

Observation de binômes travaillant avec un logiciel de calcul formel

Mohammed MOURADI*

Abstract**

The objective of this work is to study the effects of the utilisation of the software DERIVE, its impact on the common mathematical practices and their eventual changes in the students steps when solving problems. This research is based on the initiation to the software and observation of eight binomial first year university students. These binomials were observed separately, treating a problem of analysis, which leads to produce a script that contains the sequence of DERIVE's expressions completed by elements coming from observer's notes. Such observation was done for quite a long period of time so as to allow the manifestation of changes of approach of the questions treated resulting not only from the interaction with the machine but also with the individual interaction.

Résumé

L'objet de ce travail est une étude des effets de l'utilisation du logiciel DERIVE, de son impact sur les pratiques mathématiques usuelles et des éventuels changements dans les démarches des étudiants en situation de résolution de problèmes. La recherche s'appuie sur l'initiation au logiciel et l'observation de huit binômes d'étudiants de la première année universitaire. Les binômes ont été observés séparément, traitant un problème d'analyse, ce qui conduit à un "script" constitué de la séquence des expressions de DERIVE complétée d'après les notes de l'observateur. L'observation s'est faite sur une durée assez longue, qui permet la manifestation de changements d'approche des questions traitées, dus non seulement à l'interaction avec la machine mais aussi aux échanges interindividuels.

* Professeur-Assistant au Département de Mathématiques et Informatique de la Faculté des Sciences Dhar El Mahraz, Université Sidi Mohamed Ben Abdellah, B.P. 1796, Fès-Atlas, Maroc.

** Cet article a bénéficié pour sa préparation, de la participation du Professeur François Pluvinage de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg, dans le cadre du programme COPEP 97 S 20/1.

1. Introduction

L'évolution des technologies informatiques permet l'accès au calcul formel à un large public et favorise sa pénétration dans les établissements d'enseignement supérieur et ceux d'enseignement secondaire. L'utilisation de ces systèmes soulève de nombreuses questions générales, dont nous rappelons les suivantes : cerner ce que peuvent réellement apporter ces logiciels à l'enseignement des mathématiques, préciser les conditions d'une gestion efficace de ces nouveaux outils et déterminer des formations appropriées pour les enseignants (Michèle Artigue & al. 1995). Notre travail se situe dans cette problématique. Plus précisément, nous voulons étudier l'impact de l'utilisation d'un logiciel de calcul formel (en l'occurrence DERIVE), sur les pratiques et démarches des étudiants de la première année universitaire, en situation de résolution de problèmes. Pour ce faire, nous avons observé, lors d'une durée suffisamment longue, huit binômes d'étudiants résolvant un problème mathématique en utilisant le logiciel à leur guise, après avoir été initiés à son usage. A l'arrivée, il est apparu qu'outre l'impact de l'utilisation du logiciel, des caractéristiques individuelles de travail ont pu être mise en évidence (cf. au tableau qui donne une typologie des comportements des binômes, fin du paragraphe 4). Une telle retombée élargit les perspectives d'intervention didactique.

Signalons au passage que le Groupe de Recherche en Didactique des Mathématiques de Fès a privilégié ce mode d'investigation pour un certain nombre de travaux. Les recherches entreprises au sein de ce groupe (cf. par exemple Ahmed Behaj, 1998 et Moncef Zaki, 1991) permettent de s'appuyer sur une pratique éprouvée, pour mettre en place des situations favorables à l'observation et recueillir les données qui en résultent. Une telle méthodologie permet de ne pas se focaliser seulement sur les compétences mises en œuvre par les étudiants et les situations d'enseignement. La présente étude met en évidence que c'est le repérage d'attitudes, au travers de l'observation de stratégies de résolution, qui se trouve ainsi favorisée.

Pour l'apprentissage de disciplines telles que les mathématiques, l'évolution de l'enseignement conduit à ne pas se satisfaire de la seule situation paradigmatique usuelle, qui est celle d'un groupe dirigé par un enseignant. En ce qui concerne des pratiques comme les travaux personnels encadrés, l'élaboration de projets, la rédaction de mémoires supposant le recueil individuel d'une certaine documentation, les recherches comme celle qui est présentée ici sont à même de fournir des points d'appui aux enseignants qui s'y engagent déjà, ou s'y engageront à l'avenir.

2. L'expérimentation retenue et ses spécificités

2.1 Le cadre contractuel de l'expérimentation

L'expérimentation concerne des étudiants de la première année universitaire (section MP : mathématique et physique) qui, au cours de leurs études, n'ont jamais utilisé l'ordinateur. Une annonce faite en amphi avait sollicité les candidatures de binômes volontaires pour une expérimentation, dont les tenants et aboutissants avaient été succinctement décrits. Une limite pour l'observation avait été fixée à 10 binômes. Les volontaires pour l'expérimentation ont dépassé ce nombre, peut-être à cause de la présence de l'ordinateur, et il a donc fallu se restreindre aux dix premiers arrivés.

Aux étudiants retenus s'offrait ainsi la possibilité d'une découverte : celle de l'utilisation de l'outil informatique dans la résolution de problèmes en mathématique. De plus, l'expérimentateur avait décidé de retenir des problèmes portant sur des notions de leur programme, afin que l'expérimentation s'inscrive dans le cursus des étudiants comme des séances de révisions.

Pour les besoins de l'expérimentation, il y avait à analyser les démarches des étudiants, en situation de résolution de problèmes, utilisant librement le logiciel DERIVE et à s'appuyer sur l'observation des comportements, pour dégager les caractéristiques essentielles de ces démarches. Il fallait pour cela que les binômes acceptent que leur activité (échanges verbaux, utilisation du logiciel, travail "papier – crayon") soit suivie par l'expérimentateur et s'engagent à élaborer des productions écrites remises à chaque fin de séance.

L'expérimentation s'est déroulée en deux étapes :

- 1- Nous avons organisé d'abord deux séances d'initiation au logiciel DERIVE, d'une durée de trois heures chacune. La première séance est essentiellement consacrée à la familiarisation avec la syntaxe imposée par le logiciel et à la manipulation des principales commandes du logiciel. Les étudiants travaillent à deux sur une machine, ils ont à leur disposition une fiche technique qui décrit brièvement DERIVE (une quinzaine de pages). L'enseignant dirige le travail, il note au tableau les instructions à exécuter et suit les activités de chaque binôme. La deuxième séance est organisée pour permettre aux étudiants de mobiliser les connaissances acquises lors de la première séance dans la résolution d'exercices simples.
- 2 - Ensuite, nous avons invité les étudiants à résoudre un problème d'analyse concernant plusieurs aspects de l'activité mathématique, avec accès libre au logiciel DERIVE, sans

contraintes, ni temporelles, ni d'évaluation. Les observations sont faites séparément, leur durée moyenne est de deux heures et trente minutes. L'observateur prend des notes pendant le déroulement de la séquence. Il n'intervient que lors de blocage prolongé dû à la méconnaissance de DERIVE ou pour demander des explications sur certains comportements incompréhensibles. Nous espérons ainsi atteindre une représentation aussi fidèle que possible des connaissances mises en œuvre, à travers des comportements authentiques. L'appréciation des résultats fournis par le logiciel est laissée à la charge de l'étudiant, qui devrait déterminer tout seul ce qui peut être accepté sans justification. A la fin de la séance l'observateur récupère le travail des étudiants sur DERIVE, la rédaction de leurs solutions et leurs brouillons.

2.2 Problème proposé aux étudiants

On considère la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{-1/x} \sqrt{1+x+x^2} \operatorname{atan}(x) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

1°/ f est-elle dérivable en 0 ?

2°/ Montrer que $\operatorname{atan}(x) + \operatorname{atan}(1/x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

3°/ Montrer que l'on peut écrire f(x) sous la forme :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x} h(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0, \text{ au voisinage de } +\infty$$

$$f(x) = px + q + \frac{r}{x} + \frac{1}{x} g(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0, \text{ au voisinage de } -\infty$$

Déterminer les constantes a, b, c, p, q et r.

4°/ Préciser les asymptotes de f et leur position par rapport à la courbe représentative de f. Tracer cette courbe et les asymptotes obtenues.

L'énoncé ci-dessus a été retenu pour les caractéristiques suivantes :

- Il concerne des notions qui figurent au programme d'analyse de la première année universitaire et qui ont été déjà abordées dans l'enseignement du second degré.
- Il fait intervenir des questions qui ont fait l'objet d'un enseignement universitaire habituel sous forme de cours magistraux et de travaux dirigés.
- Il est présenté sous la forme classique d'une suite de questions fermées, plus ou moins

dépendantes les unes des autres, afin que l'impact de l'utilisation du logiciel sur l'activité des étudiants soit repéré sur différents types de situations mathématiques (calcul algébrique, obtention de limites, démonstration, études graphiques).

- Le problème comporte des questions sollicitant des savoir-faire, qui se prêtent bien à l'utilisation du logiciel, sans toutefois que l'activité ne soit réduite à une simple exécution de commandes du logiciel. Si, pour l'initiation à DERIVE, les questions proposées pouvaient être résolues directement grâce à des commandes du logiciel, en revanche, les questions du problème, sauf le tracé de graphe, exigent un travail mathématique consistant. Elles nécessitent également la mobilisation de connaissances plus élaborées, qui se situent au niveau de la logique d'utilisation et de la logique du fonctionnement du logiciel. Ces connaissances sont nécessaires pour interpréter correctement les résultats fournis par le logiciel. Parmi ces questions il y en a qui ne se traitent normalement, en papier/crayon, que dans le registre algébrique¹, à l'aide du logiciel elles peuvent être abordées et résolues rapidement, aussi bien dans le registre algébrique que graphique. Ainsi, en facilitant l'accès à plusieurs registres, DERIVE pourrait suggérer de nouvelles approches qui émergent de l'articulation des différents registres disponibles et qui s'adaptent mieux aux environnements informatiques.

2.3 Rappel de quelques caractéristiques du logiciel DERIVE.

DERIVE est un logiciel de calcul symbolique qui n'est pas conçu spécialement pour l'enseignement ou l'apprentissage des mathématiques, mais plutôt comme un assistant mathématique. Il évalue, comme tous les systèmes de calcul formel, avec une précision infinie², des expressions algébriques. Ces expressions peuvent combiner des constantes numériques, nombres naturels, rationnels, irrationnels et nombres transcendants comme π ou e , des lettres, des polynômes à une ou plusieurs indéterminées, des fractions rationnelles, des fonctions usuelles (fonctions polynomiales ou rationnelles, fonctions trigonométriques, logarithmes, exponentielles, etc.), des vecteurs, des matrices, etc. Comme le fait remarquer J. Zizi (1993) : "Une même expression algébrique peut avoir un grand nombre d'écritures et il n'existe pas d'algorithme général permettant de reconnaître deux écritures différentes d'une même expression".

¹ Ici, le coût de traitement dans le registre graphique est excessif ; le problème du signe de la dérivée est infaisable en papier/crayon.

² dans les limites de la capacité de l'ordinateur.

Nous présentons dans ce qui suit quelques spécificités³ du logiciel DERIVE, en les comparant parfois avec MAPLE. Nous mettrons plus particulièrement en avant les six caractéristiques suivantes.

i – DERIVE est réputé être très accessible.

ii – Le logiciel peut fonctionner sur des PC très modestes et même sur certaines calculatrices programmables.

iii – Il demande que chaque entrée soit introduite sous forme d'une ligne d'écriture. Ainsi l'expression

$$a^{x-1} + \frac{x^2 + 2x + 1}{3 - \frac{1}{(x+8)^5}}$$

doit être entrée sous la forme $a^{(x-1)+(x^2+2x+1)/(3-1/(x+8)^5)}$. Elle s'affiche alors à l'écran sous sa forme mathématique habituelle.

iv – Les possibilités de programmation avec DERIVE se réduisent à l'utilisation d'instructions conditionnelle et de répétitions.

v – Au contraire de MAPLE, DERIVE affiche des expressions sans distinguer celles qui ont été entrées et celles qui résultent d'un traitement. Il ne facilite pas non plus l'introduction de commentaires ce qui complique quelquefois la compréhension d'une session de travail sur ce logiciel.

vi - Il ne donne pas accès à son utilisateur aux possibilités de "debug", ni à la fonction "trace" qui permettent de voir l'évolution du système ou de comprendre ce qu'il fait au cours d'une évaluation. Il devient difficile d'expliquer certaines aberrations du logiciel, que nous pouvons illustrer par les trois exemples qui suivent.

- DERIVE ne peut ni factoriser ni calculer les racines du polynôme

$$4x^8 + 48x^7 + 256x^6 + 792x^5 + 1590x^4 + 2196x^3 + 2104x^2 + 1290x + 459$$

(cf. C. Gomez 1995, pour cet exemple), alors que MAPLE donne les racines :

$$-\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{-1 \pm 2\sqrt{-18 \pm \sqrt{13}}}}{2}$$

- DERIVE trouve $\int_0^3 (x^2 - 3\left[\frac{x^2}{3}\right])dx = -18$ en "mode exact", alors qu'en "mode approché", il

fournit un résultat correct comme 3.54438 ; MAPLE opère différemment mais ne fait pas mieux, puisqu'il donne aussi une valeur négative (-9) comme résultat pour le calcul "exact".

³ Pour une étude comparative des trois logiciels Derive, Maple et Mathematica consulter Zizi (1993).

- DERIVE donne la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, mais n'évalue pas $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$ bien que cette dernière valeur puisse être déterminée à partir de la précédente par un calcul très simple. Cet exemple est mentionné par Trouche (1997), qui explique cette défaillance du logiciel par des raisons de limitation de la mémoire.

Zizi (1993) qualifie DERIVE de "système logiciellement fermé [...], où on obtient ce que l'on veut par une succession d'appuis sur des touches et un minimum de saisies et de syntaxe". Elle précise par ailleurs que "cette politique de fermeture délibérée est exprimée dans la documentation", puisque Rich & Stoutemeyer (1993) indiquent : "Les fiches contiennent certaines fonctions auxiliaires qui ne sont pas décrites ici. Elles ne sont pas construites pour que vous les utilisiez directement. Par conséquent, vous n'avez pas besoin de savoir comment les utiliser". Ainsi, lorsqu'on utilise DERIVE il est difficile pour certaines études de dépasser l'approche "boîte noire". En fait les échecs du logiciel doivent être pris en charge par l'utilisateur lui-même. C'est lui qui doit trouver les explications plausibles, à travers un questionnement qui pourrait l'engager dans une phase essentielle pour l'apprentissage, tant que les réponses recevables restent à sa portée.

Par ailleurs, il est très important d'avoir présent à l'esprit que DERIVE travaille sur des expressions qui ne sont pas des phrases⁴. Cela risque notamment de compliquer la compréhension et l'interprétation des retours du logiciel. En particulier, lorsqu'on utilise "Ctrl + Entrée" lors de la saisie d'une expression, le logiciel exécute la commande et fournit le résultat sans même faire apparaître la commande qu'il a exécutée. Une difficulté relevée par Michèle Artigue (1997) concerne la simplification automatique faite par le logiciel lors de la saisie d'expressions. "[...]DERIVE ne réintroduisant pas les parenthèses tapées par les élèves. Il s'ensuit un quiproquo, l'enseignant voulant leur faire dire qu'elles ont oublié les parenthèses, les élèves de leur côté disant que non, que c'est la faute à DERIVE".

3. Analyse a priori

Le problème proposé concerne deux types d'activités : une activité de démonstration qui fait l'objet de la deuxième question et, une activité technique consistant à tracer des graphes et à calculer des limites ou des développements limités (notés DL par la suite). Ces calculs

⁴ Le discours y compris mathématique traite de phrases comme unités significantes.

concernent des expressions composées de plusieurs termes. Ainsi, l'outil utilisé pour accomplir cette tâche influence énormément sa réalisation effective.

3.1 Dérivabilité à l'origine et développement asymptotique

La première question est relative à l'étude de la dérivabilité de la fonction à l'origine, elle conduit au calcul de limite de l'expression $g(x)$ ⁵. Quant à la troisième question, elle concerne le développement asymptotique, elle donne lieu au calcul de DL de l'expression $f(t)$.

$$\text{Où : } g(x) = \frac{e^{-1/x} \sqrt{1+x+x^2} \operatorname{atan}(x)}{x} ; f(t) = e^{-t} \sqrt{1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} \operatorname{atan}\left(\frac{1}{t}\right).$$

3.1.1 Approche ascendante

Dans l'environnement papier/crayon on dispose de quelques résultats sur les limites, on connaît les DL des principales fonctions usuelles et on connaît également quelques théorèmes concernant par exemple la somme, le produit ou la composition de fonctions. Ainsi, pour calculer la limite ou le DL d'une expression assez compliquée (du type $f(t)$ ou $g(x)$) on procède en trois étapes : décomposer d'abord en sous expressions simples puis, traiter chacune des sous expressions et utiliser enfin un ou plusieurs théorèmes pour établir la solution finale. Cette approche sera qualifiée d'**ascendante**, elle se développe à partir de résultats locaux accessibles pour atteindre la réponse globale. Une synthèse est donnée à travers les **schémas 1 et 2**.

Le schéma 1 met en évidence une approche de résolution ascendante, dont la réalisation nécessite, d'une part, des connaissances mathématiques, en particulier dans le domaine des limites - calcul de limites de fonctions usuelles, théorème sur le produit de limites, fonctions équivalentes - et d'autre part, elle fait intervenir un savoir-faire pour choisir le découpage adéquat et faire les aller-retour nécessaires pour la résolution de la question. Ce savoir-faire s'acquiert par l'expérience et la pratique quotidienne des mathématiques, il fait rarement l'objet d'un enseignement explicite.

Le plus délicat dans cette résolution revient à lever l'indétermination. En général, ce problème est difficile, car une application immédiate de résultats du cours ne suffit pas pour le résoudre. Les DL habituellement utilisés pour débloquer ce type de situation ne peuvent pas être utilisés, les fonctions qui interviennent dans l'expression traitée n'admettent pas toutes un DL au voisinage de l'origine.

⁵ Cette fonction sera désignée par G dans l'environnement DERIVE, pour respecter la syntaxe du logiciel.

Soit $g(x) = \frac{e^{-1/x} \sqrt{1+x+x^2} \operatorname{atan}(x)}{x}$

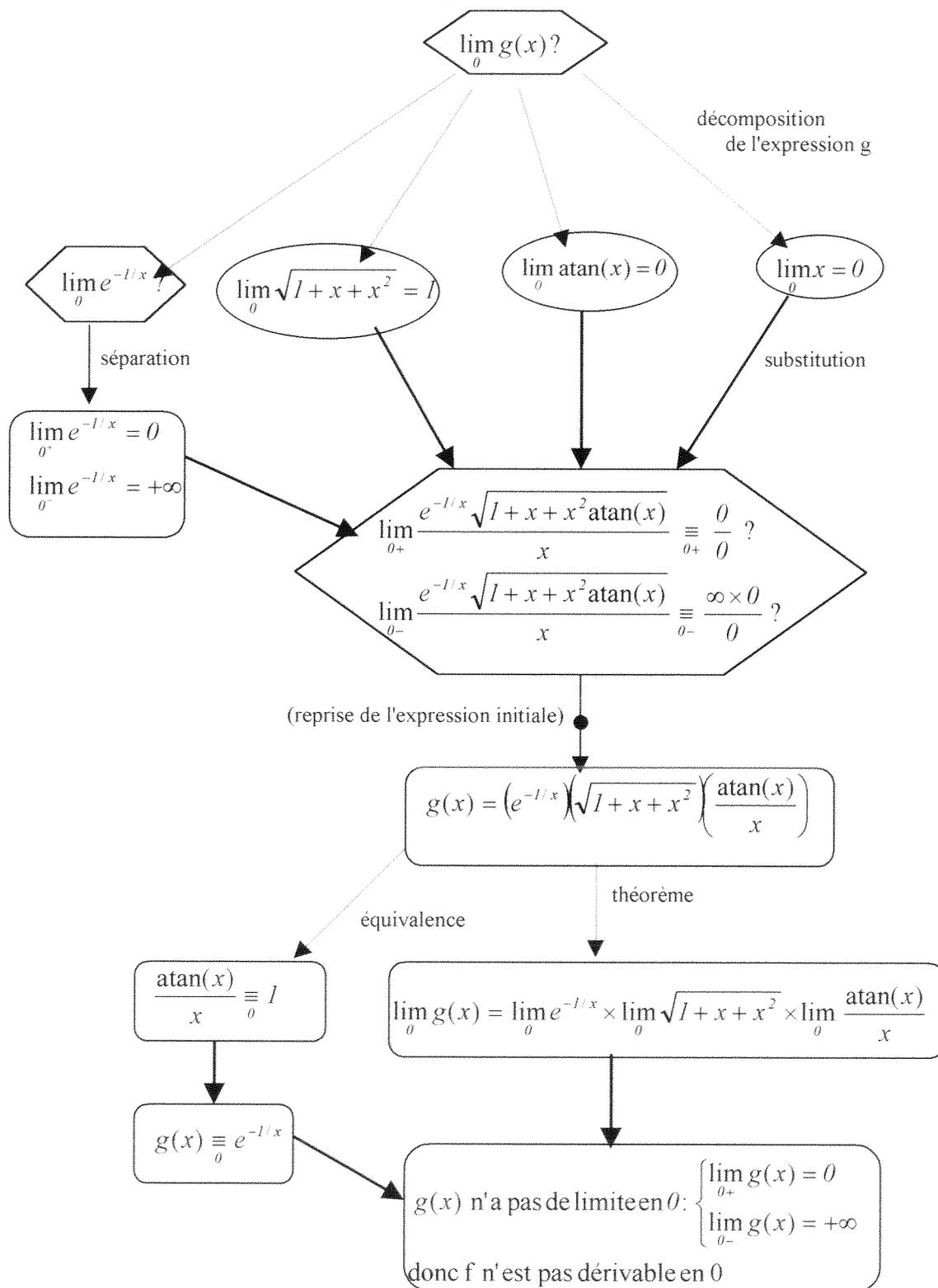


Schéma 1 : étude de dérivabilité à l'origine en remontant de résultats locaux

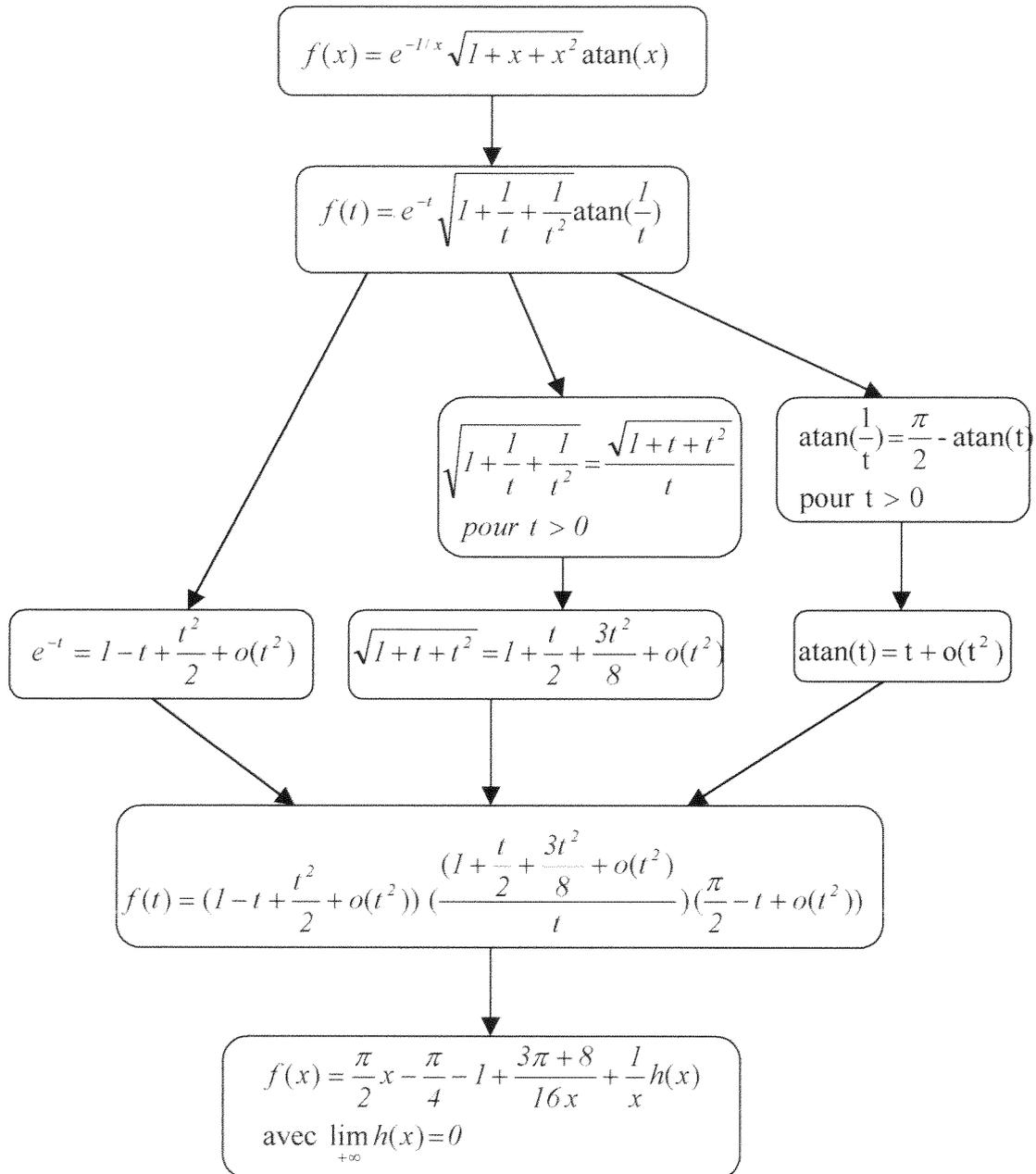


Schéma 2 : développement asymptotique de la fonction en remontant de résultats locaux

Le schéma 2 fait apparaître une procédure de calcul très technique, mais qui ne se réduit pas à une exécution automatique d'algorithmes. Cette procédure est constituée de plusieurs étapes de natures différentes :

- Chercher d'abord une formulation convenable qui permet d'appliquer les formules des DL, ce qui revient à réécrire quelques termes de l'expression considérée à l'aide de fonctions usuelles dont on connaît les DL.
- Calculer ensuite les DL de chacun des termes.
- Rassembler les résultats partiels obtenus pour établir la formule cherchée.

La conduite de ces différentes étapes et leur articulation demande une bonne maîtrise du calcul algébrique et une flexibilité cognitive satisfaisante qui permet de passer d'un traitement à l'autre, puisque chacun des DL s'obtient par un traitement différent.

3.1.2 Approche descendante

En revanche, dans l'environnement DERIVE, outre les outils disponibles dans l'environnement usuel, le logiciel offre des possibilités supplémentaires importantes. Il permet de calculer les limites et les DL d'expressions assez complexes et peut tracer rapidement les graphes des fonctions de l'utilisateur. Il met ainsi à la disposition de l'individu des outils qui lui permettent d'aborder les questions de limites et de DL d'une manière globale, sans être obligé de passer par une atomisation de la tâche. La décomposition de la tâche ne sera entreprise que si l'étude globale échoue. Nous qualifions cette approche de **descendante**.

C'est cette démarche que présentent les **schémas 3 et 4** (voir pages suivantes).

Dans l'environnement DERIVE la décomposition décrite dans le schéma 1 complique inutilement la tâche. Le plus naturel, une fois l'expression $g(x)$ saisie, est de la traiter comme une seule entité. Nous faisons l'hypothèse que la plupart des étudiants vont faire calculer au logiciel la limite de cette expression, en adoptant de manière spontanée l'approche descendante. Alors que d'habitude dans l'environnement usuel, ils procèdent plutôt par l'approche ascendante. L'analyse de la tâche fait apparaître trois points importants.

a – Tracé de graphe : Le logiciel DERIVE trace très rapidement le graphe de la fonction considérée et permet ainsi de pouvoir résoudre la première question du problème dans le registre graphique de façon quasi immédiate. L'économie que procure l'utilisation d'un logiciel pour la résolution graphique dépend de la familiarité avec le logiciel et de l'expérience acquise qui permet d'apprécier les productions du logiciel à leur juste valeur. Les environnements informatisés favorisent l'émergence de nouvelles pratiques : tracer le graphe d'une fonction, devient le geste premier des étudiants qui utilisent très fréquemment les logiciels graphiques.

$$\text{Soit } G(x) = \frac{\text{EXP} \left[-\frac{1}{x} \right] \text{RAC} (1 + x + x^2) \text{ATAN} (x)}{x}$$

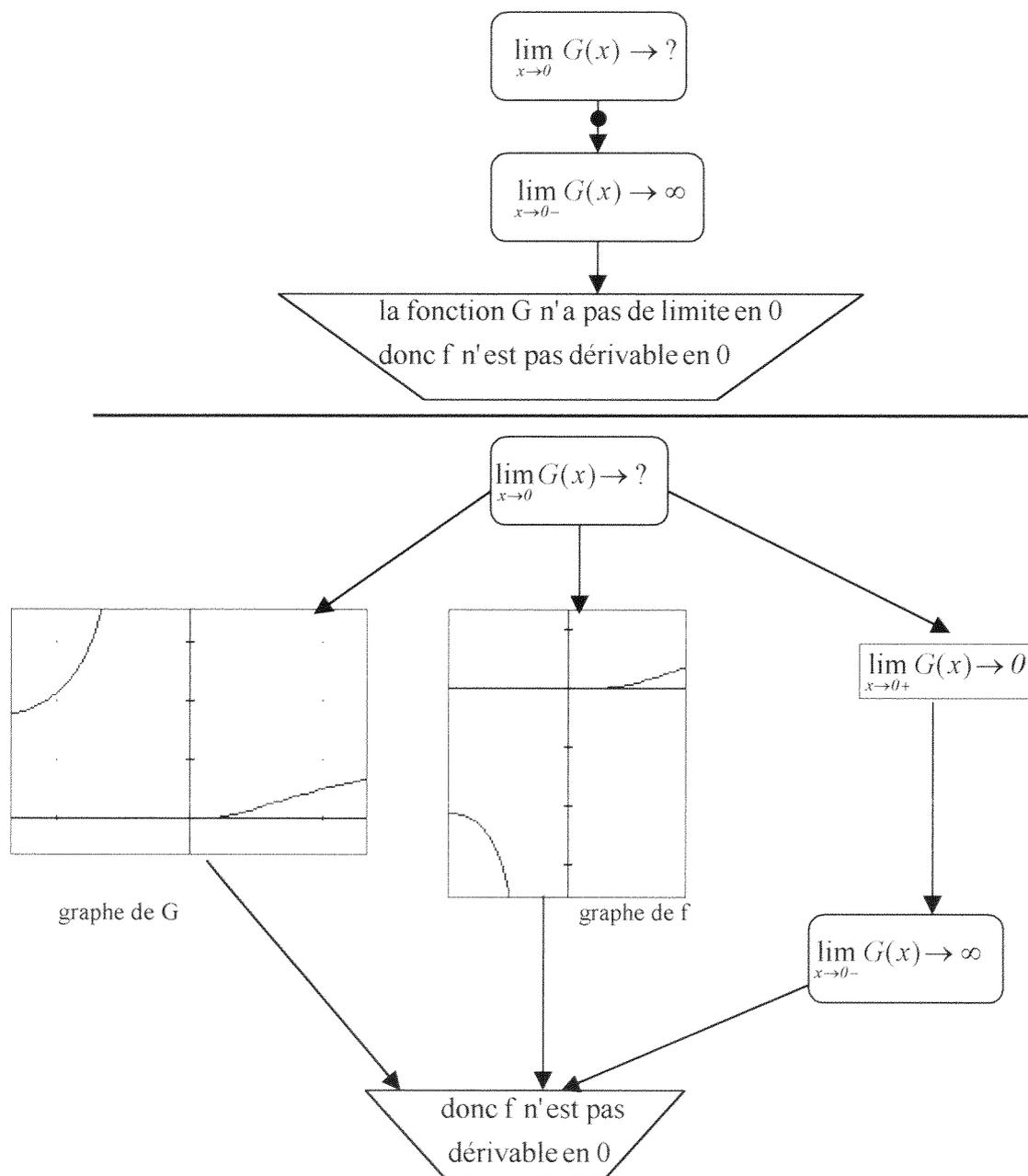
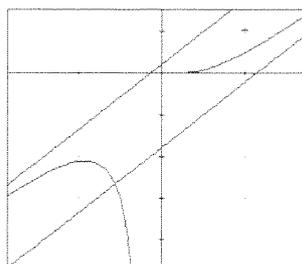


Schéma 3 dérivabilité à l'origine dans l'environnement DERIVE



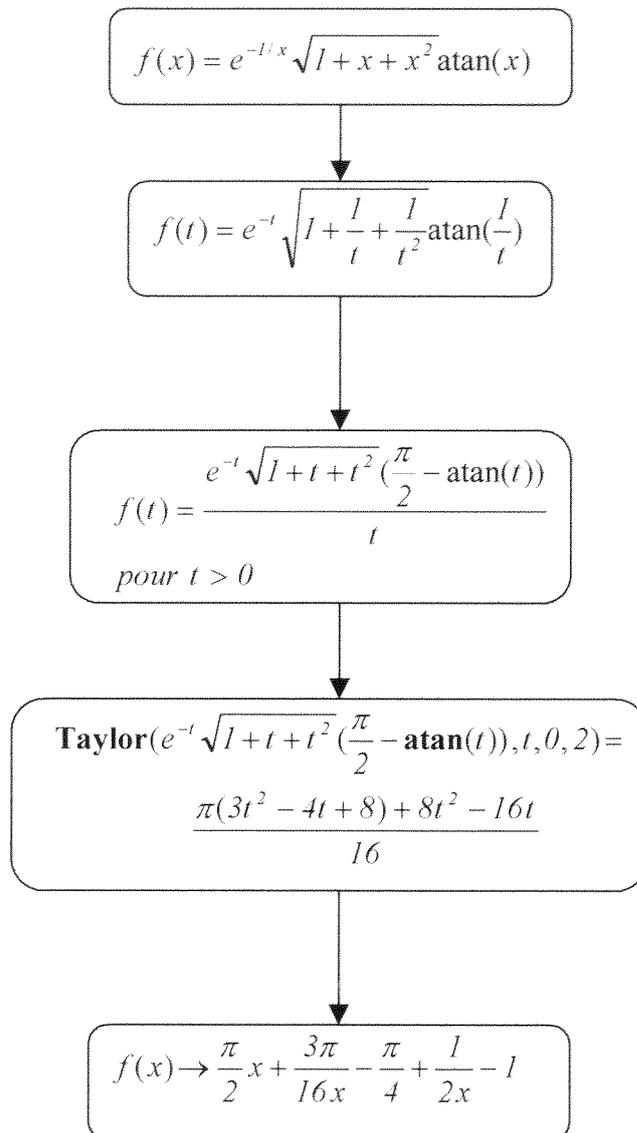


Schéma 4 : développem ent asymptotiq ue de la fonction dans l'environnem ent DERIVE

Luc Trouche (1997) parle de "preuve par l'image" et constate par ailleurs : "une évolution sociale qui prête à l'image des pouvoirs explicatifs suprêmes". La solution graphique nécessite l'articulation entre le registre algébrique et le registre graphique. Elle ne peut s'acquérir simplement à travers une utilisation fréquente du logiciel mais, exige un enseignement spécifique qui doit consolider les connaissances du sujet dans chacun des registres et développer sa flexibilité cognitive pour lui assurer une meilleure mobilité entre les différents registres.

La pénétration de l'outil informatique dans les établissements marocains est encore très timide⁶. D'ailleurs, comme nous l'avons déjà signalé, les étudiants observés n'avaient aucune expérience de l'ordinateur. Nous supposons qu'aucun étudiant ne sera tenté par une approche graphique pour résoudre cette question.

b – Polysémie du point d'interrogation : DERIVE permet d'aborder la première question du problème par les deux approches citées plus haut et il renvoie un point d'interrogation, dans les deux cas, lorsque les questions sont adressées au logiciel sous leur forme brutale. Or plusieurs situations peuvent conduire DERIVE à renvoyer un point d'interrogation, ce qui complique considérablement la signification à donner à cette réponse. De plus :

- Un point d'interrogation constitue pour les étudiants une nouvelle forme de réponse, inattendue, surprenante et provocante. Il marque une rupture du contrat didactique. Dans l'enseignement usuel on reçoit rarement comme réponse un point d'interrogation. Les questions ont généralement une réponse unique. Les problèmes ouverts et les problèmes que les étudiants ne peuvent résoudre que partiellement, parce que la solution complète leur est inaccessible (cf. Lagrange 1995), sont très rares, voir totalement absents de l'enseignement classique.

Le point d'interrogation de DERIVE, de même que le renvoi à l'identique d'une expression entrée (nous parlons de "silence du logiciel" dans ce dernier cas), laisse une question ouverte, suscitant des explications et des justifications.

- L'interprétation du point d'interrogation envoyé par DERIVE est étroitement liée à la représentation que l'on se fait de l'ordinateur et la manière dont on a appris à l'utiliser. Les élèves d'une classe expérimentale de Luc Trouche⁷ ont exprimé ainsi leur avis : "Au début de l'année, nous avions tendance à nous servir de la calculatrice à outrance et donc à lui accorder

⁶ Les établissements du secondaire ne sont pas tous équipés de matériel informatique ; pour ceux qui en disposent, il est largement insuffisant. Au supérieur, outre le manque alarmant de matériel, beaucoup d'enseignants n'expriment pas un grand enthousiasme envers cet outil.

⁷ pour les détails cf. Luc Trouche (1998)

trop vite notre confiance. Mais les séances de travaux pratiques nous ont montré à nos dépens que nous avons tort [...] Il faut surtout accorder une place importante à la réflexion, sinon nous ne pouvons arriver à rien [...] C'est ainsi que d'échec en échec, de surprise en surprise, nous avons agréablement appris le véritable usage de cette calculatrice."

Notons la difficulté à se prononcer sur la faisabilité d'une tâche, lorsqu'un logiciel n'arrive pas à l'accomplir pour différentes causes, dont voici quelques-unes :

i - La formulation adoptée n'est pas adéquate, elle ne respecte pas les exigences de la logique d'utilisation du logiciel.

ii - Le mode retenu pour traiter la question est mal choisi. Un logiciel de calcul symbolique peut bloquer sur le calcul exact d'une racine d'un polynôme, mais peut, en contrepartie, déterminer très rapidement une solution approchée et tracer immédiatement une représentation graphique qui visualise la racine.

iii - Le logiciel utilisé n'est pas suffisamment performant.

iv - L'outil n'est pas approprié au traitement de la tâche proposée. Actuellement l'ordinateur n'est pas en mesure de résoudre certains problèmes mathématiques d'un niveau élémentaire (notamment, ceux faisant appel à des raisonnements par l'absurde).

Nous avons voulu, en proposant un énoncé qui puisse conduire l'utilisateur du logiciel à rencontrer comme réponse un point d'interrogation, provoquer chez les étudiants un comportement très recherché dans les approches constructivistes d'apprentissage, à savoir réfléchir sur les connaissances mathématiques et informatiques disponibles dans le milieu. Une telle réflexion est un objectif majeur de notre expérimentation.

c - Gestion et économie de travail dans l'environnement DERIVE : Le logiciel DERIVE peut fournir tous les développements souhaités, mais demande au préalable un travail d'adaptation aux conditions d'application de la commande Taylor⁸. Cependant rien n'est gratuit, l'utilisation du logiciel est assujettie à plusieurs contraintes. Il faut connaître d'abord quelques commandes de base et avoir une certaine expertise pour piloter et gérer efficacement de pareils calculs. En fait, l'approche ascendante s'effectue en plusieurs étapes et génère de nombreuses expressions algébriques dont la manipulation ne va pas de soi. Elle peut entraîner des difficultés insoupçonnées, en particulier lorsque :

- on doit combiner plusieurs expressions qui ne figurent pas sur le même écran parce qu'elles sont trop éloignées les unes des autres ;

- un résultat est trop long et n'apparaît pas entièrement à l'écran ;

- on doit bâtir une expression à partir de plusieurs sous-expressions très éparpillées.

A ce propos (Rogalski, 1994) écrit : "Il ne paraît pas souhaitable d'inciter, dans ce domaine, à abandonner le papier/crayon. Seul celui-ci permet pour l'instant une vision agissante instantanée qui semble, en particulier, spécifique du calcul : la vitesse de réaction, l'écriture immédiate, rapprocher des termes, corriger des morceaux, la vision globale des formules, l'anticipation visuelle des modifications possibles... utilisent une interaction entre la main, l'œil et le cerveau qui est, semble-t-il bien plus rapide et efficace que l'utilisation d'un clavier, la manipulation d'une souris, le choix dans un menu... actions qui sont lentes, réductrices et séquentielles."

Les comportements des étudiants allaient-ils confirmer et appuyer ces propos ? L'approche ascendante est couramment utilisée dans l'environnement usuel. Nous supposons que plusieurs binômes vont l'adapter à l'environnement DERIVE. Ils seront ainsi conduits à développer une longue procédure de calcul. Quelle serait alors la nature des difficultés qui pourraient en résulter, et quel genre d'imbrication auraient-elles avec les connaissances mathématiques ? Cependant lorsqu'on remplace x par $1/t$ dans l'expression de la fonction f et qu'on demande sa simplification on obtient :

$$(G_1) : \frac{\pi e^{-t} \sqrt{1+t+t^2}}{2t} - \frac{e^{-t} \sqrt{1+t+t^2} \operatorname{atan}(t)}{|t|}$$

ou

$$(G_2) : \frac{e^{-t} \sqrt{1+t+t^2} (\frac{\pi}{2} - \operatorname{atan}(t))}{t} \text{ pour } t > 0$$

Cette simplification est assez élaborée : elle remplace l'expression $\sqrt{1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}}$ par $\frac{\sqrt{1+t+t^2}}{|t|}$ et utilise implicitement la proposition annoncée à la deuxième question. Après le travail se réduit à l'exécution d'une série de commandes très simples. Cette façon de procéder est beaucoup plus économique que l'approche descendante précédemment décrite. Elle nécessite moins d'opérations, donc moins de manipulations sur ordinateur et par conséquent on a moins d'occasions de se tromper. La deuxième question devient superflue, DERIVE utilise automatiquement la proposition annoncée.

⁸ DERIVE ne donne pas les développements limités, mais peut calculer les développements en série

3.2 Démonstration

La deuxième question concerne la démonstration, c'est une activité essentielle du travail mathématique. DERIVE permet de calculer différentes valeurs de l'expression $\text{atan}(x) + \text{atan}\left(\frac{1}{x}\right)$ pour plusieurs valeurs non nulles de la variable x . Il retourne $\frac{\pi}{2} \text{sign}(x)$, lorsqu'on applique la commande simplifie à cette expression, il peut également tracer rapidement son graphe. Ainsi DERIVE offre plusieurs possibilités pour entrer dans la résolution de cette question et élargit le champ d'investigations, en permettant d'aborder cette question aussi dans le registre graphique, chose à laquelle on ne pense pas du tout en situation papier/crayon. Les multiples essais autorisés par le logiciel, auront-ils un effet sensible sur les attitudes et démarches des étudiants, dans cette phase de démonstration ? Quel sera le statut du logiciel dans cette phase importante de l'activité mathématique ? L'accessibilité et la rapidité de réponse de DERIVE vont-elles favoriser le tâtonnement ? Michèle Artigue (1990 b) a constaté que les élèves de lycée accordent plus d'importance au tâtonnement lorsqu'il est effectué sur machine, qu'en est-il pour nos étudiants du supérieur ?

3.3 Tracé de graphe

La quatrième question du problème concerne les deux asymptotes obliques et leurs positions par rapport à la courbe représentative de la fonction. Ces asymptotes se déduisent directement des deux formules du développement asymptotique de la fonction. DERIVE trace instantanément sur le même graphe la courbe de la fonction et les deux asymptotes, pour cela, il suffit de sélectionner les bonnes expressions et de leur appliquer la commande graph du logiciel. Le tracé des graphes ne demande aucune étude préalable indispensable telle que c'est le cas dans l'environnement papier/crayon. Toutefois, si on voulait la faire on se heurterait à la complexité de l'étude de la dérivée, qui a pour expression :

$$f'(x) = e^{-1/x} \sqrt{1+x+x^2} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{2x+1}{2(1+x+x^2)} \text{ATAN}(x) + \frac{1}{1+x^2} \right]$$

On est vraiment désarmé pour trouver les zéros de cette dérivée. Cela constitue un excellent exemple pour montrer aux étudiants les possibilités que possède DERIVE dans le registre graphique.

4. Analyse des démarches observées

4.1 Traitement des différentes questions

de Taylor d'une expression.

Rappelons que l'expérimentation s'est déroulée en deux étapes : la première est consacrée à l'initiation au logiciel DERIVE. Le suivi des étudiants pendant le déroulement de l'observation et l'analyse des données recueillies nous suggèrent une structuration des connaissances nécessaires pour apprendre à utiliser le logiciel de façon judicieuse en mathématique, en trois niveaux :

- le niveau 1 qualifié d'introductif, est relatif aux connaissances concernant les différentes commandes du logiciel, la syntaxe imposée et la manipulation de fenêtres et fichiers ;
- le niveau 2 relatif à la logique d'utilisation du logiciel, concerne la connaissance de l'explicitation exigée par le logiciel et l'implicite qu'il autorise ;
- le niveau 3 relatif à la logique de fonctionnement du logiciel, concerne les connaissances des procédures et algorithmes utilisés par le logiciel pour produire ses résultats.

La deuxième étape est destinée à l'observation des binômes. L'enseignant qui suit les étudiants avait pour ligne de conduite de n'intervenir que dans le cas où la méconnaissance de DERIVE conduirait à un blocage qui dure trop longtemps, ou pour demander des éclaircissements à propos d'un comportement qui lui reste obscur. Ainsi, une grande autonomie dans le travail des étudiants a pu être observée ; durant les huit séances d'observation, l'enseignant a été rarement sollicité (cas de blocage : pas de réponse de la machine et à propos du message : "memory full").

4.1.1 Etude de la dérivabilité de la fonction à l'origine et développement asymptotique

- Les stratégies de résolution des étudiants ont été conçues exclusivement dans le registre algébrique, et sont centrées sur le logiciel. D'ailleurs, conformément à ce que nous avons prévu dans l'analyse a priori, aucun binôme n'a tracé le graphe de la fonction pour voir ce qu'il peut en tirer. Le coût excessif du tracé de graphes en papier/crayon et l'expérience très limitée des étudiants de l'emploi d'outils informatiques pour la représentation graphique, contribuent à renforcer le cloisonnement des étudiants dans le registre algébrique.
- Tous les étudiants ont entamé la résolution des deux questions par une approche descendante, DERIVE leur a envoyé un point d'interrogation. Ensuite, plusieurs démarches ont été observées (voir l'étude détaillée ci-après).
- La fiche technique mise à la disposition des étudiants a été très peu utilisée ; il n'y a que deux binômes qui l'ont consultée (une seule fois) pour vérifier la syntaxe de la commande "Taylor", suite au "?" renvoyé par DERIVE.

En ce qui concerne la première question :

1 – L'interprétation abusive du retour d'un point d'interrogation a pu autoriser à conclure. Le binôme 5 en a déduit que la fonction n'est pas dérivable en 0. Un étudiant de ce binôme prétend que si DERIVE n'a pas pu calculer la limite, c'est qu'elle n'existe pas.

2 – Les discussions entre les étudiants et les tentatives de résolution en papier/crayon ont permis d'obtenir la solution en traitant la question globalement grâce au logiciel. L'approche descendante peut s'avérer très économique, d'où son succès auprès des étudiants. D'ailleurs aucun étudiant n'a pu résoudre le problème des formes indéterminées entraîné par le calcul des différentes limites de l'expression $f(x)/x$. Ce qui nous a le plus surpris est que personne n'a demandé comment le logiciel a procédé pour résoudre le problème. Il semble que l'essentiel est de fournir une réponse, peu importe le moyen pour y arriver. Le logiciel est devenu rapidement un outil sûr et très sollicité pour les processus de contrôle et de validation. Ce changement est trop rapide à notre avis, comme le fait remarquer Michèle Artigue (1997) : " Il y a pour nous un cadre dominant : celui de l'environnement usuel. C'est par rapport à lui que fondamentalement, même lorsque nous travaillons dans l'environnement DERIVE, nous continuons à penser les tâches mathématiques, évaluer leur pertinence, comme la validité de telle ou telle réponse. Il n'y a pas de raison que ce soit automatiquement le cas pour les élèves." En revanche, pour la troisième question, signalons d'abord que deux binômes n'ont pas réussi à poursuivre les calculs jusqu'au bout. L'un a procédé par tâtonnement, il a multiplié les essais à l'aveuglette sans tenir compte des rétroactions du logiciel. Il effectue quelquefois un calcul et quelques lignes plus loin il refait la même chose (cf. binôme 7, Annexe). Ces étudiants multiplient les tentatives sur DERIVE espérant en tirer quelque chose de positif. Nous assistons, vraiment à un phénomène qualifié de "pêche de la solution" par Michèle Artigue. Mais la tâche ici est trop compliquée pour être résolue par une stratégie de type essai/échec : d'abord le milieu est opaque, DERIVE ne donne aucun renseignement sur les résultats qu'il fournit, ni comment il les produit. En outre, comme nous l'avons vu, les points d'interrogation peuvent avoir un rapport avec les concepts mathématiques ou avec la logique d'utilisation du logiciel, et les deux causes sont quelquefois imbriquées. Le binôme 8 (constitué d'un seul étudiant) a fait développer les trois fonctions à l'ordre 7. Il a obtenu un polynôme gigantesque dont l'expression n'apparaît pas entièrement sur l'écran. Ce polynôme qui est de degré 21 complique inutilement la tâche, l'ordre 2 suffit pour résoudre la question. Le logiciel perturbe beaucoup plus cet étudiant qu'il ne l'aide.

Les six autres binômes n'ont pas réussi au premier essai, leurs tentatives ont d'abord échoué. Ils se sont contentés, dans un premier temps, d'envoyer brutalement la question à DERIVE,

sans tenir compte de la logique d'utilisation de la commande Taylor. Quelques-uns ont appliqué cette commande à l'expression de la fonction donnée sous sa forme initiale ou après avoir substitué $1/t$ à la variable x . Les autres ont essayé de calculer un développement asymptotique de la fonction donnée en utilisant la commande Taylor. Le logiciel leur a envoyé des points d'interrogation. Deux binômes seulement ont alors consulté leur fiche technique sur le logiciel à propos de la commande Taylor puis, ils ont repris un exercice de la séquence d'apprentissage relatif aux DL. Les autres binômes ont effectué les calculs de DL à la main, puis après un retour au logiciel et quelques échecs, ils sont parvenus à achever les calculs des DL. Cette démarche les a beaucoup rapproché des pratiques habituelles des DL, acquises dans l'environnement papier/crayon. A part le binôme 5, tous les autres ont procédé par une approche ascendante, confirmant l'hypothèse avancée dans notre analyse a priori. Mais leur méthode de résolution n'est pas choisie librement, elle s'est imposée suite à l'avortement de plusieurs tentatives pour aborder la question de façon globale.

Par ailleurs, les expériences des binômes 1 et 4 méritent d'être signalées. Le premier montre une organisation du travail très intéressante : pour le développement en série de Taylor de l'expression de $f(x)$, il décide de faire séparément le développement des trois fonctions qui interviennent. Il n'y arrive pas dès le premier essai, plusieurs tentatives ont été entreprises pour établir le résultat final. Ce binôme utilise dans les DL tantôt le symbole x et tantôt u pour désigner la même variable ; malgré ce mélange il parvient à homogénéiser les formules fournies par le logiciel et il réussit à repérer et à corriger une erreur de signe. Ceci grâce à la coopération efficiente des deux partenaires : l'une manipule le logiciel, l'autre reste très vigilante et participe activement. Elle n'hésite pas à vérifier en papier/crayon quelques étapes du calcul, d'ailleurs, c'est elle qui a repéré l'erreur de signe.

L'expérience du second binôme mérite une analyse particulièrement détaillée, nous la présentons ainsi :

- Tout d'abord, pour avoir le développement en série de Taylor de l'expression :

$$e^{-1/x} \sqrt{1+x+x^2} \operatorname{atan}(x)$$

au voisinage de ∞ , elles font le changement de variable $x = 1/t$ et obtiennent l'expression :

$$\frac{\pi e^{-t} \sqrt{1+t+t^2}}{2t} - \frac{e^{-t} \sqrt{1+t+t^2} \operatorname{atan}(t)}{|t|}.$$

Cette expression très intéressante pour le développement cherché a été totalement négligée, elle ne cadrerait pas avec leurs attentes. Ce binôme ne prête aucune attention aux réponses du logiciel qui ne sont pas conformes à ses attentes, son comportement ressemble à celui du

binôme 7 (cf. Annexe). L'activité des étudiantes se réduit à un jeu d'essai/échec.

- Ensuite, DERIVE donne un "?" pour $\text{Taylor}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}}, t, 0, 1\right)$. Au lieu d'essayer de comprendre et d'interpréter cette réponse, elles remplacent mentalement $\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}$ par a et font calculer à DERIVE $\text{Taylor}\left((1+a)^{1/2}, a, 0, 1\right)$, remplacent ensuite a dans l'expression par sa valeur. Ce binôme donne l'impression qu'il n'est plus centré sur la question mathématique à résoudre, mais plutôt sur le jeu d'exécution de commandes.

Le pilotage à l'écran d'une longue procédure de calcul et l'élaboration d'une synthèse à partir de résultats partiels nécessite des compétences spécifiques. En papier/crayon on peut avoir sous les yeux toutes les expressions qui peuvent nous intéresser, on peut les manipuler facilement, ce n'est pas le cas dans l'environnement DERIVE.

L'analyse des différentes productions recueillies, relatives au deuxième volet de la troisième question, révèle deux démarches distinctes :

1 - Deux binômes font un travail soigné en papier/crayon, ils transforment correctement l'expression initiale de $f(x)$, pour l'adapter à l'application de la commande Taylor, et trouvent ainsi la bonne réponse à cette question. Ces deux binômes parviennent à déterminer les bonnes équations des deux asymptotes obliques. L'un les déduit directement des expressions de $f(x)$ en $+\infty$ et $-\infty$ obtenues précédemment, l'autre utilise le procédé classique de recherche d'asymptotes. Le tracé obtenu très rapidement par DERIVE du graphe de f et des deux asymptotes est satisfaisant.

2 - Trois binômes, après le refus du logiciel d'exécuter la commande Taylor appliquée brutalement à l'expression initiale de $f(x)$, travaillent en papier/crayon et trouvent la forme adéquate pour appliquer la commande Taylor, mais ils se sont trompés, en omettant la valeur absolue ou en utilisant mal la question 2. Ces étudiants très gênés par le tracé de la deuxième asymptote, reviennent sur leurs calculs pour essayer de repérer l'erreur commise. Le binôme 1 y parvient grâce à la bonne coopération entre les deux partenaires de ce binôme, comme nous l'avons déjà signalé. Le binôme 5 refait les calculs et utilise cette fois le procédé classique pour déterminer les asymptotes, l'utilisation de DERIVE a permis de faire rapidement ces calculs, qui ne sont pas immédiats. Il trouve alors les bonnes équations mais n'arrive pas à repérer ce qui ne marche pas dans le calcul précédent. Le binôme 3 quant à lui n'arrive pas à s'en sortir, après avoir constaté que $\lim f(x) - y_2 = -\infty$ (où y_2 désigne l'équation de l'asymptote obtenue), il refait ses calculs depuis le début mais sans succès. L'organisation des résultats fournis par DERIVE l'a beaucoup gêné dans ses vérifications. La solution de la troisième question s'étale

sur trois écrans, toutes les étapes du calcul ne sont pas disponibles sur un même écran, cela a compliqué la tâche (la comparaison de deux expressions est difficile, quand elles ne sont pas toutes les deux sous les yeux). C'est une activité qui demande une compétence spécifique et une bonne familiarité avec le logiciel.

4.1.2 La démonstration

Soient $g(x) = \text{atan}(x) + \text{atan}(1/x)$, $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$.

- La moitié des étudiants ont travaillé alternativement en papier/crayon et sous DERIVE. Ils ont proposé la simplification de $g(x)$ ou la résolution des équations $g(x) = \frac{\pi}{2}$ et $g(x) = -\frac{\pi}{2}$, et constatent que la fonction reste constante sur les deux intervalles. Ils valident alors ce résultat par le calcul de la dérivée et déterminent les valeurs que prend la fonction en calculant $g(x)$ pour des valeurs particulières de la variable x (presque tous ont choisi -1 et $+1$).

- L'autre moitié des étudiants se sont contentés de vérifier la validité de la proposition. Ils ont calculé des valeurs particulières de la fonction g (binôme 4), ou ont examiné des cas limites (le binôme 8 fait calculer au logiciel les limites de la fonction g en $+\infty$ et en $-\infty$), et quand ils ont simplifié l'expression de $g(x)$ ils ont obtenu une formulation légèrement différente de celle proposée par l'énoncé⁹ : ils ont alors considéré le problème comme résolu. La démarche de ces étudiants consiste à utiliser le logiciel pour vérifier la proposition, mettant ainsi en œuvre, un processus de vérification, sans produire de preuve. Ces étudiants semblent raisonner ainsi : si j'obtiens un angle droit en utilisant l'équerre, pourquoi dois-je démontrer que cet angle mesure 90 degrés ? L'utilisation du logiciel, constitue pour eux un obstacle à la démonstration.

Les étudiants du binôme 7 cherchent par tous les moyens, à faire produire à DERIVE la preuve de la proposition ou ce qui leur semble être une preuve. Ils sollicitent d'abord le logiciel pour résoudre plusieurs variantes de l'équation $g(x) = a$ (cf. Annexe) espérant obtenir une réponse de l'ordinateur ayant une syntaxe identique à l'énoncé de la proposition. Lorsque DERIVE renvoie : $\text{sign}(x) = \frac{2a}{\pi}$ comme solution de l'équation $g(x) = a$, ces étudiants ne lui prêtent

aucune attention car cette formulation n'est pas familière. Ils négligent également $+\infty$ et $\frac{5\pi}{2}$

qui résultent de la simplification de $\int_0^{\infty} g(x) dx$ et de $\int_0^5 g(x) dx$. En revanche, l'expression $\frac{\pi |x|}{2}$

⁹ $g(x) = \frac{\pi}{2} \text{sign}(x)$ au lieu de $g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ proposé dans l'énoncé

donnée comme primitive de la fonction g , semble mieux cadrer avec leur attente. Ces étudiants semblent avoir une idée précise de la réponse, ils ne prêtent aucune attention à tout ce qui n'est pas syntaxiquement identique à ce qu'ils ont prévu. Ils ne fournissent aucun effort pour essayer de comprendre ou d'interpréter les rétroactions du logiciel, mais plutôt s'arrangent pour faire 'accoucher' au logiciel ce qu'ils souhaitent, sous une forme prévue à l'avance.

Nous avons constaté le rôle important que joue la rédaction. Les étudiants changent souvent de comportement lorsqu'ils se mettent à rédiger au propre. Ils deviennent plus exigeant, plus précis, et engagent davantage leur responsabilité. Nous avons observé deux binômes reprendre leurs calculs et corriger leurs erreurs au moment de la rédaction. A ce propos, signalons que DERIVE est beaucoup plus apte au traitement qu'à la communication. La compréhension de la transcription d'une session de travail sur ce logiciel est nettement plus compliquée à l'égard de ce que fournit d'autres logiciels de calcul formel. Par exemple, un travail sur MAPLE est plus aisé à comprendre dans la mesure où il marque un contraste entre ce qui est reçu et ce qui est renvoyé et facilite l'insertion de commentaires au sein des instructions.

L'organisation du travail et la nature des interactions entre les étudiants au sein des binômes observés ont également joué un rôle déterminant, aussi bien lors de l'élaboration d'une stratégie que pendant sa réalisation effective. Les chercheurs en psychologie sociale considèrent que : « La dynamique du développement cognitif résulte principalement d'un conflit de communication sociale » (Doise et Mugny, 1981). La nature des interactions au sein du binôme 7 appuie cette thèse. Nous constatons un grand déséquilibre au sein de ce binôme : un étudiant dirige tout seul les opérations, c'est lui qui manipule le logiciel, prend les initiatives et décide de ce qu'il faut faire ou ne pas faire. L'autre acquiesce très passivement, son engagement dans la résolution est très faible. En cas de blocage, il se contente de faire des remarques anodines et très ordinaires comme par exemple : "nous devons réfléchir avant d'essayer autre chose", mais ne propose rien de probant et ne donne aucune alternative, ses interventions n'ont aucun effet sur le déroulement de la séquence. Au contraire, le binôme 1 se caractérise par une coopération efficace entre les deux partenaires. Par exemple, concernant cette question, l'étudiante qui manipulait le logiciel voulait conclure après une simple vérification de la proposition, l'autre lui a fait remarquer que sa démarche ne constitue pas une preuve en disant : "il faut montrer que...". Suite à cette remarque une discussion intéressante, sur la base d'arguments objectifs et scientifiques, a permis d'aboutir à la solution.

4.1.3 Tracé du graphe de la fonction et des deux asymptotes

Les différents binômes ont tracé sans problème le graphe de la fonction et les deux droites

proposées comme asymptotes. Ceux qui ont établi correctement les deux formules demandées à la question 3 (donnant les développements asymptotiques de la fonction) ont pu voir leur résultat validé sur le graphe. En revanche, les binômes 1 et 3 se sont rendus compte d'une contradiction au vu du tracé de la deuxième droite. Ils sont revenus à la troisième question pour vérifier les asymptotes obtenues. Le binôme 1 a pu repérer tout seul d'où venait l'erreur, il a corrigé et validé le nouveau résultat par le graphe. De son côté, le binôme 3 n'a pas pu déterminer lui-même l'origine de l'erreur ; sans aide, il serait resté en échec.

4.2 Comportements des différents binômes

Une synthèse des analyses précédentes apparaît sous la forme du tableau qui suit, présentant les comportements des binômes confrontés à la résolution du problème avec l'aide de DERIVE. Une typologie de profils d'élèves, utilisateurs de DERIVE sur des calculatrices programmables, a été proposée par L. Trouche (1996). Nous exploitons une idée analogue en dressant une typologie d'attitudes, établie sur la considération : de la place du papier/crayon dans le déroulement du travail des binômes, des connaissances mises en œuvre, des interactions étudiants – étudiants, étudiants - enseignant et étudiants - ordinateur.

Insérer ici Tableau

La variété des attitudes observées est importante. A-t-on obtenu une palette complète ? L'effectif réduit de l'expérimentation ne permet certainement pas de l'affirmer. Cependant nous avons quelques raisons de penser que l'observation de huit binômes seulement nous a déjà permis un large balayage de cas, qui s'est trouvé facilité par la durée de l'observation, la diversité des types de questions proposées par l'énoncé et la forme de travail en autonomie (relative). En effet, il s'est trouvé que les binômes retenus combinent des niveaux de compétence différents dans l'utilisation de l'outil informatique, une variété dans les attentes vis à vis de la machine et une réceptivité diversifiée aux sorties écran obtenues.

5. Synthèse

La synthèse des démarches observées révèle une variété de comportement des étudiants, nettement supérieure à celle à laquelle conduit la résolution usuelle d'exercices. La palette de leurs attitudes répertoriée au tableau 1, est suffisamment étendue pour permettre de rendre

compte, d'une façon détaillée, de la diversité de fonctionnement dans un environnement doté d'un logiciel de calcul formel comme DERIVE. Ainsi, la recherche présentée ici fournit des renseignements précieux pour l'élaboration de nouveaux modules d'enseignement qui prennent en charge les apprentissages de techniques de travail, conduite de projets, travail à distance, élaboration de mémoires et TIPE¹⁰.

Annexe

B/ binôme 7 : deux étudiants que l'on désigne par Ahmed et Hicham.

a - Dérivabilité de F en zéro

Ils entrent les expressions :

$$\#1 : \text{SI} \left[x = 0, 0, \text{EXP} \left[-\frac{1}{x} \right] \sqrt{1+x+x^2} \text{ATAN}(x) \right]$$

$$\#2: F(x) := \text{SI} \left[x = 0, 0, \text{EXP} \left[-\frac{1}{x} \right] \sqrt{1+x+x^2} \text{ATAN}(x) \right] \text{ demandent de calculer :}$$

$$\#3: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x}$$

DERIVE renvoie

$$\#4: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{SI} \left[x = 0, 0, \text{EXP} \left[-\frac{1}{x} \right] \sqrt{1+x+x^2} \text{ATAN}(x) \right]}{x}$$

Ils passent en p/c essaient d'effectuer les calculs à la main mais se heurtent à une forme indéterminée, ils n'arrivent pas à lever cette indétermination mais les calculs attirent leur attention sur la différence entre les limites à droite et à gauche du point 0 pour la fonction $e^{1/x}$ obtiennent :

$$\#5: \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{x}$$

#6: 0

$$\#7: \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x)}{x}$$

#8: ∞

Ils concluent que F n'est pas dérivable en 0.

b- Démonstration

Ils commencent par demander la résolution de l'équation

¹⁰ Travaux d'Initiation Personnelle Encadrés

#9: RESOUS $\left[\text{ATAN}(x) + \text{ATAN}\left[\frac{1}{x}\right] = \alpha, x, x < 0 \right]$; On remarque qu'ils ont rajouté la condition $x < 0$,

mais elle n'a pas eu d'effet sur l'exécution de la commande. DERIVE renvoie

#10: $\text{SIGN}(x) = \frac{2\alpha}{\pi}$ sans essayer de comprendre cette réponse, ils se lancent dans la série de calcul :

#11: RESOUS $\left[\text{ATAN}(x) + \text{ATAN}\left[\frac{1}{x}\right], x, -\text{inf}, 0 \right]$

#12: $[\]$ (ensemble vide : pas de solution)

#13: RESOUS $\left[\text{ATAN}(x) + \text{ATAN}\left[\frac{1}{x}\right] = \alpha, x, -\text{inf}, 0 \right]$

#14: $\text{SIGN}(x) = \frac{2\alpha}{\pi}$

#15: RESOUS $\left[\text{ATAN}(x) + \text{ATAN}\left[\frac{1}{x}\right] - \frac{\pi}{2} = \alpha, x, -\text{inf}, 0 \right]$

#16: $\text{SIGN}(x) = \frac{\pi + 2\alpha}{\pi}$

#17: $\int_0^{+\infty} \text{ATAN}(x) + \text{ATAN}\left[\frac{1}{x}\right] dx$

#18: ∞

#19: $\int_0^5 \text{ATAN}(x) + \text{ATAN}\left[\frac{1}{x}\right] dx$

#20: $\frac{5\pi}{2}$

#21: $\int \text{ATAN}(x) + \text{ATAN}\left[\frac{1}{x}\right] dx$

#22: $\frac{\pi|x|}{2}$

#23: $\frac{\pi x}{2}$

et

#24: $-\frac{\pi x}{2}$

Ils reprennent le calcul de la primitive (#21) en déclarant $x > 0$ et $x < 0$, et obtiennent respectivement :

Ils sont satisfaits de ces réponses. (Presque une heure pour cette question, l'un voulait réfléchir avant de réutiliser l'ordinateur, l'autre réplique : "on n'a rien à perdre on ne paye pas les essais").

c - développement asymptotique de F

D'abord en p/c, ils décident d'utiliser les DL, remplacent x par $1/x$ et passent ensuite sous DERIVE

BINOMES AVEC UN LOGICIEL DE CALCUL FORMEL

#26: TAYLOR $\left[\text{EXP}(-x) \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \text{ ATAN}\left[\frac{1}{x}\right], x, 0, 1 \right]$

#27: ?

#26: TAYLOR $\left[\text{EXP}(-x) \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \text{ ATAN}\left[\frac{1}{x}\right], x, +\text{inf}, 1 \right]$

#29: ?

#30: TAYLOR $\left[\text{EXP}\left[\frac{1}{x}\right], x, \text{inf}, 1 \right]$

#31: ?

#32: TAYLOR $[\text{EXP}(-x), x, 0, 1]$

#33: 1 - x

#34: TAYLOR $\left[\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}, x, 0, 1 \right]$

#35: ?

#36: TAYLOR $\left[\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}, x, +\text{inf}, 1 \right]$

#37: ?

Après ces multiples "?" Ils repassent en p/c, posent $X = 1/x + 1/x^2$ et proposent :

#38: TAYLOR $\left[(1+x)^{1/2}, x, 0, 1 \right]$

#39: $\frac{x}{2} + 1$

Ils remplacent dans cette expression à la main x par $1/x + 1/x^2$, et demandent :

#40 TAYLOR (ATAN(x), x, 0, 1)

#41: x

Pour effectuer le produit des trois développements obtenus, ils entrent l'expression :

#42: $(1-x) \left[\frac{2x^2 + x + 1}{2} x^2 \right] \frac{1}{x}$ (il y a deux erreurs dans cette expression) qui se simplifie en :

#43: $\frac{x(1-x)(2x^2 + x + 1)}{2}$

#44: $-x^4 + \frac{x^3}{2} + \frac{x}{2}$ (obtenue par la commande devEloppe)

Constatant que cette formule est très loin de celle souhaitée, Ahmed reprend les DL. Hicham n'est pas d'accord, mais ne propose rien d'intéressant. Sans trop tenir compte de ce qu'ils ont déjà fait, Ahmed se lance dans une nouvelle série de développements :

#45: TAYLOR $\left[\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}, x, +\text{inf}, 1 \right]$

#46: ?

#47: TAYLOR $[\text{EXP}(-x), x, 0, 1]$, (commande déjà exécutée)

#48: 1-x

49: TAYLOR $\left[\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}, x, 0, 1 \right]$, (commande déjà exécutée)

#50: ?

51: TAYLOR $\left[\text{EXP}(-x) \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \text{ ATAN} \left[\frac{1}{x} \right], x, 0, 1 \right]$

#52: ?

#53: ATAN(x)

#54 : TAYLOR(ATAN(x), x, +inf, 2)

#55: ?

Plusieurs commandes sont exécutées deux fois. Ils semblent complètement perdus. Ils ont essayé d'exécuter la commande Taylor, systématique en 0 puis en $+\infty$, mais ils n'ont rien obtenu de probant, leurs tentatives sont réduites au tâtonnement. L'observateur s'est abstenu d'intervenir, il voulait voir comment pouvaient-ils s'en sortir tout seul. Le dernier "?" les déroutent, ils décident d'abandonner cette question.

d- Le tracé de graphe

#56: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

Pour trouver les asymptotes, ils procèdent par la méthode classique qu'ils semblent bien maîtriser

#57: $+\infty$

58: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$

59: $\frac{\pi}{2}$

60: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{F(x)}{x} - \frac{\pi}{2x} \right]$

61: $-\frac{\pi+4}{4}$

62: $y = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi+4}{4}$ (représente l'équation de la première asymptote)

63: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

#64: ∞ (erreur, ils voulaient maintenant faire les calculs en $-\infty$)

65: $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$

#66: $-\infty$

Embarrassés par cette réponse, ils calculent :

67: $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$

68: 0

69: $\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x)$

#70: $-\infty$

Ils abandonnent ces calculs et reviennent à l'asymptote en $+\infty$ obtenu précédemment et entrent :

$$\# 71: F(x) - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi+4}{4} = 0$$

$$\# 72: \frac{4 - \pi}{4} = 0$$

Ils analysent l'expression entrée, repèrent l'erreur et rectifient :

$$\# 73: F(x) - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi+4}{4} = 0$$

$$\# 74: \frac{4 + \pi}{4} = 0$$

Ils fixent l'écran perplexes, Ahmed propose de remplacer F(x) par sa valeur :

$$\# 75: \text{EXP}\left[-\frac{1}{x}\right] \sqrt{1+x+x^2} \text{ATAN}(x)$$

#76: ?

Ils se sont aperçus de l'oubli : " $= 0$ " corrigent :

$$\# 78: \text{EXP}\left[-\frac{1}{x}\right] \sqrt{1+x+x^2} \text{ATAN}(x) - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi+4}{4} = 0$$

#79: ? = 0

Ils sont déconcertés par cette réponse ; à ce moment l'observateur leur suggère de tracer les graphes et leur explique.

(L'expérience a duré 3 h 30).

Bibliographie

Alves-Dias M. (1998), *Les problèmes d'articulation entre point de vue « cartésien » et « paramétrique » dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*, Thèse de Doctorat, Paris 7.

Artigue M. (1990 a), *Epistémologie et didactique*. Recherches en didactique des mathématiques. 10(2/3), 242-283.

Artigue M. (1990 b), *Analyse de processus d'enseignement en environnement informatique*. Université d'été Informatique et Enseignement de la Géométrie. IREM de Toulouse.

Artigue M., Abboud M., Drouhard J.P., Lagrange J.B. (1995), *Une recherche sur le logiciel DERIVE*. Rapport de recherche n°3, Equipe DIDIREM. Université Paris 7.

Artigue M. (1997), *Le logiciel DERIVE comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage*. Educational Studies in Mathematics. 33, 133-169. (ed) Kluwer Academic Publishers.

Behaj A., Arsac G. (1998), *La conception d'un cours d'algèbre linéaire*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 18/3,

- Doise W. & Mugny G. (1981), *Le développement social de l'intelligence*. (ed) Paris, Interéditions.
- Gomez, Cl., Salvy, B., Zimmermann, P. (1995) *Calcul formel : mode d'emploi. Exemples en MAPLE*. Ed. Masson
- Kuntz G. (1993), *L'outil informatique ne peut donner que ce qu'il a*. Repères IREM, n°11, Avril 1993, 5-31.
- Lagrange J.B. (1995), *Système de mathématiques symboliques et activité de modélisation. VIII° Ecole d'Été de didactique des mathématiques*. 308-316, (ed) Noiralaise : IREM Clermont-Fd, Perrin-Glorian : IUFEM Arras et l'Equipe DIDIREM de Paris 7.
- Rabardel P. (1995a), *Les hommes et les technologies - Approche cognitive des instruments contemporains*, (ed) Armand Colin, Paris.
- Rabardel P. (1995b), *Outils pour le calcul et le traçage de courbes*. Centre National de Documentation Pédagogique n°19 Mars 1995, 61-86.
- Rich A., Rich J., Stoutemyer D. (1993), *DERIVE A mathematical Assistant*. Soft Warehouse.
- Rogalski M. (1994), *Les concepts de l'EIAO sont-ils indépendants du domaine ? L'exemple de l'enseignement de méthodes en analyse*. Recherches en didactique des mathématiques. 14(1/2), 43-66.
- Trouche Luc (1996) *Etude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation*. Thèse Université de Montpellier II
- Trouche Luc (1997) *Calculatrice symbolique. Un défi mathématique*, CRDP du Languedoc-Roussillon.
- Trouche Luc et les élèves d'une classe de TS (1998) *Expérimenter et prouver, faire des mathématiques avec des calculatrices symboliques, 38 variations sur un thème imposé*. Ed. Irem de Montpellier II.
- Zizi J. (1993), *Derive, Maple et Mathematica. Mathématique, Informatique et Enseignement. Livre I*, Edition du Choix, (ed) Archimède.