ASSIA NECHACHE

LA CATEGORISATION DES TACHES ET DU TRAVAILLEUR-SUJET : UN OUTIL METHODOLOGIQUE POUR L'ETUDE DU TRAVAIL MATHEMATIQUE DANS LE DOMAINE DES PROBABILITES

Abstract. The categorization of tasks and the worker-subject: a methodological tool for the study of mathematical work in the probability field This article focuses on the study of the mathematical work produced after the resolution of probabilistic tasks as well as the students' role in the elaboration of this mathematical work. This led us to categorize mathematical tasks (simple, standard, rich) according to their level of epistemological and cognitive demand. This categorization is associated with students' learning in the form of a worker-subject (jobber, technician, engineer). Using this categorization and the Mathematical Working Space (MWS) model, we analyzed the implementation of a probabilistic task in two tenth grade classes. This analysis of the two class sessions allowed us to characterize the transformations of the nature of the tasks by the teachers during its implementation. These transformations generate a decrease in the level of cognitive demand of the task and also in the students' role in solving the task.

Résumé. Le propos de cet article se centre sur l'étude du travail mathématique produit à l'issue de la résolution de tâches probabilistes et sur le rôle des élèves dans l'élaboration de ce travail mathématique. Cela nous a conduit à catégoriser les tâches mathématiques (simple, standard, riche) en fonction de leur niveau d'exigence épistémologique et cognitive. Cette catégorisation est associée aux apprentissages des élèves sous la forme d'un travailleur-sujet (tâcheron, technicien, ingénieur). À l'aide de cette catégorisation et du modèle des Espaces de Travail Mathématique, nous avons analysé la mise en œuvre d'une tâche probabiliste dans deux classes de seconde. Cette analyse de ces deux séances de classes nous a permis de caractériser des transformations de la nature de la tâche par les professeurs lors de sa mise en œuvre. Ces transformations génèrent la baisse du niveau d'exigence cognitive de la tâche et la réduction du rôle des élèves dans la résolution de la tâche.

Mots-clés. Catégorisation des tâches, travailleur-sujet, travail mathématique, probabilités, niveau d'exigence de la tâche, Espace de Travail Mathématique (ETM)

Introduction

En France, l'enseignement du domaine des probabilités débutait en classe de troisième[1]. À ce niveau de classe, « *la notion de probabilité est utilisée pour modéliser des situations simples de la vie courante* » (MENCOL 3^{e}, 2008, page 34). La notion de probabilité est introduite sous une double approche, laplacienne

[1] Depuis le 1er septembre 2016, le domaine des probabilités est introduit dès la classe de cinquième (grade 7).

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 22, p. 67 - 90.

et fréquentiste. Dans l'approche laplacienne, la probabilité d'un événement est définie « *à partir de consédirations de symétrie ou de comparaison* » (RESCOL-PROB, 2008, page 3). La probabilité d'un événement (sous l'hypothèse d'équiprobabilité) est donc le « *quotient du nombre d'issues favorables par le nombre total d'issues possibles* » (Ibid., page 4). Du point de vue de l'approche fréquentiste, la notion de probabilité est introduite « *à partir d'expérimentations qui permettent d'observer les fréquences des issues dans des situations familières (pièces de monnaie, dés, roues de loteries, urnes)* (MENCOL 3^{e}, 2008, page 34). La probabilité est donc définie comme la « *fréquence limite* » (RESCOL-PROB, 2008, page 4) à partir d'expérimentations et d'études de fréquences des issues dans différentes situations liées à la vie courante.

L'introduction des nouveaux outils performants, tels que l'ordinateur ou la calculatrice, favorise l'initiation des élèves à la question de la modélisation du réel *via* la simulation d'expériences aléatoires (Parzysz, 2011). Proposer des situations probabilistes faisant appel à la modélisation accroît les possibilités de donner du sens aux connaissances enseignées. Le travail mathématique lié à la résolution des tâches probabilistes suppose donc une nouvelle démarche et des raisonnements différents des autres branches des mathématiques puisqu'ils accordent une place importante à la modélisation et à l'expérimentation.

Dans le cadre de cet article, nous étudierons le travail mathématique effectivement produit à l'issue de la mise en œuvre des tâches probabilistes dans les classes au niveau secondaire. Cette étude s'effectue à travers l'analyse de la mise en œuvre des tâches par les professeurs dans leurs classes. Des travaux montrent que la gestion par les professeurs de la mise en œuvre des tâches dans les classes est différente d'un professeur à un autre (Stein et al., 2007). Cela suppose-t-il que le travail mathématique produit à l'issue de la réalisation de ces tâches est également différent d'un professeur à un autre ? Dans notre travail de thèse (Nechache, 2016), nous avons constaté que dans le domaine de la géométrie, la gestion de la mise en œuvre des tâches est bien différente selon les professeurs alors que le travail mathématique effectivement produit à l'issue de la réalisation de ces tâches est similaire. Qu'en est-il alors du travail mathématique effectivement produit dans le domaine des probabilités ? Est-il différent ? Si oui, sur quoi portent ces différences ?

L'étude du travail mathématique s'effectue également par l'identification du rôle attribué aux élèves dans l'élaboration de ce travail. En effet, dans la classe, l'élaboration du travail mathématique s'appuie sur les interactions produites entre les élèves et le professeur lors de la mise en œuvre des tâches. Cela suppose que les élèves ont un rôle dans l'élaboration de ce travail mathématique. Son identification s'effectue à travers les activités des élèves lors de la résolution des tâches. Cela implique de caractériser le type de travail fourni par les élèves lorsqu'ils sont confrontés à la résolution de ces tâches.

Ces questions autour du travail de mathématique effectivement produit lors de la résolution des tâches probabilistes nous ont conduit à construire une catégorisation des tâches et du travailleur-sujet traitant ces tâches. Cette catégorisation constitue pour nous un outil méthodologique pour analyser le travail mathématique produit à l'issue de la résolution des tâches probabilistes.

Dans cet article, nous commençons par préciser notre cadre théorique et nos questions de recherche (section 1). Nous expliciterons ensuite notre catégorisation de tâches et du travailleur-sujet (section 2). Enfin, nous présenterons un exemple d'une tâche probabiliste (section 3) illustrant notre étude du travail mathématique mis en œuvre et privilégié par deux professeurs dans deux classes de même niveau. L'étude de cet exemple de tâche nous permet aussi d'analyser le rôle donné aux élèves par les professeurs dans l'élaboration du travail mathématique.

1. Cadre théorique et questions de recherche

Dans cette section, nous présenterons tout d'abord (§ 1.1.) le modèle des Espaces de Travail Mathématique utilisé pour analyser le travail mathématique produit lors de la résolution des tâches probabilistes. Ensuite, nous expliciterons (§ 1.2.) nos questions de recherche.

1.1. Espace de travail mathématique

L'étude du travail mathématique produit lors de la résolution de tâches probabilistes au niveau secondaire a été étudiée sous l'angle des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak et al., 2016), notés ETM. Tel qu'il a été défini, le modèle des ETM a pour objectif de décrire et d'analyser la nature du travail mathématique attendu dans une institution scolaire donnée. Au sein de ce modèle, il existe une forte articulation entre les plans épistémologique et cognitif :

- Le *plan épistémologique* est composé de trois pôles : representamen, artefact et référentiel théorique. Il permet de structurer le contenu mathématique.
- Le *plan cognitif* est composé de trois processus cognitifs : visualisation, construction et preuve. Il vise à structurer l'ETM lorsqu'il est proposé à un individu dont l'intention est d'effectuer le travail mathématique. Ce plan rend compte du travail mené par l'utilisateur de cet espace de travail pendant l'activité de résolution d'une tâche.

Le passage d'un plan à un autre est assuré par un ensemble de genèses liées aux pôles :

- La *genèse sémiotique* donne aux objets tangibles de l'ETM leur statut d'objets mathématiques opératoires ;
- La *genèse instrumentale* a pour fonction de rendre opératoire les artefacts dans le processus constructif ;
- La *genèse discursive* permet de donner sens aux propriétés pour les mettre en œuvre dans le raisonnement mathématique.

Ces trois genèses favorisent la circulation entre les plans épistémologique et cognitif en activant une articulation entre les composantes respectives des deux plans. L'étude des trois genèses passe par l'identification des dimensions associées (sémiotique, instrumentale, discursive). L'analyse de ces dimensions

rend compte du développement du travail mathématique élaboré dans l'Espace de Travail Mathématique.
Cet ensemble de relation peut être visualisé grâce au diagramme suivant :

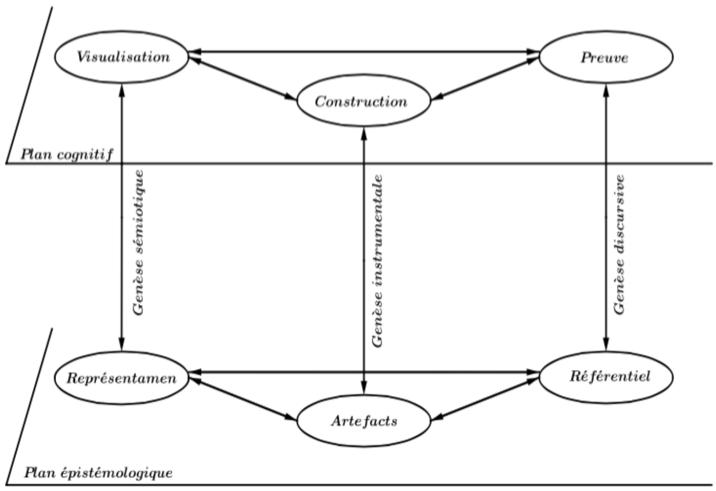
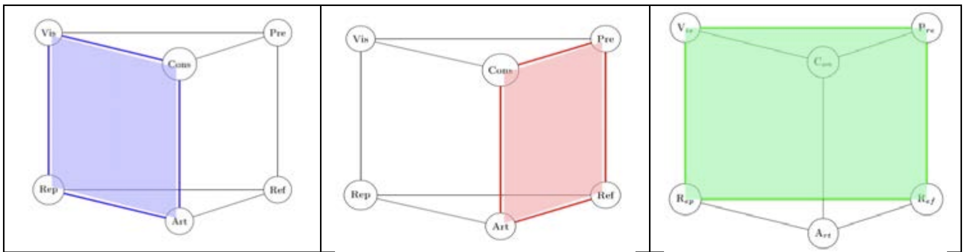


Figure 1 : Diagramme de l'Espace de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011).

1.1.1. Interaction et articulation des genèses

Le diagramme de la Figure 1 fait apparaître un certain nombre de plans verticaux qui rendent compte des connexions entre les trois genèses et de la circulation du travail mathématique au sein de l'ETM. Ces trois plans peuvent être décrits à partir des genèses qu'ils mettent en œuvre : sémiotique-instrumentale ([Sem-Ins]), instrumentale-discursive ([Ins-Dis]) et semiotique-discursive ([Sem-Dis]).



[Sem-Ins]	[Ins-Dis]	[Sem-Dis]

Figure 2 : Les trois plans verticaux de l'ETM (Kuzniak et Nechache, 2014)

L'analyse du travail mathématique à partir de ces trois plans verticaux permet d'identifier la manière dont les trois dimensions (sémiotique, instrumentale, discursive) interagissent afin de constituer un travail mathématique complet (Kuzniak et Nechache, 2014).

Pour comprendre la nature et la circulation du travail mathématique à travers les plans verticaux de l'ETM, il est nécessaire d'examiner le rôle des outils *sémiotique, technologique, théorique* du plan épistémologique (Kuzniak, Nechache et Drouhard, 2016) associés à chacune des dimensions (sémiotique, instrumentale et discursive) de l'ETM. Il est également important d'examiner la manière dont un sujet utilise et transforme ces outils en des instruments *sémiotique, technologique, théorique* du plan cognitif (Ibid ., 2016).

1.1.2. Différents type d'Espace de Travail Mathématique

Il existe trois types d'Espace de Travail Mathématique permettant de décrire le travail mathématique dans le cadre scolaire. Ils sont respectivement qualifiés d'ETM de *référence*, *idoine* et *personnel* (Kuzniak et al., 2016, page 729 ou Kuzniak, 2010, page 79). Dans le cadre de cet article, nous avons choisi de nous polariser particulièrement sur les ETM idoines.
Le contenu mathématique à enseigner est défini par une institution et est décrit dans les ETM de *référence*. Ces ETM doivent par la suite être adaptés et aménagés par les professeurs en des ETM qualifiés d'ETM *idoines* afin de permettre la mise en place effective de l'enseignement de ce contenu dans les classes. La conception de ces ETM *idoines* dépend de l'institution mais également du professeur chargé de la mise en œuvre de ces espaces dans la classe.
En outre, la réussite de l'enseignement d'un contenu dépend naturellement du professeur mais aussi de l'élève. Un ETM *idoine* est donc un environnement organisé de telle manière qu'un élève s'engage dans la résolution de problème. Cet ETM *idoine* doit permettre à la fois un travail dans le paradigme correspondant à la problématique visée et ses différentes composantes doivent être organisées de manière valide.
On distingue deux types d'ETM *idoines* : potentiel et effectif. L'ETM *idoine potentiel* est celui qui est construit au préalable pour être mis en place dans les classes. Il s'agit par exemple des ETM *idoines* construits par les auteurs des documents ressources ou des manuels scolaires mais aussi ceux construits par les professeurs pour leurs classes. Les ETM *idoines effectifs* sont les ETM *idoines* potentiels effectivement mis en place dans les classes par les professeurs.

1.2. Questions de recherche

Notre objectif est d'étudier le travail mathématique effectivement produit lors de l'exécution des tâches probabilistes en classe. Il s'agit d'étudier la mise en œuvre de ces tâches dans des ETM probabilistes (noté $\text{ETM}_{\text{PROBA}}$) idoines. Les deux questions principales guidant cette étude sont les suivantes :

1°) Quel travail mathématique est effectivement produit autour d'une même tâche probabiliste dans le cadre des interactions entre les élèves et le professeur dans les différents $\text{ETM}_{\text{PROBA}}$ idoines de même niveau de classe ?

2°) Quel rôle est attribué aux élèves dans l'élaboration du travail mathématique autour de cette tâche probabiliste ?

L'étude du travail mathématique autour d'une même tâche probabiliste s'effectuera par l'analyse de la circulation du travail mathématique dans l'$\text{ETM}_{\text{PROBA}}$ et par l'identification du rôle attribué aux élèves dans l'élaboration de ce travail. Or la nature du travail mathématique dépend du degré d'exigence des tâches. Il est donc nécessaire de les catégoriser en déterminant le rôle attribué aux élèves sous la forme d'un travailleur-sujet.

2. Catégorisation des tâches et du « travailleur-sujet»

Dans cette section, nous définissons d'abord (§ 2.1.) la notion de tâche mathématique dans le modèle de l'Espace de Travail Mathématique. Ensuite, nous exposons (§ 2.2.) la catégorisation des tâches que nous avons établie pour analyser les tâches probabilistes. Enfin, nous présentons (§ 2.3.) la catgéorisation du travailleur-sujet associée à la catégorisation des tâches.

2.1. Tâche mathématique et travailleur-sujet

Dans son article sur les tâches de problématisation, Sierpinska (2004) procède à une revue exhaustive de la notion de tâche mathématique dans les recherches sur l'enseignement des mathématiques. Sierpinska retient alors la définition suivante de la tâche mathématique : « *dans un sens large, pour se référer à n'importe quel type de problèmes mathématiques, dont les hypothèses et les questions sont clairement formulées, et dont on sait que les élèves peuvent les résoudre dans un temps que l'on peut prévoir* »[2] (Sierpinska, 2004, p. 10).

En adaptant la définition de Sierpinska au modèle des Espaces de Travail Mathématique, la tâche mathématique est pour nous tout exercice, question ou problème réalisé dans un temps limité et dans un contexte donné. Les conditions de réalisation de ce travail mathématique sont définies par l'Espace de Travail Mathématique dans lequel la tâche est proposée.

Selon Stein et Smith (1998), l'entraînement des élèves à penser de façon mathématique est cultivé par les tâches mathématiques que les élèves rencontrent. Confronter les élèves à diverses tâches leur permet non seulement d'utiliser leurs connaissances, mais aussi de développer des compétences et de construire des concepts mathématiques. L'apprentissage des concepts mathématiques s'appuie sur les tâches mathématiques que les élèves rencontrent. La mise en œuvre de ces tâches par des professeurs dans les classes induit les élèves à endosser un rôle que nous avons qualifié de « travailleur-sujet » dans l'élaboration du travail mathématique de ces tâches.

2.2. Trois catégories de tâches

L'étude du travail mathématique produit lors de l'exécution des tâches nécessite d'analyser les tâches mises en œuvre dans les ETM idoines. Cette analyse doit prendre en compte selon nous les exigences épistémologiques liées à la conception de la tâche. La résolution de cette dernière est réalisée par des sujets et son analyse tient donc également compte des exigences cognitives liées à sa réalisation. Par conséquent, l'analyse d'une tâche est associée aux aspects épistémologique pour sa conception et cognitif pour sa réalisation par un sujet. Le modèle des Espaces de Travail Mathématique permet de mettre en relation ces aspects et nous conduit à effectuer l'analyse d'une tâche selon deux points de vue :

- Du point de vue épistémologique, cette analyse prend en compte les outils sémiotiques, technologiques et théoriques disponibles dans l'ETM pour

[2] Notre traduction.

résoudre la tâche. Nous pourrions également utiliser, pour cette analyse, les outils de praxéologie (Bosch et Chevallard, 1999) pour déterminer les différentes techniques utilisées et les technologies de références justifiant ces techniques.

- Du point de vue cognitif, l'analyse de la tâche permet de rendre compte de la manière dont le sujet interagit avec les outils (sémiotiques, technologiques, théoriques) et les transforme en instruments (sémiotiques, technologiques, théoriques) pour résoudre la tâche. Cette analyse s'appuie sur l'identification des *demandes cognitives* (Stein et Smith, 1998) nécessaires pour effectuer la tâche et des différentes *adaptations des connaissances* (Robert, 2007) que le sujet doit réaliser.

L'analyse d'une tâche à travers le modèle des ETM nous permet de rendre compte à la fois des exigences épistémologiques de la tâche prescrite et des exigences cognitives pour résoudre la tâche. Les exigences épistémologiques et cognitives d'une tâche définissent, selon nous, le niveau d'exigence d'une tâche. La catégorisation des tâches en fonction de leur niveau d'exigence devient nécessaire pour les analyser afin de caractériser le travail mathématique produit. Pour construire ces catégories, nous nous sommes inspirés des travaux de Stein et Smith (1998), White et Mesa (2014) et Robert (2007).

Stein et Smith (1998) proposent une catégorisation des tâches fondée sur le niveau des *demandes cognitives* des tâches mathématiques : des tâches à faible niveau d'exigences cognitives et des tâches à haut niveau d'exigences cognitives.

White et Mesa (2014) propose une catégorisation fondée sur *l'orientation cognitive* des tâches, autrement dit sur les exigences cognitives potentielles de ces tâches. Elles distinguent trois catégories de tâches selon les connaissances mises en jeu et le niveau du processus cognitif : *mémorisation, application, compréhension, analyse ou création* (White et Mesa, 2014, p. 7).

Robert (2007) propose une catégorisation fondée sur *les adaptations des connaissances* que le sujet doit effectuer pour résoudre les tâches. Ces connaissances « *peuvent être anciennes ou en cours d'acquisition* » (Robert, 2007, p. 309) et sont soit *mobilisables* (lorsqu'elles sont indiquées dans l'énoncé), soit *disponibles* (dans le cas contraire).

À partir de ces travaux, nous avons développé une catégorisation des tâches dans le modèle des ETM. Une catégorisation fondée sur le niveau d'exigence des tâches.

2.1.1 Tâches simples

Ce sont des tâches à faible niveau d'exigence. Leur résolution nécessite l'usage des procédures « simples » qui font appel aux connaissances déjà mémorisées et aux techniques de résolution connues. Ces connaissances et ces techniques sont indiquées dans l'énoncé de la tâche et font partie de l'ETM idoine et de l'ETM personnel du sujet. La résolution de ces tâches mobilise des outils soit sémiotiques, soit technologiques, soit théoriques et ne nécessite pas d'interaction entre les trois dimensions de l'ETM. Cela entraîne un travail mathématique souvent confiné dans l'une des trois dimensions.

Les tâches simples ont pour but de réinvestir et de mettre en œuvre les connaissances et les techniques déjà étudiées et assimilées.

2.1.2 Tâches standards

Ce sont des tâches à un niveau d'exigence moyen. Leur résolution nécessite d'identifier et d'appliquer des connaissances ou des techniques utiles. Ces connaissances et ces techniques ne sont pas indiquées dans l'énoncé de la tâche mais elles sont disponibles dans l'ETM idoine et l'ETM personnel du sujet. La résolution de ces tâches nécessite les interactions entre les différentes dimensions de l'ETM et la mobilisation d'au moins deux outils (sémiotique, technologique, théorique). Cela entraîne un travail mathématique souvent élaboré dans au moins un des trois plans de l'ETM.

Ces tâches nécessitent éventuellement d'enchaîner et de mettre en lien plusieurs procédures.

2.1.3 Tâches riches

Ce sont des tâches à haut niveau d'exigence. Leur résolution fait appel à des connaissances et à des techniques de résolution qui ne sont pas nécessairement apprises et qui ne sont pas disponibles dans l'ETM idoine et l'ETM personnel du sujet. La résolution de ces tâches requiert la mobilisation de l'ensemble des outils (sémiotique, technologique et théorique) et l'interaction entre les différents plans verticaux de l'ETM. Cela permet de développer un travail mathématique complet (Kuzniak et Nechache, 2014). La résolution de ces tâches peut recourir au changement de domaines mathématiques (Montoya et Vivier, 2014), de registres de représentation sémiotique (Duval, 1995) et à la modélisation, à la charge du sujet.
Ces tâches visent à développer l'esprit critique et le raisonnement. Ces tâches supposent une prise d'initiative plus grande.

Selon les catégories de tâche, la résolution des tâches par un sujet génère différentes activités lui permettant d'appliquer ou de comprendre des notions mathématiques, d'établir des liens entre les notions mathématiques et d'approfondir des connaissances mathématiques. La réalisation de ces tâches suivant leurs catégories entraîne un développement des formes particulières du travail du sujet. Ainsi à chacune des trois catégories de tâches est associée une catégorie de travailleur-sujet.

2.2 Trois catégories de travailleur-sujet

La catégorisation des tâches mathématiques dans le modèle de l'ETM selon leur niveau d'exigence nous induit à distinguer trois catégories du travailleur-sujet qui exécute ces tâches. En effet, un travailleur qui effectue une tâche simple ne fournit pas les mêmes efforts et le même travail que celui qui effectue une tâche standard; de même pour le travailleur qui réalise une tâche standard et celui qui réalise une tâche riche. Un sujet qui est confiné constamment dans l'une des trois catégories de tâches mathématiques acquiert une identité de travailleur-sujet. Le travail mathématique du sujet au sein de l'ETM dépend fortement de la catégorie des tâches effectuées. Ainsi à chacune des trois catégories de tâches, nous associons une catégorie de travailleur-sujet particulière :

2.2.1 Tâcheron

Dans le cas d'exécution de tâches simples, où il s'agit d'appliquer des techniques connues, le travailleur endosse le rôle du travailleur « tâcheron » ;

2.2.2 Technicien

Dans le cas d'exécution de tâches standards, où il s'agit de reconnaître la (ou les) technique(s) disponible(s) dans l'espace de travail mathématique adéquat pour effectuer la tâche, le travailleur endosse le rôle du travailleur « technicien » ;

2.2.3 Ingénieur

Dans le cas d'exécution de tâches riches, où il ne suffit pas de reconnaître une technique mais plutôt plusieurs techniques disponibles ou non dans l'espace de travail. Lorsqu'elles ne sont pas disponibles, le travail du sujet est de créer la technique pour pouvoir effectuer la tâche. Dans ce cas, le travailleur endosse le rôle du travailleur « ingénieur ».

Dans cette étude, et c'est une de ses originalités, nous avons défini trois catégories de tâches mathématiques et nous avons associé à chacune d'elle une catégorie homologue de travailleur-sujet qui rend compte de la forme de travail produite par un sujet. Cette double catégorisation constitue un outil méthodologique pour étudier et identifier le travail mathématique produit lors de la mise en œuvre des tâches dans les ETM idoines.

3. L'étude du travail mathématique à travers les catégories de tâches et du travailleur-sujet.

Pour étudier le travail mathématique à travers les catégories de tâches et du travailleur-sujet, nous avons sélectionné quatre tâches probabilistes. Ces tâches sont extraites des documents ressources de différents niveaux de classe (3^e, 2^{nde}, 1^{re} S, Terminale S). Nous avons proposé à cinq professeurs de mettre en œuvre ces tâches dans leur classe. Les mises en œuvre des tâches dans les classes ont été filmées et transcrites. Les données recueillies ont été analysées avec le modèle des ETM utilisé comme outil méthodologique (Nechache, 2016).

Dans cette section, nous avons choisi de présenter une des quatre tâches probabilistes et sa mise en œuvre par deux professeurs en classe de seconde (les transcriptions des deux séances sont proposées en annexes 1 et 2). Ceci nous permet d'illustrer l'usage des catégories de tâches et du travailleur-sujet pour étudier le travail mathématique produit lors de la mise en œuvre d'une même tâche probabiliste dans des ETM_{PROBA} idoines différents et pour identifier le rôle des élèves dans l'élaboration de ce travail mathématique.

La tâche choisie intitulée « la politique nataliste » est présentée ci-dessous. Elle est extraite des documents ressources de la classe de 1re S (2010) et ceux de la classe de 2nde (2002) :

> *Pour limiter le nombre de filles dans un pays imaginaire, on décide que :*
> *a) chaque famille aura au maximum 4 enfants;*
> *b) chaque famille arrêtera de procréer après la naissance d'un garçon.*
> *On considère que chaque enfant a une chance sur deux d'être un garçon ou une fille et que, pour chaque couple de parents, le sexe d'un enfant est indépendant du sexe des précédents.*
> *Ce choix a-t-il la conséquence attendue, à savoir de diminuer le nombre de filles dans la population ?*

Nous proposons ensuite d'analyser brièvement cette tâche dans l'ETM$_{\text{PROBA}}$ idoine potentiel afin de décrire le travail mathématique produit *a priori* à l'issue de l'exécution de la tâche et d'identifier le rôle *a priori* des élèves dans l'élaboration de ce travail. Par la suite, nous analyserons la mise en œuvre de cette tâche dans deux ETM$_{\text{PROBA}}$ idoines effectifs afin d'examiner le travail mathématique privilégié par les professeurs.

L'analyse détaillée de cette tâche dans l'ETM$_{\text{PROBA}}$ idoine potentiel et dans quatre ETM$_{\text{PROBA}}$ idoines effectifs (niveau 2nde et 1er S) est présentée dans notre travail de thèse (Nechache, 2016).

3.1 Analyse de la tâche dans l'ETM$_{\text{PROBA}}$ idoine potentiel

L'expérience aléatoire décrite dans cette tâche consiste à observer une succession de naissances dans une famille au sein d'une population donnée. Si à la première naissance un garçon naît, la famille arrête de procréer. Sinon, elle continue à procréer jusqu'à la naissance d'un garçon ou jusqu'à quatre enfants maximum. On a donc une expérience aléatoire de une à quatre épreuves maximum.

L'énoncé de la tâche décrit une expérience aléatoire avec deux informations :

1- « Chaque enfant a une chance sur deux d'être un garçon ou une fille » traduit l'hypothèse d'équiprobabilité d'un garçon et d'une fille.

2- « Le sexe d'un enfant est indépendant du sexe des précédents » traduit l'hypothèse de l'indépendance des naissances.

3.1.1 Résolution de la tâche

Plusieurs méthodes sont possibles pour traiter cette tâche :

- **Méthode 1** : Usage de variables aléatoires et de la loi de probabilité associée à celles-ci.

L'expérience aléatoire, telle qu'elle est décrite dans cette tâche, consiste à répéter dans des conditions identiques une expérience de Bernoulli de paramètre p (la probabilité d'avoir un garçon) avec au maximum quatre répétitions ($n \leq 4$) et arrêt du processus au premier succès. On définit Y comme la variable aléatoire qui représente le rang du 1er succès tel que :

$Y = 0$ s'il n'y aucun succès

$Y = k$ avec $1 \leq k \leq 4$ si le premier succès est obtenu à l'étape k.

La loi de probabilité de *Y* est donnée dans le tableau ci-dessous :

k	0	1	2	3	4
P(Y=k)	1/16	1/2	1/4	1/8	1/16

On considère une deuxième variable aléatoire *X* qui prend la valeur 0 s'il y a eu un garçon et 1 s'il n'y a pas eu de garçon. Alors :

- $P(X=0) = P(Y = 0)= (1-1/2)^4 = 1/16$

- $P(X = 0) = P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4) =15/16$
- L'espérance de la variable aléatoire *X* est $E(X) = 15/16$

En considérant une troisième variable aléatoire *N* qui prend comme valeurs le nombre d'enfants nés dans une famille, alors l'espérance de *N* est $E(N) = 15/8$. D'où $E(X)/E(N) = 1/2$. On conclut que cette politique nataliste n'a aucune influence sur la proportion de filles dans la population considérée.

Le traitement de la tâche à l'aide de cette méthode requiert l'identification des outils théoriques telles que les variables aléatoires, la loi de probabilité et l'espérance mathématique. Il sollicite également l'usage d'outils technologiques pour déterminer la loi de probabilité associée à une variable aléatoire et pour calculer l'espérance d'une variable aléatoire. Ces outils ne sont pas indiqués dans l'énoncé de la tâche. La résolution de cette tâche nécessite des interactions entre les dimensions discursive et instrumentale. Le travail mathématique produit à l'issue de la résolution de cette tâche est ainsi construit dans le plan [Ins-Dis].

- **Méthode 2 :** Usage d'un arbre pondéré et d'un tableau de dénombrement.

On note G l'événement « l'enfant né est un garçon » et l'événement F : « l'enfant né est une fille ».
Les probabilités des événements G et F sont égales à $\frac{1}{2}$. On a alors l'arbre pondéré « asymétrique » ci-dessous représentant les différentes sortes de familles ayant un à quatre enfants:

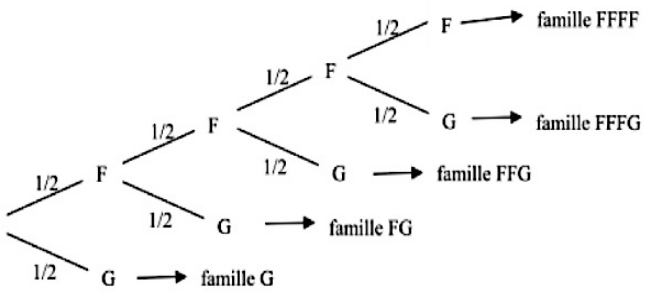


Figure 3 : Arbre pondéré décrivant les issues de l'expérience aléatoire

On peut évaluer le résultat cherché, en présentant les calculs sous la forme d'un tableau de dénombrement en considérant par exemple 16 familles :

Type de famille	Nombre de familles	Nombre d'enfants	Nombre de garçons	
G	8	8	8	
FG	4	8	4	
FFG	2	6	2	
FFFG	1	4	1	
FFFF	1	4	0	
	16	30	15	Total

Tableau 1 : Le nombre de garçons pour 16 familles

Sur 30 enfants, il y a autant de garçons que de filles dans cette population de 16 familles. La politique nataliste n'a donc aucune influence sur la proportion de filles dans la population considérée.

Le traitement de la tâche à l'aide de cette méthode nécessite l'usage de l'arbre pondéré « asymétrique » comme outil sémiotique pour représenter l'expérience aléatoire décrite dans l'énoncé de la tâche et pour décrire les issues de cette expérience aléatoire et comme un outil technologique pour calculer la probabilité de chacune des issues. L'élaboration du travail mathématique est donc initié dans le plan [Sem-Ins]. L'usage d'un tableau de dénombrement comme un outil théorique permet de communiquer et de justifier la solution. Cela implique que le travail mathématique est initié dans le plan [Sem-Ins] puis basculé dans le plan [Ins-Dis].

- Méthode 3 : Usage d'une simulation informatique.

La simulation informatique de l'expérience aléatoire peut s'effectuer à l'aide du générateur pseudo aléatoire ALEA() du tableur (logiciel Excel) ou avec celui de la calculatrice (fonction Random). Nous choisissons par exemple une simulation informatique à l'aide de la fonction ALEA().
La conception et la mise en œuvre de cette simulation nécessite plusieurs étapes. Tout d'abord, traduire les deux informations données dans l'énoncé dans le langage de tableur et à l'aide de la fonction ALEA(). Ensuite, en considérant un échantillon de taille donnée (par exemple 1000), on simule l'expérience (1000 fois) et on calcule la fréquence d'apparition de l'événement G (qui est égale à environ 0,5) dans l'échantillon considéré. Enfin, à l'aide de la loi des grands nombres, on conclut que 0,5 est une valeur estimée de la probabilité de l'événement G.
La résolution de la tâche à l'aide de cette méthode implique dans un premier temps la construction d'une simulation informatique. Cette dernière mobilise des outils technologiques tels que le tableur et la fonction ALEA(). Dans un second temps, l'estimation de la probabilité de l'événement G à partir des résultats fournis par la simulation suggère l'usage de l'outil théorique de la loi des grands nombres afin de justifier la solution attendue. Ainsi, le travail mathématique élaboré dans cette méthode pour répondre à la tâche est produit au sein du plan [Ins-Dis].

3.1.2 Caractérisation a priori du travail mathématique et du rôle attribué à l'élève

Le traitement de la tâche par la méthode 1 mobilise des outils théoriques technologiques disponibles dans les ETM idoines et personnels des élèves, à partir de la classe de 1^{re}. Cette méthode ne peut donc pas être envisagée en classe de 2^{nde}. En revanche, le traitement de la tâche *via* les deux autres méthodes est envisageable à ce niveau de classe. On peut néanmoins souligner certaines difficultés des élèves liées à l'usage des méthodes 2 et 3. Dans la méthode 2, la difficulté est liée à l'arbre pondéré « asymétrique », méconnu des élèves de 2^{nde}. Dans la méthode 3, la difficulté pour des élèves de 2^{nde} est liée principalement à la construction de la simulation nécessitant un « savoir faire technique ». Nous considérons ainsi, que cette tâche probabiliste relève de la catégorie des tâches riches lorsque celle-ci est prescrite à des élèves de 2^{nde}. Dans ce cas, les élèves ont *a priori* un rôle de travailleur-ingénieur. En revanche, l'usage des trois méthodes explicitées précédemment dans la classe de 1^{re} est envisageable puisque ces trois méthodes font partie de l'ETM de référence, idoine et personnel de l'élève à ce niveau de classe. Dans ce cas, la tâche relève de la catégorie des tâches standards et les élèves ont *a priori* un rôle de travailleur-technicien dans la résolution de cette tâche.

Nous avons donc *a priori* trois sortes de travail mathématique qui peuvent potentiellement être produits dans les ETM_{PROBA} idoines. Ces trois sortes de travail mathématique impliquent des rôles *a priori* différents attribués aux élèves.

Dans la suite, nous proposons d'analyser deux exemples de mise en œuvre de cette tâche probabiliste dans deux classes de 2^{nde}.

3.2 Etude de la mise en œuvre de la tâche dans deux ETM_{PROBA} idoines de deux classes de 2^{nde}

Les deux classes de 2^{nde} sont respectivement notées : 2^{nde} A et 2^{nde} B. Les deux extraits de discussion entre les élèves et les deux professeurs sont proposés en annexes 1 et 2.

3.2.1 Dans l' ETM_{PROBA} de la classe de 2^{nde} A (professeur A)

Les élèves ont disposé d'environ 40 minutes pour résoudre la tâche. Un élève est désigné par le professeur pour exposer sa procédure. L'élève construit alors l'arbre des possibles décrivant l'expérience aléatoire et écrit les cinq issues de l'expérience aléatoire (cinq sortes de familles ayant un à quatre enfants) :

Figure 4 : La procédure du premier élève[3]

Un deuxième élève est invité à présenter au tableau son raisonnement (voir les lignes 5 à 14 de la transcription de la séance dans l'annexe 1). Il propose de considérer un échantillon de 100 familles. En utilisant l'arbre des possibles construit par le premier élève, il comptabilise le nombre de famille ayant un garçon, ou une fille et un garçon, …, ou 4 filles. Il obtient alors 50 familles ayant un garçon, 25 familles ayant un garçon et une fille, « 12,5 » familles ayant un garçon et deux filles, « 6,25 » familles ayant un garçon et trois filles, et « 6,25 » familles ayant quatre filles. Le raisonnement de cet élève n'a pu aboutir au résultat cherché, faute de temps. En effet, le professeur A a décidé de mettre fin à la correction et a conclu que « *la politique nataliste n'est pas efficace* ».

Le raisonnement établi par ce deuxième élève est similaire à celui que nous avons décrit dans la méthode 2 (Voir § 3.1.1.). En reprenant le raisonnement de cet élève, avec l'échantillon de 100 familles, on en déduit le tableau suivant :

Type de famille	Nombre de familles	Nombre d'enfants	Nombre de garçons	
G	50	50	50	
FG	25	50	25	
FFG	12,5	37,5	12,5	
FFFG	6,25	25	6,25	
FFFF	6,25	25	0	
	100	187,5	93,75	Total

Tableau 2 : Le nombre de garçons pour 100 familles

Sur 187,5 enfants, on a donc autant de garçons que de filles dans cette population de 100 familles. La politique nataliste n'a de fait aucune influence sur la proportion de filles dans la population considérée. Ainsi, le raisonnement du deuxième élève aurait pu aboutir à la solution attendue. Cependant, le choix de la taille de l'échantillon n'est pas judicieux puisque avec un échantillon de taille 100, on obtient 6,25 familles, ce qui n'est pas possible dans la réalité.

[3] La procédure présentée par le premier élève a été constatée chez les autres élèves de la classe de 2nde A.

Bien que le professeur A ait rapidement conclu sur l'influence de la politique nataliste, il a néanmoins laissé les élèves chercher la réponse de la tâche pendant 40 minutes. Les élèves ont proposé un raisonnement à l'aide de l'outil sémiotique l'arbre des possibles pour représenter l'expérience aléatoire et décrire les issues de l'expérience aléatoire (voir la procédure de l'élève 1). Cet outil sémiotique est alors utilisé comme outil technologique pour comptabiliser le nombre de familles ayant un à quatre enfants (voir la procédure de l'élève 2). Il en résulte que le travail mathématique mis en œuvre pour résoudre la tâche a été construit au sein du plan [Sem-Ins]. Comme nous l'avons souligné auparavant, le raisonnement mis en place pour répondre à la tâche n'a pas pu aboutir au résultat attendu faute de temps. Cela entraine que le travail mathématique reste bloqué dans le plan [Sem-Ins] au lieu de basculer dans le plan[Ins-Dis] pour ainsi communiquer et justifier la solution.

Dans cet $\text{ETM}_{\text{PROBA}}$ de la classe de 2^{nde} A, on constate que le travail mathématique construit pour répondre à la tâche est pris en charge par les élèves. Le professeur A a donc attribué à ses élèves, tel que nous l'avons prévu, le rôle d'ingénieur. Un rôle qu'ils ont conservé tout au long de la séance. Précisons néanmoins que l'intervention du professeur à la fin de la séance a empêché les élèves de terminer la résolution de la tâche.

3.2.2. Dans l'$\text{ETM}_{\text{PROBA}}$ de la classe de 2^{nde} B (professeur B)

Après la lecture de l'énoncé de la tâche, le professeur laisse 10 minutes aux élèves pour chercher une réponse. Des élèves sont sollicités pour proposer leurs raisonnements. Aucun raisonnement ne semble correct. D'autres élèves proposent l'usage d'un arbre des possibles, mais le professeur B a rapidement rejeté cette proposition en affirmant que « *l'arbre des possibles ne permet pas de modéliser cette expérience*». Le professeur B propose directement de réaliser une simulation de l'expérience aléatoire décrite dans l'énoncé en utilisant la fonction Random (fonction qui fournit un nombre au hasard compris entre 0 et 1) de la calculatrice (voir les lignes 28 à 37 de la transcription de la séance dans l'annexe 2) . Le professeur dicte toutes les étapes nécessaires pour réaliser la simulation :

Étape 1 : Faire afficher un nombre compris entre 0 et 1 sur l'écran de la calculatrice

Professeur B : La calculatrice affiche un nombre au hasard.

Étape 2 : Considérer uniquement la partie décimale du nombre affiché

Professeur B : On va essayer de travailler à partir de ça. On ne va pas s'occuper de la partie entière car cela fait toujours 0, et donc on va s'occuper que de la partie décimale.

Étape 3 : Considérer qu'un chiffre pair est associé à la naissance d'un garçon, et qu'un chiffre impair est associé à la naissance d'une fille.

Professeur B : Ce que je vous propose, si on a un chiffre pair on dit que c'est un garçon, sinon c'est une fille.

Étape 4 : S'arrêter dès qu'il y a une naissance d'un garçon

Professeur B : Pour le premier enfant, (dans le nombre 0,2342398...) 2 est un chiffre pair donc c'est un. . .

Élèves : C'est un garçon.

Professeur B : Donc est-ce que on arrête ou on continue ?

Élèves : On s'arrête.

> Professeur B : On a donc une famille [...]. Je vous laisse continuer par groupe de deux.

Chaque élève réalise la simulation sur sa calculatrice. Les résultats obtenus par chacun sont par la suite relevés au tableau. Le professeur B fait le constat que sur un échantillon de taille 179 (en regroupant l'ensemble des résultats), il y a 93 filles et 86 garçons. Les élèves ont alors conclu qu'il y a plus de filles que de garçons. Le professeur ajoute que ces résultats (93 filles et 86 garçons) sont liés à l'échantillon d'une taille donnée. Il conclut alors qu'« *en théorie, le nombre de filles et le nombre de garçons sont identiques* » (Ligne 58 de la transcription de la séance dans l'annexe 2). Le professeur utilise un argument d'autorité qui s'appuie sur la théorie mathématique pour formuler et justifier la solution attendue (la politique nataliste n'est pas efficace).

Dans cet $\mathrm{ETM}_{\mathrm{PROBA}}$ idoine, le professeur B a fait le choix d'utiliser la simulation *via* la calculatrice pour effectuer la tâche. Cette simulation mobilise l'outil technologique qui est la fonction Random() de la calculatrice. Le travail mathématique produit à l'issue de la résolution de la tâche est alors confiné sur la dimension instrumentale.

Le professeur B n'a pas laissé le temps aux élèves de chercher une solution au problème posé. Il a fait le choix de prendre en charge l'élaboration du travail mathématique en fournissant toutes les étapes de la construction de la simulation, la communication et la justification de la solution. Les élèves se sont contentés d'exécuter la simulation sur leurs calculatrices. Par conséquent, lors de la mise en œuvre de la tâche dans l'$\mathrm{ETM}_{\mathrm{PROBA}}$ idoine de cette classe de 2nde, le professeur a transformé la tâche qui était *a priori* une tâche riche en tâche simple lors de sa réalisation et a attribué à ses élèves le rôle de travailleur-tâcheron au de lieu de travailleur-ingénieur tel que nous l'avions prévu.

4. Discussion et réponse à nos deux questions principales

Notre analyse de la mise en œuvre d'une même tâche dans deux $\mathrm{ETM}_{\mathrm{PROBA}}$ idoines au niveau de la classe de 2nde nous permet de répondre à nos deux questions principales.

4.1 Caractérisation du travail mathématique effectivement produit

Notre analyse du travail mathématique effectivement produit dans les $\mathrm{ETM}_{\mathrm{PROBA}}$ idoines (1re question) met en évidence deux sortes de travail mathématique.

Dans l'$\mathrm{ETM}_{\mathrm{PROBA}}$ idoine de la classe de 2nde A, l'élaboration du travail mathématique est basée principalement sur l'usage des arbres des possibles (voir Figure 4) en tant qu'outil sémiotique afin de représenter l'expérience aléatoire et de décrire les issues de celle-ci. L'arbre des possibles a également été utilisé dans l'élaboration du travail mathématique en tant qu'outil technologique pour dénombrer (voir la procédure de l'élève 2 dans § 3.2.1.). Le travail mathématique produit à l'issue de la résolution de cette tâche est donc construit dans le plan [Ins-Dis]. Dans l'ETM_{PROBA} idoine de la classe de 2nde B, l'élaboration du travail mathématique est, elle, fondée sur les outils technologiques associés à la dimension intrumentale. Effectivement, le professeur B a proposé aux élèves sans leur laisser le choix d'effectuer une simulation de l'expérience aléatoire à l'aide de la calculatrice et de la fonction Random (voir § 3.2.2.). À partir des résultats fournis par la simulation, le professeur B donne la solution attentue en la justifiant à l'aide d'un argument d'autorité qui n'est pas une justification rationnelle (voir les lignes 56 à 58 de la transcription de la séance dans l'annexe 2). Le travail mathématique produit dans cet ETM_{PROBA} idoine est alors confiné sur la dimension instrumentale.

4.2 Le rôle attribué aux élèves dans l'élaboration du travail mathématique

Concernant le rôle attribué aux élèves (2ème question), notre analyse révèle que les élèves n'ont pas le même rôle dans l'élaboration du travail mathématique dans les deux classes de 2nde. Le professeur A a tenté de conserver le niveau d'exigence de la tâche tout au long de la séance et a laissé les élèves en tant que travailleur-ingénieur produire le travail mathématique. Pris par le temps, il a dû mettre fin à l'élaboration du travail mathématique par les élèves et a donné la solution attendue sans aucune explication et ni justification (voir § 3.2.1.). Le professeur B a, lui, guidé les élèves tout au long de la séance (voir l'extrait de dialogue proposé dans l'annexe 2). Lors de la mise en oeuvre de la tâche dans la classe, le professeur B a donc transformé la nature de la tâche initialement riche en une tâche simple. Cette transformation a conduit à la baisse du niveau d'exigence cognitive de la tâche et à la révision du rôle des élèves en leur attribuant le rôle de travailleur-tâcheron. Le rôle attribué par les professeurs aux élèves dans les deux classes de même niveau observées est ainsi différent.

Conclusion et perspectives

La catégorisation des tâches et du travailleur-sujet pour analyser le travail mathématique et le rôle des élèves dans la mise en œuvre d'une tâche probabiliste a permis d'identifier et de caractériser des transformations de la nature des tâches probabilistes par les professeurs lors de leurs mises en œuvre en classe. Des transformations ayant pour conséquence d'abaisser le niveau d'exigence des tâches, notamment cognitive. Du point de vue du modèle des ETM, ces transformations des tâches par le professeur impliquent un travail mathématique confiné sur l'une des dimensions de l'ETM et donc très peu de circulation du travail mathématique dans l'ETM. Cela nous interroge sur l'origine de ces transformations et sur la manière de conserver le niveau d'exigence des tâches lorsqu'elles sont mises en œuvre dans les classes.

Une autre conséquence de ces transformations de tâches réside dans la réduction du rôle des élèves dans l'élaboration du travail mathématique qui se réduit au rôle de tâcheron. Cela questionne alors les apprentissages des élèves puisque les transformations de tâches entrainent la dénaturation de celles-ci en faisant perdre le sens mathématique et privant les élèves d'établir des liens entre les notions mathématiques.

Les travaux de Henningsen et Stein (1997) ainsi que ceux de Stein et al.(1996) portant sur la question de la conservation des exigences cognitives des tâches lors de leurs mises en œuvre dans les classes soulignent l'importance du « *scaffolding* » comme facteur favorisant la conservation de ces exigences. Il s'agit par exemple des questions que le professeur peut poser aux élèves lorsqu'ils sont bloqués. Il s'agit aussi des aides proposées par le professeur aux élèves sans pour cela divulguer trop d'informations sur la (ou les) solution(s) et sur la (ou les) procédure(s) possible(s) conduisant à la (ou les) solution(s). Selon nous, ces aides doivent être pensées au préalable par le professeur en effectuant un travail sur les énoncés des tâches (Robert, 2003), en particulier lorsqu'il est question des tâches riches. Pour le professeur, il convient d'élaborer une analyse *a priori* de la tâche afin de dégager les « *activités potentielles des élèves et de prévoir leurs réactions* » (Robert, 2003, p.70) et ceci dans le but de « *prévoir des interventions conduisant, s'il le faut, à des tâches intermédiaires, accessibles mais non isolées (non simples)* » (Ibid., p.70). En outre, les aides fournies par le professeur permettent d'une part de soutenir les élèves et de les motiver tout au long de leur travail de recherche et d'autre part de maintenir le niveau d'exigence de la tâche sans la dénaturer.

Ces transformations de la nature de la tâche peuvent se produire lorsque les professeurs n'accordent pas suffisamment de temps aux élèves pour chercher la réponse au problème posé. On retrouve ce constat dans les résultats des travaux de Stein et al. (1996) où il est souligné que le fait d'accorder une quantité adéquate de temps aux élèves pour répondre à la tâche participe au maintien de son niveau d'exigence cognitive.

L'utilisation de l'outil de la catégorisation des tâches et du travailleur-sujet pour étudier le travail mathématique et le rôle des élèves dans l'élaboration de ce travail dans le domaine des probabilités s'est révélée intéressante. Cet outil peut être utilisé dans le cadre de la formation des enseignants (initiale ou continue) pour analyser des séances d'enseignement. Cette analyse à l'aide de la catégorisation des tâches et du travailleur-sujet peut permettre aux enseignants de prendre conscience de l'importance du maintien du niveau d'exigence des tâches pour développer l'apprentissage des élèves. Cette analyse peut également permettre aux enseignants de prendre conscience des formes de travailleur-sujet qu'ils développent chez leurs élèves.

Du point de la recherche, l'usage de cette catégorisation peut être envisagée pour étudier les représentations des enseignants qui prescrivent des tâches et qui attendent une forme de travail mathématiques de leurs élèves. En effet, c'est le professeur *via* son choix de la catégorie des tâches qui donne le rôle de travailleur-sujet à ses élèves. En outre, l'usage de cette catégorisation articulé avec l'usage du modèle des Espaces de Travail Mathématique peut être intéressante pour penser à la manière d'envisager la mise en œuvre des tâches dans les classes sans être dénaturées et en maintenant leur niveau d'exigence. Cette question fait d'ailleurs l'objet d'un travail de recherche en cours portant sur la notion de la tâche emblématique dans le domaine des probabilités (Kuzniak & Nechache, 2016, ETM5).

Bibliographie

BOSCH, M. & CHEVALLARD Y. (1999), La sensibilité de l'activité scientifique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **19.1**, 77-125.

DUVAL, R. (1995), Semiosis et pensée humaine. Peter Lang, Bern

HENNINGSEN M. & STEIN M.K. (1997), Mathematical tasks and student cognition : Classroom based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning, *Journal for Research in Mathematics Education* **28.5**, 524-549.

KUZNIAK A. (2010), Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **15**, 73-93.

KUZNIAK A. (2011), L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **16**, 9-24.

KUZNIAK A. & NECHACHE A. (2014), Penser une progression en géométrie en formation des enseignants. *Acte du 41e colloque COPIRELEM,* Mont de Marsan.

KUZNIAK A. & NECHACHE A. (2016), Tâches emblématiques dans l'étude des ETM idoines : existance et usages. *Cinquième symposium des Espaces de Travail Mathématique,* Florina, Grèce, juillet 2016 (en cours de publication).

KUZNIAK A., NECHACHE A. & DROUHARD JP. (2016), Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM Mathematics Education* **48.6**, 861-874.

KUZNIAK A., TANGUAY D. & ELIA I. (2016), Mathematical Working Spaces in schooling : an introduction. *ZDM Mathematics Education* **48.6**, 721–737.

MENCOL. (2008), Les programmes du collège-bulletin officiel de l'Éducation Nationale, BO spécial numéro 6 du 28 août 2008. http://cache.media.education.gouv.fr.

MONTOYA-DELGADILLO E. & VIVIER L. (2014), Les changements de domaine dans le cadre des espaces de travail mathématiques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **19**, 73–101.

NECHACHE A. (2016), *La validation dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire*, Thèse de Doctorat, Université Paris Diderot.

PARZYSZ B. (2011), Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **16**, 127–147.

RESCOL-PROB. (2008), Ressources pour les classes de collège-Probabilités, mars 2008. http://eduscol.education.fr.

ROBERT A. (2003), Tâches mathématiques et activités des élèves une discussion sur le jeu des adaptations introduites au démarrage des exercices cherchés en classe de collège, *Petit x* **62**, 61-71.

ROBERT A. (2007), Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **27.3**, 271-311

SIERPINSKA A. (2004), Research in mathematics education through a keyhole : task problematization. *International Journal of Mathematics Education* **24.2**, 7-15.

STEIN MK., GROVER D. & HENNINGSEN M. (2016), Building student capacity for mathematical thinking and reasoning : an analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal* **33.2**, 455–488.

STEIN MK., REMILLARD J. & SMITH M. (2007), How Curriculum Influences Student Learning. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. In Frank K. & Lester Jr (Eds), 319–369.

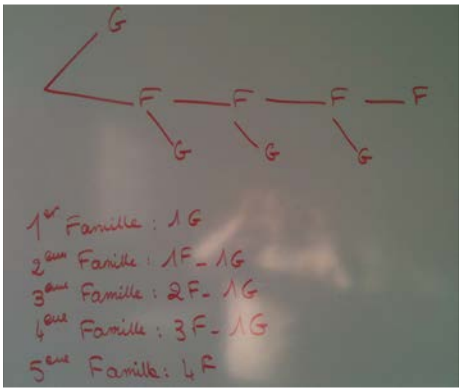
STEIN MK. & SMITH MS. (1998), Mathematical tasks as a framework for reflection : From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School* **3.4**, 268-275.

WHITE N. & Mesa V. (2014), Describing cognitive orientation of Calculs I tasks across different types of coursework. *ZDM Mathematics Education* **46.4**, 675-690.

ASSIA NECHACHE
Université d'Orléans
& Laboratoire de Didactique André Revuz
Université Paris-Diderot
Paris, France
assia.nechache@hotmail.fr

Annexe 1: La transcription de la séance avec le professeur A

Les élèves ont eu 25 minutes pour chercher l’exercice individuellement. Un élève (Élève 1) est invité au tableau pour écrire sa réponse. Par la suite le professeur commente la solution de cet élève.

Ligne	Locuteur	Verbatim
L1	Professeur A	J’ai demandé à votre camarade d’expliquer son raisonnement parce qu'il a dit qu’il y a 8 possibilités en tout. Donc il écrit quatre huitièmes, mais je ne sais pas d’où ça vient. Il écrit par la suite qu’il y a un demi d’avoir une fille, enfin je ne comprends pas très bien. Je te demande de m’énumérer tous les types de famille. Alors, il y a les familles avec un garçon, les familles avec une fille et un garçon, il n’y a jamais des familles avec deux filles puisque la famille doit avoir au moins un garçon. On aurait pu mettre dans l’énoncé, qu’ils ne s’arrêtent que lorsqu’ils ont un garçon ou bien quatre enfants. Est-ce que tous ces types de familles ont la même chance d’exister ? Donc ce n’est pas équiprobable. Je n’ai pas autant de chance d’avoir une famille avec deux filles et un garçon, qu'une famille avec un seul garçon. On a donc cinq types de famille, est-ce que tout le monde est d’accord ?
L2	Élèves	Oui.
L3	Professeur A	Une famille ayant un garçon unique. Une famille avec une fille et un garçon. Une famille avec deux filles et un garçon. Une famille avec trois filles et ungarçon. Et une famille avec quatre filles. C’est bon pour tout le monde ?  *[Solution de Élève 1]*
L4	Élèves	Oui.
L5	Professeur A	On décide qu’ils continuent à procréer tant qu’ils n’ont pas de garçon, mais qu’ils s’arrêtent au quatrième enfant. Regardez bien. Élève 2 considère qu’il y a 100 familles, 50 familles vont avoir un garçon. Tu écris, 50 familles vont avoir un garçon unique. C’est donc une chance sur deux. C’est pas mal. Ensuite, deuxième type de famille avec un garçon et une fille. Il y a combien de familles dans ce cas-là ?
L6	Élève 2	25 familles.
L7	Professeur A	D’accord. Donc 25 familles ont une fille et un garçon. Après, c’était deux filles et un garçon.

L8	Élève 2	12,5.
L9	Professeur A	Oui. Après combien de familles avec trois filles et un garçon ?
L10	Élève 2	6,25.
	Professeur A	Très bien. Et quatre filles ?
L11	Élève 2	Pareil.
L12	Professeur A	[*première sonnerie*] 6,25, d'accord. Il considère 100 familles, et il dit qu'il y a une chance sur deux d'avoir un garçon en premier. Donc la moitié des familles ont un enfant unique garçon. Après on a une chance sur d'avoir une fille en premier et une chance sur deux d'avoir un garçon en second. Comment trouve-t-on le nombre de filles ?
L13	Élève 2	25 fois 1 plus 12,5 fois 2 plus 6,25 fois 3 plus 6,25 fois 4.
L14	Professeur A	[*deuxième sonnerie*] Enfin bon, la politique de natalité n'est pas efficace.… *[le professeur n'a pas eu le temps de conclure.]*

Annexe 2 : La transcription de la séance avec le professeur B

Les élèves ont eu dix minutes pour chercher l'exercice individuellement.

Ligne	Locuteur	Verbatim
L1	Professeur B	Est-ce que tout le monde a compris la politique nataliste de ce pays imaginaire ?
L2	Élèves	Oui.
L3	Professeur B	Quelqu'un me fait un résumé ?
L4	Élève 1	On a droit à quatre enfants maximum.
L5	Professeur B	Oui.
L6	Élève 1	Si on a un garçon, on arrête de procréer.
L7	Professeur B	D'accord. Dès que l'on a un garçon, on arrête. Dans ce pays, ce qui est important, c'est le garçon.
L8	Élève 1	On a une chance sur deux que ce soit un garçon ou une fille.
L9	Professeur B	Très intéressant. Ici, on va prendre comme modèle que la probabilité d'avoir un garçon est de un demi. Est-ce que tout le monde a compris ce que veut dire « indépendant » ?
L10	Élève 2	C'est soit un garçon soit une fille.
L11	Professeur B	En fait, indépendant, c'est si on a eu une fille la première fois, au deuxième accouchement, la probabilité d'avoir une fille est toujours un demi et la probabilité d'avoir un garçon est toujours un demi. C'est valable pour le premier, le deuxième, le troisième et le quatrième accouchement. Est-ce que tout le monde a compris la question ?
L12	Élèves	Oui.
L13	Professeur B	Il s'agit de voir, est-ce que cette politique nataliste va influer sur le nombre de garçons et le nombre de filles.

L14	Élèves	Bah. Il y a plus de filles que de garçons.
L15	Professeur B	On aura peut-être plus de filles, ou plus de garçons, cela ne change rien. Je vous laisse quelques minutes pour finir l'exercice.
L16	Élève 2	En fait, on ne peut pas savoir si cela va diminuer ou augmenter.
L17	Professeur B	Alors Élève 2 dit qu'on ne sait pas. Peux-tu expliquer ?
L18	Élève 2	En fait si, ça va changer, mais on ne sait pas si c'est le nombre de filles qui change ou si c'est le nombre de garçons.
L19	Professeur B	Y a-t-il d'autres propositions ?
L20	Élève 3	Si dès que l'on a un garçon, on arrête d'avoir des enfants, on ne pourra jamais avoir quatre garçons, mais on peut avoir jusqu'à quatre filles.
L21	Professeur B	Donc Élève 3 dit qu'on peut avoir quatre filles mais qu'un seul garçon par famille. Donc Élève 3 pense qu'il y aura plus de filles. Êtes-vous d'accord les autres ?
L22	Élève 4	Non, pas forcément.
L23	Professeur B	Ah ! Peux-tu expliquer pourquoi ?
L24	Élève 4	Soit ils ont un garçon en premier, et dans ce cas ils arrêtent. Sinon, il y aura forcément une fille en premier et du coup ils feront plus d'enfants.
L25	Professeur B	D'accord. Vous avez du mal à modéliser la situation. Ce n'est pas très grave. Je vous ai dit dans le cours que lorsqu'on ne sait pas trop bien modéliser, on peut faire des ?
L26	Élèves	Des arbres.
L27	Professeur B	Alors, les arbres, c'est quand on n'arrive pas à trouver un modèle. Mais quand on ne sait pas bien faire, on fait des expériences. Donc je vous propose que, comme on n'arrive pas à dégager un modèle mathématique, on fasse des expériences.
L28	Professeur B	Vous allez prendre vos calculatrices. Je vous propose de faire une simulation. Sur vos calculatrices vous avez une touche qui s'appelle alea() ou nombre aléatoire. Dans la calculatrice type casio, vous allez dans *menu*, *option* et vous appuyez sur *proba.* Puis sur *Rand*, qui veut dire *hasard* en anglais. Puis vous avez une touche *Rand#* vous appuyez dessus et vous faites entrée.
L28	Élèves	Cela fait 0,2342398…
L29	Professeur B	La calculatrice affiche un nombre au hasard. On va essayer de travailler à partir de ça. On ne va pas s'occuper de la partie entière car cela fait toujours 0. On ne va s'occuper que de la partie décimale. Ce que je vous propose : si on a un chiffre pair, on dit que c'est un garçon sinon c'est une fille. Pour le premier enfant, *[dans le nombre 0,2342398…]* 2 est un chiffre pair donc c'est un…
L30	Élèves	C'est un garçon.
L31	Professeur B	Donc est-ce qu'on arrête ou on continue ?
L32	Élèves	On arrête.

L33	Professeur B	On a donc une famille. Pour la deuxième famille, on a 3, c'est... ?
L34	Élèves	Impair.
L35	Professeur B	On continue ?
L36	Élèves	Oui.
L37	Professeur B	Et pour le troisième chiffre, on a 4, donc on s'arrête. On a une deuxième famille. Je vous laisse continuer par groupe de deux. Je vais faire quelques relevés de vos résultats que je vais écrire au tableau.
L38	Élève 5	6 filles et 5 garçons.
L39	Élève 6	7 filles et 3 garçons.
L40	Élève 7	3 filles et 7 garçons.
L41	Élève 8	9 filles et 9 garçons.
L42	Élève 9	7 filles et 4 garçons.
L43	Élève 10	9 filles et 11 garçons.
L44	Élève 11	11 filles et 10 garçons.
L45	Élève 12	6 filles et 13 garçons.
L46	Élève 13	27 filles et 22 garçons.
L47	Élève 14	8 filles et 2 garçons.
L48	Professeur B	Vous avez des résultats qui sont tout à fait différents les uns des autres. C'est ce que l'on appelle la fluctuation d'échantillonnage. Qu'est-ce qui se passe lorsqu'on prend un échantillon de taille importante ?
L49	Élèves	Cela se stabilise.
L50	Professeur B	Oui. Et la fréquence observée est proche de la probabilité. On compte le nombre de filles et le nombre de garçons et on obtient alors... ?
L51	Élèves	93.
L52	Professeur B	93 filles, et... ?
L53	Élèves	86.
L54	Professeur B	86 garçons.
L55	Élèves	Donc, il y a plus de filles que de garçons.
L56	Professeur B	Je vous rappelle que ce n'est qu'un échantillon et que cela peut évoluer. Mais est-ce que la différence entre le nombre de filles et le nombre de garçons peut évoluer ?
L57	Élèves	Non.
L58	Professeur B	Je vous donne le résultat de la théorie mathématique. Alors en théorie mathématique il y aurait autant de filles que de garçons, une chance sur deux.