires.

II- Méthode d'analyse pour les devoirs.

Nous présentons maintenant notre analyse dans le suivi de productions d'étudiants [DR1,3-4]

1- Nos objectifs

- Nous voulions tout d'abord mieux baliser le contenu de l'algèbre linéaire telle qu'elle est enseignée et évaluée en première année d'université, au moins en relevant les types de tâches proposées aux étudiants et les procédures qu'ils emploient pour les aborder.

- Nous voulions ensuite mieux décrire des types d'évolution des compétences en algèbre linéaire chez un même individu, en particulier en fonction de ses connaissances antérieures en logique et en algèbre élémentaires. Il s'agissait donc de se concentrer sur les méthodes, procédures et erreurs des étudiants en fonction des tâches proposéees d'une part, et des connaissances antérieures de chaque individu d'autre part. On verra que la méthodologie employée devrait permettre, à partir d'un échantillon représentatif, de tracer des types d'histoires individuelles.

- Nous voulions enfin dégager des hypothèses sur les interactions entre les différents domaines internes ou connexes à l'algèbre linéaire. Cette dernière étape nous a conduit à nous interroger sur les contenus possibles d'un cours d'algèbre linéaire et leur signification, en fonction de différents objectifs d'apprentissage.

2- Méthodologie

Nous avons choisi une section de DEUG SSM quasi standard, dans laquelle nous n'interve-nions ni en tant qu'enseignant ni en tant que didacticien. Nous avons analysé les copies d'un prétest de logique élémentaire et d'algèbre, et de tous les exercices ou problèmes faits en temps limité et sous surveillance portant sur l'algèbre linéaire, pendant une année universitaire.

Voici le nom de chaque devoir et le nombre de copies analysées :

- Prétest :	84 copies.
- Devoir surveillé n°1 :	39 copies.
- Partiel :	74 copies.
- Devoir surveillé n°2 :	46 copies.
- Test "vrai/faux" :	58 copies.
- Devoir surveillé n°3 :	58 copies.
- Devoir surveillé n°4 :	50 copies.
- Examen :	73 copies.

Avec les recoupements, nous avons disposé des huit copies pour malheureusement seulement dix-neuf étudiants, à cause de raisons matérielles indépendantes de notre volonté.

Les sujets de ces devoirs sont le produit de la seule équipe enseignante, hormis le prétest et le "vrai/faux", qui ont été mis au point en collaboration avec des didacticiens. De même, à part quelques interventions de nature expérimentale en début d'apprentissage, l'enseignement dans la section étudiée aussi bien que les options d'évaluation ont été "habituels". Nous avons ainsi délibéremment choisi de nous placer dans des conditions réelles quasi standard.

Pour chaque devoir (prétest, devoirs surveillés, tests, partiel et examen) nous avons commencé par faire une "analyse a priori", c'est-à-dire :

- une analyse du contenu de chaque question, en déterminant le type de tâche proposée, les connaissances qu'elles mettent en jeu, le type de question, la part d'implicite qu'elle comporte, sa place dans l'ensemble de l'exercice ou du devoir ...
- mais aussi en fonction de cette première analyse, l'explicitation des types de procédures que les étudiants peuvent mettre en œuvre, les raisons qui peuvent les y pousser, les savoirs et les conceptions correspondants, l'implication que cela peut avoir sur l'ensemble de l'exercice ou du devoir...

L'analyse a priori est une méthode qui utilise les outils et les concepts de la didactique des mathématiques. Elle permet de recueillir des données qui ne reposent pas sur les mêmes critères d'évaluation que ce que ferait un enseignant qui voudrait noter ces étudiants. En particulier l'explicitation en terme de procédures permet de mieux différencier l'apprentissage de la réussite.

a- Le prétest

Le texte de ce prétest est donné en annexe.
A partir de l'analyse a priori, nous avons défini, en fonction des tâches proposées et des cadres d'intervention des concepts, des "blocs de connaissance", sur le modèle proposé par A. Robert et F. Boschet ([RO1] et [BC]). Ces blocs, qui rendent compte des résultats de chaque étudiant au prétest, nous ont permis d'obtenir une information plus maniable et adaptée à la suite de l'analyse.

Pour définir les blocs liés à la logique, nous avons distingué tout d'abord deux catégories de contenus:

(EQ) Les questions faisant intervenir une implication et/ou une équivalence logique
(QA) Les questions liées à des problèmes de quantification

Puis trois niveaux :

(N1) La compréhension brute : on demande si une proposition écrite en langage formel est vraie ou fausse
(N2) On demande d'effectuer une tâche entièrement dans le domaine formel, en l'occurence de donner la négation d'une proposition quantifiée
(N3) Il faut passer d'un cadre "informel" (langage usuel, graphisme,...) à la traduction en langage formel ou vice-versa

Il n'y a pas a priori de hiérarchie évidente entre les trois niveaux ; si ce n'est peut-être que N1 correspond à la tâche la plus simple. Il s'agit en fait au sens de R. Douady [DO], d'être capable de faire fonctionner un même concept dans différents cadres (ce qui correspond à nos niveaux). Or des travaux ont montré qu'à certains seuils, il est plus efficace d'avoir des connaissances même moindres dans plusieurs cadres que des connaissances plus fines dans un nombre restreint de cadres, ce qui justifie cette différenciation en niveaux [RO1].

En outre le découpage par bloc ne suit pas nécessairement le découpage en questions à la lettre,

c'est-à-dire que l'on peut distinguer des niveaux différents à l'intérieur d'une même question. Par exemple examinons les questions 9 et 10, dans chacune on demande de dire si un énoncé formalisé est vrai ou faux, d'en écrire la négation et de dire si la négation est vraie ou fausse. Ecrire les deux négations entre évidemment dans le bloc QA2. Mais pour les réponses vrai/faux, la situation est plus complexe.
Tout d'abord nous avons tenu compte de la cohérence des réponses vrai/faux par rapport aux négations éventuellement fausses données par les étudiants. Mais il y a un autre type de cohérence à avoir, en effet si une proposition est vraie sa négation est fausse et vice versa, et ce type de connaissance se rattache au niveau 2. Ainsi nous avons fait intervenir dans QA2, une bonification si dans chacune des deux questions 9 et 10, les réponses vrai/faux étaient cohérentes par rapport à cette règle, même si les deux réponses étaient fausses par ailleurs.
Vues les tâches impliquées dans le prétest, nous avons eu à considérer cinq blocs: EQ1; EQ3; QA1; QA2 et QA3.
Pour les questions d'algèbre (moins nombreuses) nous avons distingué les questions touchant à des domaines numériques **(AN)** de celles relatives aux structures **(AS)**.

Pour chaque bloc, nous avons défini en fonction de l'analyse a priori et des procédures employées par chaque étudiant une note entre 0 et 1.

Nous avons ensuite examiné la répartition des notes obtenues à chaque bloc par l'ensemble des étudiants, ce qui nous a permis de dégager trois niveaux d'acquisition (bloc vide, plein et demi-plein), en essayant à chaque fois d'équilibrer numériquement la répartition et en essayant de donner une interprétation de l'appartenace à chaque bloc. Nous avons ensuite créé la variable **B** qui comptabilise le nombre de blocs vides pour un même individu, ce qui mesure donc son nombre de lacunes.

Dans un dernier temps nous avons déterminé les blocs les plus significatifs. Ceci nous a conduit à créer un nouveau bloc **Q** à partir des blocs QAi. Finalement nous avons gardé avec la note globale **N** au prétest, les sept blocs suivants, EQ1 plein **(EQ1(2))**, EQ3 plein et vide **(EQ3(2) et EQ3(0))**, Q plein et vide **(Q(2) et Q(0))**, AN et AS pleins **(AN et AS(2)).** De plus pour le nombre de lacunes nous avons choisi la répartition **B=0, B≤1, B≤2 et B≥3**. Nous avons ainsi réduit l'information, mais cela est compensé par la possibilité d'interpréter ces résultats de façon opérationnelle dans la suite.

b- Les autres devoirs

Pour les autres devoirs, en nous basant sur l'analyse a priori, nous avons codifié les procédures le plus souvent rencontrées, établi une note à chaque tâche en faisant intervenir des systèmes de bonus ou de malus en fonction de l'emploi de certaines procédures, puis nous avons donné sous forme de tableau les résultats du dépouillement en reportant en lignes les étudiants et en colonne les codes et les notes question par question.
Cette méthode nous a conduit à donner une note globale à chaque devoir. en étudiant la courbe des notes, nous avons divisé chaque échantillon en trois tranches (dénommées : supérieure, médianne et inférieure) numériquement équilibrées. Cette dernière étape globalisante donc réductrice d'information correspond encore une fois à un souci de maniabilité des données.
Dans un deuxième temps, nous avons testé la représentativité de l'échantillon, par rapport aux résultats du prétest. Ainsi nous avons regroupé dans un même tableau, pour la population totale évaluée au prétest et pour l'échantillon des étudiants ayant rendu le devoir correspondant, la moyenne et l'écartype au prétest, les pourcentages d'étudiants ayant obtenu les blocs EQ1(2), EQ3(2), EQ3(0), Q(2), Q(0), AN, AS(2), B=0, B≤1, B≤2, B≥3.

Chaque fois, nous avons obtenu des écarts très faibles (≤10% et même souvent ≤5%).
De même nous avons vérifié la représentativité de l'intersection de tous les échantillons, c'est-à-dire des dix-neuf étudiants dont nous avions l'ensemble des copies, non seulement par rapport au prétest mais aussi pour chaque devoir en comparant les moyennes et écartypes et le nombre d'étudiants dans chacune des trois tranches de chaque devoir. On a pu observer que ce dernier échantillon était globalement légèrement plus fort, ce qui s'explique assez bien puisque ces étudiants avaient assisté à tous les devoirs pendant toute l'année, or on sait que l'assiduité et souvent corrélée à un meilleur niveau. Néanmoins on peut dire qu'à cette remarque près les dix-neuf étudiants de l'échantillon final sont assez représentatifs des quatre-vingt quatre de départ.
Par ailleurs les étudiants testés provenaient de trois groupes de travaux dirigés différents. Nous avons donc, à chaque devoir, essayé de mettre en évidence les caractéristiques de chaque groupe.

Dès le prétest on peut assez bien différencier les groupes par leur moyenne et leur écart-type. En effet le groupe 2 a la plus faible moyenne (12,8) et le plus grand écart-type (3,36), il est donc globalement faible mais hétérogène. Le groupe 3 a lui la meilleure moyenne (13,8), mais un

écart-type encore assez élevé (3,08), c'est donc un groupe globalement fort mais aussi assez hétérogène. Enfin le groupe 1 a une assez bonne moyenne (13,2) et un écart-type plus faible (2,59), c'est donc un groupe moyen et plutôt homogène.
Il est intéresant de constater que ces caractéristiques se retrouvent tout au long de l'année en allant même, dans une certaine mesure, en s'accentuant. Ainsi le groupe 1, devient de plus en plus homogène tout en obtenant des notes globalement plus élevées. C'est celui qui a en général, le plus d'étudiants, en pourcentage, dans la tranche médianne des notes à chaque devoir. On peut avancer l'hypothèse que l'homogénéité a favorisé un nivellement par le haut.

Le groupe 3 reste toujours globalement le plus fort (il faut préciser qu'il comportait un fort pourcentage de redoublants), par contre son hétérogénéïté a tendance à s'accentuer. Il semblerait dans ce cas que les évolutions individuelles aient pris le dessus sur les effets de groupe. Enfin le groupe 2 reste globalement faible et très hétérogène, c'est en général celui qui présente le plus d'étudiants dans la tranche inférieure des notes à chaque devoir, tout en maintenant un pourcentage assez constant dans la tranche supérieure.

Par ailleurs, à certaines questions, nous avons noté des différences de réussite assez nettes entre les groupes, qui ne peuvent s'expliquer que par la situation conjoncturelle de l'enseignement pratiqué. Ce phénomène est somme toute assez rare, mais quand nous avons cru l'avoir détecté, nous avons essayé de ne pas trop faire intervenir la question correspondante dans notre évaluation, pour ne pas biaiser les résultats.

Enfin nous avons également essayé d'évaluer la corrélation entre les résultats à chaque devoir et les résultats du prétest. Pour ce faire nous avons réalisé à chaque devoir pour l'échantillon testé, un tableau croisé. Celui comporte, en colonne les moyennes et écart-types au devoir et au prétest ainsi que le nombre d'étudiants ayant eu les blocs : EQ1(2), EQ3(2), EQ3(0), Q(2), Q(2), AN, AS(2), B=0, B≤1, B≤2, B≥3, et en ligne la répartition globale, les moyennes au devoir, et la répartition dans les trois tranches de notes au devoir. Chaque fois nous avons donné deux versions de ce tableau, une première où les pourcentages sont calculés sur la ligne, c'est-à-dire que pour chaque tranche de note on sait le pourcentage de gens qui ont eu tel ou tel bloc, et une deuxième version où les pourcentages sont calculés sur la colonne, c'est-à-dire que l'on sait dans chaque bloc les pourcentages d'étudiants dans chaque tranche de notes au devoir.

A titre d'exemple, voici les tableaux croisés prétest / DS n°3 :

	EFF	MOY	EQ1(2)	EQ3(2)	EQ3(0)	Q(2)	Q(0)	AN	AS	B=0	B≤1	B≤2	B>2
TOTAL	49	13,5	55%	20%	18%	37%	35%	82%	61%	39%	66%	86%	14%
MOY	4,8		5,1	6,1	3,8	5,6	4,4	4,7	4,9	5,4	5,3	5	3,1
N≤3	12	12,3	33%	8%	33%	17%	42%	83%	58%	25%	42%	67%	33%
4≤N≤5	19	13,3	68%	11%	11%	32%	37%	89%	47%	37%	68%	95%	5%
N≥6	18	14,6	56%	39%	17%	56%	27%	72%	78%	50%	78%	89%	11%

(les pourcentages sont calculés sur la ligne)

	EFF	MOY	EQ1(2)	EQ3(2)	EQ3(0)	Q(2)	Q(0)	AN	AS	B=0	B≤1	B≤2	B>2
TOTAL	49	13,5	27	10	9	18	17	40	30	19	32	42	7
MOY	4,8		5,1	6,1	3,8	5,6	4,4	4,7	4,9	5,4	5,3	5	3,1
N≤3	24%	12,3	15%	10%	44%	11%	30%	25%	23%	16%	16%	19%	57%
4≤N≤5	39%	13,3	48%	21%	23%	34%	41%	42%	30%	37%	40%	43%	14%
N≥6	37%	14,6	37%	70%	34%	56%	29%	32%	47%	47%	44%	38%	29%

(les pourcentages sont calculés sur la colonne)

c- Analyse globale

Dans un dernier temps nous avons fait une analyse globale des corrélations entre tous les devoirs et le prétest. Pour cette partie, en collaboration avec un statisticien (C. Lavergne), nous avons utilisé le logiciel SPAD.N (système portable pour l'analyse des données), pour réaliser les analyses en composantes principales nécessaires.

Le détail de la méthodologie employée ici dépasserait le propos de cet article et nous renvoyons le lecteur intéressé aux réferences données en début de paragraphe.

III - Les résultats

Les tâches

Pour déterminer la nature des tâches proposées, nous nous sommes essentiellement appuyés sur les analyses a priori que nous avons faites de chaque devoir. Nous donnons ci-dessous les éléments généraux principaux que nous avons dégagés.

- La nature même des concepts d'algèbre linéaire nous semble conduire à un enseignement dichotomique où coexistent d'une part des problèmes développant des "techniques-objets" dans un cadre purement formel et d'autre part des problèmes concrets qui requièrent des aptitudes dans l'utilisation de techniques algébriques parfois pointues et où les concepts d'algèbre linéaire ne sont pas absolument nécessaires, si bien que les étudiants ne les utilisent que par un effet de contrat ("c'est la question posée", "il faut utiliser les connaissances du cours"), faute de voir la généralisation ou la simplification qu'ils apportent. Nos analyses ont permis de mettre à jour cette dichotomie à travers la nature des sujets abordés.

Dans l'enseignement, on rencontre d'abord des problèmes qui présentent une utilisation de l'algèbre linéaire pour résoudre un problème qui se place dans un autre cadre (polynômes, fonctions, suites etc...). Ils présentent deux spécificités :

* L'utilisation de l'algèbre linéaire est locale, et nécessite la résolution de ce qu'on peut appeler des questions d'approche, qui se situent entièrement dans le cadre où le problème est posé. Or certaines de ces questions d'approche posent des difficultés d'ordre technique aux étudiants qui ne sont souvent pas familiers avec le cadre dans lequel on les fait travailler. Ainsi dans certains des devoirs que nous avons analysés (DS1, partiel et DS2), beaucoup d'étudiants n'ont pas réussi à faire les premières questions et se sont trouvés bloqués ou ont résolu la fin en contournant la démarche proposée par le devoir, c'est-à-dire en n'utilisant pas d'algèbre linéaire.

* Par ailleurs certains problèmes présentent des problèmes, où l'utilisation de l'algèbre linéaire peut être vue comme une simplification ou une généralisation, mais à condition qu'on ait les moyen de comprendre que cela offrent une méthode générale utilisable telle quelle, avec d'autres données numériques, et même généralisable à des problèmes voisins. Mais les problèmes posés aux étudiants ne sont pas en général présentés dans cette optique, et aucun commentaire métamathématique ne les acompagne. Aussi les étudiants passent-ils souvent complètement à

côté du but, ils arrivent même parfois à ne pas utiliser d'algèbre linéaire pour répondre aux questions. En tous cas s'ils utilisent de l'algèbre linéaire ce n'est qu'à cause du découpage des questions qu'on leur impose, ou sous l'effet du contrat général qui veut qu'on utilise dans les problèmes les notions en cours d'apprentissage. Mais le côté simplificateur et unificateur des concepts échappe trop souvent aux étudiants. L'activité devient entièrement artificielle et l'approche épistémologique est impossible.

On constate par ailleurs que rapidement en cours d'apprentissage, les problèmes proposés se situent entièrement dans des espaces formels. Singulièrement cette tendance est irréversible et après les quelques tentatives d'applications de l'algèbre linéaire à d'autres domaines, les devoirs ne visent plus que l'utilisation purement interne des concepts dans un contexte très général.
Ce deuxième type de tâches posent alors d'autres difficultés, en effet on constate souvent que les questions ne faisant intervenir que le cadre purement formel sont sources de réponses apparemment incohérentes dont on a l'impression que seule la pression de l'obligation à donner une réponse peut les justifier, ce que l'on peut appeler un comportement du type "la fin justifie les moyens".

En outre nos analyses ont permis de mettre à jour une deuxième dualité dans les types de tâches proposées, qui se superpose à la précédente. Schématiquement le premier type de tâches est calculatoire ou algorithmique, la trame de la question est connue de l'étudiant, seules les données sont nouvelles, le deuxième type touche aux questions plus conceptuelles où la tâche ne correspond pas à un raisonnement stéréotypé, mais nécessite une bonne connaissance intrinsèque des concepts souvent dans plusieurs cadres. Dans ces questions la part créative de l'étudiant est plus grande, et donc ces chances d'erreurs également. En effet outre les problèmes d'initiative, il y a de forts risques de dérapage et de perte de sens.

Cette distinction, calcul/concept dans les tâches, contrairement à la précédente n'est pas spécifique de l'algèbre linéaire. Son évolution est en fait un effet pervers du contrat pédagogique global, en particulier des options d'évaluation. La nécessité d'évaluer par un spectre de notes classant les étudiants selon des critères tranchés pousse toujours en effet à privilégier les calculs et les techniques algorithmiques au détriment de points plus conceptuels dont la mise en fonctionnement est difficilement évaluable.

Les diverses difficultés issues de ces deux dualités conduisent donc l'enseignement de l'algèbre linéaire à se réduire rapidement à des problèmes d'une part où il n'est plus fait référence à un cadre extérieur, donc à une vraie problématique, mais aussi où l'utilisation du formalisme est réduite, puisqu'enfin il ne s'agit plus ou moins que d'appliquer des algorithmes bien ciblés, à quelques variantes près. Ce constat est un peu sévère mais à peine exagéré. On a vu que les problèmes posés dans des cadres concrets engendrent des difficultés liées à des connaissances antérieures de techniques algébriques et que les problèmes trop formels conduisent à une perte de contrôle du sens par les étudiants qui sont prêts à écrire "n'importe quoi" pour donner une réponse. On comprend dans ces conditions l'évolution inéluctable que subissent les sujets des problèmes et le soulagement que peuvent ressentir les enseignants quand ils peuvent enfin aborder des questions de diagonalisation et de trigonalisation, qui font classiquement l'objet des sujets d'examen.

Les évolutions individuelles

Ceci dit, l'enseignement et les problèmes étant ce qu'ils sont, avec ces difficultés, quelles sont les grandes hypothèses que l'on peut avancer sur le comportement des étudiants en fonction des tâches proposées et des connaissances antérieures ?

La nature des compétences antérieures dans le domaine de la logique élémentaire semble avoir un effet sur la réussite globale en algèbre linéaire. Les deux domaines ne sont pas cependant dans une situation de transfert direct, il apparaît que dans le niveau d'acquisition des connaissances antérieures en logique, il existe un seuil global au delà duquel les chances de réussite en algèbre linéaire deviennent plus élevées. On peut penser qu'alors s'opère une transformation du quantitatif vers le qualitatif. L'important est de ne pas avoir de "trou" dans les connaissances antérieures, au delà d'un certain minimum de compétences dans le domaine de la logique élémentaire (le quantitatif), un réinvestisement peut s'opérer qui permet d'accéder à une connaissance nouvelle en algèbre linéaire donc plus fine, hiérarchiquement plus élevée (le qualitatif). En particulier la variable B est toujours la mieux corrélée dans nos analyses. Il est intéressant de remarquer que l'on retrouve peut-être ici une interprétation proche de l'idée piagétienne sur l'acquisition des différentes facettes d'un schème comme prérequis à l'acquisition du schème lui-même. Or ce résultat va à l'encontre de l'idée naïve, qui veut que les connaissances s'acquièrent par petits pas successifs, de proche en proche. Nous pensons plutôt et nos résultats semblent le confirmer que l'apprentissage est fait de ruptures et de sauts,

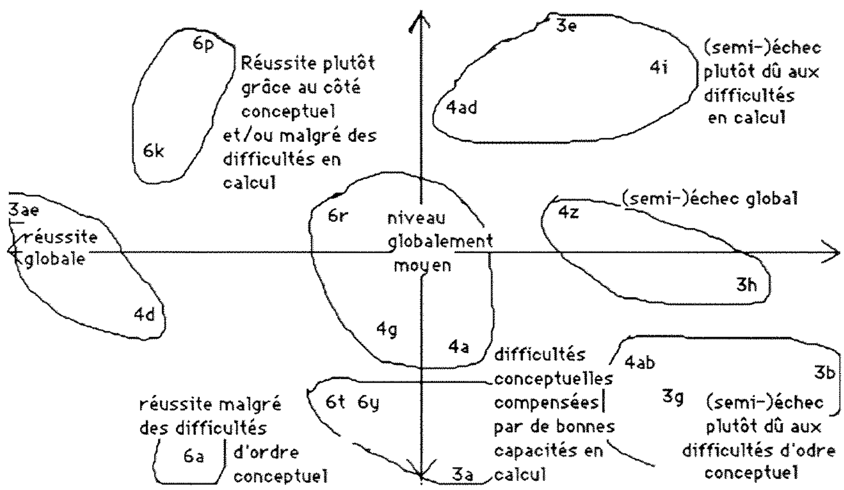
qu'alternent des périodes de déséquilibration et de rééquilibration permettant aux connaissances de s'organiser selon des processus plus complexes que la simple progression linéaire.
De plus ce résultat sur la corrélation aves les connaisssances antérieures est identique à celui trouvé par A. Robert à propos des concepts élémentaires d'analyse réelle [RO1].

Cependant certaines difficultés en algèbre linéaire, a priori très liées à des compétences de logique (par exemple la confusion entre hypothèse et conclusion dans la définition d'une famille libre), ne semblent pas être mieux résolues par les étudiants ayant les résultats les plus élevés au prétest de logique. On peut donc penser qu'indépendamment du constat précédent, un enseignement préalable de la logique ne résout pas tous les problèmes liés au formalisme de l'algèbre linéaire et que certaines questions de logique ne seront abordées avec profit que dans le cadre de l'algèbre linéaire.

La nature des problèmes d'algèbre linéaire favorise les erreurs du type "la fin justifie les moyens". La perte de contrôle du sens et le manque de recul sont des difficultés générales à toute activité mathématique, mais elles deviennent particulièrement fortes ici, d'une part dans les problèmes formels où les appuis ne sont pas solides et les dérapages fréquents, mais aussi dans les problèmes faisant référence à un cadre concret où la démarche est induite par les questions mais jamais explicitée par un discours métémathématique, et où il s'agit plus, finalement, de faire de l'algèbre linéaire (contrat) que de résoudre des problèmes.

Sur le plan individuel, on remarque qu'il existe des comportements très variés. Il faut distinguer la réussite aux problèmes algorithmisés, où l'aspect calculatoire est fort, et la réussite moins facilement évaluable à des questions mettant en jeu des connaissances plus conceptuelles. Les deux aspects ont des influences sur la réussite apparemment assez équilibrées mais aussi quasi indépendantes.

C'est ce qu'illustre le schéma ci-dessous, qui représente la position des étudiants dans le plan principal correspondant à l'ACP sur les notes des devoirs. (L'axe 1 évalue le niveau de réussite et l'axe 2 oppose les tâches calculatoires ou algorithmiques à celles plus conceptuelles.)



Un minimum de connaissances antérieures en logique mais aussi dans des domaines de techniques algébriques sont des facteurs favorables à la réussite au niveau conceptuel.

Les compétences dans la résolution des systèmes d'équations linéaires semblent avoir une influence directe sur le côté calculatoire mais aussi, pour les systèmes avec paramètre(s), une influence plus profonde et qui agit sûrement à des niveaux très divers sur de nombreuses compétences en algèbre linéaire. Le contrôle du sens nécessaire pour mener à bien une discussion de cas dans une telle résolution pourrait donc apparaître comme un bon début pour aborder le côté formel des concepts plus évolués d'algèbre linéaire.

La nature des tâches et le spectre assez large des connaissances antérieures exigibles selon différents types de questions, rendent les possibilités de réussite et d'échec en algèbre linéaire fort complexes.

Les remarques qui précèdent sont, dans une certaine mesure, le constat de l'échec d'un enseignement qui, ne pouvant assurer une bonne mise en fonctionnement des premiers concepts, dans leur aspect le plus fort, se réfugie dans des tâches algorithmisées et calculatoires. Pour surmonter cette difficulté, il pourrait être utile de jouer sur les connaissances antérieures. Mais apparemment cela ne suffira sûrement pas. Enseigner de la logique hors contexte est un point délicat et c'est un sujet que l'on épuise vite.

Par ailleurs les techniques algébriques nécessaires dans les divers problèmes d'algèbre linéaire sont tellement diversifiées et en même temps si ponctuelles, que l'on voit mal comment organiser, de façon rationnelle, un enseignement préalable profitable de ces notions. La résolution des systèmes d'équations linéaires, principalement quand ils dépendent de paramètre(s), pourrait par contre se prêter tout à fait à un enseignement préalable qui peut être une bonne introducion à un cours d'algèbre linéaire.

Apparemment la notion de connaissances antérieures de logique semble donc devoir être redéfinie, de même que la notion de connaissances antérieures en techniques algébriques. Dans ces deux domaines en effet si des connaissances antérieures semblent être un atout pour l'algèbre linéaire, cela ne suffit pas et des connaissances spécifiques semblent devoir être acquises en début d'apprentissage.
Pourquoi alors ne pas traiter ces deux problèmes conjointement et ce, d'emblée dans le contexte de l'algèbre linéaire, mais en se limitant à des questions d'un niveau élémentaire ?

Notre proposition consite à réduire en volume la première phase de l'enseignement de l'algèbre linéaire (par rapport à ce qui se fait couramment). Par exemple en excluant toutes les notions ayant trait au calcul matriciel, et même éventuellement les notions de noyau et d'image. On pourrait ainsi faire un travail en traitant des exemples dans des espaces variés, mais en n'utilisant que des concepts élémentaires d'algèbre linéaire, auxquels on donnerait ainsi leur sens simplificateur et unificateur, tout en renforçant les compétences en logique et en techniques algébriques. En effet si techniques algébriques, logique et concepts élémentaires d'algèbre linéaire sont indissociables, pourquoi ne pas faire travaillller les étudiants ***explicitement*** sur les trois en même temps, plutôt que de se borner à ne travailler que sur le dernier domaine en gérant forcément mal les lacunes dans les deux autres ?

L'algèbre linéaire est un domaine vaste, dont les contours sont mal définis, même pour les concepts élémentaires. En tout début d'apprentissage, il est fréquent que des problèmes étiquetés "d'algèbre linéaire", fassent appel à des compétences qui ne sont pas toujours du domaine de l'algèbre linéaire au sens strict du terme, mais qui permettent ensuite de faire un réel travail sur les concepts d'algèbre linéaire.

Le gain de temps obtenu par la suppression du calcul matriciel pourrait être réinvesti dans une approche plus en profondeur des tout premiers concepts (sous-espace, dépendance, générateurs, bases, dimension, supplémentaire) et on pourrait alors aussi, élargir explicitement l'objet d'enseignement aux compétences spécifiques à certains cadres intervenant dans les problèmes ainsi qu'à des compétences en logique pour l'algèbre linéaire.

IV- Critiques méthodologiques

Portée et limite de nos données et de nos résultats

Les quelques remarques qui précèdent, sont le fruit de notre étude, ce qui fait qu'elles sont la conséquence directe de la nature de notre analyse. Or il nous faut ici, en en faisant la critique, rappeler les limitations que nous imposent les données qui sont à la source de ce travail aussi bien que la méthodologie employée. Tout d'abord les connaissances antérieures que nous avons évaluées à travers le prétest ont été l'objet d'un choix arbitraire qui aurait pu être tout autre (autres questions de logique, plus de questions d'algèbre etc...) pourtant ils conditionnent de nombreux résultats de nos analyses de façon très forte. On aurait également pu envisager d'évaluer des compétences en géométrie analytique en guise de connaissances antérieures. En effet après notre travail, la question des rapports entre les compétences en géométrie analytique et en algèbre linéaire reste entière, faute d'avoir des données sur nos étudiants dans le premier domaine. C'est pourtant un point qui mériterait d'être éclairci.

De plus le choix des sujets des problèmes concernés par notre évaluation aurait pu être très différent tout en restant représentatif... Nous n'avons pas utilisé, volontairement, de moyen de contrôle sur le contenu des épreuves pas plus que sur leurs conditions de passage. En particulier la mixité des sujets (analyse/algèbre) est un facteur dont on ne peut mesurer les effets. Il est bien évident que ces restrictions limitent d'autant la portée de notre analyse et donc de nos résultats

Par ailleurs même si nous avons essayé de répertorier des procédures et si nous ne nous sommes pas contenté de seulement noter les réponses, et même si nous avons employé pour le prétest la technique d'évaluation par bloc, nous ne pouvons toujours pas réellement distinguer dans nos analyses apprentissage et réussite. Or s'il y a certainement de grands rapports entre les deux notions, il est assez clair que la réussite n'est qu'une apparence d'un apprentissage ; nous touchons là une question méthodologique de fond, qu'il nous semble illusoire de pouvoir résoudre dans l'état actuel.

Tout au plus devons-nous nous contenter de réduire le décalage en allant chercher au delà des simples réponses, les comportements, les procédures qui les ont motivées. La nature figée des réponses écrites est néanmoins une barrière incontournable qui en limite les possibilités d'analyse.

Par contre nous tenons à préciser ici que si l'échantillon final de dix-neuf étudiants peut paraître numériquement faible, jnous avons d'abord montré qu'il avait toute les raisons de présenter des caractéristiques très voisines de celles de la population intiale de qutre-vingt trois étudiants. De plus nous n'avons pas cherché à faire une étude statistique sur des grands nombres de type sociologique, mais plutôt une étude, de type éthnographique, c'est-à-dire que nous voulions mettre en évidence l'existence de certains types d'évolution des connaissances en algèbre linéaire chez un même individu. En ce sens dégager un type d'évolution, même sur un seul individu répond à notre attente.

Le choix des méthodes statistiques utilisées, quant à lui, a bien sûr conditionné nos résultats, mais c'est aussi en fonction de ce que nous voulions regarder que nous avons mis en place ces outils. Or il peut sembler que nous avons mis en place un système assez lourd pour donner des conclusions plus souvent sous forme de questions que sous forme de certitudes. Ce pourrait sembler être une faiblesse, mais d'une part nous nous méfions des interprétations trop peu justifiées et d'autre part, rien ne prouve qu'avec moins de données, nos conclusions n'auraient pas encore été plus incertaines. Une idée synthétique qui puisse se justifier par des résultats précis est en effet le fruit d'une longue réflexion qui se nourrit de beaucoup de matériaux ; son aspect réducteur, qui en fait la force, a tendance à faire oublier ce point fondamental. De plus nous espérons que des lecteurs avertis pourront dans les résultats détaillés que nous avons mis à jour ([DR1 ou 2]), trouver des renseignements plus spécifiques qui n'apparaissent donc pas dans nos conclusions, voire qu'ils feront des interprétations qui nous ont échappées et qui leur semblent intéressantes.

Ces remarques, indispensables pour mieux relativiser nos conclusions, étant faites, on peut se

poser la question de l'utilité d'une analyse, telle que nous l'avons faite.
Savoir comment les connaissances antérieures de logique élémentaire conditionnent la réussite en algèbre linéaire constitue la question initiale qui a motivé notre travail. Les éléments de réponses que nous avons été à même de donner restent limités.

Une lecture rapide de nos résultats pourraient se résumer à la seule conclusion que les étudiants ayant de bons connaissances antérieures réussissent mieux, autrement dit que les bons étudiants restent toujours les meilleurs. On nous dira -avec raison- qu'une analyse aussi longue était inutile pour justifier une telle évidence.
On pourrait alors souligner qu'un premier résultat intéressant de notre travail est de mettre en lumière le fait que la formation des connaissances nouvelles et les rapports qu'elles entretiennent avec les connaissances antérieures sont des phénomènes complexes sur lesquels il faut se garder d'avoir des opinions trop hâtivement fondées et/ou trop tranchées. Le savoir ne se constitue pas petit à petit dans un processus quasi linéaire où la maîtrise de certains connaissances antérieures serait à elle seule le garant de l'accession à un nouvelle connaissance. Les processus en jeu sont beaucoup plus complexes et il est difficile d'en cerner tous les aspects. En fait, nous avons quelques éléments de réponses qui sont donnés par les études en psychologie cognitive et en didactique des mathématiques mais, au niveau de études de terrain, les limites méthodologiques de l'investigation ne permettent pas de bien préciser les résultats.
D'autre part, dans notre cas, le choix d'une complète indépendance par rapport à l'enseignement représentait une idée séduisante et en quelque sorte un pari, mais cela nous a conduit à beaucoup d'incertitude sur la nature des données recueillies. Nous pensons a posteriori que même pour ce type de pré-analyse, il aurait fallu contrôler, même très peu, la nature des épreuves, voire leur coordination, et les conditions de passage etc... Nous aurions pu ainsi avoir plus de confiance dans ce que nous aurions recueilli et faire un travail plus riche sans beaucoup plus de coût. Nous pensons qu'apparaît ici un deuxième résultat didactique qui remet en cause la portée des évaluations a priori, dont il semblerait, contrairement à une opinion répandue, qu'elles restent très limitatives.

Un certain type de contrôle de l'enseignement lui-même aurait sans doute était préférable, bien que difficilement gérable. On a pu observer, à propos de certains exercices, que des écarts dans les réponses de trois groupes différents ne semblaient pouvoir s'expliquer que par des différences dans l'enseignement pratiqué dans chaque groupe par un enseignant différent. Ce genre de parasitage, qui peut dans des cas moins caractérisés nous échapper entièrement, est un phénomène gênant. On pourrait semble-t-il y remédier, au moins partiellement, en donnant des directives aux enseignants, mais pour être efficace ce devrait être fastidieux et finalement rendre le contexte moins standard. Une autre solution consisterait à faire des observations en cours et/ou en TD, afin de faire entrer dans l'analyse une variable prenant en compte les différences entre les enseignants, mais cela demanderait de passer beaucoup de temps à mettre en place une méthodologie pour les observations, de plus c'est un problème délicat.

Conclusion

Finalement en dépit des améliorations qu'il resterait à faire, qu'avons nous obtenu ?
Tout d'abord nous avons pu recueillir une analyse des tâches qui nous semble intéressante sur le plan didactique. Cependant ce n'est qu'une analyse en l'état et, hors-mis des hypothèses plus ou moins fondées, nous n'avons encore aucun élément de réponse sur les effets que des modifications éventuelles pourraient apporter.
Notre position sur la nature des connaissances antérieures en logique élémentaire et sur les techniques algébriques, ainsi que sur la façon dont ils s'articulent avec l'acquisition des concepts d'algèbre linéaire est, à la suite de notre travail, beaucoup plus argumentée et surtout elle s'appuie sur des résultats précis. Cependant nous devons, faute de données, rester plus vague en ce qui concerne certains connaissances antérieures en algèbre et surtout en ce qui concerne la géométrie analytique.

Pour ce qui touche aux évolutions individuelles des étudiants, notre appréciation du problème a pu s'éclaircir. Nous cernons mieux en particulier certains types de comportements, mais aussi il nous est plus facile de "prévoir", avec assez de certitude, sur des tâches précises, les procédures qui ont le plus de chance d'être mise en œuvre par les étudiants, en fonction de leurs connaissances antérieures. Ce point reste bien sûr encore flou, tant il est vrai que les comportements ne sont pas prédéterminés. Il est simplement possible à partir d'un diagnostic de la tâche proposée et des connaissances antérieures d'un individu donné, de savoir ce qu'il saura sûrement faire et ce qu'il ne saura sûrement pas faire. Cependant cette analyse, doublée d'une réflexion épistémologique et didactique, peut permettre à petite échelle d'espérer améliorer un enseignement.

Il est important pour comprendre la portée que peut avoir notre travail, de bien mesurer la part de didactique qu'il comprend. Extérieurement, cette étude peut en effet sembler se situer à un niveau seulement pédagogique. Nous pensons pourtant qu'elle a, à pratiquement tous les niveaux, des spécificités didactiques. Dès le départ le choix de la méthode d'analyse par blocs est une option didactique, qui repose sur l'idée que l'on peut caractériser les connaissances selon leur fonctionnement et suivant les cadres où elles agissent. Cette technique associée à la caractérisation des réponses en termes de procédures, nous a permis de relier connaissances antérieures et connaissances nouvelles selon un mode qui correspond mieux à ce que nous semblent être les processus d'acquisistion des connaissances. Autrement dit nous nous sommes appuyés sur des travaux didactiques et des hypothèses sur la construction du savoir, pour analyser les données recueillies. En particulier l'idée que l'on n'apprend pas petit à petit mais qu'il existe des phases de déstabilisation suivie par des périodes de réorganisation, ou bien le concept de contrat, sont des éléments qui nous ont permis de regarder nos données sous un autre angle et surtout d'en donner des interprétations différentes.

Le travail didactique est bien sûr visible également au niveau de l'analyse des tâches. En particulier, l'introduction de la dimension épistémologique est fondamentale, pour pouvoir en arriver à nos conclusions. C'est parce que nous nous sommes d'abord interrogé sur la nature des concepts de l'algèbre linéaire et sur leur origine, que nous avons par exemple dégagé une dichotomie au niveau des tâches et cette réflexion préalable nous a guidé dans beaucoup de nos interprétations. La façon même dont nos conclusions ont pu être reprises, pour donner les propositions que nous avons énoncées plus haut, relève d'une démarche où l'apport didactique est fondamental.

Références bibliographiques

[AT1] - B. ARTMANN, Ansichten der linearen Algebra, in "Mathematik-Unterricht", Heft 2, 27ème année, pp. 68-75, Ernst Klett Stuttgart, 1981.

[AT2] - B. ARTMANN - G. TOERNER, lineare Agebra, Grund- und Leistungskurs, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1983.

[AT3] - B. ARTMANN, Linear algebra als hochschuldisziplin, in "Postdamer Vorschungen", Heft 41, pp.124-136, 1984.

[AT4] - B. ARTMANN, Lineare Algebra, Birkhäuser, Basel, 1986.

[AT5] - B. ARTMANN - H. REIFFERT, Characteristische Zugänge zu den begriffen der Lineare Algebra am beispiel von determinante und skalarprodukt., in "Praxis des Mathematik" (28), 1986, Nr2, pp. 74-80.

[BC] - F. BOSCHET - A. ROBERT , Acquisition des premiers concepts d'analyse sur R dans une section ordinaire de première année de DEUG, Cahier de didactique des mathématiques n°7, IREM de Paris VII.

[DO] - R. DOUADY, Jeu de cadres et dialectique outil-objet, Thèse d'état. Université de Paris VII-1984.

R. DOUADY, Même titre, in Recherche en Didactique de Mathématiques (RDM) vol 7 n°2 1986 pp 5-31.

[DR1] - J-L. DORIER, Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire. Approches historique et didactique, Thèse de Doctorat de l'université J. Fourier - Grenoble 1, 1990.

[DR2] - J-L. DORIER, Analyse dans le suivi de productions d'étudiants de DEUG A en algèbre linéaire, Cahier DIDIREM n°6, IREM de Paris VII, avril 1990.

[DR3] - J-L. DORIER, Analyse historique de l'émergence des concepts élémentaires d'algèbre linéaire, Cahier DIDIREM n°7, IREM de Paris VII, juin 1990.

[DR4] - J-L. DORIER, Continuous anlaysis of one year of science students' work in linear algebra, in first year of French university, in the proceedings of the XIVth annual congress of the PME-Mexico, 1990.

[HA1] - G. HAREL,Variation in linear algebra content presentations, in For the learning of mathematics 7,3, Montreal, Novembre 1987.

[HA2] - G. HAREL, A comparison between two approaches to embodying mathematical models in the abstract system of linear algebra, in the proceedings of the 8th annual conference of the PME-NA, G. Lappan ed., Michigan, 1986.

[HA3] - G. HAREL, Learning and teaching linear algebra : difficulties and an alternative approach to visualizing concepts and processes, in Focus on learning problems in mathematics, II-(2), pp. 139-148, 1989.

[HA4] - G. HAREL, Applying the principle of multiple embodiements in teaching linear algebra : aspects of familiarity and mode of representation , in School Sciences and Mathematics, Vol 89(1), pp. 49-57, 1989.

[HA5] G. HAREL, using geometric models and vector arithemetic to teach high-school students basic notions in linear algebra, in ?, 1990.

[RG] M. ROGALSKI, Pourquoi un tel échec dans l'enseignement de l'algèbre linéaire, in Enseigner autrement les mathéamtiques en DEUG aI, Brochure Inter IREM- Universités, CI2U, Lille,1990.

[RO1] - A. ROBERT, Rapport enseignement/apprentissage (début de l'analyse sur R). Fascicule 1, Analyse d'une section de DEUG A première année (les prérequis et l'apprentissage), Cahier de didactique des mathématiques n°181, IREM de Paris VII.

[RO2] - A. ROBERT, De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire, Cahier de didactique des mathématiques n°47, IREM de paris VII, Septembre 1987.

[RO3] - A. ROBERT, J. ROBINET et I. TENAUD, De la géométrie à l'algèbre linéaire, Brochure de l'IREM de Paris VII n°72, Décembre 87.

[RO4] - A. ROBERT et J. ROBINET, Quelques résultats sur l'enseignement de l'algèbre linéaire, Cahier de didactique des mathématiques n°53, IREM de Paris VII, 1989.

[RO5] - A. ROBERT, L'acquisition de la notion de convergences des suites numériques dans l'enseignement supérieur, Thèse d'Etat Université de Paris VII, 1982.

[RI] - J. ROBINET, Esquisse d'une génèse des notions d'algèbre linéaire enseignées en DEUG , Cahier de didactique des mathématiques n°29, éd. IREM de Paris VII. Mai 1986.

ANNEXE

Texte du prétest

1- Soit a un nombre réel, les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses : (rayez les mentions inutiles)

i) a=3 -> a2 = 9 VRAI / FAUX
ii) a2 = 9 -> a=3 VRAI / FAUX
iii) a=3 <-> a2 = 9 VRAI / FAUX
iv) a≠3 <-> a2 ≠ 9 VRAI / FAUX
v) √4 = ±2 VRAI / FAUX
vi) √4 = 2 VRAI / FAUX
vii) √4 = -2 VRAI / FAUX
viii) √4 =|-2 | VRAI / FAUX

2- a)Si x est un nombre réel non nul ,
-1< x <3 entraine toujours 1< x2<9 VRAI / FAUX

b) Quelle est l'inégalité vérifiée par x2 ? ......< x2 <......
(Répondez par des nombres)

3-Trouvez le sous ensemble X de N défini par les deux propriétés: 0 êêe X et pour tout a:
a e X si et seulement si a+1 e X .
4- Soient f1, f2, f3 trois fonctions de R dans R. Traduire graphiquement les propriétés suivantes:

a) pour tout entier i, i=1;2;3, il existe un élément a de R
tel que fi(a)=1.
b) il existe un entier i, i=1;2;3, tel que pour tout réel a, fi(a)=1.
c) il existe un réel a tel que, pour tout entier i, i=1;2;3, fi(a)=1.
d) pour tout réel a, pour tout entier i, i=1;2;3, fi(a)=1.

5-Ecrire dans un langage le plus formalisé possible la phrase suivante:
Etant donnée une suite (un) de réels, tout intervalle de R de centre 0 contient un élément de la suite.

6- Soit E un ensemble, qu'appelle-t-on loi associative sur E ?

7-Citez un groupe en précisant la loi de groupe.

8-Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses: (rayez la mention inutile):

a) Pour tout entier naturel x, il
existe un entier naturel y tel que: VRAI / FAUX
x = 6y .

b) Pour tout entier naturel y, il
existe un entier naturel x tel que: VRAI / FAUX
x = 6y .

c) Il existe un entier naturel y, tel
que pour tout entier naturel x : VRAI / FAUX
x = 6y .

9-Soit (P) la proposition suivante:

(P) Il existe un entier n tel que pour tout entier p, $p \leq n$.
Quelle est la négation (P') de cette proposition?

Dire si 9bis) (P) est vraie VRAI / FAUX
9ter) la négation (P') est vraie VRAI / FAUX

10-Soit (Q) la proposition suivante:
(P) pour tout n Œ N, Il existe n' Œ N tel que , $n' > n$.
Quelle est la négation (Q') de cette proposition?

Dire si 10bis)(Q) est vraie VRAI / FAUX
10ter) la négation (Q') est vraie VRAI / FAUX

Contenu mathématique

Espace vectoriel, sous-espace,
Famille génératrice,
Sous-espace engendré,
Dépendance/indépendance,
Famille libre/liée,
Base, dimension, rang,
Somme,
Somme directe,supplémentaire,
Application linéaire,

Systèmes d'équations linéaires.

Conditions de départ de ma recherche

1- Peu de travaux de recherche en didactique ou en épistémologie sur l'algèbre linéaire.

2- Peu de travaux de didactique sur l'enseignement supérieur et encore moins sur des savoirs d'algèbre au delà du secondaire.

3- Les concepts élémentaires de la théorie des espaces vectoriels représentent un domaine vaste et qui touche à de nombreux autres.
L'objet d'étude est très étendu et difficilement délimitable.
Epistémologie

A travers l'étude historique d'une genèse, on cherche à dégager :
- Les problèmes qui ont été à l'origine de l'émergence des concepts.
- Les contextes d'émergence et de développement de ces concepts.
- Les périodes d'avancée, d'arrêt, de reprise et de reconstruction.

Nos buts

1 -Eclaircir et développer :
+ Les liens entre l'étude des systèmes linéaires et l'émergence des premiers concepts.
+ La genèse de concepts centraux tels que celui de rang.

+ Le passage de résultats épars à une théorie unifiée.
+ L'apparition des premières approches axiomatiques et les raisons de leur prédominance tardive.

2 - Regrouper, d'un point de vue épistémologique, les principales étapes de cette genèse, afin de mieux situer la place et l'importance relative de chaque évènement par rapport à l'ensemble.
Synthèse

- Très tôt : ubiquité des concepts
(systèmes d'équations, géométrie, arithmétique, formes quadratiques, équations différentielles etc...)

- Systèmes linéaires et géométrie: deux domaines importants ayant cependant joué des rôles à des niveaux différents :
systèmes linéaires : émergence des premiers concepts et des premiers résultats explicites. Plus tard généralisation en dimension infinie à la suite de Hilbert (étape transitoire).
Géométrie : laboratoire d'essai avant une généralisation du langage et des méthodes à des espaces plus variés.

- Le rang : un concept central.

- Unification par étapes :
autour des déterminants
n-uplets de nombres
axiomatisation.
La dernière étape correspond à une volonté d'organisation des savoirs. Problématique d'unification et de simplification.
Deux propositions admises
au XVIIIème siècle

Prop 1 : Une courbe algébrique de degré n est en général déterminée de façon unique par $n(n+3)/2$ de ses points.

Prop 2 : Deux courbes algébriques d'ordre m et n se coupent en général en mn points.

Le paradoxe de cramer

si $n \geq 3$, $n(n+3)/2 \leq n2$, donc deux courbes algébriques d'ordre n ont en commun plus de points qu'il n'en suffit pour déterminer de façon unique une seule d'entre elles !

EULER:

"En réfléchissant bien sur l'état de la première proposition, nous remarquerons qu'il peut y avoir des cas où $(nn+3n)/2$ points donnés ne sont pas suffisants pour déterminer la courbe d'ordre n, qui peut être tirée par ces points ou, ce qui revient au même que $(nn+3n)/2$ équations ne suffisent pas pour déterminer autant de coefficients ou pour déterminer le rapport entre $((nn+3n)/2)+1$ coefficients."
EULER - 1750
"Sur une contradiction apparente
dans la doctrine des lignes courbes"

Quand deux lignes du quatrième ordre s'entrecoupent en 16 points, puisque 14 points, lorsqu'ils conduisent à des équations toutes différentes entre elles, suffisent pour déterminer une ligne de cet ordre, ces 16 points seront toujours tels que trois ou plusieurs des équations qui en résultent sont déjà comprises dans les autres. de sorte que ces 16 points ne déterminent pas plus que s'il n'y en avait que 13 ou 12 ou encore moins et partant pour déterminer la courbe entièrement on pourra encore à ces 16 points ajouter un ou deux points.

Objectifs de l'analyse dans le suivi des productions d'étudiants

1- Mieux baliser le contenu de ce qui est enseigné , relever :
- les types de tâches proposées
- les procédures employées par les étudiants.

2- Décrire des types d'évolutions des compétences en algèbre linéaire chez un même individu en particulier en fonction de ses connaissances antérieures dans certains domaines.

3- Dégager des hypothèses sur les interactions entre les différents domaines internes ou connexes à l'algèbre linéaire.
- Prétest : 84 copies.
- Devoir surveillé n°1 : 39 copies.
- Partiel : 74 copies.
- Devoir surveillé n°2 : 46 copies.
- Test "vrai/faux" : 58 copies.
- Devoir surveillé n°3 : 58 copies.
- Devoir surveillé n°4 : 50 copies.
- Examen : 73 copies.

Une analyse du contenu de chaque question, qui vise à déterminer le type de tâche proposée, les connaissances qu'elles mettent en jeu, le type de question, la part d'implicite qu'elle comporte, sa place dans l'ensemble de l'exercice ou du devoir ...
Mais aussi en fonction de cette analyse, l'explicitation des types de procédures que les étudiants peuvent mettre en œuvre, les raisons qui peuvent les y pousser, les savoirs et les conceptions correspondants, l'implication que cela peut avoir sur l'ensemble de l'exercice ou du devoir...
Définition des blocs
Deux types de contenus en logique
(EQ)implication ou équivalence
(QA) quantification
Trois niveaux :
(1)On demande si une proposition écrite en langage formel est vraie ou fausse (compréhension brute)
(2) On demande d'effectuer une tâche entièrement dans le domaine formel, par exemple de donner la négation d'une proposition quantifiée
(3) On demande de passer d'un cadre "informel" (langage usuel, graphisme...) à la traduction en langage formel ou vice-versa
5 blocs EQ1, EQ3, QA1, QA2, QA3
Deux blocs d'algèbre
(AN) algèbre numérique
(AS) algèbre des structures
COMPARAISON DES RESULTATS AU PRETEST DE LA POPULATION INITIALE ET DE L'ECHANTILLON EVALUE AU DEVOIR N°3

(LES POURCENTAGES SONT CALCULES SUR LA LIGNE)

TABLEAU CROISE DS N°3-PRESTEST (1)
(LES POURCENTAGES SONT CALCULES SUR LA LIGNE)

TABLEAU CROISE DS N°3-PRESTEST (2)
(LES POURCENTAGES SONT CALCULES SUR LA COLONNE)