BD sur CD

UN DOSSIER SUR LES NOMBRES COMPLEXES
réalisé par Benjamin DESBUQUOIT, élève de 6ème Math-Sciences à l'Institut Notre-Dame de Comines (Belgique), pendant l'année scolaire 1998 – 1999,

présenté et commenté par François PLUVINAGE.

Résumé

Le dossier qu'un élève de classe terminale a élaboré sur les nombres complexes est une production sur laquelle il est intéressant à plus d'un titre de se pencher. En plus des règles habituelles de l'écriture mathématique, il se conforme rigoureusement (que ce soit ou non fait sciemment) à des règles auxquelles il vaut la peine de réfléchir à propos d'hyper-texte et en outre, pour la présentation, il exploite remarquablement les possibilités de navigation sur un écran d'ordinateur. Cela conduit à envisager des recommandations générales pour ce type de documents quand il s'agit de mathématiques. Pour ce qui est du contenu abordé, sa richesse est incontestable : l'auteur pousse avec maestria l'étude à des niveaux qui auraient leur place dans les premières années universitaires. On peut alors d'autant mieux d'observer que, lorsque lui-même a acquis les notions relatives aux nombres réels, il n'a pas bénéficié de toutes les ressources qu'il a exploitées. Une telle remarque concerne les apprentissages et renvoie à d'autres articles de ce numéro (notamment celui de Robert Adjiage).

Historique du document

Le rapport terminal de la recherche sur les *Compétences Terminales en Mathématiques*, entreprise au sein du Service d'Analyse et Méthodologie Mathématiques de l'Université de Mons-Hainaut (Belgique), a été réalisé en 1999 sur CD ROM sous la forme de fichiers exploitant les possibilités de l'hypertexte et publié ensuite sous forme de monographie*. Guy NOEL, professeur à l'Université de Mons-Hainaut, nous a remis le CD, intéressé en particulier par le regard qui pourrait être porté sur un dossier élaboré par un élève de sixième année Math-Sciences, correspondant à une classe de Terminale en France.

Ce dossier qui présente les nombres complexes nous a en effet paru remarquable et nous invitons vivement le lecteur qui en a la possibilité à le consulter sur le CD. Nous ne pouvions pas le reproduire fidèlement sur papier, qui plus est sans recours à la couleur ; ici, nous donnons donc seulement une description de son contenu et de sa présentation, en reproduisant quelques passages qu'il nous a semblé intéressant de montrer et commenter. Et, si le CD ne suppose aucune connaissance sur les nombres complexes, puisque son objet est précisément de les présenter, cet article s'adresse pour sa part à des lecteurs concernés par l'enseignement de ce thème. Par ailleurs, le titre que nous avons choisi désigne Benjamin Desbuquoit par ses

* J.P. Cazzaro, G. Noël, F. Pourbaix, P. Tilleuil, 2001, *Structurer l'enseignement des mathématiques par les problèmes*, De Boeck, Bruxelles

initiales : que l'on y voie un signe d'estime, en évocation de la valeur reconnue aux auteurs de bandes dessinées (les fameuses BD) de la grande tradition belge, de l'esprit desquels son document sur les nombres complexes procède en définitive pour nous par plus d'un aspect !

Descriptif du contenu du dossier sur les nombres complexes

Le CD sur les compétences terminales en mathématique comporte le dossier du rapport de recherche, un dossier sur les transformations affines élaboré par Guy NOEL et celui qui nous intéresse ici. Un menu général permet de se reporter à une présentation sommaire du sujet étudié, sous la forme de plusieurs diapositives (réalisées grâce à Power-PoinT), dont l'une pour remercier Philippe Tilleuil, qui a été le promoteur du travail de fin d'études secondaires de Benjamin Desbuquoit bien qu'alors détaché de son statut de professeur à l'Institut Notre-Dame de Comines. Laissons la parole à Benjamin Desbuquoit pour introduire son sujet, .

« Dans ce dossier, nous introduisons les notions de base concernant la ***théorie*** *des nombres complexes.*

Nous posons ensuite quelques problèmes dont les solutions nous permettent de comprendre et d'utiliser les séries de Taylor-Maclaurin.

Enfin, nous dégageons une relation entre les séries de Taylor et les nombres complexes, due à Leonhard Euler. »

Ces propos préliminaires sont agrémentés par une *série de diapos (portraits des mathématiciens cités et figures illustratives).* Et, après un écran d'ouverture où les utilisateurs férus d'histoire reconnaîtront immédiatement le portrait du mathématicien du XVIème siècle Niccolo Tartaglia (les autres le retrouveront parmi les personnages mentionnés dans le paragraphe historique du chapitre 1), voici la table des matières proposée au lecteur.

Chapitre 1 – Notions de base concernant la théorie des nombres complexes.

A) Notions de base concernant l'utilisation des nombres complexes.

B) Les nombres complexes et la géométrie.

Chapitre 2 – Un petit air de séries.

Chapitre 3 – La série de Taylor-Maclaurin.

Chapitre 4 – La formule d'Euler.

Bibliographie

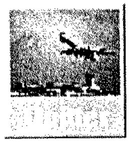
Nous détaillons ces chapitres après la présentation, en page suivante, de la navigation dans le programme. On y voit la marque de l'utilisation du logiciel Multimedia Toolbook (CBT Edition) pour l'élaboration du dossier. Les liens sur certains mots et les notes ouvrent des cadres qui se superposent à la page en cours ; les autres liens font changer de page.

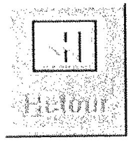
La navigation dans le programme est très simple !

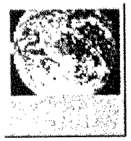
Des boutons ressemblant à ceci 

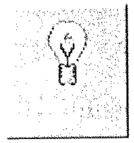
vous permettront de voyager facilement d'un écran à l'autre.

En bas de l'écran, se trouvent les boutons suivants :

 vous permet de quitter le programme à tout moment.

vous permet de retourner à l'écran précédent. 

 vous donne accès à la table des matières. Vous avez ainsi le loisir de voyager aisément à travers l'entièreté du dossier.

vous rappelle certaines notions utiles. Celles-ci se rajouteront au fur et à mesure de votre progression dans ce dossier. 

Quant aux mots écrits en rouge : lors d'un clic sur l'un de ces mots, une fenêtre se superposera à l'écran et vous donnera quelques explications supplémentaires, sans effacer l'écran principal sur lequel vous naviguiez. Un simple clic fera disparaître cette fenêtre.

Après ces quelques précisions, nous vous invitons à appuyer sur ECHAP pour découvrir un monde au delà du réel ... entrons dans l'univers des nombres complexes !

Sur le fichier, le contenu de chacun des quatre chapitres est détaillé seulement lorsque le lien vers le chapitre est activé depuis la table des matières. Ainsi le découpage en paragraphes et sous-paragraphes indiqué ci-après n'est pas d'emblée mis sous les yeux du lecteur. Pour l'auteur, il ne s'agit nullement d'entretenir un suspense, puisque l'obtention du détail de chaque chapitre est immédiate depuis la table des matières, mais de limiter le nombre des informations simultanément présentes sur l'écran. Nous y revenons par la suite. A chacun des paragraphes du détail d'un chapitre correspond un lien qui conduit au contenu indiqué.

Chapitre 1 – A) – *Un nombre complexe : qu'est-ce que c'est ? – Conventions (égalités de deux nombres complexes ;...). – Règles de calcul* (+ ; – ; × ; :). – *Origine historique des nombres complexes.*

B) – *Représentation géométrique. – Opérations sur les vecteurs. – Calcul du module et de l'argument. – Élever à la* $m^{ième}$ *puissance. – La formule de de Moivre. – Les racines* $n^{ièmes}$ *d'un nombre complexe.*

Chapitre 2 – *Introduction. – Un premier exemple :* $\frac{1}{1-x}$. – *Un deuxième exemple :* e^x. – *Deux autres exemples :* sin x et cos x. – *A propos d'une formule de Leibniz...*

Chapitre 3 – *Introduction. – La formule de Taylor-Maclaurin. – La formule du reste* $R_n(x)$.

Chapitre 4 – *Une formule extraordinaire :* ¤ *Une première justification.* ¤ *Une seconde justification. – Conséquences intéressantes (formule fondamentale ;* cos 2x *;...). – Démonstration de la formule de de Moivre grâce à la formule d'Euler.*

Bibliographie (constituée d'ouvrages scolaires, dont ceux des collections Dimathème et Terracher, et de références pour les illustrations, voir en fin de cet article).

A la fin du chapitre 4, une borne mentionne « *Chapitre suivant ? ? ?* » Ce lien conduit au portrait d'Euler (le même que chez Terracher), auquel l'auteur a adjoint un phylactère (ou une bulle, BD oblige...) évoquant une hypothétique suite pour l'année prochaine.

Que Benjamin Desbuquoit ait indiqué une bibliographie dans son dossier mérite d'être salué. C'est, parmi d'autres, un signe du grand souci de correction qui a présidé à l'élaboration du dossier. En particulier, celui-ci contient davantage de justifications qu'il ne s'en trouve dans les ouvrages cités et va sensiblement plus loin, avec les développements en séries. Sur ce point, seuls des résultats de convergence (convergence normale ou majorations de restes) qui dépassent sensiblement le niveau visé du dossier sont admis ; encore font ils l'objet d'expérimentations numériques convaincantes.

L'hyper-texte au service de présentations mathématiques.

L'écran du premier paragraphe du chapitre 1 nous paraît représentatif de l'ensemble du dossier, c'est pourquoi nous reproduisons ci-dessous son contenu, évidemment sans le dessin des boutons du bas d'écran (voir leur apparence en page 79) ni le portrait de Tartaglia en fond d'écran discret, tel qu'un filigrane apparaît au travers d'une page. Nous avons souligné les liens qui provoquent des superpositions et encadré ceux qui font quitter la page.

Un nombre complexe : qu'est-ce que c'est ?

Ajoutons aux nombres réels un élément noté i (pour imaginaire), défini par la condition surprenante :

$$\sqrt{-1} = i \qquad \textbf{ou encore} \qquad i^2 = -1$$

Plus précisément, est appelée nombre complexe une combinaison $a + bi$, où a et b sont des nombres réels, appelés respectivement **partie réelle** et **partie imaginaire** du nombre complexe considéré, et i est l'unité imaginaire.

De tels nombres sont soumis à :

des conventions et des règles de calcul

Ils sont susceptibles d'une représentation géométrique remarquable.

Quelle est l'origine des nombres complexes ?

Quitter **Notes** **Plan** **Retour**

Les informations données sur l'écran, ici dans sa partie supérieure, sont spécifiques à la page. Elles sont suivies de l'indication des développements qu'elles demandent et des questions qu'elles soulèvent. Les liens correspondants renvoient à d'autres paragraphes du chapitre. Ainsi, outre la possibilité d'une consultation dans l'ordre souhaité par l'utilisateur, une caractéristique du dossier qui le distingue d'un manuel est de séparer l'énonciation de besoins de justification ou d'illustrations (exemples) et leur présentation exhaustive. De ce point de vue qui nous semble d'une grande importance pédagogique, le dossier se rapproche donc d'un cours sur tableau noir.

La consultation dans un ordre dont le lecteur a le choix, évite d'imposer *de facto* un style pédagogique uniformisé. Les différences de pratiques telles qu'elles apparaissent par exemple dans l'étude de Jacqueline Borreani, Patricia Tavignon et Roseline Verdon, faite certes pour un niveau scolaire moins avancé mais extrapolable au niveau qui nous intéresse ici, s'accordent plutôt soit à une présentation directe des notions suivie d'applications, soit à la pratique préalable d'une activité introductive, soit à un accompagnement de justifications heuristiques et méthodologiques. Contrairement au manuel qui doit se conformer à une pagination, le dossier est aussi bien adapté à l'un quelconque de ces choix.

Pour l'introduction des nombres complexes, l'évocation de la résolution de l'équation du troisième degré, avec la formule indiquée par Cardan, figure dans nombre de manuels récents. Avec raison le dossier retient cette option épistémologique, à propos de laquelle on trouvera des indications supplémentaires dans un récent ouvrage historique autour des *imaginaires*, émanant de la commission Inter-IREM d'épistémologie. Mais curieusement, cette formule est l'un des rares résultats pour lesquels Benjamin Desbuquoit ne semble pas avoir éprouvé le besoin de donner une justification. Craignait-il d'aller trop loin ? Cette formule, qui est par exemple présentée et démontrée dans le manuel de 1983 de l'IREM de Strasbourg, ne mobilise que les connaissances relatives à l'équation du second degré. Si l'on peut hésiter, pour un texte imprimé, à pousser trop avant le souci de justification, il n'en est pas de même pour de l'hyper-texte. Celui-ci rend possible une <u>étude à plusieurs niveaux</u> ; dans une situation un peu différente, envisagée pour son doctorat par Vincenzo Bongiovanni, ce sont des aides à la résolution d'exercices sur les coniques qui sont hiérarchisées.

Dans ce dernier exemple, le fichier fait apparaître des boutons qui établissent des liens avec un micro-monde, celui de Cabri-géomètre. Au contraire de la présentation verrouillée de Toolbook (interdisant jusqu'à la copie de parties de textes), ce dossier là est donc conçu pour autoriser des apports aux utilisateurs. Soulignons que le dossier sur les coniques a été prévu pour la formation des enseignants, alors qu'ici nous avons à faire avec un dossier pour utilisation directe par des élèves dans des classes. Chacune des formules (fichiers modifiables ou non) a son intérêt propre, en fonction de la situation d'enseignement.

Sur l'écran dont nous avons reproduit le contenu, les boutons inférieurs sont davantage indépendants des informations présentées sur la page. Les boutons *Quitter* et *Plan* le sont même totalement. Le bouton *Retour* renvoie à la page précédente dans l'ordre fixé par l'auteur et non pas, comme pour une navigation dans un fichier *html*, à l'écran précédemment affiché par l'utilisateur. Il est même inopérant si la page à l'écran est la première d'un chapitre. Le bouton *Notes* renvoie à un formulaire qui s'enrichit progressivement, en général d'un chapitre à l'autre, sauf pour le premier enrichissement qui couvre la partie B du chapitre 1 et le chapitre 2. Nous indiquons ci-après sa forme finale, qui est celle du chapitre 4, en indiquant par des lignes en pointillés ses limites successives.

Voici quelques formules à garder en mémoire : $i^2 = -1$ $N(z) = a^2 + b^2$ $\bar{z} = a - bi$
$z = \lvert z\rvert(\cos\theta + i\sin\theta) = \lvert z\rvert \,cis\,\theta = a + bi$ Calcul de l'argument : $\tan\theta = \dfrac{a}{b}$ Calcul du module : $\lvert z\rvert^2 = a^2 + b^2$ Formule de de Moivre : $(\text{cis}\,\alpha)^m = \text{cis}\,(m\alpha)$
Formule de Taylor-Maclaurin $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\dfrac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{\text{n}}(a)\dfrac{(x-a)^{\text{n}}}{\text{n}!} + R_{\text{n}}(a)$
Formule d'Euler : $e^{iy} = \cos y + i\sin y$

Le lecteur attentif aura été surpris de rencontrer dans ce formulaire la présence d'une notation inhabituelle : *cis*, qui apparaît dans la forme trigonométrique d'un nombre complexe et dans la formule de Moivre (nous ne répétons pas la particule du nom comme le fait BD). Cela tient au souci de correction de l'auteur ; il se démarque ici nettement des auteurs de manuels qui introduisent directement la formule d'Euler comme une définition. C'est en particulier le cas des manuels cités par Benjamin Desbuquoit. Une justification était présentée dans le manuel déjà cité de l'IREM de Strasbourg, par similitude de forme entre la dérivation de $y = e^{\alpha x}$ pour α réel, qui conduit à $y' = \alpha y$, et celle de $y = \cos x + i \sin x$, qui conduit à $y' = iy$.

Cette justification figure parmi celles que Benjamin Desbuquoit donne, mais il est à ce sujet plus exigeant encore que les auteurs du manuel indiqué. Elle n'est pour lui pas la seule. Dans le droit fil d'Euler, il tient à ce que l'exponentielle complexe n'ait droit de cité qu'après une étude attentive de développements en séries. C'est pourquoi, en attendant d'avoir mené à bien l'examen des développements de Taylor des fonctions trigonométriques et exponentielle, il ne se sent pas fondé à présenter une exponentielle complexe et introduit alors une désignation particulière, disons provisoire, cis θ pour $\cos\theta + i\sin\theta$. On peut discuter un tel choix, mais cette ligne de conduite est intéressante, notamment dans les perspectives signalées par Raymond Duval dans son article « *Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques* », tout particulièrement (cf. p. 371 de la revue RDM) en référence à Vygotski à propos du signe et du mot dans le processus de formation des concepts.

Pour ma part, j'ai envie de dire à cet endroit que Benjamin Desbuquoit attire l'attention sur une insuffisance de la réflexion didactique des auteurs de manuels concernant l'extension de l'exponentielle à des exposants imaginaires. Pour autant, j'ai une réticence vis à vis de l'introduction de notations qui ont un caractère provisoire et ne jouissent pas de propriétés les distinguant des notations définitives (ici encore, des propos de l'article de Raymond Duval viennent à l'esprit). La technique de l'hyper-texte a la même possibilité de s'appliquer sur ce point que pour l'introduction des complexes. Le lecteur pouvait se plonger dans l'origine historique des nombres complexes, il pourrait ici voir présenter la notation exponentielle d'Euler comme nécessitant des développements, auxquels un lien donnerait libre accès.

Des usages à envisager pour l'hyper-typographie mathématique.

L'écriture mathématique est soumise à des règles typographiques. Rappelons les principales : Un texte ne doit pas mélanger la langue usuelle et des symboles mathématiques, hormis des nombres et les signes d'égalité ou d'inégalités (on ajoute parfois l'appartenance et l'inclusion) ; une phrase ne doit jamais commencer par un symbole, nombre ou lettre désignant un objet (exemple d'un point en géométrie) ; une formule mathématique donne lieu à un saut de ligne et est centrée.

Pour un ouvrage mathématique tel un manuel, sans qu'il y ait des règles explicitées aussi précisément, des usages ont cours. Ainsi la typographie facilite la distinction de parties remplissant des fonctions différentes : textes de présentation et listes d'énoncés d'exercices par exemple, problèmes de synthèse, éventuelles activités, notices. En accompagnement du texte, un certain nombre d'utilitaires sont présents : table des matières bien sûr, mais aussi formulaires, tables numériques éventuelles, index des termes introduits et des notations. Une bibliographie est souvent absente (malheureusement) des manuels pour l'enseignement du second degré, mais est de règle dans ceux destinés à l'enseignement supérieur.

Il peut de même apparaître intéressant que l'on réfléchisse à des règles comparables à propos d'hyper-textes. Leur objectif doit évidemment être d'en faciliter l'usage. Il serait prétentieux d'être injonctif dans cet article, il ne peut s'agir ici que de soulever des questions à ce sujet, de susciter des réflexions.

La présentation de la navigation semble être un usuel à préconiser au même titre qu'une table des matières. Le principe d'économie : une quinzaine de lignes de texte au plus par écran, qui a été systématiquement appliqué dans le dossier examiné, mérite discussion ; jusqu'à quel niveau la fragmentation qui en résulte est-elle recommandable, acceptable, quand est-elle excessive ? Un index sera évidemment intéressant pour des documents d'une certaine ampleur (le dossier sur les complexes, lui, n'en comporte pas). Enfin, l'attention mérite d'être portée aux problèmes liés aux sorties momentanées d'un document et aux retours (de même qu'il est recommandé de lire des maths imprimées muni d'une feuille de papier et d'un crayon, une étude d'hyper-texte doit pouvoir être accompagnée de calculs, manipulations, etc).

De l'insuffisance des apprentissages numériques…

Dans le dossier de Benjamin Desbuquoit, l'écran que nous avons reproduit affiche un lien sur l'expression « des nombres réels ». Le contenu de la note sur ces nombres, dont nous n'avons pas parlé jusqu'à présent, car elle se situe en périphérie du sujet traité, est néanmoins très instructif pour des enseignants de mathématiques. Il montre qu'un élève d'un niveau pourtant exceptionnel, à la fois mûr et inventif, a reçu une formation qui reste lacunaire sur ce matériau de base des mathématiques que constituent les nombres.

La note signalée commence par parler des nombres rationnels et signale que certains nombres ne peuvent pas s'écrire comme quotient de deux nombres entiers relatifs. Deux exemples sont donnés : $\sqrt{7} = 2{,}645751311064\ldots$ et $\pi = 3{,}141592653589\ldots$ Puis il est dit que l'ensemble des nombres réels est l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels ; les propriétés de cet ensemble, muni des opérations d'addition et de multiplication usuelles, sont alors résumées par l'expression $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif, ordonné, archimédien et complet.

Cette présentation témoigne d'un décalage entre une vision générale avancée des nombres réels et une limitation de leur désignation individuelle, obligeant à recourir à la négation (les nombres qui ne sont pas rationnels, mais alors que sont-ils ?) illustrée par des exemples. Ces exemples se trouvent correspondre, en conformité avec ce que nous signalions à propos des acquisitions conceptuelles, à des situations où plusieurs registres d'expression interviennent (registre algébrique pour des radicaux et géométrique pour π, outre l'expression décimale – seulement approchée donc impropre). Certes, Benjamin Desbuquoit aurait sans doute été capable d'imaginer d'autres exemples, tel $0{,}1001000100001\ldots$, mais en ressentant alors probablement une gêne vis à vis de leur statut. Des expériences personnelles sur des objets numériques présentés dans plusieurs registres, comme les fractions reliées aux points d'une droite graduée (voir l'article de Robert Adjiage dans ce numéro), ou des fractions continues périodiques (exemple : $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}$), que d'ailleurs Euler connaissait, nous semblent faire cruellement défaut dans l'enseignement de base des mathématiques.

Bibliographie.

Le CD sur lequel est enregistré le dossier de Benjamin Desbuquoit :

J-P. Cazzaro, G. Noël, F. Pourbaix, P. Tilleuil, 1999, *Compétences terminales en mathématiques*, Université de Mons-Hainaut. Ce CD ROM peut être obtenu en s'adressant à Guy Noël, 86 rue de la Culée, B – 6927 RESTEIGNE.

Bibliographie indiquée dans le dossier

N.J. Schons, 1963 (3e édition), *Compléments d'arithmétique et d'algèbre*, La Procure, Namur – Bruxelles.

N. Nakatani, J-C. Perrinaud, D. Porté, 1992, *Géométrie, Algèbre, Terminales C et E,* collection Dimathème, Didier, Paris

P.H. Terracher, R. Ferrachoglou, 1994, *Mathématiques Terminale S (enseignement obligatoire),* Hachette, Paris

P.H. Terracher, R. Ferrachoglou, 1994, *Mathématiques Terminale S (enseignement de spécialité),* Hachette, Paris

et références des illustrations du dossier

Pour la Science, 1994, Dossier hors série, *Les mathématiciens*, Belin, Paris

Microsoft Encarta, 1999, *Encyclopédie*, édition de luxe.

R. Abraham, J.E. Marden, 1967, *Foundations of mechanics*, W.A. Benjamin Inc., New York – Amsterdam

B. Belhoste, 1985, *Cauchy, un mathématicien légitimiste au 19e siècle*, Belin, Paris

D. Bergamini, 1969, *Les mathématiques*, collections Time-Life

R. Caratini, 1972, *Les nombres et l'espace*, encyclopédie Bordas, Paris

L. Euler, *Introduction à l'analyse infinitésimale*

C.F. Gauss, 1981, *Werke (Band X)*, G. Olms Verlag, Hildesheim – New York

E. Hairer, G. Wanner, 1996, *Analysis by its history*, Springer Verlag, New York – Berlin

T. Needham, 1997, *Visual complex analysis*, Clarendon Press, Oxford

Newton, MDCCXL, *La méthode des fluxions et des suites infinies*, Debure, Paris.

Bibliographie complémentaire (références citées dans cet article).

IREM de Strasbourg, 1983, *Géométrie, Algèbre, Terminales C et E*, Istra, Strasbourg – Paris

IREM (travaux de la commission Inter-IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques), 1998, *Images, imaginaires, imaginations, une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes*, Ellipses, Paris

J. Borreani, P. Tavignot, R. Verdon, 2000, *Pratiques d'enseignement des mathématiques observées en classe de sixième*, CRDP - IUFM, Rouen

R. Duval, 1996, « Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques », *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 16/3, La Pensée Sauvage, Grenoble

V. Bongiovanni, 2001, *Les caractérisations des coniques avec Cabri-géomètre en formation continue des enseignants*, Thèse de l'Université Joseph Fourier accompagnée d'un CD de formation sur les coniques, Grenoble