La résolution des problèmes arithmétiques verbaux : propositions pour un enseignement pro-actif.

Jean-Paul Fischer

The author reviews some recent learning experiments in arithmetical word problem solving : Willis & Fuson (1988), Lewis (1989), and Ehrlich (1990). In synthesizing these experiments, he comes to new, more consistent, and more general proposals for teaching arithmetical word problem solving.
The main originality of the proposals is the parsing of elementary arithmetic problems into three categories. Each categorie is represented by a prototypical perceptuo-cognitive chunk, and each chunk cues relevant procedural knowledge.
Recent theories of problem solving by experts, the personal theory of the author (Fischer, 1992), as well as a teaching experiment in a class of third graders, support the proposals.

Au début des années 1970, avec la réforme dite des "mathématiques modernes", l'ordre d'introduction des 4 opérations arithmétiques devenait nettement hiérarchisé : d'abord l'addition (au CP), ensuite la soustraction et la multiplication (au CE1), enfin la division (au CE2). Implicitement, la nature de l'opération arithmétique impliquée devenait donc, dans les problèmes verbaux, essentielle aussi. Par exemple, au CP, on se gardait de poser des problèmes de partage comme

Gaël a reçu 6 bonbons de sa maman. Il les partage avec sa soeur Maveline. Combien de bonbons aura chacun des 2 enfants ?

pour la bonne raison qu'il s'agit de problèmes typiques de division, une opération qui ne figure au programme que deux ans plus tard !

Ce fut donc une surprise que de (re-)découvrir[1], notamment à la suite de l'article de Vergnaud et Durand (1976), que la nature arithmétique de l'opération impliquée était loin d'être le seul déterminant - ni peut-être même le déterminant majeur - de la difficulté d'un problème arithmétique (voir, par ex., Fischer, 1979).

© Annales de Didactique et de Sciences Cognitives
5 (1993) (p.177-210) - IREM de Strasbourg

[1] *Je rappelle que, antérieurement à 1970, les 4 opérations arithmétiques figuraient quasi-simultanément au programme du CP, voire de l'Ecole Maternelle. Implicitement, on ne pensait donc pas que la différence de nature des 4 opérations arithmétiques était un facteur important à gérer.*

Une littérature plus qu'abondante a alors essayé de dégager les autres déterminants. L'objet de cet article n'est pas de faire une revue de cette littérature (pour une revue récente, nous renvoyons à Fayol, 1991, ou à Bergeron & Herscovics, 1990). Il est, dans la première partie, de faire la revue de quelques expériences d'apprentissage qui ont pris pour point de départ les catégories ou facteurs de difficulté dégagés par ces recherches psychologiques. Nous nous limiterons à trois de ces expériences d'apprentissage : Willis et Fuson (1988), Lewis (1989) et Ehrlich (1990). Le choix de ces trois expériences a été motivé par le fait qu'elles nous permettent, dans la deuxième partie de l'article, de déboucher sur des propositions précises d'enseignement. Ces propositions concernent tout l'enseignement élémentaire et peuvent même être prolongées au collège. Elles n'ont toutefois donné lieu qu'à une expérimentation, très locale, en fin de CE2. C'est cette dernière que nous rapporterons dans la troisième partie de l'article. Enfin, dans la discussion générale (dernière partie), nous essayerons de montrer que nos propositions s'accordent bien avec certaines idées théoriques dérivées de l'Intelligence Artificielle et prolongent notre propre théorie PDup (Fischer, 1992).

Revue de trois expériences d'apprentissage

Les schémas de Willis et Fuson. Willis et Fuson (1988) reprennent la distinction, devenue classique, de trois catégories de problèmes arithmétiques élémentaires : les problèmes de changement, de combinaison et de comparaison. L'intérêt didactique de cette distinction ne provient pas du fait que ces catégories sont clairement hiérarchisées, bien que, génétiquement, les problèmes de comparaison soient certainement postérieurs aux autres (voir Fischer, 1981). Il provient du fait que chaque catégorie peut être représentée par un schéma approprié. En distinguant les changements additif et soustractif, Willis et Fuson proposent ainsi les quatre types de schémas représentés sur la figure 1. Ils indiquent, pour chacun des schémas, un énoncé qui peut lui correspondre :

(a) John et Bill ont 814 jouets ensemble (*Total*). John a 342 jouets (*Part*). Combien Bill a-t-il de jouets (*Part*) ?

(b) John a 342 jouets (*Petite Part*). Bill a 472 jouets de plus (*Différence*). Combien Bill a-t-il de jouets ?

(c) John avait des jouets (*Départ*). Alors Bill lui a donné 342 jouets de plus (*Changement*). Maintenant John a 814 jouets (*Arrivée*). Combien de jouets John avait-il au départ ?

(d) John avait 814 jouets (*Départ*). Alors il en a donné certains à Bill (*Changement*). Maintenant John a 342 jouets (*Arrivée*). Combien de jouets John a-t-il donnés à Bill ?

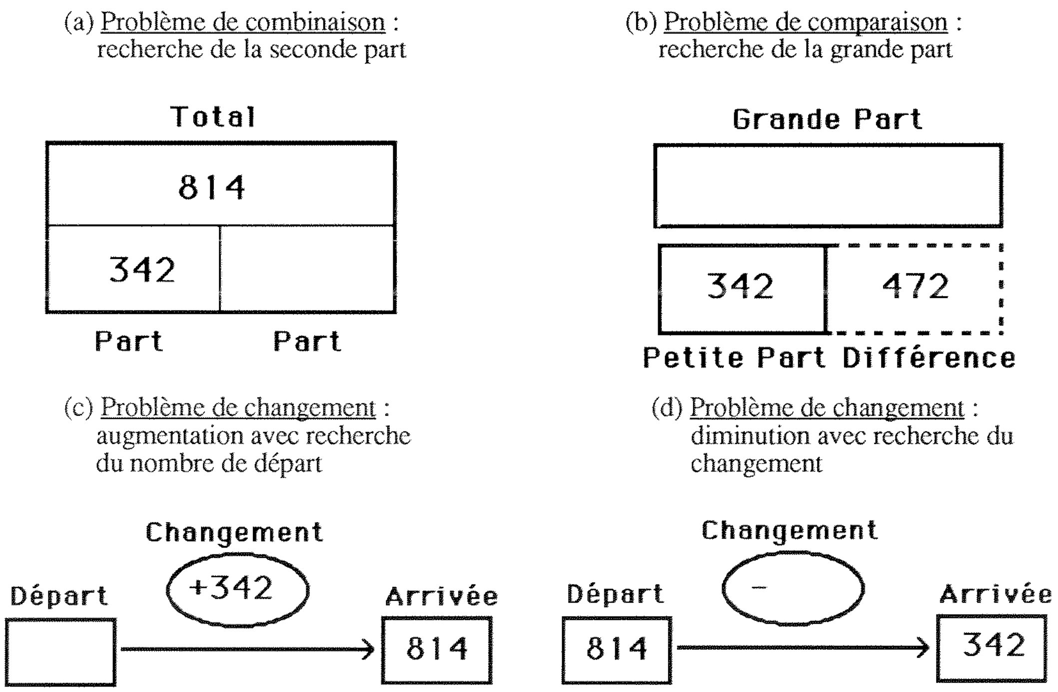


Figure 1. Quatre types de problèmes et leur schématisation
(d'après Willis & Fuson, 1988)

Willis et Fuson ont entraîné des élèves américains (moyens, ou supérieurs à la moyenne, en mathématiques) de 2ème année d'école à l'utilisation de tels schémas. Ils devaient choisir le schéma correspondant au problème, puis placer les nombres de l'énoncé dans les emplacements adéquats et, enfin, s'aider de cette représentation pour trouver l'opération mathématique à exécuter. Les performances au post-test sont qualifiées de bonnes ou excellentes par les auteurs.

L'apprentissage par intégration de Lewis. Lewis (1989) part de l'observation que les mots inducteurs, dans les problèmes de comparaison, sont une source sérieuse de difficulté. Pour surmonter la difficulté Lewis a expérimenté deux types d'apprentissage qu'elle qualifie d'apprentissage respectivement par segmentation et par intégration.

L'apprentissage par segmentation consiste à analyser l'énoncé en distinguant données, questions et relations entre données. L'apprentissage par *intégration* consiste à représenter les données sur une droite numérique, en les intégrant au fur et à mesure de leur apparition dans l'énoncé aux données déjà représentées. Nous illustrons cet apprentissage dans la figure 2 sur la première partie d'un énoncé proposé par Lewis :

Megan a économisé 420 F pour ses vacances. Elle a économisé 5 fois moins que James. Combien James a-t-il économisé ?

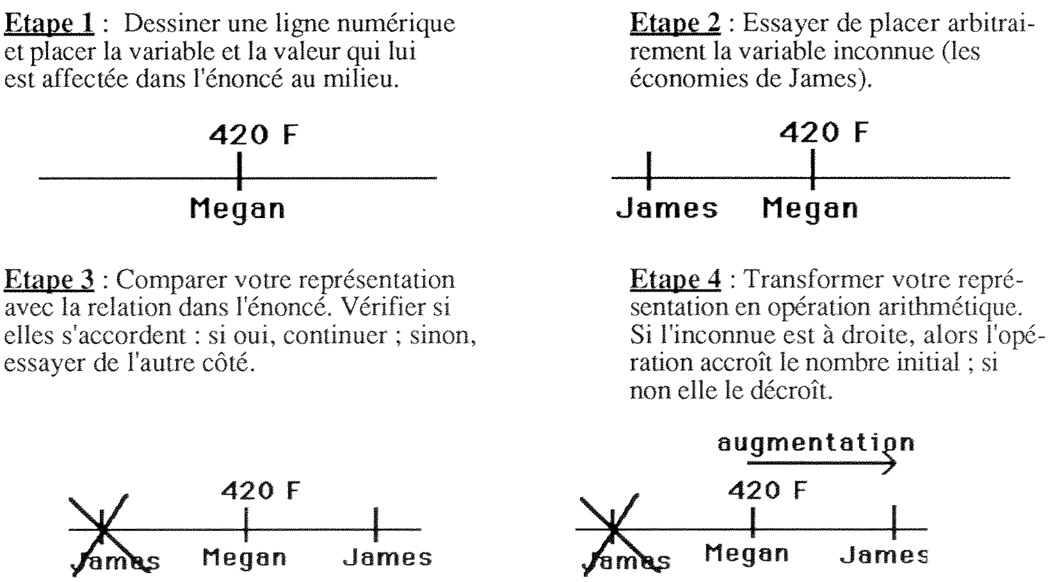


Figure 2. Représentation des 4 étapes de l'intégration

(pour un problème de comparaison, d'après Lewis, 1989 p.523)

La dernière étape (l'avant-dernière aussi) représentée sur la figure 2 permet de voir que le schéma apporte par lui-même une information qui était beaucoup moins transparente dans l'énoncé verbal, à savoir que c'est James qui a le plus d'économies. Mais si on sait donc qu'il faut accroître le montant des économies de Megan pour arriver à celui de James, on ne sait toujours pas par quelle opération arithmétique. La suggestion de Lewis est de déterminer cette opération en s'appuyant sur une "propriété" distinctive des opérations directes et inverses : l'addition et la multiplication accroissent la donnée initiale, alors que la soustraction et la division la diminuent[1].

Le résultat de la comparaison, effectuée sur des étudiants[2], a été très net : l'apprentissage par intégration s'est révélé clairement supérieur à l'apprentissage par segmentation. Notamment l'effet des mots inducteurs a quasiment disparu à l'issue de l'apprentissage par intégration.

L'entraînement à la traduction sémantico-mathématique d'Ehrlich. Ehrlich (1990), comme beaucoup d'autres chercheurs (e.g., Esfahani, 1989 ; Judd & Bilsky, 1989 ; Adetula, 1990 ; voir aussi Lewis juste ci-avant), commence par montrer que le facteur principal de difficulté des problèmes arithmétiques élémentaires est la non-concordance des opérateurs sémantique et mathématique. Un opérateur sémantique est une unité sémantique réunissant un concept et une expression verbale et marquant soit une accumulation (e.g., gagner, perdre, acheter, vendre, ...), soit une comparaison (e.g., de plus, de moins, fois plus, fois moins, ...). Un problème sera donc difficile si, par exemple, l'énoncé contient le verbe "gagner", ou l'expression "de plus", et qu'il faut faire une soustraction. Un autre facteur non négligeable de difficulté est l'organisation événementielle : un problème sera plus facile si l'organisation énonciative coïncide avec l'organisation événementielle. Par exemple, le problème :

Combien avais-je avant ? Je viens de gagner 10 F. J'ai 30 F maintenant.

devrait être plus facile que le problème :

J'ai 30 F maintenant. Je viens de gagner 10 F. Combien avais-je avant ?

formulé plus classiquement (avec la question en dernière position).

---

[1] *La suggestion de Lewis - dont nous contestons par la suite la pertinence mathématique et didactique - est, en fait, insuffisante pour déterminer complètement l'opération. Mais les étudiants testés par elle ne confondaient pas les structures additives et multiplicatives. En conséquence, la méthode suggérée pouvait leur suffire.*

[2] *Ceci prouve, au passage, que l'on peut trouver des échantillons d'étudiants (adultes) en difficulté sur des problèmes de comparaison. Il est vrai que ces problèmes étaient souvent un peu plus complexes que ceux qui nous intéressent dans cet article, mais l'erreur typique des étudiants a néanmoins été de choisir l'opération arithmétique induite par l'expression verbale.*

La distinction de tels facteurs, ainsi que celle entre problème d'accumulation et de comparaison, conduit alors Ehrlich à proposer une batterie hiérarchisée de problèmes qui porte sur les 4 opérations : d'abord les 2 additives, puis les 2 multiplicatives. Cette batterie sert ensuite de support à un entraînement progressif à la traduction sémantico-mathématique. En quoi consiste-t-il ?

Après un travail sémantique de base, allant de la compréhension à l'invention d'énoncés, Ehrlich suggère, pour chaque énoncé :

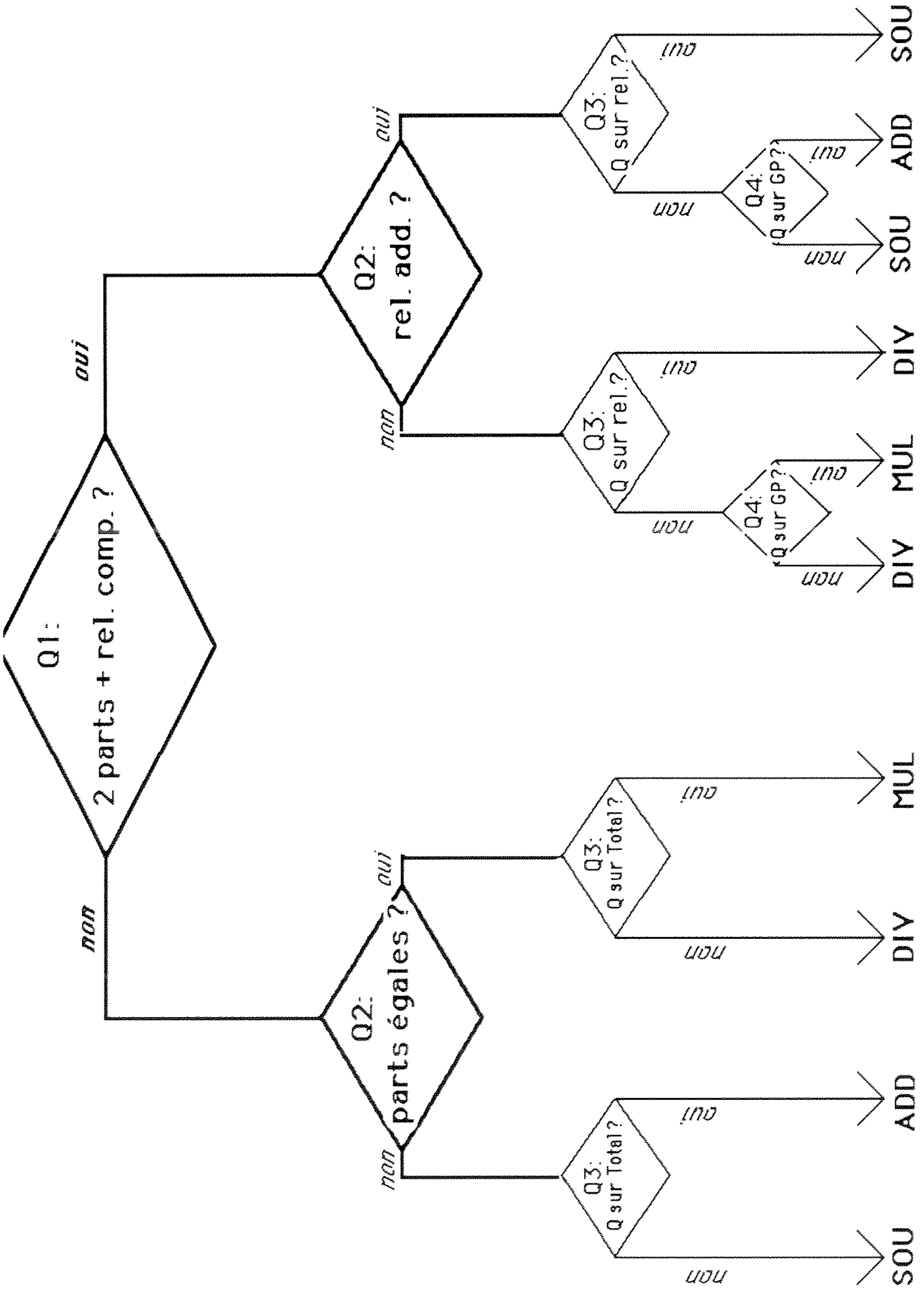
1) de faire identifier les informations utiles, les données, l'inconnue, les parts et, le cas échéant, le total, la présence d'un comparateur et le caractère additif de la relation ;
2) de trouver le signe opératoire à mettre (correctement !) entre les deux données ?
3) de poser l'opération.

C'est incontestablement le passage du 1) au 2) qui est au coeur de la traduction sémantico-mathématique. Ce passage consiste en effet à passer d'un énoncé écrit en français à une opération mathématique qui, non seulement n'est pas indiquée dans l'énoncé, mais peut même être faussement induite (e.g., l'énoncé contient le mot "plus" et il faut choisir le signe "-"). A l'aide de techniques pédagogiques éprouvées, comme le parcours des 3 niveaux de représentation de Bruner (inactif, iconique et symbolique : voir Fischer, 1986, pour un résumé), l'utilisation de couleurs et de tableaux mettant en évidence certaines régularités, Ehrlich tente de montrer, aux niveaux successifs de la hiérarchie qu'il a proposée, que l'on peut extraire le signe mathématique par une démarche que nous croyons pouvoir résumer par l'organigramme de la figure 3. Faisons fonctionner l'organigramme sur le problème précédent :

J'ai 30 F maintenant. Je viens de gagner 10 F. Combien avais-je avant ?

Après avoir identifié les deux données - le total (30 F) et la part gagnée (10 F) - et l'inconnue - la part initiale -, on peut remarquer l'absence de **relation comparative** et donc répondre négativement à la **Question 1**. En descendant alors du côté des problèmes d'accumulation, on observe que les deux **parts** n'ont aucune raison d'être **égales** et que la réponse à la **Question 2** est négative. En conséquence, on se retrouve du côté des structures additives et il suffit de répondre négativement à la **Question 3** (la Question ne porte pas sur le Total) pour conclure que l'opération à faire est une **SOU**straction. On voit donc, sur ce problème, que le verbe "gagner", souvent inducteur de l'addition, n'a jamais pu exercer son effet néfaste.

Figure 3. Organigramme de résolution des problèmes simples (construit d'après Ehrlich, 1990)



Propositions pour un enseignement

Bilan critique des trois recherches. Les recherches précédentes, comme beaucoup d'autres recherches bien contrôlées (e.g., Wilson & Sindelar, 1991), ne portent que sur un domaine très restreint de la résolution des problèmes arithmétiques verbaux. Ainsi, le travail d'Ehrlich, qui semble pourtant le plus complet, se limite à des problèmes avec 2 données et une inconnue ; celui de Willis et Fuson aussi, et, en outre, il ne porte que sur les structures additives ; enfin, celui de Lewis, s'il porte bien sur des problèmes plus complexes, ne concerne qu'une catégorie très particulière de problèmes : les problèmes de comparaison.

De plus, pour les propositions de Lewis et d'Ehrlich, il faut remarquer que la généralisation aux nombres non entiers est délicate. L'exemple illustrant le travail de Lewis (voir fig.2) le montre bien : on conclut qu'il faut faire une multiplication parce que les économies de James sont supérieures à celle de Megan. L'organigramme dérivé du travail d'Ehrlich (voir fig.3) le montre également : on conclut, par exemple dans le cas d'un problème de comparaison multiplicatif avec recherche d'une part, qu'il faut faire une multiplication lorsque la question porte sur la grande part et une division lorsqu'elle porte sur la petite. Or toutes ces inférences peuvent ne plus être valables dans l'ensemble des décimaux ou des fractions. Par ailleurs, elles ne font que renforcer «l'idée que la multiplication transforme le nombre initial en un nombre plus grand et la division en un nombre plus petit», une intuition qui constitue un obstacle pour les apprentissages ultérieurs (Vergnaud, 1991, p.281).

Enfin, encore à propos du travail d'Ehrlich, on ne peut s'empêcher de remarquer que le support empirique pour son traitement des problèmes de comparaison est particulièrement faible. En effet, dans l'expérience d'entraînement de 17 élèves du CM1, 9 seulement ont progressé alors que 8 ont régressé ou stagné (cf. Ehrlich, 1990, tableau 5, p.134).

Tout ceci nous conduit à proposer une stratégie d'enseignement qui tente de reprendre les points forts des expériences précédentes, tout en remédiant à un maximum de leurs points faibles. Nous la décrivons dans ses grandes lignes dans les deux sous-parties suivantes.

Problèmes de comparaison. La nécessité d'un traitement particulier des problèmes de comparaison est un point d'accord entre les trois recherches précédentes. L'échec assez net de l'apprentissage proposé par Ehrlich, que nous venons de souligner, et la réussite de celui de Lewis, nous conduisent à adopter la droite numérique orientée comme outil de représentation des problèmes de comparaison.

Par exemple, dans le cas d'un problème de comparaison comme :

Une veste coûte 150 F de plus qu'un pantalon. Ce pantalon coûte 80 F de plus qu'un pull-over. Si la veste coûte 580 F, combien coûte le pull-over ?
posé par Brixhe (1990), nous suggérons, en procédant pas à pas comme Lewis, d'arriver à la représentation finale du problème de la figure 4.

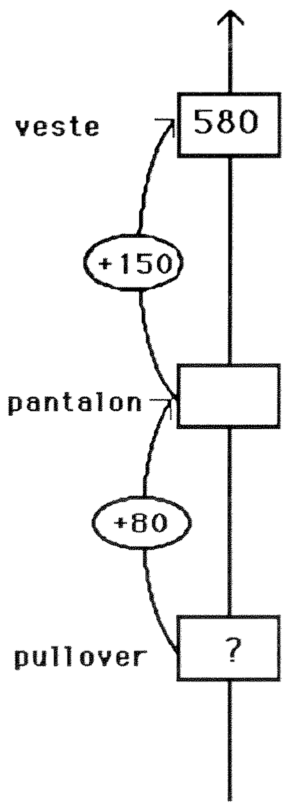


Figure 4. Représentation des données d'un problème de comparaison (dans son état final)

Cette représentation permet alors de résoudre le problème à un autre niveau, non verbal, et de se dégager ainsi de l'effet néfaste de l'expression "de plus". Ce passage à un autre niveau, ou plan, nous paraît la clé de la réussite : c'est lui qui permet, en effet, la neutralisation de certaines règles d'inférence sémantique, pragmatique, ou simplement statistique[1], que l'élève ou l'étudiant a pu construire et qui sont souvent correctes, ou en tout cas suffisantes, lorsque l'expression inductrice s'accorde avec l'opération arithmétique (cf., pour une remarque analogue sur les verbes antonymiques , Duval, 1991, note page 169).

La figure 4 montre aussi que, à la représentation horizontale de Lewis (voir fig.2), nous préférons une droite verticale orientée vers le haut. La raison majeure de cette préférence est qu'elle permet de réserver la demi-droite horizontale pour les problèmes d'accumulation chronologiques (voir fig.5). En ayant ainsi deux représentations ou signifiants bien distincts, nous espérons arriver à une meilleure distinction des signifiés, à savoir les deux catégories de problèmes représentées : les problèmes de comparaison et d'accumulation chronologique.

En revanche, la figure 4, dans la mesure où elle est une représentation achevée des données, ne permet pas de voir un autre intérêt majeur de la méthode par intégration. Cet intérêt est de pouvoir procéder pas à pas (voir fig.2). Dans le cas d'un problème avec beaucoup de données, cela évite en effet d'avoir à garder, simultanément, toutes ces données en mémoire de travail. Et ceci est fort utile, car - on peut s'en rendre compte à la lecture de tous ces petits problèmes (notamment de comparaison) - la mémoire de travail déborde bien vite !

Bien qu'étant un diagramme un peu appauvri, dans la mesure où il n'est qu'unidimensionnel, ce mode de représentation bénéficie de tous les avantages, clairement listés par Larkin et Simon (1987), d'une représentation "diagrammatique", à savoir :

- il regroupe ensemble toutes les informations utilisées, évitant ainsi une longue recherche des éléments nécessaires à une inférence ;
- il utilise typiquement l'endroit ou la position pour regrouper les informations au sujet d'un élément individuel, évitant la nécessité d'apparier des étiquettes symboliques ;
- il sert de support à une grande quantité d'inférences perceptives qui sont extrêmement faciles

---

[1] *Nous qualifions de "statistiques" des règles qui permettent aux élèves de générer rapidement des réponses avec un taux de réussite important: par exemple, s'il y a le verbe perdre il faut probablement faire une soustraction. Silver (1986, p.192) cite quelques autres exemples:*
- si on est en présence de deux nombres dont l'un est beaucoup plus grand que l'autre, il faut probablement diviser;
- s'il y a plus de deux nombres il faut probablement additionner.

pour les humains. Ce point apparaît clairement dans l'exemple précédent où l'on voit immédiatement que c'est le pull qui est le moins cher, alors que ce n'est pas tout à fait évident à la seule lecture de l'énoncé.

Plus généralement, relevons que ce n'est certainement pas par hasard que les défenseurs de l'imagerie mentale (visuelle ici), ou de l'hémisphère droit, puisent, de manière privilégiée, leurs exemples dans les problèmes de comparaison (non nécessairement arithmétiques). Par exemple, Kosslyn (1988, p.265) souligne que si, à propos d'armes, on dit à quelqu'un, *«qu'un x est moins dangereux qu'un y, mais qu'un z est moins dangereux qu'un y, et qu'un p n'est pas plus dangereux qu'un x»,* il est facile de décider quelle arme est la plus dangereuse en imaginant une ligne de "dangerosité" avec des points étagés dont la position indique le risque relatif que présente l'arme. Ou aussi, Williams (1983, p.105) propose une représentation graphique sur un axe vertical pour résoudre le problème suivant :

Paul et Jacques sont tous les deux plus âgés que Jean. Laure est plus jeune que Paul et plus âgée que Jacques : Marie est plus âgée que Paul. Qui est le plus jeune de tous et qui vient juste avant ?

Enfin, un autre avantage, de nature différente, de notre mode de représentation fléché, provient du fait qu'il transforme des relations statiques en relations dynamiques. Par exemple, "ce que y a de plus que x" devient "ce qu'il faut ajouter à (la part de) x pour avoir (la part de) y". Or les formulations dynamiques peuvent être plus accessibles aux enfants que les formulations statiques (Nesher & Katriel, 1978 ; voir cependant Fischer, 1979). Ainsi, Mayer (1985) souligne-t-il, à propos des propositions relationnelles impliquées dans les problèmes arithmétiques verbaux, que «les erreurs se produisent lorsque les élèves les considèrent comme des descriptions statiques de relations entre deux variables, plutôt que d'y voir une instruction procédurale sur la manière de convertir un nombre dans un autre» (p.132). Il souligne aussi l'incapacité des élèves à représenter des relations propositionnelles en mémoire : notre représentation schématique constitue donc une béquille pouvant aider à surmonter cette incapacité.

Problèmes d'accumulation. Le traitement particulier que nous proposons pour les problèmes de comparaison exige de les distinguer des autres. Etant donné cette exigence, la distinction comparaison/accumulation d'Ehrlich est bienvenue. Néanmoins, un traitement uniforme de tous les problèmes ne relevant pas de la comparaison dissout la distinction entre problèmes de combinaison et de changement, et donc la distinction des représentations schématiques qui leur ont été associées par Willis et Fuson. Nous distinguerons donc deux sous-catégories de problèmes d'accumulation : les problèmes chronologiques ou événementiels, i.e. les problèmes de changement, et les problèmes non chronologiques, i.e. les problèmes de combinaison.

Pour les problèmes chronologiques, nous choisissons, comme annoncé, la représentation sur une droite horizontale orientée (de la gauche vers la droite) dans le sens des temps croissants. Cette représentation a en effet de nombreux avantages. Elle est notamment enseignée assez systématiquement dès les premiers niveaux de la scolarité[1]. Elle serait également, selon Vergnaud (1990, p.161), la seule représentation accessible à des enfants de 7 ans dans le cas d'un problème avec recherche de l'état initial car elle met «en évidence la réciprocité de l'addition et de la soustraction comme opérations unaires.»

Quant aux problèmes non chronologiques, nous les représentons comme les problèmes de combinaison de Willis et Fuson, mais en introduisant des couleurs. Les couleurs sont en effet fondamentales si l'on veut élargir ce type de représentation aux problèmes multiplicatifs. Dans le cas des problèmes additifs, on est en présence d'un total (au-dessus en rouge) et de deux parts (en-dessous en bleu); mais dans le cas de problèmes multiplicatifs, les deux "parts" doivent être clairement distinguées : l'une est la valeur d'une part (en bleu), l'autre le nombre de parts (en vert).

Première évaluation. Nos propositions remédient-elles aux difficultés soulignées dans le bilan critique précédent ? En grande partie oui. En effet, les problèmes qui peuvent être représentés ne se limitent pas, en général, à deux données : les problèmes de comparaison et d'accumulation chronologique peuvent même porter sur un nombre illimité de données. Nous avons déjà proposé un exemple (voir fig.4), et en proposerons encore d'autres, de problèmes de comparaison complexes (plus de deux données). Nous nous contentons donc ici de présenter deux exemples de problèmes d'accumulation chronologique plus complexes.
La possibilité de prolonger l'axe chronologique, sur sa droite, permet de représenter (voir fig.5) des problèmes comme :

---

[1] *A ceci près que les Instructions Officielles françaises (I.O., 1978) recommandent les notations a 3, r 3, m 3, et d 3, plutôt que +3, -3, x3, et :3, pour les fonctions "ajouter 3", "retrancher 3", "multiplier par 3" et "diviser par 3" dans N. Notre choix est motivé par les faits que:*
- *la notation a 3 (resp. r 3, m 3, d 3) nécessite, lorsque l'enfant fait effectivement les calculs, une traduction en "plus 3" (resp. "moins 3", "multiplié par 3", "divisé par 3") qui ne fait qu'empiéter sur son espace d'exécution;*
- *dans les problèmes de comparaison, il serait gênant d'introduire ainsi, subrepticement, des verbes d'accumulation.*

Je pars de la maison avec 138 F dans mon porte-monnaie. Je dépense 17 F chez le boulanger, puis, 45 F chez le boucher. Combien reste-t-il d'argent dans mon porte-monnaie lors de mon retour à la maison ?

très fréquents dans les classes, éventuellement avec d'autres habillages (e.g., train avec des voyageurs qui montent et descendent, etc.).

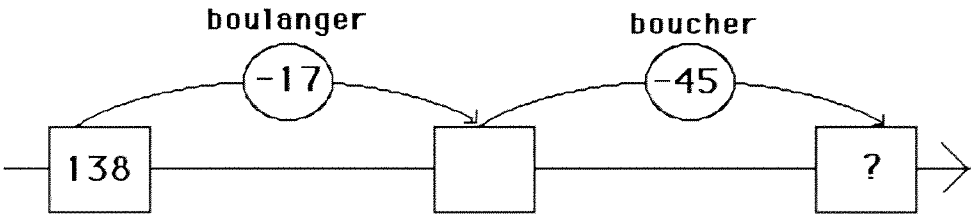


Figure 5. Représentation d'un problème d'accumulation chronologique

Cette possibilité de prolonger l'axe sur la droite permet aussi de représenter (et favorise sa résolution) un problème plus complexe comme le problème de prêt :

J'emprunte 10000 F, sur une période de 15 ans et au taux fixe de 12% (soit 1% par mois), à ma banque. Quel est le montant des mensualités à rembourser ?

La représentation de ce problème (cf. fig.6) aide à voir que la même séquence de 2 fonctions, x $\frac{101}{100}$, puis $- x$, ou x désigne le montant de la mensualité cherchée, est à répéter 180 (= 12x15) fois. Ensuite, en complétant de proche en proche quelques rectangles, $10000 . \frac{101}{100}$, puis $10000 . \frac{101}{100} - x$, puis $10000 . \frac{101}{100} . \frac{101}{100} - x . \frac{101}{100}$, etc., et en remarquant qu'au bout des 180 mois la somme à rembourser doit être nulle, on arrive à l'équation :

$$10000 . \left(\frac{101}{100}\right)^{180} - x \left[\left(\frac{101}{100}\right)^{179} + \left(\frac{101}{100}\right)^{178} + \left(\frac{101}{100}\right)^{177} + ... + 1\right] = 0$$

dont la résolution donne la mensualité $x = 120{,}01$ F.

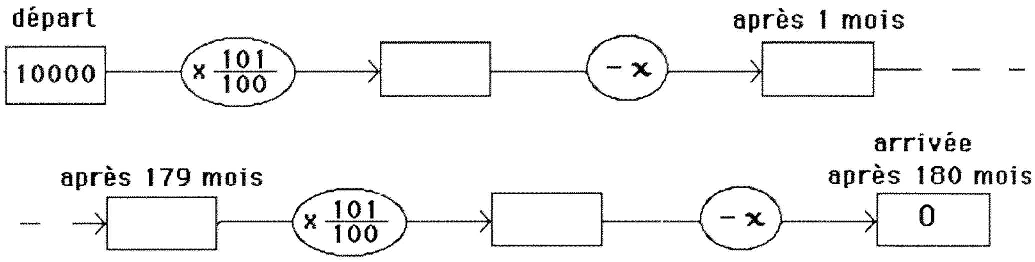


Figure 6. Représentation d'un problème de remboursement d'un prêt

L'autre critique, formulée dans notre bilan précédent, concerne la détermination de l'opération multiplicative sur une base inadaptée aux décimaux (ou fractions) inférieurs à l'unité. Comment notre proposition évite-t-elle cette difficulté ?

Le plus simple est de reprendre l'exemple de Lewis (cf. fig.2). Rappelons que Lewis avait suggéré, à propos de Megan qui a économisé 5 fois moins que James, de représenter les deux personnages sur un axe orienté, et ensuite de représenter une augmentation pour passer des économies de Megan à celle de James. Nous reprenons la partie initiale de cette proposition, à savoir représenter les 2 personnages sur un axe orienté (le fait qu'il soit vertical chez nous est tout à fait inimportant ???ici). Mais nous suggérons ensuite de placer "strictement" la relation contenue dans l'énoncé : comme Megan a économisé 5 fois moins, nous plaçons la flèche allant de James à Megan avec la fonction : 5 (qui conduit à une diminution). C'est ensuite, c'est-à-dire lorsque toutes les données de l'énoncé ont été représentées, que nous inversons la fonction après avoir remarqué que nous ne pouvons pas faire directement le calcul puisque la valeur à laquelle doit s'appliquer la fonction est inconnue. L'intérêt de distinguer ces deux phases (voir fig.7) est que l'inversion a pu se faire au cours de la deuxième phase sur la seule représentation schématique. Or, à ce niveau, la difficulté due aux faux inducteurs ou aux verbes antonymiques ne se pose pas (puisque ce niveau peut être totalement détaché de l'énoncé verbal). Ajoutons - il est important de le préciser et de s'en persuader ! - que cette même difficulté ne se pose pas non plus dans la première phase. En effet, si l'on représente "strictement" les données, le verbe **gagner** (resp.. perdre), inducteur de l'addition, est **toujours représenté** par une **fonction** + (resp.. -). De même, l'expression "de plus" (resp.. "de moins", "fois plus", "fois moins"), inductrice de l'addition (resp.. soustraction, multiplication, division), est toujours représentée par une fonction + (resp.. -, x, :).

On peut vérifier ceci sur la figure 4, où les deux expressions "de plus" sont bien représentées par des fonctions +, sur la figure 5 où le verbe dépenser, inducteur de la soustraction, est bien représenté par des fonctions -, et sur la figure 7 où l'expression "fois moins" conduit bien à une fonction : dans la première phase.

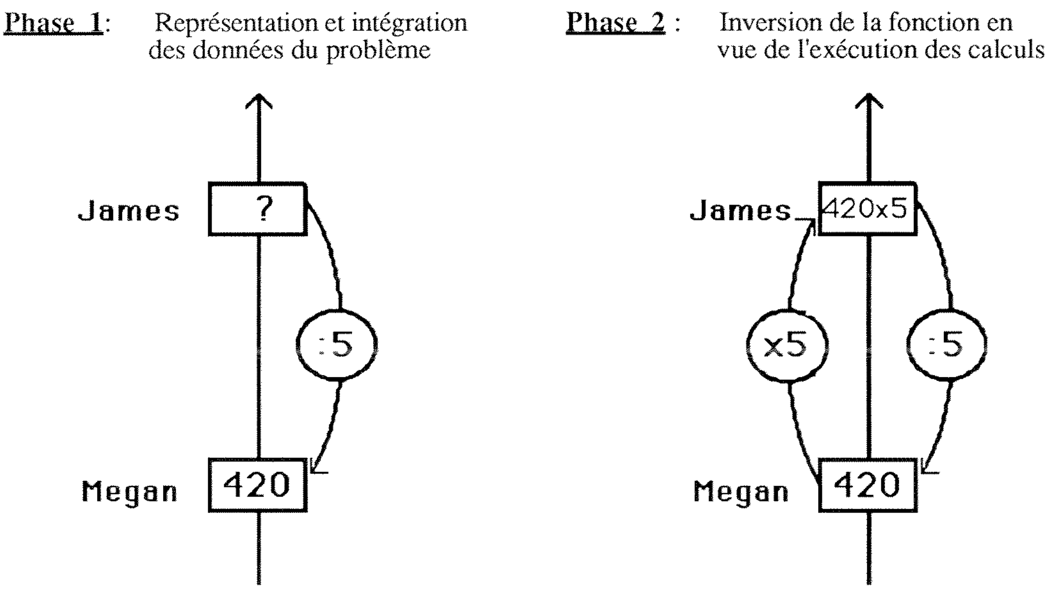


Figure 7. Deux phases dans le travail sur la représentation schématique

Conséquence. Une conséquence de notre choix d'un axe vertical pour les problèmes de comparaison et d'un axe horizontal pour les problèmes chronologiques est que la combinaison des deux axes fournit un double système de schématisation aux représentations bi-dimensionnelles dont Damm (en préparation) soutient la pertinence. Ce double système est particulièrement bien adapté à des problèmes, typiquement étudiés par Damm, comme :

Julien habite un immeuble à Schiltigheim, et se trouve chez lui. Il monte de 4 étages pour aller chez son amie qui habite le même immeuble. Puis il descend 6 étages chez un autre ami qui habite au 2ème étage. A quel étage habite Julien ?

En effet, à partir d'une représentation figurative du problème (cf. fig.8), on peut arriver à deux représentations schématiques : l'une, sur l'axe horizontal, en le traitant, comme y invite sa formulation, comme un problème d'accumulation chronologique ; l'autre, sur l'axe vertical, en le re-formulant comme un problème de comparaison, par exemple :

Julien habite un immeuble à Schiltigheim. Son amie habite 4 étages plus haut dans le même immeuble. Un autre ami, qui habite 6 étages plus bas que cette première amie, habite le 2ème étage. Quel étage habite Julien ?

Comme le montre la figure 8, les deux représentations schématiques axiales ne sont pas tout à fait identiques. Ces deux représentations conduisent néanmoins à des calculs identiques, et - heureusement ! - à la même réponse.

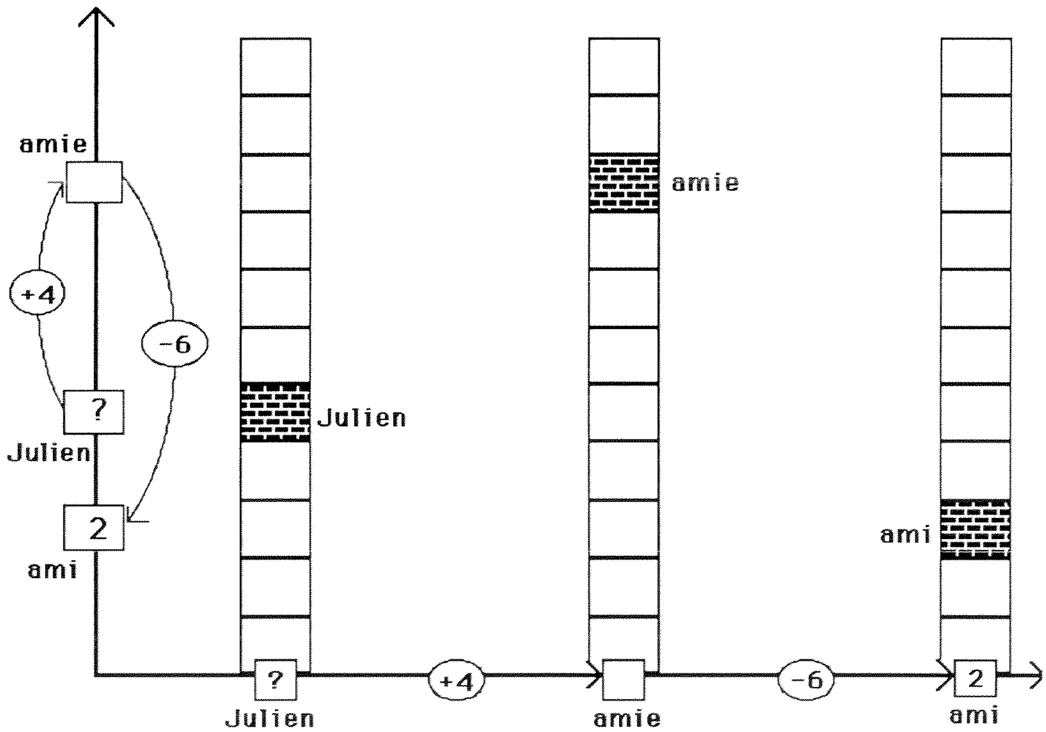


Figure 8. Représentation bi-dimensionnelle

Expérimentation au CE2

Description de l'expérience. L'expérience s'est déroulée au cours du dernier trimestre de l'année scolaire 1990/91 dans une classe de CE2 de 24 élèves dans le cadre de la formation initiale des élèves-maîtres. Dans ses grandes lignes, l'expérience consistait en un pré-test, un apprentissage et un post-test.

Le pré-test. Il a porté sur les 10 problèmes arithmétiques verbaux présentés en Annexe 1. Les élèves ont complété, l'un après l'autre, après que l'un d'entre eux a lu l'énoncé, deux feuilles sur lesquelles ces énoncés étaient présentés. Ils avaient, en théorie, tout le temps nécessaire pour les compléter. Dans les consignes préalables, on a insisté sur le fait qu'il fallait juste poser l'opération et ne pas faire le calcul, et sur la différence entre opération de pensée et opération mathématique.

Par suite d'un grand nombre d'absents, les élèves ont passé le pré-test en deux groupes. Dans l'un des groupes, on leur a distribué une feuille de brouillon en suggérant qu'elle pouvait servir à faire un dessin. Précisons tout de suite, pour ne plus y revenir, qu'aucun élève n'en a fait. Une telle observation de l'inaptitude des élèves à utiliser spontanément un dessin "heuristique", i.e. aidant à résoudre le problème, n'a rien d'original (e.g., Ng Li, 1990). Elle plaide simplement en faveur d'un enseignement explicite de l'utilisation de schémas.

Les problèmes simples, i.e. avec 2 données, ont été classés en problèmes d'accumulation (Acc) et de comparaison (Com), différenciés suivant la nature de l'opération arithmétique (+, -, x et :) et suivant la congruence, ou **non-congruence**, des opérateurs sémantiques et mathématiques. Ainsi, nous notons, par exemple, **Com**$^{-}$ un problème de comparaison se résolvant par une soustraction mais dans lequel l'expression comparative (e.g., "de plus") induit une addition.

L'apprentissage. Il a consisté en 6 séances, d'environ 50 minutes chacune, animées par les élèves-maîtres. La classe de 24 élèves a été divisée en deux groupes de 12 élèves pour toute la durée de l'apprentissage (ainsi que pour le post-test). Les deux groupes ont travaillé dans des salles et avec des animateurs différents. Entre deux séances, qui se sont déroulées au rythme d'une ou deux par semaine, la maîtresse de la classe a souvent renforcé les apprentissages. Au total, elle a environ consacré 6 heures à ce renforcement.

Les titres et objectifs des 6 séances étaient :

(1) Corrigé du pré-test : insister sur le problème qui, excepté le problème de comparaison complexe, s'est avéré le plus difficile (le problème n°7, de type **Acc+**); à partir de ce problème, conduire une réflexion méta-cognitive sur les mots inducteurs et sensibiliser ainsi les élèves au fait que l'opérateur sémantique ne coïncide pas nécessairement avec l'opérateur mathématique.

(2) Situation de référence : introduire, pour les problèmes de comparaison (complexes), la représentation sur une demi-droite numérique verticale à partir d'une situation de référence qui possède les caractéristiques d'être simple, immédiatement compréhensible, et de permettre aux élèves de vérifier leur réponse par eux-mêmes. Nous avons choisi un problème de comparaison des mesures de 3 bandes de papier, mais un problème de taille aurait peut-être davantage conduit à faire émerger une représentation sur un axe vertical.

(3) Distinction Comparaison/Accumulation : apprendre à identifier, grâce (notamment mais non exclusivement) aux comparateurs, les problèmes de comparaison ; entraîner les élèves à utiliser la représentation sur la droite numérique pour les problèmes de comparaison.

(4) Consolidation et informations inutiles : associer une des 3 représentations schématiques (resp.. axe vertical, axe horizontal ou rectangle) à un problème (resp.. de comparaison, d'accumulation chronologique ou non); sensibiliser les élèves à la possibilité d'informations inutiles.

(5) Résolution en plusieurs étapes : bien distinguer la représentation des données (et de la question), l'inversion ou la composition des fonctions et, enfin, l'exécution des calculs.

(6) Concours d'énoncés : demander aux élèves de produire des énoncés répondant à certaines conditions. D'abord, à titre d'entraînement, un problème simple d'accumulation ; puis, un problème de comparaison complexe. Ce dernier a donné lieu à un concours d'énoncés suivant une suggestion, pour les problèmes de division, de Brousseau (1988).
Il est important de préciser que l'apprentissage visait avant tout les problèmes de comparaison (complexes). C'est la raison pour laquelle les problèmes appariés 10 du pré-test et 8 du post-test sont qualifiés de "cruciaux" par la suite : c'est ce couple de problèmes qui est crucial pour évaluer les résultats de l'apprentissage.

Le post-test. Les élèves-maîtres ont construit un jeu de 10 problèmes, dont 8 sont appariés à des problèmes du pré-test. Les 2 autres sont un problème de division (N°9 de l'Annexe 2) et un problème de comparaison complexe avec données inutiles (N°10 de l'Annexe 2).
Ces 2 problèmes "remplacent" les 2 problèmes les plus réussis du pré-test, à savoir les N°3 et 1

(Annexe 1), pour lesquels aucun énoncé apparié n'a été proposé. Par problèmes "appariés" nous entendons des problèmes qui ont le même nombre de données et qui, en tout cas pour les problèmes simples, ont le même type (Acc ou Com), impliquent la même opération arithmétique (+, - ou x), et sont identiques du point de vue de la congruence (congruents ou **non**). Citons, bien qu'il figure en Annexe 2 (sous le N°8), le problème crucial, apparié au problème de comparaison crucial de l'Annexe 1 (N°10 ; aussi l'énoncé de Brixhe ci-avant):

Un pictionnary coûte 39 F de plus qu'un trivial pursuit. Le trivial pursuit coûte 120 F de plus qu'un monopoly. Si le pictionnary coûte 345 F, combien coûte le monopoly ?

Au cours du post-test on demandait aux élèves d'avoir une feuille de brouillon à portée de main et de l'utiliser si besoin. Ces feuilles ont été collectées à la fin du post-test et serviront à une analyse plus fine des résultats au problème crucial.

Résultats.

Observations préliminaires. Nous ne donnons pas ici les taux de réussite aux différents problèmes des pré- et post-tests : ils ne sont pas au coeur de notre problématique et sont précisés, en même temps que les énoncés, en Annexes. En revanche, nous ferons quelques observations plus synthétiques en rapport avec notre propos introductif sur les facteurs de difficulté.

Nous remarquerons ainsi que :

- dans le pré-test les problèmes simples **non congruents** ont bien été significativement ($t(7)=1.954$; $p<.05$, test unilatéral) plus **difficiles** que les problèmes congruents : les premiers ont seulement conduit à 70.0 % de réussite, contre 86.5 % aux seconds ;
- néanmoins, la non-congruence n'est pas toujours suffisante pour rendre un problème difficile : les problèmes appariés **Com**$^-$ qui portaient sur la relation entre les deux parts comparées (N°5 du pré-test et 2 du post-test ; voir aussi la figure 9, 2ème histogramme comparatif), ont été très bien réussis en dépit du fait que l'expression "de plus" induit plutôt l'addition que la soustraction ;

- enfin, dans le pré-test toujours[1], les problèmes simples d'accumulation et de comparaison n'ont pas donné lieu à une différence de réussite significative ($t(7)=0.59$; $p>.20$): les premiers ont conduit à 74.0% de réussite et les seconds à 80.0 %.

Pour ce qui concerne maintenant l'apprentissage, les objectifs n'ont pas toujours été totalement atteints au cours des séances. Mais le travail complémentaire de la maîtresse a permis de remédier en grande partie à ce défaut. Ces objectifs ont aussi, parfois, dû être aménagés en cours d'apprentissage. Mais les aménagements ont le plus souvent été circonstanciels et ne méritent donc pas d'être décrits. En revanche, il est intéressant de signaler une observation qualitative rapportée par la maîtresse. Après les premières séances, certains élèves - surtout ceux qui n'avaient pas trop bien réussi au pré-test - "rayonnaient": ils semblaient soulagés par le fait de savoir quoi faire lorsqu'on leur posait un problème !

Mentionnons enfin que la séance de concours d'énoncés s'est avérée très intéressante : presque tous les 12 énoncés (les élèves travaillaient par paires) répondaient aux consignes, et les deux paires gagnantes (une pour chacun des deux sous-groupes), choisies à la quasi-unanimité par les élèves eux-mêmes, avaient produit des énoncés originaux (par rapport à ceux qui ont été vus au cours du pré-test et de l'apprentissage antérieurs). Voici leurs énoncés (avec la syntaxe et l'orthographe d'origine) respectifs de problème de comparaison complexe (à 3 données):

Raoul le coiffeur a coiffé 18 personnes de plus que Laëtitia la coiffeuse qui a coiffé 7 personnes de plus que David qui en a coiffé 26 personnes. Combien Raoul et Laëtitia ont ils coiffés de personnes ?

et :

Dans la cour de l'école primaire il y a 6 arbres de moins qu'à l'école maternelle. A l'école maternelle il y a 10 arbres. Et à l'école normale il y a 8 arbres de plus qu'à l'école maternelle. Combien y a-t-il d'arbres à l'école primaire et à l'école normale ?

Progrès d'ensemble aux problèmes. L'évaluation des progrès d'ensemble peut se faire en comparant les réussites des élèves aux 8 problèmes appariés des pré- et post-tests. La figure 9 donne clairement une impression de progrès. Ce progrès est général dans la mesure où, pour chacun des 8 problèmes, les réussites sont meilleures au post-test qu'au pré-test ; il est aussi significatif avec un t-test unilatéral pour échantillons appariés, que l'on considère les élèves ($t(23) = 3.60$;

[1] *Nous limitons certaines observations au seul pré-test, car les problèmes du pré-test, au contraire de ceux du post-test, paraissent suffisamment nombreux et bien "équilibrés" pour rendre ces observations pertinentes.*

p = .0008) ou les problèmes (t(7) = 4.71 ; p = .0011) comme unités ; enfin, il est très net pour le problème crucial puisque l'on passe de 0 réussite au pré-test à 9 réussites au post-test (il est vrai que la marge de progression était importante !).

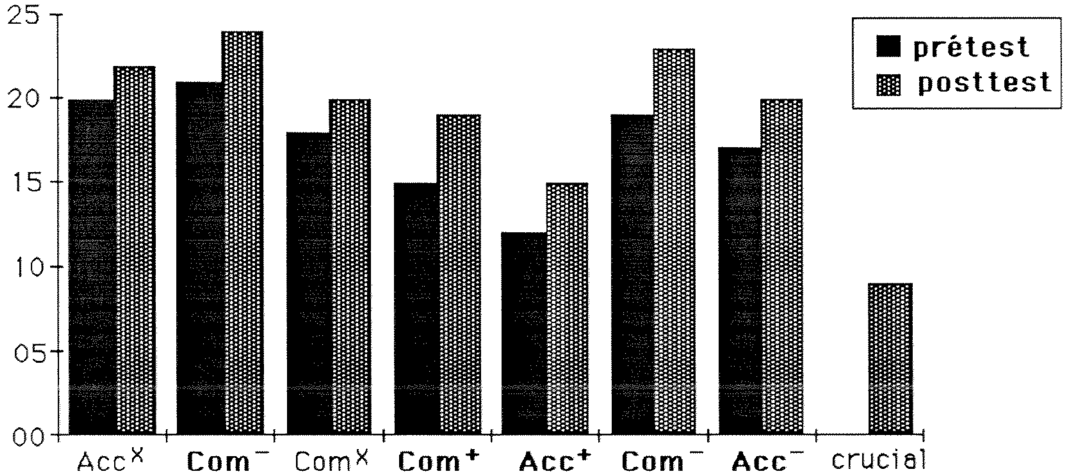


Figure 9. Histogramme comparatif des réussites aux pré- et post-tests
(pour chacun des 8 couples de problèmes appariés dans l'ordre de l'Annexe 2)

Progrès individuels. Sur les 24 élèves, 14 ont progressé, i.e. ont réussi plus de problèmes appariés au post-test qu'au pré-test, 6 sont restés à leur niveau, et 4 ont régressé. Il convient cependant de signaler que ce sont surtout les élèves de l'un des groupes d'apprentissage qui ont progressé. En effet, dans l'un des groupes, 11 élèves (sur 12) ont progressé, alors que dans l'autre seulement 3 élèves (sur 12) ont progressé. Une telle différence est nettement significative : p=.001 avec un test de Fisher. Nous ne connaissons pas précisément l'origine de cette différence, mais il semble qu'elle ne soit pas seulement imputable à l'apprentissage lui-même (d'autant que l'apprentissage complémentaire pratiqué par la maîtresse s'est fait avec la classe entière). Il se pourrait que plusieurs autres facteurs aient contribué à produire cette différence : le "testeur" différent dans les 2 groupes, un effet de groupe, une différence initiale au pré-test, etc.. Il est possible que cette différence entre groupes ait favorisé certaines de nos observations, mais nous ne croyons pas qu'elle relègue ces dernières au rang d'artefacts.

Le problème crucial. Les progrès au problème crucial, dont nous avons souligné la netteté, méritent d'être analysés plus finement. En particulier, on peut se demander s'ils sont la conséquence directe de l'apprentissage pratiqué. Les brouillons des élèves permettent d'approcher cette question : ceux qui ont progressé, i.e. réussi le problème crucial au post-test (puisque personne ne l'avait réussi au pré-test), se sont-ils servi d'un schéma (le schéma enseigné) ? La réponse est fournie par le tableau 1 où nous avons comparé les réussites, au problème crucial du post-test, des élèves ayant utilisé un schéma (qui est toujours celui enseigné), aux réussites des élèves n'en ayant pas utilisé.

Tableau 1. Croisement de l'utilisation d'un schéma avec la réussite
(au problème crucial du post-test)

		REUSSITE	
		OUI	NON
SCHEMA	OUI	**7**	**2**
	NON	**2**	**13**

Comme on peut le voir sur le tableau 1, les élèves ayant utilisé le schéma (enseigné) ont mieux réussi au problème crucial de comparaison complexe. Cette différence de réussite entre les 9 élèves ayant utilisé un schéma et les 15 autres est fortement significative : p=.003 avec un test de Fisher. Comme les élèves ont choisi eux-mêmes de faire un schéma, il se pourrait cependant que ce soient les "bons" élèves qui ont utilisé un schéma. Dans un tel cas, notre résultat statistique montrerait simplement que les "bons" élèves sont plus performants au post-test que les "moins bons". Autrement dit, notre résultat significatif serait sans grande signification ! Heureusement, deux arguments permettent de rejeter cette interprétation.

En effet, nous avons vérifié que :

1) les élèves ayant fait un schéma au problème crucial du post-test avaient été - c'est étonnant - moins performants que les autres au pré-test. A ce dernier, ils n'avaient obtenu qu'un score moyen de 6.00 (sur 10), contre 7.53 à leurs camarades, une différence significative avec un t-test bilatéral pour échantillons non appariés ($t(22)= 2.102$; $p<.05$);

2) près d'un tiers des élèves savaient parfaitement faire le schéma, sur demande, a posteriori (test complémentaire : voir suite), mais ne l'ont pas fait et se sont en général trompés.
Ces deux observations, surtout la première, permettent donc d'écarter l'hypothèse d'une confusion entre les deux facteurs "être bon élève" et "faire un schéma". En conséquence, nous pouvons conclure que l'utilisation du schéma enseigné favorise la réussite.

Test complémentaire. Pourquoi beaucoup d'élèves, en dépit de l'apprentissage pratiqué, n'ont-ils pas fait le schéma ? Une des réponses possibles est que, compte-tenu de sa complexité procédurale, ils n'en étaient pas capables. Le fait que ces élèves ont été plus performants au pré-test que les élèves qui ont utilisé le schéma permet tout de suite de savoir que cette explication n'est certainement pas suffisante. Pour approcher plus directement la question, la maîtresse a, après le post-test et pour les deux problèmes de comparaison, demandé à tous les élèves de faire la représentation schématique qu'on leur avait enseignée. Pour le problème crucial, qui est le seul que nous analyserons, nous avons ainsi pu vérifier que, au total, 16 (des 24 élèves) savaient faire le schéma.

De manière plus détaillée, nous avons observé que :
- 7 élèves, i.e. tous à une exception près, ayant fait spontanément (i.e. au cours du post-test) le schéma[1], ont su le refaire ;
- les 2 élèves ayant réussi le problème crucial sans faire de schéma savaient faire ce dernier ;
- 7 élèves n'ayant pas fait spontanément de schéma et ayant échoué au problème crucial ont su faire le schéma ;
- enfin, les 8 élèves n'ayant pas su faire le schéma sur demande n'avaient pas su résoudre le problème.

---

[1] *Un élève a fait, spontanément et correctement, le schéma, mais il s'est trompé dans la réponse sur la feuille de test: ceci explique pourquoi l'effectif de la case Oui-Oui du tableau 1 est de 7.*

Cette analyse détaillée permet donc de conclure que tous les élèves ayant su résoudre le problème crucial savaient aussi faire le schéma ou, ce qui est logiquement pareil, qu'**aucun élève ne sachant faire le schéma n'a su résoudre le problème.** Nous n'en inférons pas pour autant que savoir faire le schéma est une condition nécessaire pour résoudre le problème. En effet, nous sommes ici plutôt en présence d'une hiérarchie psychométrique que d'une hiérarchie d'apprentissage (cf. Sander, 1986). Néanmoins, l'observation garde une partie de son intérêt.

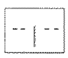
Discussion générale

Sur la base de trois expériences d'apprentissage publiées, nous avons fait quelques propositions pour un enseignement des problèmes arithmétiques verbaux. Ces propositions peuvent être mises en oeuvre dès la fin du cycle des apprentissages fondamentaux (CP et CE1), et se prolonger jusqu'au collège. Mais c'est au cycle des approfondissements que l'essentiel du travail serait à faire. Résumons et discutons-les.

En théorie, on distingue d'abord[1] les problèmes de comparaison et d'accumulation. Cette distinction semble accessible à tous les élèves de CE2 : d'une part, parce qu'il existe un nombre très limité de marqueurs de la comparaison (e.g., de plus, de moins, fois plus, fois moins); d'autre part, parce que dans les problèmes typiques de comparaison on compare deux choses (e.g., le nombre de billes de Pierre et celui de Paul), une opération très familière aux enfants. Dans les problèmes d'accumulation on fait en outre la distinction entre les problèmes événementiels ou chronologiques et les autres. Pour chacune des trois classes de problème ainsi distinguées, on introduit alors une unité perceptivo-cognitive, à savoir respectivement :

{comparaison, $\uparrow$},

{accumulation chronologique, $\longrightarrow$}

et {accumulation non chronologique,  }.

[1] *En pratique, il n'est ni nécessaire, ni judicieux, de suivre cette construction théorique descendante. Par exemple, rien n'empêche que la schématisation associée aux problèmes d'accumulation soit introduite avant (en fin de CP ou au CE1) la distinction entre problèmes d'accumulation et de comparaison.*

Ces unités sont la principale originalité de notre proposition. Elles prolongent la théorie PDup (Fischer, 1992) et, au moins faiblement, la confirment. En effet, au cours de notre expérimentation au CE2, l'apprentissage des unités s'est avéré très rapide, conformément à notre description des apprentissages déclaratifs. D'ailleurs, la maîtresse avait pris spontanément l'initiative d'afficher les différentes unités dans la salle de classe : en reprenant ainsi une pratique classique pour la table de multiplication, qui est le prototype des connaissances déclaratives, elle avait ainsi perçu la nature déclarative de cet apprentissage. La rapidité de cet apprentissage est encore plus évidente lorsqu'on l'oppose à la lenteur de l'apprentissage de la procédure de résolution (des problèmes de comparaison): après plusieurs séances, et plus d'une dizaine de problèmes, un tiers des élèves ne maîtrisait toujours pas cette dernière (voir ci-avant). Peut-être que l'introduction de *facilitateurs procéduraux* [1] (King, 1991) pourrait améliorer cet apprentissage procédural.

Toujours en accord avec la théorie PDup, nous assignons les fonctions suivantes à nos unités perceptivo-cognitives.

1) Elles sont destinées à indexer les connaissances procédurales servant à représenter schématiquement, et puis à résoudre, les problèmes de la classe concernée. En conséquence, elles doivent permettre aux élèves de "résoudre potentiellement" certains problèmes. Par "résoudre potentiellement" nous entendons simplement déclarer qu'il s'agit, par exemple, d'un problème de comparaison, en sous-entendant qu'il suffirait de représenter les données sur un axe (vertical) pour trouver (si l'on fait bien attention) la solution. Cette résolution potentielle nous paraît amplement suffisante pour de nombreux problèmes n'ayant aucun intérêt pratique et ne nécessitant donc pas de réponse effective.
2) Elles doivent rendre les connaissances de l'élève moins dépendantes du contexte. Si la théorie PDup est exacte, ces unités sont en effet plus autonomes et moins sensibles au contexte que les procédures que l'élève peut mettre en oeuvre "spontanément". Et l'on sait que cette dépendance du contexte est une difficulté majeure dans les apprentissages initiaux (voir, par exemple, Brissiaud, 1988).
3) Elles doivent inciter l'élève à utiliser une représentation imagée. Ceci est un objectif extrêmement difficile à atteindre. Et pas seulement chez les enfants ou dans le domaine des problèmes arithmétiques verbaux. Par exemple, Kosslyn (1988, p.266-267) remarque que la

[1] *Un* facilitateur procédural *est un ensemble de questions, réunies sur une fiche, qui a pour fonction de guider temporairement l'élève dans l'acquisition.*

plupart des gens peuvent aisément apprendre à utiliser l'imagerie dans la mémorisation, et sont impressionnés par l'efficacité de la technique, mais néanmoins ne l'utilisent pas !

Les unités perceptivo-cognitives que nous proposons pour la résolution des problèmes arithmétiques verbaux s'accordent bien avec les élaborations récentes de chercheurs en Intelligence Artificielle. Ainsi, elles s'apparentent aux unités que Koedinger et Anderson (1990) ont introduites pour la planification de la résolution des problèmes de géométrie. Plus généralement, elles devraient permettre aux élèves de résoudre les problèmes à la manière des experts. Ces derniers ont tendance à raisonner vers l'avant plutôt que de partir du résultat à démontrer. Ceci, ajoutent Koedinger et Anderson, non pas parce qu'ils préfèrent ce mode de raisonnement, mais parce qu'ils en sont capables ! Et, remarque Sweller (1988), s'ils en sont capables, c'est grâce à l'utilisation de "schémas" pour classifier les problèmes en catégories qui conduisent à des implications sur les démarches appropriées à suivre. Précisons que lorsque Sweller parle de "schéma" il ne s'agit pas d'un graphique, mais d' «une structure qui permet aux personnes cherchant à résoudre les problèmes de reconnaître un énoncé de problème comme appartenant à une catégorie particulière d'énoncés de problèmes qui requiert normalement des démarches particulières» (p.259). Ce sont de tels "schémas" qui devraient permettre aux élèves de reconnaître la partie gauche de nos unités perceptivo-cognitives (qui traduit le type du problème). Si ces dernières sont solidement consolidées en mémoire déclarative, l'unité entière devrait donc être activée et déclencher, si nécessaire, la procédure de représentation et de résolution adéquate.

L'importance de ces "schémas" a aussi été soulignée par le spécialiste expérimenté de la résolution de problèmes qu'est R.E. Mayer (cf., Mayer, 1977). Mayer (1985), par exemple, écrit à propos des "schémas": « Apparemment les élèves possèdent des "schémas" pour les types de problèmes, et les utilisent pour représenter mentalement les problèmes. Lorsqu'ils n'ont pas de schéma pour un type donné de problèmes, la représentation a plus de chances d'être erronée» (p.133). Il continue en remarquant que la compréhension «nécessite une connaissance spécifique des types de problèmes. En particulier, la compréhension des problèmes verbaux et à histoire (*story problems*) est influencée par le fait d'avoir (et d'avoir accès à lui) un "schéma" de problème approprié.» (p.133), et complète ces propos en remarquant que les erreurs dans les problèmes de comparaison pourraient précisément se produire lorsque les gens n'ont pas le schéma approprié (p.138).

Reste à savoir, dans une telle construction théorique, comment les "schémas" peuvent eux-mêmes se constituer. C'est par l'étude d'exemples analogues que les enfants pourraient arriver à les construire. En effet, il semble que l'induction de "schémas" soit une conséquence importante du transfert analogique (Gholson, Morgan, Dattel & Pierce, 1990 ; Novick & Holyoak, 1991). «En somme, concluent Novick et Holyoak (p.411), il apparaît qu'une conséquence majeure du transfert analogique est l'induction d'une connaissance plus abstraite au sujet d'une classe de problèmes, connaissance qui en retour facilite des transferts subséquents plus flexibles.»

Plus généralement, nous proposons les 4 étapes de résolution d'un problème (arithmétique verbal élémentaire) suivantes :

1) **Reconnaître** la question et la structure du problème : comparaison, accumulation chronologique ou accumulation non chronologique. Cette reconnaissance se fait grâce à la compréhension et à l'analyse de l'énoncé.
2) Une fois la structure du problème reconnue, l'unité perceptivo-cognitive indique le mode de représentation : axe vertical, axe horizontal, ou rectangle. Toutes les données pertinentes du problème sont **intégrées** dans ce schéma.
3) On quitte ensuite l'énoncé verbal initial et on **exécute** - en inversant ou composant préalablement, si nécessaire, certaines fonctions - les opérations induites par la représentation schématique.
4) On revient à l'énoncé verbal pour **répondre** à la question posée. Cette dernière étape n'a été que peu étudiée dans notre travail. Néanmoins, le fait qu'un élève, qui avait trouvé la réponse sur sa représentation schématique mais n'a pas su indiquer correctement les opérations à taper sur la calculette (voir la note 7), suggère bien qu'elle existe.

Pour inciter les élèves à respecter ces différentes étapes, nous avons utilisé, dans notre expérimentation au CE2, une présentation stéréotypée analogue à celle du tableau 2.

Tableau 2. Présentation d'un problème arithmétique verbal

Ce que je cherche	Comment je trouve	Ce que je réponds

Un tel tableau, même s'il n'est pas dans l' "esprit" des Instructions Officielles (I.O., 1980) qui recommandent d'éviter «de stéréotyper la mise en forme de la démarche ou des résultats.» (p.43), correspond à la pratique effective de beaucoup de maîtres expérimentés. En outre, il semble un bon compromis entre l'adaptation à la situation et à l'interlocuteur, sur laquelle insistent les I.O., et une pratique encore très classique de la séparation en deux colonnes : SOLUTION - OPERATIONS. Le tableau 2 est en effet plus souple que cette dernière : il permet notamment de faire un schéma dans la colonne centrale et de ne pas poser systématiquement les opérations.

Les recherches présentées dans la première partie ou, plus directement, notre propre expérimentation présentée dans la troisième partie, étayent, d'un point de vue empirique, nos hypothèses théoriques. Bien entendu, d'importantes questions restent en suspens. Par exemple, l'observation parallèle d'une autre classe de CE2, a suggéré que certains élèves n'avaient pas besoin d'un outil spécifique pour résoudre les problèmes de comparaison, même complexes. Il faudra donc trouver un moyen de déterminer les élèves pour lesquels un tel apprentissage paraît le plus approprié à un moment donné.

Nous terminerons en évoquant une question plus générale que soulèvent nos propositions d'enseignement et qui éclaire en partie le sous-titre de notre article : elle concerne le bien-fondé d'un enseignement pro-actif, i.e. d'un enseignement qui essaie de prévenir les difficultés plutôt que d'essayer d'y remédier. On a en effet lourdement insisté, au cours de ces deux dernières décennies, sur le rôle "bienfaiteur" des erreurs (pour une discussion critique, voir Fischer, 1988) et sur le fait qu'une connaissance ou un outil nouveau ne devait être introduit qu'en réponse à un problème. Autrement dit sur l'intérêt d'un enseignement rétro-actif. De telles idées ne sont pas à rejeter totalement. Mais elles n'ont pas besoin non plus d'être systématiques. D'autant que l'échec peut aussi décourager certains élèves (cf. Ehrlich & Florin, 1989), voire, chez des enfants qui sont déjà en «grande difficulté», conduire à des «destructions» (Meljac, 1991, p.431); et, nous avons eu l'occasion de le souligner précédemment, certains élèves sont véritablement "libérés" lorsqu'ils savent comment aborder un problème[1]. En outre, des recherches récentes et précises, aussi bien sur les adultes (VanLehn, 1991), que sur les enfants (Siegler & Jenkins, 1989), suggèrent que les impasses ne sont ni une condition nécessaire, ni une condition suffi-

[1] *Beaucoup de maîtres réservent une plage du samedi matin à la résolution de problèmes: vu la signification du mot "problème" dans la langue vernaculaire, nous sommes amené à nous interroger sur les liens affectifs que peut créer un enfant, à qui il arrive régulièrement des problèmes juste avant le week-end, avec ces derniers !*

sante pour la découverte de nouvelles stratégies chez les sujets[1]. Ou aussi, plus directement, ces recherches confirment l'intérêt de l'instruction explicite (Woodward, 1991), du questionnement guidé (King, 1991) et de l'enseignement pro-actif (Delclos & Harrington, 1991).

RÉFÉRENCES

Adetula L.O., 1990. Language factor : Does it affect children's performance on word problems? *Educational Studies in Mathematics,* **21**, 351-365.

Bergeron J.C. & Herscovics N., 1990. Psychological aspects of learning early arithmetic. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics and cognition : A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.31-52). Cambridge : University Press.

Brissiaud R., 1988. De l'âge du capitaine à l'âge du berger : Quel contrôle de la validité d'un énoncé de problème au CE2 ? *Revue Française de Pédagogie,* **82**, 23-31.

Brixhe D., 1990. L'énoncé de problème : un genre littéraire particulier. *Repères & Expériences,* **3**, 14-18.

Brousseau G., 1988. Représentations et didactique du sens de la division. In G. Vergnaud, G. Brousseau & M. Hulin (Eds), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (Actes du Colloque de Sèvres, Mai 1987, pp.47-64). Aubenas : La Pensée Sauvage.

Damm R., en préparation. Le rôle de la représentation dans la résolution des problèmes additifs à deux opérations.

Delclos V.R. & Harrington C., 1991. Effects of strategy monitoring and proactive instruction on children's problem-solving performance. *Journal of Educational Psychology,* **83**, 35-42.

Duval R., 1991. Interaction des niveaux de représentation dans la compréhension des textes. In R. Duval (Ed), *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives :* vol.**4** (pp. 63-196). Strasbourg : IREM.

Ehrlich S., 1990. *Sémantique et mathématique : Apprendre/Enseigner l'arithmétique simple.* Paris : Nathan.

Ehrlich S. & Florin A., 1989. Ne pas décourager l'élève : Etude sur l'échec de fonctionnement des enfants en classe. *Revue Française de Pédagogie,* **86**, 35-48.

Esfahani E., 1989. L'aspect sémantique des problèmes additifs. Thèse : Université Paris VII.

[1] *En revanche, il est intéressant de noter qu'elles semblent une condition nécessaire pour la généralisation subséquente de la stratégie nouvellement découverte.*

Fayol M., 1991. Du nombre à son utilisation : la résolution de problèmes additifs. In J. Bideaud, C. Meljac & J.P. Fischer (Eds), *Les chemins du nombre* (pp.259-270). Lille : Presses Universitaires.

Fischer J.P., 1979. La perception des problèmes soustractifs aux débuts de l'apprentissage de la soustraction. Université de Nancy I (Thèse de IIIe cycle en Didactique des Mathématiques, sous la direction de F. Pluvinage).

Fischer J.P., 1981. Développement et fonctions du comptage chez l'enfant de 3 à 6 ans. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **2**, 277-302.

Fischer J.P., 1986. *Eléments de psychologie pour l'apprentissage des mathématiques.* Strasbourg : IREM.

Fischer J.P., 1988. Le rôle positif des erreurs n'est-il pas surfait ? In R. Duval (Ed), *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives :* vol.**1**. Strasbourg : IREM.

Fischer J.P., 1992. *Apprentissages numériques : la distinction procédural/déclaratif.* Nancy : Presses Universitaires.

Gholson B., Morgan D., Dattel A.R. & Pierce K.A., 1990. The development of analogical problem solving : Strategic processes in schema acquisition and transfer. In D.F. Bjorklund (Ed), *Children's strategies : Contemporary views of cognitive development* (pp.269-308). Hillsdale : Erlbaum.

I.O., 1978. Contenus de formation à l'école élémentaire : cycle élémentaire. Paris : MEN.

I.O., 1980. Contenus de formation à l'école élémentaire : cycle moyen. Paris : MEN (réimpression 1981).

Judd T.P. & Bilsky L.H., 1989. Comprehension and memory in the solution of verbal arithmetic problems by mentally retarded and nonretarded individuals. *Journal of Educational Psychology,* **81**, 541-546.

King A., 1991. Effects of training in strategic questioning on children's problem-solving performance. *Journal of Educational Psychology,* **83**, 307-317.

Koedinger K.R. & Anderson J.R., 1990. Abstract planning and perceptual chunks : Elements of expertise in geometry. *Cognitive Science,* **14**, 511-550.

Kosslyn S.M., 1988. Imagery in learning. In M.S. Gazzaniga (Ed), *Perspectives in memory research* (pp.245-273). Cambridge : MIT Press.

Larkin J.H. & Simon H.A., 1987. Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science,* **11**, 65-100.

Lewis A.B., 1989. Training students to represent arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology,* **81**, 521-531.

Mayer R.E., 1977. *Denken und Problemlösen.* Berlin : Springer, 1979 (original anglais de

1977).

Mayer R.E., 1985. Mathematical ability. In R.J. Sternberg (Ed), *Human abilities : an information-processing approach* (pp.127-150). New York : Freeman.

Meljac C., 1991. De quelques variantes imprévues apportées au scénario de la construction du nombre. In J. Bideaud, C. Meljac & J.P. Fischer (Eds), *Les chemins du nombre* (pp.401-432). Lille : Presses Universitaires.

Nesher P. & Katriel T., 1978. Two cognitive modes in arithmetic word problem solving. In *Proceedings of the second International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Osnabrück : Université.

Ng Li F.L., 1990. The effect of superfluous information on children's solution of story arithmetic problems. *Educational Studies in Mathematics,* **21**, 509-520.

Novick L.R. & Holyoak K.J., 1991. Mathematical problem solving by analogy. *Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory, and Cognition,* **17**, 398-415.

Sander E., 1986. *Lernhierarchien und kognitive Lernförderung.* Göttingen : Verlag für Psychologie.

Siegler R.S. & Jenkins E.A., 1989. *How children discover new strategies.* Hillsdale : Erlbaum.

Silver E.A., 1986. Using conceptual and procedural knowledge : A focus on relationships. In J. Hiebert (Ed), *Conceptual and procedural knowledge : The case of mathematics* (pp.181-198). Hillsdale : Erlbaum.

Sweller J., 1988. Cognitive load during problem solving : Effects on learning. *Cognitive Science,* **12**, 257-285.

VanLehn K., 1991. Rule acquisition events in the discovery of problem-solving strategies. *Cognitive Science,* **15**, 1-47.

Vergnaud G., 1990. La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **10**, 133-170.

Vergnaud G., 1991. L'appropriation du concept de nombre : un processus de longue haleine. In J. Bideaud, C. Meljac & J.P. Fischer (Eds), *Les chemins du nombre* (pp.271-282). Lille : Presses Universitaires.

Vergnaud G. & Durand C., 1976. Structures additives et complexité psychogénétique. *Revue Française de Pédagogie,* **36**, 28-43.

Williams L.V., 1983. *Deux cerveaux pour apprendre : le droit et le gauche.* Paris : Editions d'Organisation, 1986 (original anglais de1983).

Willis G.B. & Fuson K.C., 1988. Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology,* **80**, 192-201.

Wilson C.L. & Sindelar P.T., 1991. Direct instruction in math word problems : Students with learning disabilities. *Exceptional Children,* **57**, 512-519.

Woodward J., 1991. Procedural knowledge in mathematics : The role of the curriculum. *Journal of Learning Disabilities,* **24**, 242-251.

Annexe 1:

Les 10 problèmes du pré-test

N°1 (Acc$^+$; .92)[1]: Sophie avait rangé 158 timbres le jeudi. Elle en a rangé 93 le vendredi. Combien de timbres a-t-elle rangés en tout ?
Pour trouver la réponse, je taperais .... sur une calculette.[2]

N°2 (Acc^x; .83): Il y a 12 marguerites dans un bouquet. La fleuriste a 27 bouquets. Combien la fleuriste a-t-elle de marguerites en tout ?

N°3 (Com$^-$; .96): Au cirque il y a 216 places. Au cinéma il y a 58 places de moins qu'au cirque. Combien y a-t-il de places au cinéma ?

N°4 (Com^x; .75): Il y a 29 chaises dans la classe. Il y en a 13 fois plus dans la cantine. Combien y a-t-il de chaises dans la cantine ?

N°5 (**Com**$^-$; .88): Vincent a 324 timbres. Loïc en a 278. Combien Vincent en a-t-il de plus que Loïc ?

N°6 (**Com**$^+$; .63): Nicolas a 37 ans. Il a 24 ans de moins que Maryse. Quel est l'âge de Maryse ?

N°7 (**Acc**$^+$; .50): Pierre a 116 billes. Il vient d'en perdre 18. Combien de billes avait-il avant ?

N°8 (**Com**$^-$; .79): Virginie a 112 billes. Elle en a 27 de plus que Sandrine. Combien Sandrine a-t-elle de billes ?

N°9 (**Acc**$^-$; .71): Dans l'autobus, il y a 37 personnes maintenant. Avant l'arrêt, il y en avait 19. Combien de personnes viennent de monter ?

N°10 (comparaison complexe; .00): Une veste coûte 152 F de plus qu'un pantalon. Ce pantalon coûte 84 F de plus qu'un pullover. Si la veste coûte 580 F, combien coûte le pullover ?[3]

1 Pour chaque problème nous précisons, entre parenthèses, le type (voir texte pour les notations) et le taux de réussite (sur 24 élèves).
2 Cette phrase réponse ayant été proposée pour tous les problèmes, nous ne la répétons pas par la suite.
3 Pour les problèmes complexes, on précisait que la calculette dispose des parenthèses.

Annexe 2:

Les 10 problèmes du post-test

N°1 (Acc^{x}; .92)[1]: Sur une piste d'athlétisme, on a 13 haies par couloir. Il y a 8 couloirs. Combien y a-t-il de haies en tout ?
Pour trouver la réponse, je taperais .... sur une calculette.[2]

N°2 (**Com^{-}**; 1.00): Thibaut a 485 pin's. Maxime en a 227. Combien Thibaut en a-t-il de plus que Maxime ?

N°3 (Com^{x}; .83): Il y a 37 livres dans la classe. Il y en a 18 fois plus dans la B.C.D de l'école. Combien y a-t-il de livres dans la B.C.D ?

N°4 (**Com^{+}**; .79): Au flipper, Nicolas a réussi 43 points. Il a réussi 17 points de moins que Jacques. Combien de points a réussi Jacques ?

N°5 (**Acc^{+}**; .63): Joséphine a 97 autocollants. Elle vient d'en perdre 23. Combien d'autocollants avait-elle avant ?

N°6 (**Com^{-}**; .96): Madame Stallone a 42 arbustes autour de sa maison. Elle en a 17 de plus que sa voisine madame Spock. Combien madame Spock a-t-elle d'arbustes autour de sa maison ?

N°7 (**Acc^{-}**; .83): Dans un camion de livraison, il y a 238 sacs de pommes de terre maintenant. Avant le chargement, il y en avait 92. Combien de sacs le chauffeur vient-il de charger ?

N°8 (comparaison complexe; .38): Un pictionnary coûte 39 F de plus qu'un trivial pursuit. Le trivial pursuit coûte 120 F de plus qu'un monopoly. Si le pictionnary coûte 345 F, combien coûte le monopoly ?[3]

N°9 (Acc$^{:}$; .63): Un éleveur possède 96 chiens. Il achète 384 os pour leur partager en parts égales. Combien d'os aura chaque chien ?

N°10 (comparaison complexe; .29): Le village de Valmieu compte 1469 habitants. Il en a 149 de moins que le village de Saint-Jean, situé à 23 km de Valmieu. Rougnac, un village voisin, compte 394 habitants de moins que Saint-Jean. A 3 km, Saint-Pierre a 135 habitants de plus que Saint-Jean. Quel est le nombre d'habitants de Rougnac ?[3]

Remarque: Les problèmes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 du post-test sont appariés respectivement aux problèmes 2, 5, 4, 6, 7, 8, 9 et 10 du pré-test.

Notes 1, 2 et 3: voir Annexe 1.