Aspects sémantiques des traitements linéaires

Eugénie Adam Koleza

Many studies have printed out the part played by semantic organisation in linear problem solving. From this issue, we constructed a hierarchy of problems based on the semantic aspects wich are linked to different kinds of situation. A questionnaire, in accordance with this hierarchy, has been tested with 12 years old students.
In this paper, we analyse only the answers to ten questions. The levels of success match very well with our hierarchy. Our goal being teaching, we have also understook an experience in classroom, according to this hierarchy. That will be set out in another paper. But the results show that performances are bringing closes for students of *"experimental population"*, without inversion in hierarchy order.

La proportionnalité est un domaine central et difficile de l'enseignement général des mathématiques.
Depuis 1913 elle a suscité de nombreuses études. Celles-ci ont surtout cherché à répondre à l'une des trois questions suivantes :

- Quels sont les facteurs, propres à la nature de la tâche proposée, qui interviennent dans la difficulté d'un problème de proportionnalité ?

- Quelles sont les caractéristique individuelles (âge...) liées à l'acquisition du raisonnement proportionnel ?

- Quelles sont les procédures (de réussite ou d'échec) utilisées par les élèves dans un problème de proportionnalité ?

La plupart des études, centrées sur la première question, ont surtout examiné l'influence de la structure numérique du problème sur le comportement des élèves. Elles se sont intéressées aux paramètres relatifs aux données mathématiques du problème (taille des nombres, nature de l'opérateur etc...) pour voir comment ils favorisent certaines procédures.

© Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
5 (1993) (p.125-148) - IREM de Strasbourg

Mais elles ont prêté beaucoup moins d'attention aux types de situations (non mathématiques au départ) à travers lesquelles un problème de proportionnalité est présenté ; ces situations sont par exemple celles d'achat et de vente, d'échange, de consommation, de mélange, d'agrandissement ou de réduction etc... Ces situations évoquent des processus de nature différente. Les individus, en vertu de leur expérience propre ou de leur représentation de ces situations peuvent recourir à des procédures différentes selon ces types de situation : c'est ce que nous appelons l'aspect sémantique des problèmes de proportionnalité.

Dans un problème de proportionnalité, la compréhension des processus propres à chaque situation proposée est aussi importante que la maîtrise d'une procédure mathématique.

Dans ce travail, nous allons mettre en évidence l'importance des aspects sémantiques des problèmes de proportionnalité.

I Quelques questions soulevées par les études précédentes

1.1 L'apport des études précédentes

Parmi les différentes situations possibles, c'est celle de mélange qui a le plus retenu l'attention du chercheur.

Les études de QUINTERO - SCHWARTZ (1982) et GOLD (1978)[10] ont montré que les problèmes de mélange sont plus difficiles que les autres problèmes de proportionnalité.

Cela pourrait être expliqué par la présence, dans un problème de mélange, des grandeurs continues lesquelles semblent plus difficilement maîtrisables par les élèves que les grandeurs discrètes (HOROWITZ, 1981) [10].

KARPLUS et al. (1980) ont également signalé la difficulté des problèmes de mélange : dans le cadre d'une étude détaillée du raisonnement proportionnel [6] ils ont proposé 8 problèmes de mélange (*"le monde (??) puzzle"*) du type comparaison, à 60 élèves de CM2 (sixth graders) et 60 élèves de 5e (eight graders).

Dans six de ces problèmes, au moins l'un des opérateurs : *"fonction" ("within recipe ratio") ou "scalaire" ("between recipe ratio")*, était un nombre entier. Les résultats observés sont donnés dans le tableau suivant :

TABLEAU I

Type de problème	WB	W	B	N	WBX	WX	BX	NX
% réussite	55	63	38	18	34	35	19	10

W : opérateur *"fonction"* entier
N : aucun opérateur entier
B : opérateur *"scalaire"* entier
X : rapports sous comparaison, inégaux

Pour déterminer le rôle du contexte du problème, KARPLUS et al. (1983) [7], ont aussi proposé six problèmes de comparaison formulés dans deux autres contextes que celui de mélange : la grandeur quotient était un nombre avec dimensions, et l'un au moins de deux opérateurs : *"fonction"* ou *"scalaire"* était un nombre entier.

La population interrogée, consistait en 116 élèves de CM2 et 137 élèves de 5e. Les résultats observés sont donnés dans le tableau suivant :

TABLEAU II

Type de problème	W	WB	WX	WBX
% réussite	56,6	55,2	39,5 - 53,6*	40 - 51,3*

* suivant le contexte.

D'après ces résultats, KARPLUS et al. remarquent que dans le cas où les données numériques sont les mêmes (W, WB, ...,) les taux de réussite pour les deux types de problèmes (mélange ou autre) sont comparables.

Néanmoins, il y a une différence significative en ce qui concerne l'apparition de la procédure additive : sa fréquence est beaucoup plus grande dans les problèmes de mélange. Cette observation conduit les auteurs à la conclusion suivante : **un grand nombre d'élèves sont sensibles non seulement aux caractéristiques numériques, mais aussi à la signification des données.**

Bien que fort intéressante, cette étude détaillée de KARPLUS et al. ne nous permet pas, cependant, de répondre à ces trois questions :

- Aurait-on approximativement le même taux de réussite pour les deux types de problèmes, dans le cas où aucun opérateur ne serait un nombre entier (cas : N et NX) ?

- Peut-on également attendre cette homogénéité de résultats dans le cas des *"problèmes de valeur manquante"* ("missing value problems") ?

- La difficulté d'un *"problème de mélange"* ayant été comparée à celle d'un problème décrivant une autre situation que celle de mélange auprès des élèves de même âge, aurait-on les mêmes résultats si la comparaison se faisait auprès des mêmes élèves ?

Une réponse aux deux dernières questions apparaît avec les résultats d'une étude effectuée par

F. TOURNIAIRE [11] - bien que les élèves interrogés fussent plus jeunes que ceux interrogés dans le cadre de l'étude précédente.

Six problèmes de proportionnalité de contextes différents (*"problèmes de mélange"* et autres) et de structure numérique quasi-homogène (nombres entiers inférieurs à 10, rapports entiers-prix unitaire inclus) ont été proposés à 180 élèves de CE_1, CE2 et CM_1 (3^d, 4^{th} et 5^{th} graders).

Deux facteurs, relatifs au contexte du problème étaient pris en compte :
- la familiarité de la situation présentée dans l'énoncé,
- la présence d'un mélange.

Les résultats observés sont donnés dans le tableau suivant :

TABLEAU III

Problèmes	Paint (M)*	O,?? (M)	Dollar (A) *	Candy (A)	Weight (A)	Mr Tall (A)
% Réussite	37	60	70	70	73	37

* *M : problème de mélange*
A : autre.

Au vu de ces résultats, l'auteur remarque que :

- Ce n'est pas la présence d'une situation de mélange qui fait augmenter la difficulté d'un problème, mais plutôt le fait que cette situation soit *"familière"* ou *"moins familière"* aux élèves.

- Un problème caractérisé comme *"non familier"* (par exemple *"Dollar"*) peut être aussi bien réussi qu'un autre considéré comme *"familier"* (par exemple *"Candy")*

Ces remarques conduisent F. TOURNIAIRE à formuler l'hypothèse suivante : **Un paramètre éventuellement plus important que la familiarité du contexte, est la "familiarité" des élèves avec l'utilisation des rapports dans ce contexte[11].**

1.2 Remarques sur les résultats de F. TOURNIAIRE

Une conclusion commune aux études de KARPLUS et al. et de F. TOURNIAIRE relative aux problème de mélange est - au moins dans le cas des rapports entiers - que ces problèmes ne sont pas significativement plus difficiles que d'autres problèmes de proportionnalité formulés dans un contexte différent.

La question reste bien sûr ouverte, pour le cas des rapports non entiers.

Les résultats obtenus par F. TOURNIAIRE font cependant apparaître un nouveau paramètre : la familiarité des élèves avec l'utilisation des rapports dans un contexte.

Mais l'hypothèse formulée par F. TOURNIAIRE relative à l'importance de ce paramètre appelle deux remarques.

La première concerne les limites de l'hypothèse elle-même : le fait d'avoir manipulé des rapports simples (par exemple des nombres entiers) dans un contexte permettrait-il à l'élève d'aborder avec une relative facilité d'autres problèmes formulés dans le même contexte, mais de nature numérique moins simple ?

Autrement dit, la manipulation des rapports entiers entre grandeurs suffit-elle à assurer une réelle compréhension de la relation multiplicative entre ces grandeurs ?

La limitation volontaire de F. TOURNIAIRE à des rapports entiers, inférieurs à 10, ne nous permet pas de répondre avec certitude à cette question.

La seconde remarque concerne la possibilité d'une *"application"* de l'hypothèse en milieu scolaire. Supposons qu'un enseignant veuille choisir des problèmes de proportionnalité. A-t-il le moyen de savoir *a priori* si ses élèves sont *"familiarisés"* avec l'utilisation des rapports dans un contexte donné et donc la possibilité de distinguer les problèmes *"faciles"* de ceux qui le sont moins ? A notre avis, la réponse est négative.

La conclusion du travail de F. TOURNIAIRE aide certainement à expliquer a posteriori le comportement des élèves, mais elle ne donne pas la possibilité de prévoir ce comportement.

Pour organiser un enseignement il est important de disposer d'une échelle (même approximative) de difficulté pour les problèmes de proportionnalité. Nous pensons que les résultats de notre travail permettent d'établir une telle échelle.

II Nos hypothèses et leur mise en oeuvre

2.1 L'apport de notre étude

Comme F. TOURNIAIRE , nous avons centré notre étude sur le rôle des paramètres liés aux situations décrites dans l'énoncé du problème. Mais à la différence de F. TOURNIAIRE nous ne pensons pas que le comportement des élèves dépende de leurs *"vécus"*, nous pensons au contraire qu'il s'explique par la structure même du problème.

Plus précisément, l'hypothèse qui commande notre travail est la suivante : la mathématisation - sous forme traitable par linéarité - de situations différentes, varie selon les situations présentées : elle est plus difficile, ou plus coûteuse, pour certaines que pour d'autres. En outre, la mathématisation fait partie du processus d'appropriation même de la proportionnalité.

Montrons-le sur deux exemples :
P_1 *: "Madame X a payé 60 F pour 5 Kg de prunes. Combien doit-elle payer pour 7 Kg de prunes de même qualité ?"*

P_2 *: "Un orfèvre construit des bijoux en utilisant un alliage d'argent et de bronze. Pour 60 g d'argent il utilise 40 g de bronze. Pour le bracelet qu'il m'a vendu il a utilisé 90 g d'argent. Quelle quantité de bronze a-t-il utilisé ?"*

La relation des deux grandeurs (Kg et F) dans l'énoncé du problème P1 est, sans doute, sémantiquement plus facile à concevoir : il y a une grandeur *"quotient"* (*"prix du Kg"*) qui est l'expression de cette relation. Existant par elle-même, elle évoque un rapport multiplicatif de ses deux composants. Au contraire, le type de relation existant entre les grandeurs du problème P2 n'est pas évident ; la représentation du processus évoqué dans l'énoncé suggère sans aucune invraisemblance une relation additive entre les deux grandeurs.

Pour élaborer la classification suit des problèmes de proportionnalité, en fonction de leurs *"aspects sémantiques"*, nous avons pris comme critère le caractère et le rôle spécifique de chacune des variables décrivant la situation présentée dans l'énoncé de chaque problème.

2.2. Classification des problèmes

Nous distinguons deux grands types de problèmes, le second se partageant lui-même en deux sous-types.

1° Les problèmes dont l'énoncé décrit un phénomène ou un concept (physique, économique, etc)
La situation évoquée est décrite à l'aide de deux variables sémantiquement hétérogènes : aucune opération additive entre elles ne peut avoir de sens puisque les variables sont sémantiquement hétérogènes. Pour de simples raisons de commodité dans ce qui suit nous appellerons les problèmes relevant de ce type : *"différenciation"*. Pour poser le problème, la référence à au moins deux états du phénomène est nécessaire.

Soit par exemple la situation *"achat-vente"* : elle est décrite par deux variables nécessaires au concept de marchandise :

V : quantité ou poids de la marchandise,
W : prix de la marchandise.

Les valeurs de ces variables interviennent dans plusieurs occurrences du phénomène. Une fois les unités t et u choisies, on aura :

phénomène en état 1 : $V_1 = m_1 t$ $W_1 = n_1 u$,
phénomène en état 2 : $V_2 = m_2 t$ $W_2 = n_2 u$,

où m_1 m_2 sont les valeurs numériques de la variable V en état 1 et en état 2, et n_1, n_2, les valeurs numériques de la variable W en état 1 et en état 2 respectivement.

Le nombre n_1/m_1 est la mesure d'une nouvelle grandeur, qu'on appelle *"grandeur quotient"* dont l'unité est u/t. Dans ce cas précis, il s'agit du prix unitaire : prix de l'unité de la quantité achetée.

Dans un problème de ce type, la *"grandeur quotient"* peut être plus ou moins "familière". Le *"prix du Kg"* est en principe un concept plus familier que par exemple la *"consommation"* (en litres d'essence pour 100 Km) d'un véhicule.

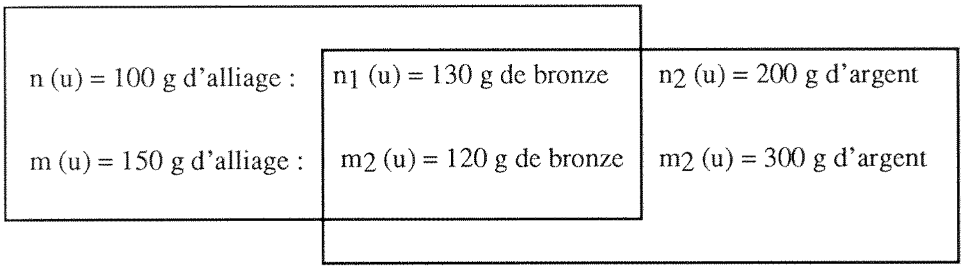
2° Les problèmes dont l'énoncé se réfère à un objet composé, comme par exemple un mélange, un alliage, un gâteau, etc.
Les parties de l'objet composé ne sont pas strictement homogènes : pour une recette on ne considère pas la farine et le beurre comme des objets homogènes ; le jus d'orange et l'eau non plus, dans un mélange. **Cependant, le fait de réduire l'information sur ces objets à leur poids** (pour le gâteau), **ou à leur volume** (jus d'orange et eau), **conduit à traiter comme homogènes les parties de l'objet composé.**

Cette identification peut avoir une influence sur le traitement arithmétique du problème. En effet, lorsque les variables d'une situation sont associées à la même grandeur, **un traitement additif de ces variables apparaît pertinent.** Cette caractéristique des variables nous amène à appeler ce deuxième type de problèmes : *"problèmes à variables fusionnables"*. Pour des raisons de commodité, nous parlerons de problèmes *"fusion"*. Nous distinguerons deux cas de problèmes *"fusion"* :

1. Les problèmes *"fraction"* (FF).
2. Les problèmes *"partition"* (FP).

Dans l'énoncé des problèmes *"fraction"*, les informations données concernent la relation : partie-tout. Les deux mesures en jeu sont celles de l'objet (le tout) et d'un seul composant (partie) à la fois. Dans les problèmes *"partition"*, on donne les mesures de deux (ou plus) partitions de l'objet initial.

Un exemple d'un problème *"fusion"* est celui d'un alliage :



(1) (2)

(1) : problème *"fraction"* (2) : problème *"partition"*

L'analyse précédente nous conduit à avancer l'hypothèse qu'en général les problèmes *"différenciation"* doivent être mieux réussis que les problèmes *"fusion"* et en particulier que ceux de type *"partition"*.

Cette affirmation ne peut être que relative, étant donnée l'existence d'autres paramètres qui interviennent et qui influencent aussi le niveau de difficulté d'un problème. Ces paramètres sont aussi bien de nature numérique que sémantique.

Un questionnaire a été mis au point en fonction de cette classification du problème. Nous n'en avons retenu ici qu'une famille de questions, celles présentant les divers cas qui, selon nous, méritent d'être distingués.

III Résultats

Nous avons proposé 23 problèmes à deux populations d'élèves de 12-13 ans :
- l'une de 46 élèves *("population expérimentale")* avait suivi un enseignement organisé sur une analyse sémantique de chacune des situations traitées pendant le cours ;
- l'autre de 98 élèves *("population de référence")* avait eu un enseignement *"classique"* de la proportionnalité.

Nous consacrerons un autre article aux caractéristiques précises de l'enseignement proposé à la population expérimentale et nous ne présentons ici que les résultats à 10 des 23 problèmes proposés.

Parmi ces 10 problèmes (dont l'énoncé figure en annexe) :
- 6 sont des problèmes *"différenciation"*.
- 4 sont des problèmes *"fusion"*, dont 2 sont de type *"fraction"* et 2 sont de type *"partition"*.

Tous,sont des problèmes de *"valeur manquante"*. Ces 10 problèmes ont été choisis tels que leur structure numérique soit quasi-homogène : nombres entiers, rapports non entiers. Notons aussi que l'utilisation des calculatrices a été autorisée. Nous avons considéré cette condition comme importante pour l'homogénéité de nos problèmes, vu la difficulté d'un grand nombre d'élèves à effectuer des calculs à la main, surtout de divisions de type a : b, a <<b [1].
Les taux de réussite pour chacun des problèmes sont indiqués dans le tableau IV, les deux populations étant réunies :

TABLEAU IV

Problèmes	Type	% Réus.
ACHAT (A)	D	61
ACHAT (B)	D	64
ACHAT (C)	D	53
CONSOM (A1)	D	54
CONSOM (A2)	D	55
RECETTE (A)	D	68
RECETTE (B)	FP	39,5
RECETTE (C)	FP	44,5
PRUNES	FF	46
ALLIAGE	FF	60,5

A partir de ce tableau nous pouvons faire trois remarques :

1. Les problèmes *"différenciation"* (D) sont généralement mieux réussis que les problèmes *"fusion"* (FP ou FF).

2. Mais des problèmes de même type (*"différenciation"* ou *"fusion"*) ne sont pas toujours également réussis. L'écart pour les problèmes *"différenciation"* est de 15 % et pour les problèmes *"fusion"* de 21 %.

3. De même les problèmes formulés dans le même contexte ne sont pas toujours également réussis. Dans le cas par exemple des problèmes ACHAT (B) et ACHAT (C) l'écart des taux de réussite atteint 11 %.

Les remarques précédentes nous conduisent à penser qu'en plus de la hiérarchie des problèmes en fonction de leur aspect sémantique il y a d'autres paramètres qui jouent sur le niveau de difficulté du problème. Ces paramètres peuvent être liés autant au contenu numérique du problème, qu'aux caractéristiques sémantiques de l'énoncé.

Le tableau V montre aussi l'influence de ces paramètres. On y voit clairement que les procédures de résolution favorisées par les élèves varient d'un problème à l'autre et cela même lorsque les problèmes sont du même type.

TABLEAU V

Problèmes	NR	ADD	MUF	AUT	SE	CO	SCA	FCN	UNI
Achat (A)	28	3	10	15	23	2	15	33	15
Achat (B)	15	1	13	23	21	20	12	24	15
Achat (C)	31	8	13	17	23	1	16	24	11
Consom (A1)	27	0	21	18	21	2	16	24	15
Consom (A2)	34	1	7	23	19	6	16	23	15
Recette (A)	10	1	0	35	32	8	13	14	31
Recette (B)	9	68	2	8	11	0	28	11	7
Recette (C)	20	44	7	9	19	0	33	7	5
Prunes	7	61	5	5	19	1	5	31	10
Alliages	9	41	3	4	22	4	16	38	7

* effectifs

Procédures de traitement observées:

NR non-réponses
ADD procédures additives
MUF procédures multiplications erronées et partielles ?
AUT autres erreurs
SE réponses correctes sans explication
CO procédure "constructive"
FON calcul de l'opérateur "fonction"
SCA calcul de l'opérateur "scalaire"
NI recours à l'unite

Le choix d'une procédure (correcte ou fausse) de résolution de chaque problème, reflète la façon dont les élèves conçoivent la situation décrite dans l'énoncé de ce problème. Ainsi, à partir du tableau V, nous pouvons faire les remarques suivantes :

i) Dans les problèmes *"différenciation"*, la somme des fréquences des procédures *"fonction"* et *"unitaire"* est plus du double de la fréquence des procédures *"scalaires"*. Au contraire, dans les problèmes *"fusion"* du type *"partition"* c'est la procédure *"scalaire"* qui est la plus souvent utilisée.

ii) Tandis que dans le problème *"différenciation"* l'apparition de la procédure *"additive"* est rare, dans les problèmes *"fusion"* sa fréquence varie entre 28,5 % et 47 % du total des réponses.

Ces deux remarques concernent même les problèmes qui sont formulés dans le même contexte. Tel est le cas par exemple du problème RECETTE (A) et des problèmes RECETTE (B), RECETTE (C1) et RECETTE (C2).

iii) Dans les problèmes *"fusion"* du type *"fraction"* on observe une augmentation considérable de la fréquence des procédures *"fonction"* - par rapport aux problèmes *"partition"* - et une diminution importante des procédures *"scalaire"*.

Les deux premières remarques témoignent de la difficulté des élèves à saisir la relation correcte entre les deux grandeurs en jeu. Cet obstacle sémantique fait que les élèves les plus *"forts"* recourent à l'opérateur *"scalaire"* ; quant aux moins *"forts"*, ils établissent entre les deux grandeurs une relation additive.

L'augmentation de la fréquence des procédures *"fonction"* dans les problèmes *"fusion"* du type *"fraction"* (remarque iii) semble tout à fait logique si on pense à la structure sémantique de ces problèmes : le fait que l'une des deux grandeurs, dans l'énoncé, constitue une partie de l'autre, oriente les élèves plutôt vers une procédure *"fonction"* que vers une procédure *"scalaire"*.

Il est, cependant, important de souligner le petit nombre de recours à l'unité pour ces mêmes problèmes. Cela témoigne de la difficulté rencontrée par les élèves pour donner une signification à la valeur *"unitaire"*.

Quelqu'un pourrait imputer cette difficulté au fait que dans un problème *"fusion"* la valeur *"unitaire"* est un nombre pur. Néanmoins, cela n'empêche nullement qu'elle ait une signification. Dans le problème ALLIAGE, par exemple, l'opérateur *"fonction"* : 100g/40g = 2,5 est un nombre pur, mais il a une signification particulière : il représente le nombre de grammes d'alliage correspondant à un gramme d'argent.

Les remarques précédentes montrent bien l'influence de certains paramètres sémantiques - que nous allons analyser par la suite - sur le processus de résolution d'un problème de proportionnalité par les élèves.

IV Paramètres sémantiques

Nous venons de voir que notre hiérarchie des problèmes, par rapport aux aspects sémantiques mis en jeu, éclaire les niveaux de réussite observés chez les élèves. Cependant, nous avons aussi relevé des écarts, dans les taux de réussite, par rapport à ce que notre analyse nous permettait de prévoir (§ 3.2). Cela s'explique par l'influence d'autres facteurs sémantiques qui jouent de façon transversale à la hiérarchie établie : ils rendent plus difficile un problème à variables différenciées, ou au contraire ils facilitent la tâche des problèmes de type fusion.

Deux de ces facteurs sont particulièrement importants :
A) La *"signification"* de l'opérateur *"fonction"*.

B) La congruence (ou non congruence) sémantique entre les deux parties de l'énoncé.

Analysons chacun de ces facteurs séparément :

A) La compréhension de la situation décrite dans l'énoncé d'un problème de proportionnalité, constitue le premier pas pour la résolution de ce problème. Le traitement numérique ne fait que traduire en opérations mathématiques les relations trouvées entre les différentes grandeurs que la situation met - à la fois - en jeu. Cela nous amène à dire que parmi les paramètres sémantiques, la *"signification"* de l'opérateur *"fonction"* - qui est l'expression de ces relations -, est peut-être le plus important.

C'est cette tendance des élèves à essayer de comprendre la relation de deux grandeurs mises en jeu dans l'énoncé d'un problème, qui pourrait expliquer la plus grande fréquence de la procédure *"fonction"* - par rapport à la procédure *"scalaire"* - observée par KARPLUS et al dans [6] :

"... Yet it does not shed any light on why within recipe relations are favored so greatly... Noelting's theoretical comments do not clarify these issues either. We believe that the greater salience of the "within" relationships ... explain our observations ..."

Lorsque l'opérateur *"fonction"* renvoie l'élève à un concept familier, nous nous attendrons à ce que le problème soit relativement facile. C'est cette raison qui nous a conduit à penser que les problèmes *"différenciation"* doivent être en général mieux réussis que les problèmes *"fusion"*, ce qui s'est trouvé corroboré par les résultats de notre expérience.

A partir de nos résultats, nous pouvons affirmer que parmi les trois explications que F. TOURNIAIRE propose pour expliquer la difficulté de problèmes de mélanges celle se basant sur la difficulté de la conceptualisation d'une situation de mélange est prédominante :

"... The presence of a mixture does appear to increase the difficulty of problems. It may be because mixture situations are less familiar to the subjects, because continuous quantities are involved, or because mixtures are more difficult to conceptualize. [11]".

Même dans le cas de problèmes de même type, il arrive qu'un opérateur *"fonction"* soit plus familier qu'un autre : pour les problèmes *"différenciation"*, par exemple, l'opérateur "F/Kg" est plus souvent rencontré dans la vie courante que l'opérateur "Kg/F" ou "F/g". A son tour, l'opérateur, par exemple, "F/g" est plus familier que l'opérateur "l/Km". D'où la différence de réussite même entre des problèmes de même type.

B) Dans l'énoncé de n'importe quel problème de valeur manquante, il faut distinguer deux parties :
- la partie *"information"*, où l'on donne les valeurs de deux grandeurs mises en jeu,
- la partie *"question"*, où la valeur d'une seule grandeur est donnée et l'autre est demandée.

Le calcul d'un des deux opérateurs *"fonction"* possibles, peut rendre les deux parties de l'énoncé congruentes ou non congruentes sémantiquement [4].

Prenons le cas du problème ACHAT (A) :

> *"Madame Danaud a payé 93 F pour 7,5 Kg de raisins.*
> P
> *Quelle quantité de raisins aurait-elle avec 62 F"*

Après le calcul de l'opérateur "F/Kg" le problème devient :

> *"1 Kg de raisins coûte 12,4 F.*

P1
Quelle quantité peut-on acheter avec 62 F ?"

L'énoncé du problème P1 est un énoncé *"non-congruent"*.

Dans le cas où on calcule l'opérateur "Kg/F", le problème devient :

"Avec 1 F on achète 0,08 Kg de raisins.
P2
Quelle quantité peut-on acheter avec 62 F

L'énoncé du problème P2 est un énoncé *"congruent"*.

Une analyse détaillée du corpus des réponses pour l'ensemble des problèmes, a montré que parmi les deux opérateurs *"fonction"* possibles, les élèves préfèrent calculer celui qui rend les deux parties de l'énoncé congruentes.

Prenons, par exemple, le cas des problèmes CONSOM (A1) et CONSOM (A2), qui, en fait, sont deux questions posées à partir d'une même information : "*une voiture a consommé 28 l d'essence pour 350 km*". La solution la plus *"économique"* serait de calculer un des deux opérateurs *"fonction"* (pour le cas où l'élève choisit la procédure *"fonction"*) et répondre aux deux questions. Néanmoins, nous avons observé un comportement différent :
- Parmi les 39 élèves qui utilisent une procédure *"fonction"* ou *"unitaire"* au problème CONSOM (A1), 30 calculent l'opérateur qui rend l'énoncé congruent : la quantité d'essence dont on a besoin pour 1 km.
- Parmi les 38 élèves qui utilisent une des deux procédures précédentes pour résoudre le problème CONSOM (A2), 33 calculent également l'opérateur qui rend l'énoncé congruent : le nombre de kilomètres que l'on peut parcourir avec 1 litre d'essence.

Dans le cas où la *"congruence"* de l'énoncé d'un problème résulte du calcul d'un opérateur *"fonction"* familier, le taux de réussite à ce problème est assez élevé.

Prenons comme exemple le problème ACHAT (B). Le calcul de l'opérateur "F/g" rend l'énoncé congruent. D'où les 64 % de réussite (36 parmi les 39 élèves qui utilisent une procédure *"fonction"*, calculent l'opérateur "F/g").

En revanche, au problème ACHAT (A), bien que l'opérateur "F/Kg", soit plus familier que l'opérateur "F/g", l'énoncé non-congruent qui résulte après son calcul fait que le taux de réussite à ce problème ne dépasse pas 61 %.

Au problème ACHAT (C) l'opérateur "g/F" est encore moins familier que les deux précédents. Or, malgré le fait que après son calcul l'énoncé devient congruent, le taux de réussite ne dépasse pas 53 %.

Pour mieux démontrer l'effet positif d'un énoncé congruent qui résulte du calcul d'un opérateur *"fonction"* familier, nous présentons un dernier exemple : le problème suivant a été proposé à 74 élèves du même âge que ceux qui ont eu les trois problèmes précédents, avant l'enseignement de la proportionnalité.

"Madame Didier a payé 76 F pour 8 Kg de tomates. Combien doit payer Madame Ripp qui a acheté 10 Kg de tomates de même qualité ?"

Le taux de réussite observé a été de 73 %.

V Conséquences didactiques

5.1. Implications pour l'enseignement

Nous avons vu que la réussite à un problème de proportionnalité dépend largement de la difficulté de l'interprétation de la situation décrite dans l'énoncé de ce problème.

Or, il y a des problèmes où le type de relation entre grandeurs, exprimé en principe par la valeur unitaire, est si évident que l'application du raisonnement proportionnel s'effectue sans grandes difficultés ; c'est le cas, par exemple, d'une situation d'achat-vente.

Par contre, il y a d'autres problèmes où la relation entre grandeurs est moins évidente ; c'est le cas, par exemple, des problèmes *"fusion"* du type *"partition"*.

Nous avons également vu que l'écart des réussites, dû aux difficultés sémantiques diminue considérablement après un enseignement qui prévoit une analyse spécifique à chaque type de problèmes et qui propose une réflexion sur leurs difficultés.

Nous pensons donc qu'un enseignement organisé selon le principe précédent pourrait faciliter l'acquisition du raisonnement proportionnel, et ceci, sans obliger les élèves à respecter une formalisation *"mathématique"* dont ils ignorent souvent le sens.

5.2. L'importance d'une analyse sémantique des problèmes de proportionnalité.

L'écart entre la réussite aux problèmes *"différenciation"* et celle aux problèmes *"fusion"* après une période d'enseignement centrée sur les aspects sémantiques a été plus petit que nous l'attendions (voir tableau IV, où est donné le niveau de réussite, pour chaque problème, de l'ensemble des 144 élèves).

Nous avons supposé que cela était dû aux performances de la *"population expérimentale"* : en effet, l'enseignement de la proportionnalité aux élèves du groupe *"expérimental"*, avait été basé sur une analyse sémantique des problèmes traités pendant le cours. Nous ne nous étions pas contentés d'une décision de la part des élèves en ce qui concernait les calculs à effectuer pour arriver à la solution, mais nous avions toujours demandé un raisonnement plus complet, une justification de la procédure qu'ils choisissaient.

Pour vérifier cette explication, nous avons repris séparément les réponses à chaque problème, des élèves de chaque groupe. A l'aide d'une classification non hiérarchique [9], nous avons partagé les élèves de chaque groupe en deux niveaux selon les réponses données :
- le niveau I (élèves forts et moyens) et
- le niveau II (élèves plutôt faibles et faibles).

Le tableau suivant présente la répartition par niveau des élèves du groupe *"expérimental"* (G.E.) et celle du groupe de *"référence"* (G.R.)

TABLEAU VI

Groupe	GE	GE	GR	GR
Niveau	(fréquen.)	(pourcen.)	(fréquen.)	(pourcen.)
I	30	65	38	38,5
II	16	35	60	61,5

Ce tableau montre qu'effectivement la diminution de l'écart entre les problèmes *"différenciation"* et les problèmes *"fusion"* est dûe aux performances des élèves du groupe *"expérimental"*, lesquelles sont nettement meilleures que celles de la *"population de référence"* : pour 65 % de la *"population expérimentale"* contre 38,5 % de la *"population de référence"*, il y a une relative maîtrise des problèmes de proportionnalité.

Conclusion

Le traitement d'un problème de proportionnalité par les élèves est d'abord de type sémantique avant d'être mathématique. Nous avons vu une grande variété de traitements sémantiques qui aboutissent à la même séquence d'opérations mathématiques.

Le type de raisonnement demandé n'est pas le même pour tous les problèmes de proportionnalité. La difficulté du raisonnement proportionnel se trouve surtout dans la traduction de la relation entre deux grandeurs en jeu en opération mathématique et dépend largement de deux paramètres :
- la signification de l'opérateur *"fonction"*,
- la congruence (ou non congruence) entre les deux parties de l'énoncé.

Un enseignement qui serait organisé selon la hiérarchie résultant de la classification que nous avons présentée et qui proposerait non seulement une analyse sémantique de chaque type de problèmes, comme nous l'avons fait, mais aussi une réflexion sur leurs différences, pourrait conduire à des résultats supérieurs à ceux que nous avons obtenus.

REFERENCES

(1) BELL (A). - *Diagnostic teaching experiments with mulltiplicative problems*, in "Actes de la IV° école d'été de didactique des mathématiques", p. 327-351, Ed. IREM Paris VII.
(2) DOUADY (R.). (1984). - *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques.* - Une réalisation dans tout le cursus primaire. - Thèse d'Etat, Université Paris VII.
(3) DUPUIS (C.), PLUVINAGE (F.) (1981). - *La proportionnalité et son utilisation,* in "Recherches en Didactique des Mathématiques", vol. 2.2., p. 165-212 (1981)
(4) DUVAL (R.) (1988). - *Ecarts sémantiques et cohérence mathématique,* in "Annales de Didactique et de Sciences Cognitives", vol. 1, Ed. IREM Strasbourg
(5) FREUDENTHAL H. (1983). - *Didactical phenomenology of mathematical structures.* - D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
(6) KARPLUS R., PULOS S; and STAGE E. (1980). - *Early adolescent's structure of proportional reasoning,* in "Proceedings of the fourth international conference for the

psychology of mathematics education", p. 136-142, Ed. R. KARPLUS, Lawrence Hall of Science, University of California.

(7) KARPLUS R., PULOS S. and STAGE E. (1983). - *Early adolescent's proportional reasoning on "rate" problems.* - in "Educational Studies in Mathematics", vol. 14, p. 219-233.

(8) KOLEZA - ADAM E. (1987). - *Décalages cognitifs dans les problèmes de proportionnalité (préalables à toute séquence didactique pour des élèves de 10-12 ans).* - Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg I.

(9) LEBART L., MORINEAU A., FENELON J.P. (1982). - *Traitement des données statistiques - Méthodes et programmes* -, Bordas, Paris.

(10) TOURNIAIRE F., PULOS S. (1985). - *Proportional reasoning : a review of the literature.* - in "Educational Studies in Mathematics", vol. 16, p. 181-204.

(11) TOURNIAIRE F. (1986). - *Proportions in elementary school* - in "Educational Studies in Mathematics", vol. 17, p. 401-412.

ANNEXE

ACHAT (A) : Madame DANAUD a payé 93 F pour 7,5 Kg de raisins. Quelle quantité de raisins aurait-elle avec 62 F ?
ACHAT (B) : Le prix d'un kilo de jambon est 64 F. J'ai acheté 800 g. Combien dois-je payer ?
ACHAT (C) : 350 g de foie gras coûtent 91 F. Quelle quantité de foie gras peut- on acheter avec 65 F ?

Une voiture a consommé 28 litres d'essence pour 350 Km.
CONSOM (A1) : Combien a-t-elle consommé en moyenne aux 100 Km ?
CONSOM (A2) : Quelle distance peut-elle parcourir si son réservoir contient au départ 42 litres ?

RECETTE (A) : Une recette de pudding pour 4 personnes prévoit 150 g de sucre. Quelle quantité de sucre doit-on prévoir pour 6 personnes ?
RECETTE (B) : Une recette de cuisine donne les quantités à utiliser en pots de yaourt. Je lis : Vous mélangez 6 pots de sucre avec 9 pots de semoule. Je n'ai que 5 pots de sucre. Combien de pots de semoule dois-je utiliser ?
RECETTE (C) : Un livre de cuisine donne une recette de pâte brisée : On mélange 180 g de farine, 75 g de beurre, et de l'eau. Je n'ai que 120 g de farine. Combien de beurre dois-je utiliser ?

PRUNES : Madame DUPONT prépare chaque année des prunes en conserve. Pour cela, elle dénoyaute les prunes, c'est-à-dire qu'elle enlève les noyaux. A partir de 5 Kg de prunes entières, on obtient 4 Kg de prunes dénoyautées. Si elle achète 7 Kg de prunes entières, combien aura-t-elle de prunes dénoyautées ?

ALLIAGE : Un orfèvre construit des bijoux en utilisant un alliage d'argent et de bronze. Dans 100 g de cet alliage, il y a 40 g d'argent (le reste est du bronze). Le bracelet qu'il m'a vendu pèse 120 g. Quelle quantité d'argent a-t-il utilisé pour le construire ?