Le rôle de l'écrit dans les travaux numériques au début du collège.

Jean- Claude Rauscher (IREM de Strasbourg)[1]

Résumé

La question posée à l'origine de cette recherche porte sur les apprentissages numériques en classe de 6ème : dans quelle mesure la diversité et la complexité des écrits et des modes de représentation des nombres et les différentes tâches qui résultent peuvent-elles favoriser ces apprentissages et les enrichir ? Nous avons ainsi été amenés à analyser les conditions dans lesquelles les différentes écritures et représentations peuvent constituer des ressorts d'apprentissages. En accompagnement des activités mathématiques proposées, on a également sollicité des productions écrites des élèves supposant des retours réflexifs sur les connaissances mises en jeu. L'évolution des productions obtenues atteste d'un développement de la capacité à expliciter les apprentissages en cours ; elle permet aussi aux professeurs d'observer la progressions des conceptions dans le domaine considéré et de réguler leur enseignement.

Dans le cadre d'une recherche menée en collaboration entre l'INRP et l'ADIREM à propos de "L'écrit en mathématiques au collège", la réflexion confiée à l'IREM de Strasbourg concernait plus spécialement **le rôle de l'écrit dans les travaux numériques au début du collège.** Tout particulièrement, nous avons envisagé les apprentissages relatifs aux nombres décimaux en début de collège. Le texte qui suit a pour but de donner une idée de l'ensemble du travail mené et de développer plus précisément quelques aspects qui nous ont paru cruciaux. Pour commencer nous préciserons les trois perspectives à l'origine de notre travail. Nous donnerons ensuite un aperçu des travaux réalisés et des procédures utilisées pour développer ces trois volets. Ensuite nous développerons quelques indications concernant les résultats observés.

Le questionnement à l'origine de la recherche.

Le premier volet : prise en compte des différents écritures et modes de représentation des nombres dans les apprentissages numériques.

En début de collège, les acquisitions dans le domaine des nombres restent en grande partie à faire : si les résultats des évaluations en début de 6ème montrent une bonne maîtrise des nombres entiers, ils montrent en revanche que le travail amorcé à l'école primaire à propos des décimaux ou des fractions n'est de loin pas achevé. L'année précédent le démarrage de la

---

[1] Travail mené dans le cadre d'une recherche nationale menée, en collaboration avec l'INRP et l'ADIREM à propos de "L'écrit en mathématiques au collège", à l'IREM de Strasbourg avec BARBIER Jean-Luc (Collège Hans Arp, Strasbourg), BLONDEL Edith (Collège Fustel, Strasbourg), BOURDENET Gilles (Collège de Pfulgriesheim), HEYBERGER Gilles (Collège de La Broque), KISTER Jean-Paul (Collège Hochfelden), RAUSCHER Jean-Claude (Coordonnateur du groupe, Collège Martin Schongauer d'Ostwald et nommé depuis lors Maître de Conférences à l'IUFM d'Alsace), TOUCHEBOEUF Agnès (Collège de Vendenheim), ZILLIOX André (Collège Hochfelden). F. PLUVINAGE (ULP Strasbourg) a pu nous donner quelques précieuses appréciations.

© *Annales de didactique et sciences cognitives*, volume 7 (2001) (p. 49 – 76), IREM Strasbourg

recherche, nous avions déjà amorcé un travail à ce sujet. Une analyse des productions de nos élèves dans le domaine des travaux numériques nous avait déjà confirmé que les différents modes d'écriture (utilisation de la virgule, fractions, etc.) et de représentation des nombres (graduations, fractions d'aires, etc.) constituaient une source importante de difficultés. La recherche sur la place de l'écrit nous a alors permis de préciser deux questions auxquelles notre recherche se proposait de donner des éléments de réponse dans le cadre de l'enseignement au collège :

1) La diversité et la complexité des écrits et des modes de représentation des nombres auxquels sont confrontés les élèves peuvent être considérés comme des sources de difficulté pour la compréhension. Mais nous nous demandions au contraire, dans quelle mesure cette diversité et cette complexité et les différents tâches qui résultent de leurs confrontations pouvaient favoriser et enrichir les processus de conceptualisation des nombres. La réflexion sur le repérage et la mise en oeuvre des tâches possibles par rapport aux différents écrits et l'évaluation des effets de cette mise en oeuvre méritaient à nos yeux d'être approfondies.

2) On peut se demander si les travaux que les élèves ont à effectuer en mathématique à propos d'objets proprement mathématiques, nécessitent et permettent le franchissement d'étapes importantes quant à la maîtrise de différents niveaux ou fonctions de l'écrit : par exemple, prise en compte d'une information isolée en opposition à une prise en compte globale d'informations lorsqu'on a à effectuer un calcul. Les travaux mathématiques seraient alors à la base du développement de compétences relatives à la maîtrise de l'écrit qui débordent du champ de la discipline proprement dite. Il s'agirait ici de repérer la diversité et la complexité des tâches que nécessitent l'appropriation par les élèves des objets mathématiques envisagés et si possible d'en apprécier la valeur dans le processus éducatif.

En anticipant déjà sur la suite de notre article, nous pouvons déjà annoncer que l'essentiel de notre travail a porté sur la première question.

Le deuxième volet : la production d'écrits par les élèves en appui aux apprentissages.

Après un an de travail, un deuxième volet de travail est venu s'ajouter au précédent à partir de la nécessité d'évaluer les effets du travail d'enseignement mis en place à la suite du premier volet et aussi à partir de la stimulation engendrée par la confrontation avec d'autres groupes menant cette recherche INRP/ADIREM lors des réunions annuelles à Paris qui nous a incité à développer cet aspect de la prise en compte de l'écrit dans les apprentissages.

La première façon d'évaluer les effets d'une telle action est classique: il s'agissait en certaines occasions d'évaluation de reprendre certaines questions posées en début d'année. En voici un exemple relatif à l'année de recherche 94/95 :

		Septembre	Avril
I 1	2,3 x 10	75,8%	89,2%
I 2	35,2 x 100	59,8%	74,2%

La deuxième façon que nous avons eu d'évaluer les effets de notre enseignement est moins classique et c'est elle qui nous a ouvert de nouvelles perspectives relatives à la recherche sur l'écrit : elle sollicite en effet chez les élèves la production d'écrits inhabituels mais en relation avec les contenus enseignés. Il s'agissait de vérifier s'il y avait traces conscientes et restituables chez les élèves des procédures de médiation rencontrées aux cours de l'année. Par exemple toujours en 94/95 sur le thème précis de la multiplication d'un entier par un décimal, nous avons demandé aux élèves de répondre aux questions suivantes :

7x0,5

1- Comment lis-tu cela ?
2- Quelle réponse proposes-tu ?
3- Peux-tu donner toutes les façons que tu connais pour illustrer ou effectuer ce calcul ?
4- Peux-tu donner l'énoncé d'un problème conduisant à cette opération ?

Et dans une évaluation finale nous avons proposé aux élèves de répondre au questionnaire suivant pour voir dans quelle mesure après cette année scolaire ils étaient capables de formuler les connaissances ou les activités rencontrées.

1) Qu'est-ce que tu as vu de neuf cette année en mathématiques ?
2) Dans tout ce que qu'on a fait qu'est-ce que tu as préféré ?
3) Qu'est-ce que tu as le moins aimé ?
4) Y-a-t-il des choses qui te semblaient difficiles et que tu as maintenant comprises ?
5) Y-a-t-il des choses que tu n'as pas comprises ?
6) Cette année, as-tu appris quelques choses de neuf sur :
   a) Les nombres
   b) L'addition et la soustraction
   c) La multiplication
   d) La division

Relativement à ce dernier questionnaire, l'analyse des productions des élèves nous montrait alors que majoritairement et tout particulièrement les élèves faibles ne formulent pas ou peu les connaissances rencontrées : "rien" ou juste une rubrique "les fractions". Mais l'on perçoit souvent l'importance d'événements personnels au cours de l'année : "le jour où j'ai compris la division par 0,1.." ou "que multiplier par un nombre c'était pas forcément plus grand".

Ces résultats, apparemment un peu maigres nous ont rendu attentifs aux possibilités offertes par ces écrits un peu inhabituels. Plutôt que de demander de telles productions écrites en fin d'année et de façon exceptionnelle, ne serait-il pas utile pour l'intégration des connaissances et le développement de capacités langagières de solliciter plus régulièrement les élèves ainsi ? Ces écrits ne pouvaient-ils pas avoir un rôle dans les processus d'apprentissage des élèves. Nous nous référions là aux travaux de MJ. Perrin ("Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les classes faibles", p 5 à 119, RDM, 1993) qui montrent que les élèves qui réussissent sont ceux qui réinvestissent les expériences acquises dans les activités dans la suite. Il est alors important de donner l'occasion aux élèves de se construire des représentations mentales par un retour réflexif sur l'action. En l'occurrence, c'est au moyen de productions écrites, individuelles, que nous avons voulu favoriser dans la suite de la recherche ce retour réflexif.

Un deuxième volet de type exploratoire s'est donc ouvert dans cette recherche : il s'agissait d'élaborer et de mettre à l'épreuve différentes procédures permettant aux élèves grâce à des productions écrites de réaliser des retours réflexifs sur leurs connaissances. L'hypothèse était que que ces écrits pourraient servir d'appui efficaces pour les apprentissages considérés.

Le troisième volet de notre recherche : observation des incidences sur les pratiques des enseignants de la création d'un groupe de recherche sur l'écrit en 6ème.

Notre équipe était constitué de huit professeurs de mathématiques de 6ème. Cette équipe était au départ hétérogène tant du point de vue des environnements dans lesquels ses membres exerçaient que du point de vue des ses rapports à la didactique et à ses recherches.

En effet, d'une part les établissements et les classes dans lesquels nous travaillions correspondaient à des environnements sociaux variés. Ainsi certains professeurs exercent dans des établissements de zones résidentielles où les élèves ont aux évaluations nationales en début sixième des résultats bien au dessus de la moyenne nationale. D'autres exercent dans des collèges type ZEP où les résultats de début d'année sont plus inquiétants. D'autres encore exercent dans des établissement où le public est très hétérogène et les résultats proches de ceux de l'échantillon national. Cette hétérogénéité là, loin d'être un obstacle pour entamer notre recherche était un atout car représentative de différentes conditions d'enseignement.

D'autre part, il y avait des différences entre les professeurs de l'équipe quant à leur rapport initial à la recherche. Si certains, dont moi-même, avaient participé à des équipes de travail à l'IREM, pour la plupart des enseignants c'était là la première expérience dans ce domaine. De façon générale, la majorité des participants connaissait très peu les recherches menées en didactique des mathématiques. Certains des professeurs faisaient d'ailleurs partie de l'échantillons de professeurs observés à l'occasion de mon travail de thèse (JC Rauscher, 1993, “L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes. Le cas de l'enseignement de la géométrie au début du collège.”). A cette occasion, j'avais mis en évidence sur des contenus d'enseignement en géométrie d'importants écarts relatifs à l'analyse des tâches en jeu. En l'occurrence l'observation montrait des manières très différentes de prendre en compte la variétés des registres et des niveaux de complexité dans les traitements à effectuer par les élèves. Je montrais aussi que la progression des élèves de ces professeurs dépendait en grande partie de cette connaissance que les professeurs ont des différentes tâches en jeu dans les contenus abordés. Après avoir soutenu ma thèse, j'ai proposé aux professeurs de mon échantillon de participer à l'IREM de Strasbourg à ce groupe recherche sur les apprentissages numériques en début de collège et plusieurs ont accepté. Cette hétérogénéité de départ se retrouvait aussi dans les idées et les références inspirant les pratiques. Dans les premières discussions de travail que nous avions eu dans le groupe, certains mettaient avant l'importance de la mémoire et de l'apprentissage des algorithmes et exprimaient leur scepticisme quant aux options de ceux qui préconisaient des “activités” jugées trop complexes pour démarrer des apprentissages. Cette hétérogénéité de départ du groupe de travail pouvait apparaître a priori comme un handicap dans une recherche. Pourtant il s'agissait là de ma part et de la part des professeurs qui connaissaient le contenu de ma thèse un moyen de mettre à l'épreuve une hypothèse : à la suite de mon travail de thèse, j'avais émis l'idée que pour développer les connaissances des tâches en jeu sur les contenus d'enseignement et transformer en conséquence les pratiques d'enseignement, le lieu idéal pour les enseignants était un groupe recherche. Les participant du groupe se retrouvaient d'ailleurs unis par leur soucis d'améliorer l'efficacité de leur travail par une recherche pragmatique et ouverte à tous apports et évolutions. L'observation de ces évolutions faisaient donc partie de notre plan de travail et constituait un volet explicite de notre recherche. A priori on pourrait penser qu'il s'agit là d'un volet de la recherche étranger à son sujet : l'écrit au collège. En fait, il est apparu qu'il était intéressant de savoir en quoi la création d'un groupe de recherche précisément sur l'écrit en début de collège aurait des incidences sur les pratiques des enseignants y participant. C'est là le troisième volet de notre recherche. Dans ce compte rendu nous développerons relativement peu ce volet, nous contentant de donner quelques indications et nous consacrant davantage aux deux premiers volets au centre de notre travail.

Nous allons maintenant donner un aperçu des travaux réalisés et des procédures utilisées pour développer ces différents aspect de notre recherche.

Aperçu des travaux réalisés.

1er volet : prise en compte des différents écritures et modes de représentation des nombres dans les apprentissages numériques.

Analyse des difficultés dans les apprentissages numériques en début de 6ème.

Pour élaborer et mettre à l'épreuve dans nos classes des activités pour développer les apprentissages numériques à faire en début de collège à propos des nombres et tout particulièrement des décimaux (écriture, lecture, calculs), nous avons d'abord analysé les productions des élèves dans le cadre des évaluations nationales de début sixième. Cette analyse montre qu'en l'occurrence l'écriture et la manipulation des nombres décimaux nécessite la maîtrise d'un système d'écriture différent de celui des entiers, même si les éléments de base sont les mêmes (chiffres) et que dans un cas comme dans l'autre la disposition de deux chiffres consécutifs se rapporte à deux nombres dans un rapport 10.

Voici quelques observations étayant cette analyse. Si 80% réussissent à effectuer "168,75 + 42,50" sous forme posées, il n'y a plus qu'un élève sur trois pour réussir "7,24 -4,3" posé en ligne. Les réponses montrent alors que de nombreux élèves considèrent les décimaux comme des entiers ou une juxtaposition de deux entiers et leurs appliquent indépendamment les algorithmes qu'ils connaissent sur les entiers : "7,24 -4,3= 3,21". On retrouve ce phénomène lorsque les élèves répondent par exemple que dans le nombre 32,578 le chiffre 7 est celui des dixièmes. A travers leurs réponses, il apparaît que ces élèves appliquent les algorithmes qu'ils connaissent sur les entiers parce qu'ils traitent la partie décimale comme la partie entière en l'organisant de la droite vers la gauche. Ils semblent ignorer les valeurs de position dans la partie décimale des nombres décimaux. La virgule est considérée comme un séparateur fort alors que le traitement adéquat de tels calculs demande justement de considérer l'ensemble du nombre : il y a la même relation entre le chiffre à gauche et à droite de la virgule que celle qui existe entre deux chiffres consécutifs dans la partie entière ou dans la partie décimale. La virgule comme séparateur fort se retrouve confirmé lorsqu'on constate que dans cette évaluation deux élèves sur trois traduisent "quarante-huit francs cinq centimes" par 48,5 F. Ce phénomène se retrouve lorsqu'on considère les multiplications. Il y a seulement un élève sur deux pour réussir les calculs "1,54 x 1000" et "7,14 x 100". Le traitement ne s'effectue alors que sur l'une des deux parties : "1,54 x 1000= 1,54000 ou 1000,54". Les traitements sont calqués sur ceux qu'on trouve sur les entiers et il n'est pas tenu compte de la modification à apporter à ces traitements lorsqu'on a à effectuer des calculs sur les décimaux.

Cette prise en compte apparaît évidemment plus difficile encore pour les élèves pour qui le système sémiotique décimal n'est pas encore tout à fait maîtrisé sur les entiers : les "zéros" intercalés dans les nombres entiers entre le premier et le dernier chiffre font quelques ravages lorsqu'il s'agit d'écrire ces nombres en toutes lettres ou inversement.

Le passage des entiers aux décimaux constitue donc un obstacle qui est loin d'être levé en début de collège. Il faut donc que les élèves arrivent à réorganiser un système acquis, celui de l'écriture et des traitements des entiers, pour y intégrer les décimaux : voilà la tâche des enseignants en début de collège. Mais comment aider les élèves dans cette réorganisation ? Tel était le problème qui nous est apparu suite à notre analyse, problème dont nous avons pris conscience et qui, à notre avis, est assez méconnu dans les pratiques courantes. Nous rejoignons en cela l'avis d'Alphonse Munyazikwiye (A. Munyazikwiye, 1995, Problèmes didactiques liés aux écriture des nombres, RDM , Vol 15 n°2, pp31-62, 1995) qui met en évidence de façon plus large (il s'intéresse à l'ensembles des apprentissages numériques) quelques points aveugles mais cruciaux dans l'enseignement des nombres.

Il s'agit donc maintenant d'exposer les principes qui nous ont guidés pour l'élaboration de notre enseignement suite à cette analyse.

Elaboration et mise à l'épreuve d'activités et d'exercices. Utilisation de différents modes de représentation et d'écriture.

Notre analyse met en évidence le fait que l'écriture et la manipulation des nombres décimaux requièrent la maîtrise d'un système d'écriture différent de celui des entiers. Mais on ne pouvait concentrer uniquement nos efforts sur l'acquisition des "règles" qui régissent les traitements en question. Même si ce point a été au départ l'objet de quelques discussions dans notre groupe (voir volet 3 de notre recherche), il a été admis que cela renforcerait les défauts naturels des élèves (et de certains enseignants) de recourir à des traitements algorithmiques indépendamment de tout sens mathématique. Bon nombre d'erreurs chez les élèves à l'entrée en collège viennent en effet du fait que les élèves pour répondre aux questions ont recourt à un schéma de type algorithmique (expression proposée———>traitement algorithmique) qui ne permet aucun contrôle et révèle une conceptualisation défaillante de la notion de nombre.

Notre problème d'enseignants était donc en 6ème de redonner vie au développement de la conceptualisation des nombres chez nos élèves à partir de ce qu'ils ont déjà fait à l'école primaire.

Pour cela nous avons adopté un canevas commun pour élaborer nos propositions d'enseignement. Ce canevas propose de se donner les outils suivants pour élaborer et proposer des situations d'apprentissage qui permettent ou obligent les élèves à briser la relation (expression proposée ———> traitement algorithmique) par une médiation réalisée :

- soit par une situation qui donne sens aux calculs. Donnons un exemple : pour effectuer 0,75 + 0,3, il s'agit pour les élèves de reconnaître que 7 et 3 sont de même rang et non pas 5 et 3, de voir 0,75 globalement confronté à 0,3 et non pas 75 à 3. Pour cela il est possible de demander aux élèves d'illustrer cette opération sur 3 carrés 10x10 où le carré représente 1.
- soit par un changement de registre d'écriture. Par exemple en demandant de ranger les nombres 0,7 - 0,51 - 3/4 - 33/100

Les deux types propositions peuvent évidemment se combiner.

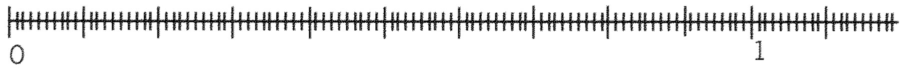
Pour cette élaboration, nous sommes particulièrement attentifs à la diversité et la complexité des systèmes d'écriture (entiers, décimaux, fractions), des cadres (numérique, grandeurs) et des représentations (dimension 1 dans les graduations, dimension 2 avec les fractions d'aire) auxquels sont confrontés les élèves dans le domaine numérique. Cette diversité et cette complexité sont souvent considérées comme des sources de difficulté pour la compréhension. Mais en l'occurrence nous pensons qu'au contraire qu'elle permet aux élèves de dépasser une procédure purement algorithmique ou du moins de l'étayer et de la contrôler par des outils qui permettent de donner du sens aux traitements à effectuer. Nous adhérons en cela à la perspective exprimé par Alphonse Munyazikwiye (A. Munyazikwiye, 1995, Problèmes didactiques liés aux écriture des nombres, RDM , Vol 15 n°2, pp31-62, 1995), p59 : "La *connaissance* des nombres apparaît comme la *Somme* ou la résultante des savoirs atomiques sur les écritures et les techniques opératoires (traitement/et ou conversion), les représentations géométriques ainsi que leurs liens".

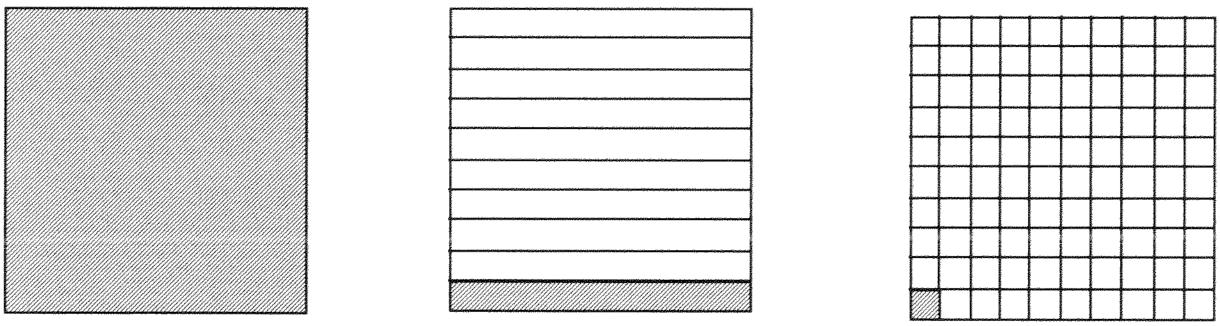
Nous avons donc élaboré et mené en classe de 6ème des activités au sujet des apprentissages dans le domaine numérique et plus précisément des calculs au programme avec les décimaux. Ces activités avaient pour but de faire dépasser aux élèves le simple traitement algorithmique des calculs et de redonner vie au développement de la conceptualisation des nombres décimaux. Pour les activités expérimentées qu'elles évoquent, les recherches effectuées par G. Brousseau, R. Douady et MJ. Perrin dans ce domaine nous ont inspirés.

Ainsi, par exemple, avant de revoir les nombres décimaux, nous avons d'abord introduit les fractions à partir de mesures de longueur (R. Douady et M.J. Perrin, "Liaison école-collège : Nombres décimaux", IREM de Paris VII, 1986). Chaque élève dessine sur sa feuille un segment au stylo à bille. En se servant d'une bande unité les élèves doivent produire un message qui doit permettre à un récepteur de dessiner un segment ayant la même longueur. Dans cette activité, les écrits interviennent comme moyen de formulation et de validation de nouveaux outils, les fractions. La notion de fraction d'une longueur unité est ensuite systématisée par l'usage du partageur (une vingtaine de droites équidistantes et une feuille de papier calque). Les fractions décimales apparaissent alors comme un cas particulier de fractions. Nous avons aussi proposé à nos élèves des activités de recherche où il est nécessaire de recourir aux nombres décimaux et aux opérations sur les nombres décimaux ; citons la recherche de rectangles de périmètres ou d'aires données.

Mais MJ Perrin constatait que, si pour les élèves en difficulté ces activités fonctionnent à peu près de façon satisfaisante, il y a une rupture très nette de cette phase d'action avec la réutilisation des connaissances introduites à ces occasions dans d'autres situations. Par exemple, pour l'introduction de fractions, dès qu'on passe à l'écriture formelle indépendamment de la situation d'action où elles sont apparues, certains élèves passent à des modèles numériques erronés pour les additionner. C'est pour cela que dans les situations de travail (activités ou exercices) que nous avons proposées à nos élèves, nous avons explicitement mis à leur disposition différents systèmes d'écriture des nombres et différents modes de représentations graphiques de grandeurs.

Voyons par exemple ce que nous avons proposé aux élèves dans le cadre des apprentissages de l'addition et de la soustraction de nombres décimaux. Dans un premier temps nous visons la maîtrise de ces opérations jusqu'aux centièmes. Pour cela, l'usage des nombres décimaux est associé à deux systèmes d'écriture (forme décimale, forme fractionnaire) et deux modes de représentation : la droite graduée où l'unité est divisée en 10 et 100 et le carré unité divisé en 10 lignes ou 100 carreaux suivant les modèles suivants :





1 | 1/10 ou 0,1 | 1/100 ou 0,01

L'objectif est qu'à travers la possibilité de confronter ces écritures et ces modes de représentation, les élèves aient différents moyens de donner sens aux valeurs de position du système décimal et de contrôler les traitements qu'ils effectuent. Ces représentations et ces modes d'écriture permettent alors de calculer et de contrôler les résultats de différentes façons. Voici un exemple d'exercice où les élèves sont ainsi amenés à calculer, à contrôler et éventuellement à rectifier leurs calculs.

y = x + 0,7	
x	y
0,15	
0,2	
0,27	
0,3	
1,12	
	0,84
	1,1
	2,24
0,8	
1,4	
1,35	
	1,2
	0,15
2,15	
	2,15
1,6	
	1,42
	1,3
	0,25
	1,01

y = x + 0,17	
x	y
0,15	
0,2	
0,27	
0,3	
1,12	
	0,84
	1,1
	2,24
0,8	
1,4	
1,35	
	1,2
	0,15
2,15	
	2,15
1,6	
	1,42
	1,3
	0,25
	1,01

Il s'agit d'une part de remplir chaque case vide de ces tableaux sans calculatrice et sans poser les opérations en respectant les règles données : $y = x + 0{,}7$ et $y = x + 0{,}17$
D'autre part, pour chaque case remplie, il faut représenter chaque couple (x,y) dans un repère sur une feuille de papier millimétré. 1 correspond à 10 cm.
Les élèves observent très vite que les points obtenus sur le graphique semblent alignés (alignement que l'on rencontre aussi dans l'activité qui consiste à trouver des rectangles ayant un périmètre donné). En l'occurrence, cette observation est confirmée par le professeur. A partir de là, le non-alignement d'un point avec les autres points du graphique devient un critère pour revenir sur les résultats des opérations. Pour cela les élèves ont à leur disposition des graduations et des carrés comme ceux évoqués précédemment pour visualiser et contrôler les calculs.

Par la suite, d'autres activités concernant les graduations (graduer entre 0,01 et 0,02) ou la multiplication de décimaux (recherche de rectangles et en particulier d'un carré ayant une aire de 12cm2) font apparaître les rangs suivants (millièmes etc..) comme une extension des dixièmes et centièmes.

2ème volet : Les écrits produits par les élèves, en appui aux activités.

Pour amorcer une activité, favoriser un retour réflexif sur les travaux ou renforcer les habitudes de contrôle, nous avons demandé à nos élèves de produire individuellement des écrits qui selon les moments où ils étaient sollicités avaient des modalités et des fonctions différentes. Nous avons exploré trois types de production différentes. Nous distinguons :

- les écrits portant sur les représentations d'une notion avant son enseignement,
- les écrits sollicitant un jugement étayé par des arguments s'appuyant sur références rencontrées dans les activités et permettant ainsi de contrôler ainsi des calculs préalablement effectués,
- les écrits sollicitant un retour libre sur les apprentissages (il s'agit pour les élèves d'expliciter librement les apprentissages réalisés).

1) Les écrits portant sur les représentations d'une notion avant son enseignement.

Voici un exemple de questionnaire proposé aux élèves avant qu'on aborde la multiplication de décimaux. Pour chacun des calculs les élèves doivent répondre à trois questions :

1) Comment lis-tu ce calcul ? (si tu vois plusieurs façons de le lire écris-les)

2) Quelle est la réponse que tu proposes ?

3) Trouve une ou des façons pour expliquer ou illustrer ce calcul à quelqu'un qui ne sait pas ce qu'il signifie.

1er calcul : 6x3	2ème calcul : 7x0,4
3ème calcul : 7x0,5	4ème calcul : 0,2x0,3

2) Les écrits sollicitant un jugement étayé par des arguments s'appuyant sur références rencontrées dans les activités.

Les élèves sont invités à revenir sur leurs productions (après une interrogation écrite par exemple) et à expliciter les connaissances mises en oeuvre ou les incertitudes qu'ils ont encore. Pour cela nous leur avons demandé de revenir sur des calculs effectués pour exprimer leurs doutes, leurs certitudes et de les justifier. Voici un questionnaire donné en fin d'année par rapport à une interrogation écrite qui reprenait des calculs de début d'année du type "Calculer 7,24 - 4,3" :

Une autocorrection : Il faudra ranger toutes tes réponses en trois catégories et répondre aux questions suivantes pour chaque catégorie.

1ère catégorie : les réponses dont tu es sûr(e).

Donne chaque fois un argument pour prouver qu'elles sont correctes : une autre forme de calcul, une règle de calcul ou un contrôle par un moyen qu'on a appris cette année, etc.

2ème catégorie : les réponses fausses.

Là aussi donne chaque fois un argument pour prouver qu'il y a erreur : une autre forme de calcul, une règle de calcul ou un contrôle par un moyen qu'on a appris cette année, etc.
Tu corrigeras ensuite ton erreur initiale.

3ème catégorie : les réponses dont tu n'es pas sûr(e)et les raisons de ton hésitation.

3) Retour libre sur les apprentissages.

Il s'agit pour les élèves d'expliciter librement les apprentissages réalisés comme par exemple par des questions du type suivant :

Dans les apprentissages numériques récents y-a-t-il des faits qui vous ont surpris ? Qu'avez-vous appris de neuf ? Y-a-t-il des erreurs que vous ne faites plus maintenant ?

Nous allons maintenant développer quelques indications concernant les résultats observés relativement aux trois volets de notre travail.

Indications sur les résultats obtenus, côté élèves (1er et 2ème volet de la recherche) :

Constatations globales

1) On sait que les élèves ont en général beaucoup de réticences à écrire autre chose que les calculs, à justifier un résultat, à expliquer une démarche dans le cadre d'un devoir classique. En revanche, nous constatons que, sollicités par nos questionnaires, les élèves s'expriment volontiers. Au début ils semblent un peu surpris d'être interrogés personnellement sur leurs apprentissages. Mais c'est une tâche qui s'intègre vite assez naturellement dans le cours de la classe. Il y a évidemment des questionnaires qui sont plus propices que d'autres pour cela, comme nous allons le voir.

2) La quantité et la qualité de l'expression sont très variables d'un élève à l'autre. En particulier les élèves en grande difficulté ont beaucoup de mal à développer des descriptions plus précises de difficultés ou d'apprentissages : "C'était facile parce que ce n'était pas dur", "J'ai tout juste parce que j'ai bien calculé".

Constatations par rapport aux différents types de questionnaires.

1) Observations sur les écrits portant sur les représentations d'une notion avant son enseignement.

Ces questionnaires permettent au professeur de prendre connaissance des représentations explicites des élèves avant d'aborder une notion. Ils permettent aux élèves de se rendre compte et de repérer des savoirs nouveaux à envisager.

Dans le cas du questionnaire initial sur les multiplications évoqué plus haut par exemple les réponses des élèves permettent au professeur d'avoir une idée de leurs représentations par rapport aux contenus abordés, tant sur la diversité de ces représentations pour chaque élève que sur l'endroit où l'élève n'a plus de références ou des références erronées.

Mickaèl par exemple écrit que 6x3 c'est 3+3+3+3+3+3 ou 6+6+6. Pour 7x0,5 il écrit 0,5+0,5+0,5+0,5+0,5+0,5+0,5, 7x0,5=7/2 et représente aussi 7 carrés unités où il hachure chaque fois 5/10. Il y ajoute aussi une explication algorithmique : 7x5=35 et on ajoute la virgule à gauche. Explications similaires pour 7x0,4, mais aussi pour 0,2x0,3 : 0,2+0,2+0,2 ou 0,3+0,3 ou 2x3=6 et on ajoute une virgule à gauche...! Mais beaucoup d'élèves ne savent plus comment expliquer 0,3x0,2.

Pour les élèves, le questionnaire révèle alors la frontière entre ce qu'ils connaissent et qu'ils savent expliciter et ce qu'ils ne savent pas. Et de ce fait, il devient un tremplin pour l'activité qui permettra de travailler sur la nouveauté, en l'occurrence un travail sur les aires de rectangles sur du papier millimétré. Ce genre de questionnaire semble intéressant à intégrer dans nos pratiques.

2) Observations sur les écrits sollicitant un jugement étayé par des arguments s'appuyant sur références rencontrées dans les activités.

Lors de l'année 95/96 nous voulions voir si les élèves utilisaient les références rencontrées dans les activités (références à une conversion dans un autre système sémiotique ou référence à une représentation en dimension 1 ou 2 par exemple). Nous voulions voir aussi s'ils rectifiaient certaines erreurs à cette occasion. Dans le cas du questionnaire évoqué plus haut ("Une autocorrection") le document qui suit montre sur le calcul "7,24-4,3" ce qu'il en est dans une classe de 29 élèves en fin d'année.

	9/95	6/96 (1ère)	6/96 (reprise)	Degré de certitude et justification
Isil	1	1		sûre, opération posée
Grégoire	1	1		sûr, opération posée
Gaëlle	1	1		sûre, c'est comme 724-430 et on rajoute la virgule
Christophe	1	1		sûr, sans explication
Constance	1	1		pas sûre, globalement pour toutes les questions
André	1	1		sûr, opération posée
Alexandre	1	1		sûr, sans explication
Audrey	1	1		sûre, opération posée
Frédéric	9	1		sûr, opération posée
Céline	9	1		sûre, opération posée
Emmanuelle	9	1		sûre, opération posée
Nathalie	7	1		sûre car (7-4=3)+(3-2=9)+0,04 =2,94
Mickaèl	7	1		sûr, 724/100-43/10=2,94
E Mickaèl	9	1		pas sûr, sans explication
Vanessa	7	1		pas sûre, globalement pour toutes les questions
Marc	9	9	1	rectifie,(7/1+2/10+4/100)-(4/1+3/10)=2,94
Thomas	1	7	1	rectifie, sans explication
Matthieu	7	7	1	rectifie, pas d'explication de l'erreur
A Céline	7	9 (2,86)		pas sûre, hésite : 7,24 – 4 = 3,24 et 3,24-0,30 = 2,86 ou 2,94 ?
Sébastien	7	9 (2,56)		pas sûr, pas d'explication
H Alexandre	7	9(719,7)		pas sûre, globalement pour toutes les questions
Richard	5	9 (3,04)		pas sûr, pas d'explication
Nadège	5	9 (68,1)		pas sûre, sans explication
Jérémy	9	5		sûr, j'ai regardé, je n'ai pas vu de faute (globalement)
Cindy	9	9 (3,1)		pas sûre
Adèle	9	5		sûre, pose sans les virgules
Sélim	7	9 (2,96)		sûr, 7,20-4,30=2,90
Bruno	9	0		
Lionel	7	0		

Comparaison des réponses septembre-juin au calcul : "7,24-4,3"

Codes utilisés dans les trois première colonnes du tableau :

Code 1 : réponse correcte (2,94)

Code 5 : 681 traitement sans tenir compte de la virgule

Code 9 : autre résultat

Code 7 : 3,21 traitement séparé partie entière/partie décimale

Code 0 : non réponse

Il apparaît donc :

- Des progrès sur la question elle-même : 8 élèves ont toujours une réponse correcte en fin d'année, 10 élèves faisaient une erreur en début d'année et ont un résultat correct en juin et 11 élèves se trompent toujours. Cette classe est représentative de ce qui s'est passé pour l'ensemble des élèves dont nous avions la charge.

- Les élèves évoquent très rarement les références rencontrées dans les activités au cours de l'année.

- La référence privilégiée reste le calcul "posé".

- Les reprises suites au questionnaire sont rares.

Ce fait est en partie confirmé par ce que nous avons constaté avec d'autres questionnaires de ce type en cours d'année. Même si on demande explicitement aux élèves d'évoquer les références rencontrées dans les activités, ils le font mais ne rectifient pas pour autant leurs erreurs.

Citons à ce propos le cas typique d'une élève, Emmanuelle. Ce cas nous permettra d'ailleurs de montrer que pour nous, l'accès aux écrits produits par nos élèves nous a permis d'évaluer et de réorienter les contenus de notre enseignement. Emmanuelle au milieu de l'année, écrit que 0,3+0,7=0,10 et explique ensuite avec pertinence et détail comment on peut représenter des additions de ce type à l'aide de carrés unités partagés en 10 lignes 10 colonnes, mais qui après cela, écrit à nouveau que 0,3+0,7=0,10. Il semble que pour Emmanuelle, il y ait une cloison entre les traitements numériques et les traitements figuraux. Elle ne fait pas le lien que nous escomptions et qui lui aurait permis de contrôler ses traitements numériques. Il est vrai qu'en l'occurrence en 95/96, plutôt que d'activités jouant sur l'interaction entre cadre numérique et cadre géométrique, ou conversion d'un registre sémiotique à un autre, les activités que nous avions pratiquées étaient plutôt du type "illustration" (on illustre un calcul par un dessin, un peu comme par la suite on illustre une identité remarquable par un carré de dimensions a + b). Ces illustrations permettent aux élèves d'argumenter et donc de contrôler leurs résultats à condition qu'ils maîtrisent assez bien les concepts en jeu. Mais les illustrations ne provoquent pas en elles-mêmes les aller-retour qui sont à la base de l'acquisition de concepts dans une dialectique outil-objet. C'est pour cela que durant l'année 96/97 dans l'élaboration des activités que nous avons proposées dans le cadre de la révision de l'addition et de la soustraction de décimaux, nous avons été plus attentifs à ces interactions. Ainsi en est-il dans l'exercice décrit plus haut ($y = x + 0,7$ et $y = x + 0,17$), où c'est le non-alignement des points du graphique qui incite les élèves à contrôler leur résultats par recours aux modes de représentation des opérations additives.

Voici, à ce propos les observations faites en 96/97 au sujet des progressions réalisés dans le domaine du "calcul mental" sur les décimaux par une classe de 6ème ayant effectuée ces activités. Ces observations avaient comme objectifs, de repérer d'une part l'évolution de leurs performances et, d'autre part l'évolution de leurs conceptions. Voici comment nous avons procédé pour réaliser ces repérages.

Le test du début d'année :

Avant toute reprise de la notion de nombre décimal les dix calculs suivants ont été proposés aux élèves dans cet ordre en septembre :

5 additions :	5 soustractions :
a : 15,7+ 23	f : 15,7 - 6
b : 0,7 + 0,3	g : 2,3 - 1,7
c : 0,2 + 0,03	h : 0,48 - 0,3
d : 0,40 + 0,5	i : 5 - 0, 4
e : 1,8 + 0,25	j : 1,7 - 0,05

Nous avons choisi ces calculs parce que représentatifs des difficultés dans le domaine des additions et soustractions des décimaux en fonction de l'analyse présentée précédemment. La virgule risque pour beaucoup d'élèves d'y jouer le rôle d'un séparateur fort.

Ces calculs ont été présentés selon la procédure suivante :

1) Chaque calcul est dicté et écrit au tableau. Les élèves recopient en ligne le calcul proposé et lèvent le stylo pour l'effectuer mentalement. Au signal du professeur, ils écrivent la réponse. Le calcul suivant est alors dicté.

2) Après avoir effectué les dix calculs, les élèves prennent un stylo de couleur différente. Les questions suivantes leur sont posées :

1) Quels sont les calculs que vous avez trouvés les plus faciles et dites pourquoi.

2) Quels sont les calculs que vous avez trouvés les plus difficiles et dites pourquoi.

Ils ont aussi le droit de rectifier les réponses avec ce stylo de couleur différente.

Par la suite, le test n'est pas corrigé avec les élèves. Les professeurs ont gardé les copies initiales sans y apposer de remarques ou de corrections. Il est annoncé aux élèves qu'il s'agit d'un test initial destiné par la suite à repérer leur progression et il est rendu compte des nombres d'erreurs. Ces nombres les surprennent car en général, ils trouvaient ce test "facile".

Le test de janvier :

Après révision au premier trimestre des nombres décimaux avec l'addition et la soustraction, nous présentons au mois de janvier les mêmes dix calculs selon la même procédure.

Après avoir effectué les dix calculs, nous redonnons les copies de début d'année aux élèves et leur posons la consigne et la question suivantes :

1) Corrigez les deux feuilles en expliquant chacune de vos erreurs.

2) Y-a-t-il des choses vues au premier trimestre qui vous ont permis de corriger ?

Observation des évolutions :

"Score de réussite en septembre , 1ère réponse" signale le nombre de réussites au premier jet.

"Score de réussite en septembre , réponse finale" signale le nombre de réussites après une éventuelle modifications du résultat initial possible après réponses aux questions demandant de préciser les questions les plus faciles, les plus difficiles et la justification de ces jugements.

Effectif présent aux deux tests : 26 élèves.	**Score de réussite en Septembre 1ère réponse**	**Score de réussite en Septembre réponse finale**	**Score de réussite en Janvier 1ère réponse**	**Score de réussite en Janvier réponse finale**
a : 15,7+ 23 = 38,7	**22**	**24**	**24**	**25**
f : 15,7 - 6 = 9,7	**18**	**21**	**23**	**23**
b : 0,7 + 0,3 =1	**17**	**18**	**21**	**21**
c : 0,2 + 0,03 = 0,23	**14**	**16**	**24**	**24**
d : 0,40 + 0,5 = 0,9	**8**	**12**	**22**	**25**
h : 0,48 - 0,3 = 0,18	**9**	**11**	**22**	**23**
i : 5 - 0, 4 = 4,6	**10**	**10**	**19**	**21**
e : 1,8 + 0,25 =2,05	**7**	**10**	**18**	**19**
g : 2,3 - 1,7 = 0,6	**4**	**7**	**11**	**14**
j : 1,7 - 0,05 =1,65	**6**	**6**	**17**	**19**

La situation en septembre :

Les performances :

Les questions sont rangées dans l'ordre décroissant des réussites des réponses finales de septembre. On voit que les questions les mieux réussies a et f sont d'abord celles où le traitement ne concerne que la partie entière. Viennent ensuite les questions b, c, d et h où le traitement ne concerne que la partie décimale (partie entière = 0) mais où il y a de nombreux échecs lorsque la partie décimale est considérée comme un nombre entier et lorsque les valeurs de position dans la partie décimale des nombres décimaux sont ignorés (0,48 - 0,3 = 0,45). Dans cette catégorie on peut aussi ranger le dernier calcul donné, j où seuls 6 élèves réussissent : souvent c'est une addition qui est faite (réponse 1,75), ou alors la réponse donnée est 1,2 ou 1,02. Dans les calculs i, e et g très peu réussis au premier trimestre les traitements corrects affectent la partie entière et la partie décimale.

Le diagnostic fait par les élèves en début d'année :

Les élèves ont eu à signaler les questions qu'ils jugent faciles et les questions qu'ils jugent difficiles en justifiant leurs réponses. Quelles sont les conceptions qui se dégagent alors de leurs réponses ? Voici comment les élèves ont jugé les questions (chaque x correspond à un exercice signalé par un élève) :

	Facile		**Difficile**	
a : 15,7+23 = 38,7	**xxxxxxxxxxxxxxxxxx**	**18**	**xx**	**2**
b : 0,7+ 0,3 =1	**xxxxxxxxxxxxxxxxx**	**17**	**x**	**1**
d : 0,40 + 0,5 = 0,9	**xxxxxxxxxxx**	**11**		**0**
c : 0,2 + 0,03 = 0,23	**xxxxxxxxxx**	**10**	**x**	**1**
e : 1,8 + 0,25 =2,05	**xxxxxxx**	**7**	**x**	**1**
f : 15,7- 6 = 9,7	**xxxxxxx**	**7**	**xxxxxx**	**6**
i : 5 - 0, 4 = 4,6	**xxxxx**	**5**	**xxxxxxxx**	**8**
h : 0,48 - 0,3 = 0,18	**xxxx**	**4**	**xxxxx**	**5**
g : 2,3-1,7 = 0,6	**x**	**1**	**xxxxxxxxxxxx**	**12**
j : 1,7 - 0,05 =1,65	**x**	**1**	**xxxxxxxxxxxxx**	**13**

La distinction principale faite par les élèves oppose les cinq additions jugées faciles aux cinq soustractions jugées plus difficiles. Pratiquement aucune des additions n'est repérée comme difficile par les élèves. Ainsi, pratiquement personne ne signale les questions b, d, c et e comme difficiles. Pourtant de nombreux élèves ont échoués à ces questions. En fait quand on regarde à quoi ils rapportent cette facilité, on constate que très souvent ils explicitent leur conception erronée des nombres décimaux : par exemple pour "0,40 + 0,5" ces élèves expliquent qu'il suffit d'additionner 40 et 5 et que ça se fait facilement ! On constate pourtant que dans leur ensemble, les élèves ne se sont pas trompés sur la question la plus facile, la question a (15,7+23 = 38,7) signalée 18 fois comme la plus facile avec une analyse qui, si elle ne se contente pas de ranger ce calcul dans les additions, est souvent pertinente. Ainsi, plusieurs élèves signalent comme Cédric que 15,7 + 23 et 15,7 -6 sont des calculs faciles parce qu'on n'a pas à se soucier du chiffre qui est après la virgule. Dans leur ensemble, les élèves ont aussi repéré les deux questions qui leur posent le plus de problème : la question g (2,3-1,7 = 0,6) et la question j (1,7 - 0,05 =1,65). Ils rapportent souvent la difficulté de ces questions à des problèmes de retenue en se référant ainsi à la forme "posée" de ces opérations. En fait en ce début d'année, il semble qu'au-delà de la distinction entre addition et soustraction, le critère principal des élèves pour juger de la complexité d'un calcul est la possibilité ou non de faire le calcul directement sans le poser dans sa tête. Ainsi Ludovic écrit que "les calculs faciles sont ceux où il y a de petits nombres comme 0,7 + 0,3 = 1 et 0,40+0,5 =0,45, mais que les calculs comme 2,3-1,7=1,4 et 5-0,4=4,96 sont plus difficiles parce que les nombres sont un peu plus grands". De même Julie écrit : "0,7+0,3=10 5-0,4=0,1 0,2+0,03, ces deux additions et cette soustraction sont faciles parce qu'il y a des zéros devant et un chiffre derrière et parce que les zéros ne comptent pas". Elle ajoute "0,48-0,3=0,51 et 15,7+23=17,6 sont des opérations difficiles parce qu'il n'y a pas beaucoup de 0, avec plus de 0 ça serait un peu moins difficile".

La progression :

On voit que si la hiérarchie des réussites dégagées en début d'année est conservée, les réussites sont bien plus nombreuses. Les progrès sont évidents. Il reste à voir si cette progression dans les performances correspond aussi à un progrès de la part des élèves dans la capacité d'expliciter par écrit ces progrès (question 1 de janvier) et peut-être de situer ce qui leur a permis de progresser (question 2 de janvier). Le tableau des pages 70 et 71 indique pour chaque élève l'évolution des performances et le type de diagnostic qu'il a produit par écrit en septembre puis en janvier. Rappelons les questions.

En septembre :

1) Quels sont les calculs que vous avez trouvés les plus faciles et dites pourquoi.
2) Quels sont les calculs que vous avez trouvés les plus difficiles et dites pourquoi.

En janvier :

1) Corrigez les deux feuilles en expliquant chacune de vos erreurs.
2) Y-a-t-il des choses vues au premier trimestre qui vous ont permis de corriger ?

Observations :

La première observation concerne la nature du calcul mental proposé : ce calcul ne teste pas tant la virtuosité des calculs en jeu que la compréhension des décimaux et des traitements à effectuer. Le fait que lors des reprises tant en septembre qu'en janvier où les élèves ont le temps de rectifier les erreurs repérées les corrections sont peu nombreuses le prouve. Lorsqu'en septembre un élève écrit que 0,40 + 0,5 = 0,45 il revient rarement sur ce résultat ! C'est bien la compréhension de l'écriture des décimaux qui est en jeu et non pas la virtuosité de calculer rapidement.

La deuxième observation qui confirme la précédente est que les quelques élèves qui en septembre rectifient tout de suite quelques erreurs (Anaïs R., Anthony, Julia, Cyril, Léa et même Mickaèl), les progrès dans les réussites sont assez spectaculaires. Ces élèves semblent déjà en début d'année en cours d'apprentissage.

La troisième observation concerne les réponses aux questions (trois dernières colonnes) : les conceptions des décimaux qu'elles révèlent semblent bien en évolution chez de nombreux élèves. Ainsi si l'on ne rencontre pas de code 1 à la question de septembre, en janvier ils sont 12 à situer précisément la nature des erreurs commises. Peu d'élèves se réfèrent encore à l'opération posée. Ce sont surtout, et cela paraît cohérent, les élèves qui n'ont pas beaucoup progressé qui ne sont pas capables de décrire les caractéristiques de l'écriture décimale.

La quatrième observation est que si de nombreux élèves ont progressé et sont capables de préciser les traitements à effectuer, ils sont peu nombreux (6) à évoquer les supports et activités rencontrés au premier trimestre pour étayer cette progression. Comme lors de l'expérience de l'année 95/96 décrite plus haut ces supports et ces activités semblent oubliés : mais est-ce grave ? Peut-être ont-ils servi de moyen transitoire pour évoluer et permettre de décrire la nature de l'écriture décimale ? C'est cela qui est finalement important.

3) Quelques observations à propos des retours libres sur les apprentissages.

Rappelons les expériences et les observations faites en 95/96. Des questions comme les suivantes amenaient les élèves à expliciter librement les apprentissages réalisés.

Dans les apprentissages numériques récents y-a-t-il des faits qui vous ont surpris ? Qu'avez-vous appris de neuf ? Y-a-t-il des erreurs que vous ne faites plus maintenant ?

Ces questions ouvertes qui demandent aux élèves d'expliciter librement les apprentissages réalisés sont plus propices à l'engagement personnel des élèves dans la reprise et l'objectivation de leurs apprentissages. Bien sûr, nous avons observé de nombreuses réponses du type : "Je n'ai rien appris de nouveau, on avait déjà fait l'addition des nombres à virgule à l'école primaire". Mais bien des élèves se sont engagés plus avant et ont fait part de constats qui, au-delà de formulations parfois maladroites, pointent des réarrangements pertinents de leurs connaissances : "Je sais bien faire les opérations posées mais pas les calculs en lignes" (début d'année) "Je ne savais pas que l'on pouvait diviser en multipliant" "J'ai appris que le résultat d'une multiplication pouvait être plus petit" "J'ai appris que multiplier par 0,5 c'est diviser par 2" (en fin d'année). Il semble donc que les élèves peuvent reprendre et approfondir leurs connaissances en les explicitant ainsi librement.

DESCRIPTIONS ABREGEES DES REPONSES PRESENTEES DANS LE TABLEAU.

Descript. pertinente d'erreur : description d'une complexité ou d'une erreur liées aux valeurs des positions ou évocation d'un support (graduation ou fraction d'aires) avec description pertinente d'un traitement.

Evocation calcul posé : allusion à un calcul posé par exemple évocation des retenues.

Evocation d'un support : évocation d'un support (graduation ou fraction d'aires) sans précision de traitement.

Descript. redond. d'erreur : description redondante d'une erreur (ex : au 1er trimestre j'ai fait 0,2 + 0,03 = 0,05 et non 0,23).

Descript. d'une attitude : description d'une attitude (cette fois j'ai plus réfléchi") ou d'un contexte ("on avait vu ça au primaire").

Jugement sans justif. : jugement sans justification (ex : c'était difficile).

Evocation oppos. +/- : évocation d'une opposition entre l'addition et la soustraction comme critère de complexité.

Descript. erronée d'erreur : critères de complexité qui témoignent d'une conception erronée des décimaux(par exemple : évocation d'un traitement séparé de la partie entière et de la partie décimale avec erreurs associées 0,40 + 0,05 = 0,45).

Nombre de questions : 10	Score réussites Sept. 1ère réponse	Score réussites Sept. réponse finale	Score réussites Janvier. 1ère réponse	Score réussites Janvier. réponse finale	Questions Sept.	Question 1 Janvier	Question 2 Janvier
Aude	9	10	9	10	Evocation oppos. +/-	pas de réponse	pas de réponse
Aurélie	9	10	10	10	Evocation calcul posé	pas de réponse	Descript. pertinente d'erreur
Amandine W	9	10	8	10	Evocation calcul posé	Descript. pertinente d'erreur	Descript. pertinente d'erreur
Amandine	9	9	10	10	Evocation calcul posé	Evocation calcul posé	Evocation calcul posé
Cédric	9	9	10	10	Evocation calcul posé	Descript. redond. d'erreur	pas de réponse
Déborah	8	8	10	10	Evocation oppos. +/-	Evocation calcul posé	pas de réponse
Anaïs R	5	7	9	10	Evocation oppos. +/-	Descript. pertinente d'erreur	Descript. pertinente d'erreur

Anthony	4	7	10	10	**Evocation oppos. +/-**	**Descript. pertinente d'erreur**	**pas de réponse**
Pierric	5	5	10	10	**évocation oppos. +/-**	**Descript. pertinente d'erreur**	**pas de réponse**
Julia	3	7	8	10	**Jugement sans justif.**	**Descript. redond. d'erreur**	**Descript. d'une attitude**
Thierry	3	3	10	10	**Descript. erronée d'erreur**	**Descript. pertinente d'erreur**	**pas de réponse**
Cyril	4	5	9	9	**Descript. erronée d'erreur**	**Descript. pertinente d'erreur**	**pas de réponse**
Florian	3	3	9	9	**évocation calcul posé**	**Descript. d'une attitude**	**pas de réponse**
Maximilien	3	3	9	9	**Descript. erronée d'erreur**	**Evocation calcul posé**	**pas de réponse**
Léa	4	7	6	8	**évocation oppos. +/-**	**Descript. pertinente d'erreur**	**Evocation d'un support**
Ludovic	4	4	7	8	**Descript. erronée d'erreur**	**Descript. pertinente d'erreur**	**Descript. pertinente d'erreur**
Christelle	5	4	8	8	**Descript. erronée d'erreur**	**Descript. pertinente d'erreur**	**Descript. pertinente d'erreur**
Julien	3	3	5	6	**Evocation oppos. +/-**	**Descript. redond. d'erreur**	**Descript. d'une attitude**
Mickaèl	1	2	5	8	**Descript. d'une attitude**	**Evocation d'un support**	**Evocation d'un support**
Camille	4	4	7	7	**Evocation oppos. +/-**	**Descript. pertinente d'erreur**	**Evocation d'un support**
Jérôme	3	3	6	7	**Descript. d'une attitude**	**Descript. redond. d'erreur**	**pas de réponse**
Céline	3	4	7	7	**Descript. d'une attitude**	**Evocation calcul posé**	**Descript. pertinente d'erreur**
Julie	0	0	8	5	**Descript. erronée d'erreur**	**Descript. redond. d'erreur**	**Descript. redond. d'erreur**
Elodie	1	3	6	6	**évocation oppos. +/-**	**Descript. redond. d'erreur**	**Descript. redond. d'erreur**
Anaïs	3	3	4	4	**Jugement sans justif.**	**Evocation calcul posé**	**pas de réponse**
Vijitha	0	0	1	1	**Descript. erronée d'erreur**	**Descript. d'une attitude**	**pas de réponse**

Indications sur les résultats obtenus, du côté des pratiques des professeurs (3ème volet de la recherche) :

La procédure employée :

Notre groupe est constitué de professeurs de collège qui en majorité au départ n'étaient pas initiés aux recherches et aux résultats de la didactique des mathématiques. Mais soucieux d'améliorer l'efficacité de notre travail avec nos élèves, nous étions prêts à mettre en commun nos expériences et à entreprendre une recherche pragmatique et ouverte aux apports pouvant s'intégrer dans nos pratiques. Outre un aspect recherche, notre action revêt donc indéniablement un aspect formation. Dans notre recherche, il est donc aussi intéressant de faire un bilan sur les répercussions de notre travail sur nos pratiques en classe.

Quels sont les effets de la considération explicite de la place de l'écrit dans notre enseignement sur nos pratiques ? Pour répondre à cette question nous avons d'abord fait un bilan individuel et par écrit (il n'y a pas de raison que nous échappions à l'objet de notre recherche...!) chacun répondant aux questions suivantes.

1) Est-ce que cette recherche a modifié votre pratique d'enseignement en 6ème. En quoi ?

2) Sur quels points envisagez vous d'accentuer encore cette évolution ?

3) Décrivez ce qui mériterait d'être communiqué de notre recherche à des collègues de math qui enseignent en 6ème ou 5ème.

4) Qu'avez vous appris de neuf dans cette expérience :

- a) sur les contenus enseignés ?
- b) sur les façons d'enseigner ces contenus ?
- c) sur les élèves ?

Les observations :

Après mise en commun et analyse de nos réponses, il apparaît que la recherche est révélatrice d'autres moyens d'enseigner. Nous ne tracerons pas ici les évolutions individuelles mais signalerons plus globalement que le fait de considérer explicitement la place de l'écrit dans les apprentissages numériques a eu des répercussions individuelles innovantes et apparaît comme une clé d'accès à la compréhension de phénomènes et didactiques.

Un premier aspect de modification est dans la prise de conscience de l'importance qu'il y a à donner du sens aux contenus mathématiques : "Je veille à donner plus de sens aux nombres décimaux, fractionnaires" "Mon but n'est plus que les élèves sachent faire par "bachotage" et répétitions d'exercices mais que les élèves sachent faire parce qu'ils ont compris ce qu'ils faisaient" "Avant cela représentait très souvent une technique, une règle de cuisine qui avait son fonctionnement propre sans avoir possibilité de recours à une vérification" "Ce n'est pas la quantité d'exercices qui est importante, mais la qualité : que ceux -ci prennent du sens, autant que possible" "Avec ce travail de recherche, les élèves semblent moins impatients d'avoir une *"recette"* à faire fonctionner. Ainsi, pour calculer 2:0,1 ou 6:0,2, l'interrogation *"où placer la virgule dans le résultat"* est moins fréquente ; elle est remplacée par *"combien de fois 0,1 dans 2"*.

La sensibilisation à l'analyse des tâches fait aussi partie de découvertes explicites pour certains : "une erreur résulte rarement d'un comportement anarchique de l'élève ; l'erreur est en général le résultat d'une mauvaise interprétation qu'il faut découvrir pour y remédier".

Cette prise de conscience a parfois des conséquences sur la gestion de la classe telle qu'elle est vécue par l'enseignant : "Je me permets plus souvent de faire des exercices qui autrefois me semblaient être une perte de temps (vu le temps que cela prenait par rapport au profil tiré). Mais en fait avec le recul, je m'aperçois que ce temps est gagné par la suite. Exemple : lors de la présentation des nombres décimaux, questionnement par écrit toutes les façons possibles et imaginables qu'ils ont pour les représente et les expliquer. Ensuite faire présenter à chacun sa solution aux autre. Cela permet à la longue aux timides de prendre d l'assurance, de formuler clairement leurs idées et de mettre en place un esprit critique".

Même si certains quelques inquiétudes se révèlent par rapport à la perte de temps, (un enseignant affirme sous forme de boutade que ce qui a changé c'est qu'avant la recherche...., il terminait le programme et que maintenant il est un peu mal à l'aise), chez d'autres c'est la gestion du temps qui est vue autrement. Ainsi on trouve plusieurs fois exprimée l'idée de décloisonnement des contenus : "Le travail de recherche a renforcé chez moi l'idée que l'acquisition d'une notion doit être étalée sur toute l'année et qu'il faut décloisonner les chapitres. Ainsi, la notion d'aire a commencé à être vue dans la multiplication et la division par 10, 100, 1000 puis dans la multiplication de 2 décimaux. Lorsque le chapitre "aires" apparaît, certains jalons importants sont déjà posés"

Et surtout très fortement il apparaît que l'appel à diverses formes d'écrits chez nos élèves joue un rôle de régulation dans notre pratique : c'est par les écrits que l'on se rend compte de difficultés, de progrès, que l'on connaît mieux les élèves et les tâches qu'ils ont à remplir.... Un autre précise : "Je suis davantage à l'écoute des enfants. On se prend plus de temps de faire vraiment le tour de la question, en insistant souvent volontairement chez un élève plus faible". "Il est judicieux de faire formuler la question par l'élève avec son propre vocabulaire, afin de se rendre compte comment il a saisi la question".

Ces quelques avis constituent déjà une amorce d'une conclusion possible pour notre travail, cela au moins dans la perspective d'une recherche-action, perspective qui a constitué une des caractéristiques de notre travail. Mais plus rigoureusement, nous allons voir en quoi nous avons répondu aux questions à la base de notre recherche et souligner les apports qui nous apparaissent les plus cruciaux de notre travail.

En conclusion.....

Initialement nous nous demandions, dans quelle mesure la diversité et la complexité des écrits et des modes de représentation des nombres et les différents tâches qui résultent de leurs confrontations pouvaient favoriser et enrichir les apprentissages numériques.

Par la suite, une deuxième question s'est ajoutée : il s'agissait d'élaborer et de mettre à l'épreuve différentes procédures permettant aux élèves grâce à des productions écrites de réaliser des retours réflexifs sur leurs connaissances. L'hypothèse était que ces écrits pourraient servir d'appui efficaces pour les apprentissages considérés.

En ce qui concerne la première question, notre hypothèse était que le fait d'augmenter le nombre de modes représentation et d'écriture pouvait apporter une aide aux apprentissages en jeu. Mais comme chaque mode de représentation (graduations, aires) et d'écriture (fractions, écriture décimale) implique des apprentissages spécifiques, on pouvait se demander si cette diversification et cet enrichissement n'allaient pas au contraire alourdir les difficultés des élèves. Dans le cadre de notre travail dans nos classes, nous nous sommes rendu compte que cela n'était effectivement pas facile et nous ne pensons pas pouvoir apporter de procédure modèle d'enseignement dans ce domaine. Mais en revanche nous pensons avoir dégagé un questionnement et quelques composantes didactiques permettant d'optimiser le rapport entre le nombre de représentations et d'écritures et l'aide qu'elles peuvent apporter. En fait, il nous est apparu que les différentes écritures et représentations pouvaient avoir des fonctions différentes. Elles peuvent servir à ce que nous avons appelé des "illustrations" mais aussi comme des ressorts d'interactions où l'une peut servir d'outil à l'autre ou bien faciliter le traitement dans l'autre. Comme "illustrations" nous avons vu qu'elles ne sont pas forcément source de progrès et que des élèves peuvent parfaitement cloisonner les différents modes de représentations et donner des résultats divergents sans en prendre conscience. Le problème de l'enseignant est alors d'élaborer des situations d'interactions. Mais nous ne rejetons pas la fonction "illustration". En effet dans notre travail, nous avons trouvé une façon de la féconder, par la production d'écrits sollicitant un jugement étayé par des arguments s'appuyant sur références rencontrées dans les activités et permettant ainsi de contrôler ainsi des calculs préalablement effectués. Mais, bien sûr dans un cas comme dans l'autre, il s'est confirmé que l'élaboration par l'enseignant de situations d'interactions ou d'illustrations est conditionnée par une analyse préalable des difficultés en jeu. Pour notre compte personnel, cette analyse en ce qui concerne les apprentissages sur les décimaux représente rien qu'en soi une avancée importante.

En ce qui concerne la deuxième question, l'introduction de procédures permettant aux élèves de faire par écrit un retour réflexif sur leur connaissances, nous venons de voir qu'elles trouvent leur place dans le dispositif d'enseignement. En revanche nous demandons comment mesurer l'impact de cette introduction sur les apprentissages en jeu. Nous n'avons pas de réponse rigoureuse à ce sujet. Mais nous ne pouvons que souligner les effets que cette introduction a eu dans nos pratiques comme moyen d'évalauation et de régulation de notre enseignement (voir le paragraphe sur les résultats obtenus, côté pratiques des professeurs). En particulier dans ce travail nous avons montré comment nous avons pu repérer l'évolution des conceptions des élèves dans le cas des opérations sur les nombres décimaux. Nous pensons que pour les élèves, il s'agit là aussi d'une façon pertinente de prendre conscience de leurs progressions et de s'approprier les connaissances.

Il reste des questions ouvertes dans notre travail. En particulier, en ce qui concerne les écrits des élèves permettant un retour réflexif sur leurs connaissances, nous étions dans une phase exploratoire. Une analyse plus rigoureuse, d'une part de la typologie de ces écrits , d'autre part des protocoles par lesquels on sollicite et aussi exploite ces écrits dans les classes resterait à faire pour pouvoir par la suite en observer les effets. En ce qui concerne la typologie, il faudrait par exemple approfondir l'analyse des différents questionnements appelant les écrits : portant soit directement sur des contenus mathématiques précis, soit sur des impressions plus générales etc. En ce qui concerne les procédures de passation, dans la plupart des cas ces écrits ont été sollicités de façon individuelle et parfois exploités de façon collective. Il y a d'autres façons de susciter ces écrits (voir recherche IREM de Paris) et une étude des variables en jeu serait nécessaire pour pouvoir par la suite procéder à des observations.

Bibliographie.

R. Douady et M.J. Perrin,1986, "Liaison école-collège : Nombres décimaux", IREM de Paris VII.

R. Duval,1995, "Sémiosis et pensée humaine, Représentations sémiotiques et apprentissages intelectuels", Berne, Peter Lang.

A. Munyazikwiye,1995, "Problèmes didactiques liés aux écriture des nombres", RDM , Vol 15 n°2, pp31-62.

MJ. Perrin,1993,"Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les classes faibles", p 5 à 119, RDM, 1993.

F. Pluvinage, 1977, "Difficultés des exercices scolaires", Thèse d'Etat, Strasbourg

JC. Rauscher,1993, "L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes. Le cas de l'enseignement de la géométrie au début du collège.", Thèse USHS, IREM de Strasbourg.