CATHERINE HOUDEMENT, EDITH PETITFOUR

L'INFLUENCE DU COMPAS DANS UNE TÂCHE DE CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE D'UN CERCLE

Abstract. The influence of the compass in the geometric construction of a circle. This study follows on a semiotic and didactic analysis of a situation in which students (9-11 years old) had to draw a freehand diagram corresponding to a geometric figure. The figure is defined by a geometric text which specifies the relative positions of the circle and the square. The article looks at how the use of a compass could help students to succeed in drawing the figure. The didactic and semiotic analysis carried out sheds new light on the role of the compass in the geometric construction of a circle and on the knowledge that needs to be developed in order to lead primary school students to geometric learning through instrumented construction.

Keywords. school geometry, compass, circle, semiotic analysis, freehand drawing

Résumé. Cette étude fait suite à une analyse sémiotique et didactique d'une situation où des élèves de Cours moyen (9-11 ans) devaient tracer un dessin à main levée correspondant à une figure géométrique donnée par un court texte citant un carré et un cercle. Elle questionne l'aide à la réussite du tracé que pourrait apporter l'utilisation du compas. L'analyse didactique et sémiotique menée apporte un nouvel éclairage quant au rôle de l'utilisation du compas dans une tâche de construction géométrique d'un cercle et sur des connaissances à développer en vue de conduire les élèves de l'école primaire à des apprentissages géométriques par la construction instrumentée.

Mots-clés. Géométrie, compas, cercle, analyse sémiotique, dessin à main levée

---

Nos recherches sont pilotées par un questionnement sur ce qui, en situation de classe, peut aider ou bloquer les élèves dans l'accomplissement de tâches mathématiques proposées par l'enseignant : connaissances des élèves, complexité de la tâche, interventions de l'enseignant. Ce questionnement nous a permis d'avancer sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie plane en fin d'école primaire (Houdement & Petitfour 2022, 2023), en appui notamment sur des problèmes de construction d'un dessin à partir d'un texte donné par l'enseignant à des élèves de Cours moyen en France (9-11 ans). Dans cet article, nous poursuivons l'étude de ce type de tâche, commun à l'école, mais assez peu étudié en didactique de la géométrie, qui donne la part belle aux tâches de reproduction et restauration de figures.

L'article se compose de cinq grandes parties. La première décrit la genèse de notre recherche sur la géométrie plane, une situation de classe que nous avons analysée dans un article précédent (notamment l'utilisation du dessin à main levée par certains élèves), et pourquoi cette étude se poursuit par l'analyse d'une séance de dessin instrumenté. C'est aussi l'occasion de décrire notre outillage théorique et méthodologique, notamment nos analyses sémiotiques. La deuxième partie rend compte de recherches liées au dessin instrumenté, en relation ou non avec des interactions langagières. Elle souligne la spécificité de notre recherche par rapport aux travaux proches, explicite nos questions de recherche, et, sur cercle et compas, informe sur les programmes scolaires et cite des recherches emblématiques. Les troisième et quatrième parties sont centrées sur la séance de construction instrumentée. La troisième partie précise le contexte, donne des éléments de méthodologie. La quatrième partie analyse finement les processus de tracé de trois élèves pour repérer les difficultés à utiliser le compas, comprendre le cercle, mettre les deux en relation, et plus généralement questionner le regard porté sur les instruments en didactique. La cinquième partie conclut l'article et propose des pistes pour l'enseignement.

1. Genèse et fondements de l'étude

Dans le cadre du projet Ambition scolaire et ruralités en Normandie[1] de l'Université de Rouen Normandie, nous avons démarré en octobre 2019 une recherche-formation avec quatre enseignantes de Cours moyen exerçant dans des écoles voisines de milieu rural. La finalité explicite de ce projet pour les enseignantes était notamment de partager et de questionner leur pratique (au sens large) entre collègues, les chercheuses accompagnant ce processus. Il s'agissait aussi pour nous d'observer des actions ou interactions au sein de la classe au cours d'une situation d'enseignement-apprentissage en mathématiques.

Pour concilier ces objectifs, l'intérêt d'un projet de séance commune aux quatre classes s'est assez vite dégagé. Nous ne sommes intervenues ni dans le choix du thème mathématique de la séance ni dans son élaboration. Nous avons laissé les enseignantes responsables du contenu et du déroulement de la séance, que nous avons découverts lors de la mise en œuvre.

Les enseignantes ont ainsi construit ensemble un projet de séance (environ 1 heure), qu'elles ont menée chacune dans leur classe à la même période (novembre 2019), en appui sur un même type de tâche, la construction d'un dessin à partir d'un texte. Elles ont choisi plusieurs textes (six) et le type de dessin à produire (sans instruments).

[1] Université de Rouen Normandie, ESPE, Académie de Rouen (2018). *Ambition Scolaire Et Ruralités En Normandie*. http://circvaldereuil.spip.ac-rouen.fr/IMG/pdf/l_ambition_scolaire_en_milieu_rural_normand_v7.pdf.

Dans ce cadre, nous avons en particulier observé des séances où des élèves de Cours moyen devaient produire un dessin à main levée de la figure composée d'un carré et d'un cercle, donnée par ce court texte : *Tracer un carré. Tracer un cercle qui a pour centre un sommet du carré et qui passe par deux autres sommets.* C'est sur ce texte que se base la présente étude.

Dans les sections qui suivent, nous développons :

- notre vision de la géométrie plane et de son enseignement,
- les fondements méthodologiques de nos recherches,
- des éléments d'analyse (développés plus finement dans Houdement et Petitfour, 2022[2]), utiles pour la compréhension de l'étude présentée dans cet article.

1.1. Notre vision de la géométrie plane

Nous considérons que l'objet géométrique est un objet théorique de Géométrie 2 (Houdement, 2007 ; Houdement & Kuzniak, 1998-1999). À l'instar de Peirce (1978), nous considérons que cet objet théorique se donne à voir par des signes relevant de différents systèmes sémiotiques, comme des textes et des dessins. Le même objet géométrique peut être représenté par des textes différents. Il existe plusieurs types de dessins, sollicitant des systèmes sémiotiques différents, qui représentent cet objet : des dessins faits aux instruments, qui sont alors semblables ; des composites, dessin avec texte ou codage (qui satisfait à des conventions partagées), alors nommés « figures géométriques » (Laborde & Capponi, 1994). Le rapport aux figures demandé aux élèves dépend du paradigme géométrique institutionnel : il évolue au cycle 3 (9-12 ans), entre les deux années de fin d'école primaire (9-11 ans) et la sixième, première année de collège (Houdement, 2007 ; Houdement & Kuzniak, 2006).

1.2. Fondements méthodologiques de nos recherches

Dans nos recherches (Houdement & Petitfour, 2018, 2020, 2022, 2023 ; Petitfour & Houdement, 2022), nous accueillons toute opportunité d'observer et de filmer une séance de mathématiques répondant à des demandes d'enseignants (questionnement sur leur pratique, sur les apprentissages de leurs élèves). Nous laissons aux enseignants l'entière liberté du choix du contenu de la séance et de sa mise en œuvre. Ils sont responsables du déroulement, maîtres de leurs interventions. Cette part de

[2] Nous renvoyons à cet article pour plus de détails sur les processus de résolution des élèves de la tâche étudiée, très riches et révélateurs de connaissances géométriques, ou de leur absence.

hasard sur nos objets d'étude contribue à approcher au mieux l'authenticité des pratiques.

Notre recueil de données et nos analyses visent à accéder aux processus de résolution des élèves, aux effets immédiats et différés des actes de l'enseignant. Dans un autre temps, nos recherches visent à enrichir l'outillage praxéologique des enseignants pour aider les élèves à conceptualiser les objets mathématiques (en amont du collège). Elles permettent aussi d'outiller des ingénieries futures.

Notre méthodologie passe par une analyse didactique *a priori* de la tâche prescrite aux élèves (au sens de Chevallard, 1999) et par une analyse *a posteriori* des productions des élèves, des actions des élèves (ce qu'ils font) et des interactions au sein de la classe.

Notre spécificité est l'analyse sémiotique. Nous rentrons dans la compréhension et l'interprétation des actions des élèves et de l'enseignant, et des interactions entre élèves, ou élève(s) et enseignant, grâce au recueil et à l'analyse de tous les signes (au sens de Peirce, 1978), autant que faire se peut, qui circulent dans l'activité, à un grain plus ou moins fin.

Nous organisons ces divers signes en appui sur le concept de « faisceau sémiotique » (Arzarello, 2006), selon deux directions : synchronique (simultanéité) et diachronique (chronologie). Nous en rendons compte avec la construction de « tableaux sémiotiques » qui organisent les faisceaux selon les deux dimensions citées (Houdement & Petitfour, 2019, 2020, 2022). Enfin nous inférons des interprétations sur l'état des connaissances d'un élève, d'un enseignant, relativement aux tâches qu'ils traitent (faire un tracé, utiliser un instrument, etc.). Ces interprétations sont nourries par notre culture didactique. Elles acquièrent un statut de plausibilité par triangulation des différentes données (Denzin, 1978) que nous avons recueillies et organisées : données sur l'élève seul, l'élève en interaction avec un pair, avec l'enseignante ; enseignante en collectif, en accompagnement individuel ou d'un groupe, en entretien avec nous.

Pour collecter les différents signes en circulation lors de la séance observée, nous utilisons une méthodologie de recueil de données sophistiquée : plusieurs caméras (fixe, mobiles), des enregistreurs répartis dans la classe ; un enregistreur propre à l'enseignant (micro-cravate) ; récupération des productions des élèves, voire des extraits de leur cahier, des affichages au mur, etc. Le recueil de données se fait sur une seule séance, mais il est très abondant.

1.3. Éléments d'analyse

1.3.1. Éléments d'analyse a priori

Rappelons la tâche proposée aux élèves lors d'une première étude (Houdement & Petitfour, 2022). Il s'agit de produire un dessin à main levée de la figure donnée par ce texte : *Tracer un carré. Tracer un cercle qui a pour centre un sommet du carré et qui passe par deux autres sommets.*

Cette tâche est une conversion au sens de Duval (2005) : l'objet géométrique (objet théorique) est défini par un texte (signe langagier) ; il est demandé de produire un dessin (signe graphique) de cet objet, que la classe pourra accepter comme dessin adéquat.

Le texte qui définit la figure géométrique est court, mais il n'est pas simple. Comme nous l'avions anticipé dans l'analyse *a priori*, la seconde phrase du texte a été source de difficulté pour les élèves. En effet cette phrase est doublement complexe. Un point du plan est qualifié de deux façons différentes, selon l'unité figurale 1D à laquelle il se rattache : centre (resp. sommet) de cercle (resp. de carré). Duval (2014) nomme cette tournure langagière la « double désignation » et la considère incontournable dans le langage géométrique. La compréhension de cette double désignation est cruciale pour la réussite du tracé, mais elle est source de difficultés pour des élèves de 10-11 ans (Duval, 2014).

Le dessin demandé est à faire à main levée. Ce type de dessin n'est pas explicitement défini dans l'enseignement (cf. Houdement & Petitfour, 2022), contrairement au dessin instrumenté, dont chacun se représente ce qu'il peut être. La question cruciale est la position du cercle par rapport au carré, son corollaire est comment le dessin à main levée en rend ou pourrait en rendre compte. L'expert pense immédiatement au rôle du codage, signes graphiques ajoutés sur le dessin affirmant la prise en compte et/ou la présence d'une propriété géométrique. Le dessin aux instruments peut, lui, être validé par superposition à un dessin-solution préparé par l'enseignant si l'échelle est fixée (validation en Géométrie 1). Se pose en creux la question de la validation du dessin à main levée : suffit-il qu'il réponde aux conditions du texte pour qu'il soit valide ? Ce n'est pas si simple !

1.3.2. Éléments d'analyse a posteriori

Les élèves génèrent une gamme variée de dessins en explorant des combinaisons de cercles et de carrés, qu'ils soient codés ou non. Trois exemples concrets sont présentés ci-dessous (figure 1).

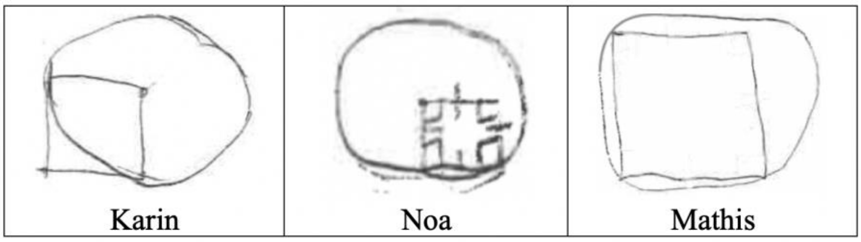


Figure 1. Dessins à main levée produits par trois élèves

Le dessin à main levée de Karin sera considéré comme correct : le cercle est globalement centré sur un sommet du carré, le cercle passe (approximativement) par deux sommets opposés du carré, deux côtés du carré sont des rayons du cercle. Il n'y a pas d'incompatibilité avec la figure géométrique demandée.

Dans le dessin à main levée de Noa, le centre du cercle est (grossièrement) un sommet du carré ; deux sommets du carré sont sur le cercle, les codages confirment que Noa a aussi intégré l'information « carré ». Noa a respecté « à la lettre » les informations du texte, mais il y a « dissonance » du dessin avec la figure géométrique imposée. Le dessin de Noa est en effet celui d'une « figure impossible » (Houdement & Petitfour, 2022, p. 332) : deux sommets consécutifs de ce carré ne peuvent pas être des points du cercle, leurs distances au centre étant différentes.

Le dessin à main levée de Mathis ne respecte pas la position du centre du cercle imposée par le texte. Son dessin est donc incorrect par « dissonance » avec le texte. Remarquons que c'est aussi le dessin d'une « figure impossible » : en effet si trois sommets d'un carré sont sur un cercle, le quatrième l'est aussi, et la figure est le cercle circonscrit au carré.

Lors de la comparaison des dessins à main levée produits par les élèves, parfois très « différents », s'est posée la question du comment valider ou invalider un dessin à main levée. Lors de la mise en commun au tableau, nous avons vu un élève (justement Noa, figure 1) mimer la rotation d'un compas (ses deux branches étant représentées avec pouce et index) et prendre ainsi conscience de l'invalidité de son dessin. C'est aussi une construction instrumentée au tableau qui a permis de trancher les discussions entre des dessins très différents (par exemple, figure 1). L'utilisation du compas (ou sa simulation) pour le dessin s'est avérée cruciale pour évaluer la pertinence des dessins à main levée (et convaincre les élèves).

Les trois dessins de la figure 1 rendent compte de choix différents concernant les incidences entre cercle et carré : deux ou trois sommets ? Si deux, sommets consécutifs ou sommets opposés ? La position du centre est acceptable dans deux dessins et inexacte pour le troisième (Mathis). Ce constat et l'étude des processus de tracé à main levée nous ont conduites à faire l'hypothèse didactique que l'utilisation d'un compas contraindrait l'élève à réfléchir à la position du centre du cercle (où poser la pointe du compas ?). Il aiderait, par la conservation de la longueur entre centre et sommet que permet le compas, à ne retenir que deux points d'incidence entre cercle et carré, des sommets opposés du carré.

1.3.3. Pour conclure

Cette première étude nous a amenées à faire l'hypothèse que l'utilisation d'un compas permettrait aux élèves d'obtenir un dessin correct, notamment par ce que permet son usage canonique : conserver une courbure constante, par la détermination d'un centre et d'un rayon ; repérer les points à la même distance d'un point fixe. Dans cet article, nous examinons cette hypothèse tout en suggérant une complémentarité substantielle entre le dessin à main levée et le dessin instrumenté pour une conversion d'un texte en une figure. Nous avons donc proposé la même figure définie par le même texte, mais en demandant la production d'un dessin instrumenté plutôt qu'à main levée. L'idée est autant que faire se peut, d'analyser l'influence du compas sur les procédures des élèves confrontés à la même tâche de conversion d'un texte en un dessin, aussi en appui sur l'hypothèse cognitive que « l'utilisation d'un instrument accroît les capacités assimilatrices du sujet et contribue à l'ouverture de ses actions possibles. » (Rabardel, 1995, p. 62). Notre objectif est également de déterminer les connaissances à mobiliser dans la réalisation de cette tâche, et la potentialité de cette construction instrumentée à enrichir les apprentissages géométriques des élèves.

2. Dessin instrumenté

2.1. Travaux connectés et spécificité de notre recherche sur le dessin instrumenté

Depuis quelques années, s'est intensifiée l'attention des chercheurs au dessin instrumenté comme aide, pour des élèves de 9-11 ans, à la conceptualisation des objets géométriques du plan (p.ex. Duval & Godin, 2005 ; Perrin-Glorian & Godin, 2014 ; Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2017 ; Mathé et al., 2020). Cette conceptualisation passe en effet par la connaissance et la reconnaissance, par les élèves, de propriétés géométriques (alignement, incidences, perpendicularité, égalité de longueurs) prises en compte dans les actions instrumentées, mais aussi par l'aptitude à changer de regard sur la figure (Duval & Godin, 2005). C'est ainsi que les activités de reproduction de figures ont été revisitées, enrichies (p.ex. Bulf & Celi, 2015) et implémentées dans des classes dans le cadre de travaux collaboratifs entre enseignants et chercheurs (p.ex. Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2017). La reproduction d'une figure-modèle à une autre échelle bloque l'utilisation de la mesure (en empêchant le mesurage), amène à déconstruire la figure pour la reproduire (Ducel & Peltier, 1986 ; Keskessa et al., 2007), rend nécessaire la prise en compte (d'abord implicite) par les élèves de propriétés géométriques pour la construire. Dans la restauration de figures, c'est la donnée d'un dessin amorce à compléter, une « partie » de la figure modèle, qui fixe le changement d'échelle, et engage déjà une déconstruction figurale ou dimensionnelle (Duval, 2005) pour repérer l'amorce dans la figure modèle.

Dans ces activités de reproduction ou de restauration de figures, la validation se fait par superposition du dessin produit au modèle (ou dessin-solution préparé par l'enseignant). Les figures modèles peuvent être élémentaires ou pas. Les instruments jouent le rôle de variable didactique, dans le sens où le choix d'un instrument (par le chercheur ou l'enseignant) pilote les connaissances que les élèves auront à mettre en œuvre pour réussir. L'enseignant pourra ensuite institutionnaliser ces connaissances, après éventuelles verbalisations et reformulations. Par exemple, dans le micro-espace (dessin sur feuille), il est possible de proposer des instruments de géométrie classiques tels que le compas ou la règle, mais aussi des gabarits présentant une variété de formes (susceptibles d'être utilisées pour leur contour), comme l'ont mentionné Mangiante-Orsola et Perrin-Glorian (2017). De plus, dans le méso-espace, d'autres outils se révèlent utiles, tels que la corde et le piquet (Blanquart-Henry, 2020 ; Blanquart, 2023).

Depuis une dizaine d'années, des recherches s'intéressent aussi aux interactions langagières accompagnant les actions instrumentées, en étudiant les liens entre les usages des instruments, les façons de parler et le rapport à la figure (p. ex. Barrier & al., 2014 ; Bulf & Celi, 2020 ; Bulf et al., 2021). D'autres ont analysé et mis en évidence les enjeux spécifiques du travail visant à aménager des passages entre actions instrumentées et construction d'un langage géométrique susceptible de désigner et de caractériser les objets et relations géométriques en jeu (p. ex. Mathé et al., 2021 ; Blanquart, 2023). Ces dernières recherches, tout comme d'autres, plus anciennes (p. ex. Grenier & Laborde, 1988 ; Berthelot & Salin, 1992 ; Fregona, 1995), s'intéressent aussi à la reproduction de figures, mais dans des situations de communication (Brousseau, 1983) : un émetteur possède une figure, il doit obtenir une copie superposable en envoyant des renseignements à un récepteur, sous forme d'un texte écrit.

Ces situations embarquent aussi la conversion d'un texte en un dessin instrumenté, mais celui de notre étude présente deux différences majeures. D'une part l'élève est confronté à un texte donné par l'enseignant, donc *a priori* pertinent (juste) pour rendre compte de la figure visée (par exemple, il contient au moins[3] toutes les informations nécessaires à la construction) : l'élève ne peut donc pas remettre en cause le texte reçu, comme ce serait le cas pour le récepteur d'un message émis par un autre élève avec l'intention de décrire la figure. D'autre part ce texte respecte la

[3] Et parfois seulement, ce qui rend la tâche plus difficile.

langue géométrique usuelle – nous parlons alors de « texte géométrique » – ; la réussite de l'élève passe donc par la compréhension de cette langue, notamment des façons géométriquement usuelles de décrire des relations entre des unités figurales, auxquelles il est nécessaire d'acculturer les élèves, notamment en vue du collège. Bien sûr cette réussite passe aussi par la « conversion de cette compréhension » en un dessin.

2.2. Questions et méthodologie pour cette étude

Notre question de recherche pour cet article est la suivante : qu'apporte le compas dans cette tâche de construction géométrique d'un cercle insérée dans une tâche de conversion d'un texte en un dessin instrumenté ? Elle se décline en trois questions :

- Comment les élèves investissent-ils cet instrument ?
- Comment le compas les aide-t-il (ou pas) à réussir la tâche ?
- Quelles connaissances le compas les aide-t-il (ou pas) à mobiliser ?

Pour répondre à ces questions, nous mettons en œuvre des analyses sémiotiques telles que définies partie 1.2.

Afin de tester notre hypothèse sur l'aide que pourrait apporter le compas, et pour minimiser les effets de contexte (enseignante, école, etc.), nous avons proposé à l'une des quatre enseignantes impliquées dans notre projet de recherche deux ans auparavant de donner le même texte à ses élèves actuels (Cours moyen première année, 9-10 ans) afin qu'ils produisent un dessin aux instruments. Nous avons fourni les supports de travail (annexe 1) : une feuille avec le texte écrit, une feuille pour faire le dessin comportant un carré déjà tracé (4 cm de côté).

La tâche est donc de *tracer un cercle qui a pour centre un sommet du carré* (déjà tracé) *et qui passe par deux autres sommets,* en ayant à disposition les instruments géométriques classiques (règle graduée, équerre, compas). Pourquoi cette amorce d'un carré ? Pour permettre aux élèves de ne pas perdre de temps dans la construction d'un carré, en multipliant les essais et les gommages ; pour centrer l'attention des élèves sur la seconde phrase ; pour rendre possible entre élèves la comparaison des dessins par superposition.

Le problème géométrique étudié consiste à construire un cercle déterminé par la position de son centre et deux de ses points. Comme notre étude concerne plus précisément le cercle et sa construction au compas, nous affinons notre étude du cercle comme objet géométrique et objet d'enseignement : après un aperçu des programmes sur le cercle à l'école élémentaire, nous revenons sur des recherches sur le cercle en cycle 3, particulièrement en Géométrie 1. Suit une première analyse *a* *priori* de la tâche de conversion, complétée dans un second temps grâce à une brève étude des dessins instrumentés produits par les élèves de la classe étudiée.

2.3. Cercle et compas

2.3.1. Dans les programmes de l'école élémentaire

Les élèves de cycle 2 (6-8 ans) doivent savoir « reconnaître, nommer » cercle et disque, « construire un cercle connaissant son centre et un point, ou son centre et son rayon », utiliser un « vocabulaire approprié (cercle, disque, rayon, centre) pour décrire » ces figures, faire un « lien entre propriétés géométriques (cercle) et instruments de tracé (compas). » (MENJ, 2020a, p. 64)

Les élèves de cycle 3 (9-11 ans) doivent savoir « reconnaître, nommer, décrire des figures simples ou complexes (assemblages de figures simples) » dont « cercle (comme ensemble de points situés à une distance donnée d'un point donné), disque. » (MENJ, 2020b, p. 98)

Les repères annuels de progression du cycle 2 et du cycle 3 (MENJ, 2019) indiquent qu'en Cours élémentaire première année (CE1, 7-8 ans) « les élèves construisent des cercles sans contraintes, avec un instrument tel qu'une ficelle ou un compas. », qu'en Cours élémentaire deuxième année (CE2, 8-9 ans) « les élèves construisent des cercles à partir du centre et du rayon, à partir du centre et du diamètre. », et qu'en Cours moyen première année (CM1, 9-10 ans) « ils tracent un cercle de centre et de rayon donnés » et « ils utilisent le compas pour tracer un cercle, connaissant son centre et un point du cercle ou son centre et la longueur d'un rayon, ou bien pour reporter une longueur. »

La construction *stricto sensu* incluse dans la tâche que nous proposons est donc adaptée au Cours moyen. Les programmes (MENJ, 2020b) mentionnent la construction de « figures simples ou complexes (assemblages de figures simples) ». En revanche rien n'est spécifié sur la complexité des textes qui décrivent les figures, les programmes semblent se limiter à un seul type de texte, le « programme de construction ».

2.3.2. Brève étude épistémologique

Artigue et Robinet (1982) avaient choisi le cercle pour développer une recherche géométrique chez des élèves de 7-10 ans. Relativement à d'autres figures, le cercle est discerné perceptivement très tôt chez l'enfant, mais il est aussi « une figure pour laquelle l'illusion de transparence de l'objet était des plus fortes » (Artigue & Robinet, 1982, p. 8). Par exemple, en situation – celles qui sont décrites dans leur article –, le cercle fait appel à différentes conceptions perceptivement irréductibles l'une à l'autre : courbe fermée de courbure constante, courbe admettant une infinité d'axes de symétrie, ensemble des points équidistants d'un même point. Nous ajoutons le cercle comme courbe qui peut être replacée d'une infinité de façons dans son empreinte.

Pourquoi ne pas faire expliciter aux élèves les propriétés associées aux conceptions manifestées ? Certes, ce n'est pas indiqué dans les programmes, mais cela pourrait contribuer à une meilleure conceptualisation du cercle par les élèves. Les élèves proposeraient peut-être des formulations du type « le cercle tourne toujours pareil », « on peut plier le cercle en deux parties superposables de plein de façons », etc. Ce serait des propriétés associées à la perception visuelle ou à des manipulations matérielles de Géométrie 1. Remarquons que la définition explicitée dans les programmes du cycle 3 est celle, ponctuelle, du cercle comme ensemble des points tous à la même distance d'un point fixé appelé centre, définition de Géométrie 2.

Le lecteur de Duval (2005) aura pointé que cette dernière définition s'appuie sur des unités figurales 0D, les points, alors que les conceptions précédentes valorisaient plutôt des unités figurales 2D que 1D. C'est aussi la seule définition mentionnant un point, le centre, qui ne fait pas partie de la courbe, et peut rester invisible dans certaines conceptions du cercle[4]. Artigue et Robinet (1982) mentionnaient déjà que cette définition ponctuelle du cercle n'est pas d'accès facile au cycle 3, dans la mesure où les élèves ont plutôt des conceptions globales du cercle.

Par contre, même si cette définition lui ressemble, ce n'est pas celle du Livre I des Éléments d'Euclide qui définit comme cercle l'unité figurale 2D dont l'unité figurale 1D est le contour. Euclide (début du Livre I) considère que le centre fait partie du cercle et que le diamètre est une longueur invariante du cercle et un axe de symétrie.

> Définition 15 : Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence et telle que toutes les droites issues d'un point intérieur (unique) vers la circonférence sont égales entre elles.
>
> Définition 16 : Et ce point se nomme le centre du cercle.
>
> Définition 17 : Le diamètre du cercle est une droite menée par le centre, et terminée de part et d'autre par la circonférence du cercle : le diamètre partage le cercle en deux parties égales. (Perrin, 2005, p. 2)

Nous remarquons que deux expressions sont utilisées dans le traité très construit des Éléments d'Euclide : cercle pour l'unité figurale 2D (que nous nommerons désormais cercle-2D), circonférence pour l'unité figurale 1D (cercle-1D). Cette distinction pourrait être à l'origine des deux termes scolaires associés de nos jours

[4] Remarquons que rayon et diamètre restent souvent implicites ou définis comme des longueurs.

au cercle : disque pour le cercle-2D, et cercle pour le cercle-1D. Mais pourquoi conserver deux termes à l'opposé de toute autre figure élémentaire comme le carré, le rectangle, tout polygone ? Cette interrogation est d'ailleurs étudiée dans le Nouveau Dictionnaire de Pédagogie et d'Instruction Primaire, par Bourlet (1911) dans l'article Mathématiques, section *Géométrie et dessin géométrique*, *Cours moyen* :

> On a, par exemple, conservé dans l'enseignement primaire la fâcheuse habitude, depuis longtemps abandonnée des mathématiciens, d'employer les termes cercle et circonférence, en disant : le cercle est une surface, la circonférence est une ligne. […] Pourquoi deux termes[5] pour le cercle et un seul pour le carré, le rectangle, l'ellipse, la sphère, etc. ? Si l'on était logique, il faudrait deux mots, l'un pour désigner la portion de plan limitée par un carré et l'autre pour désigner la ligne qui la borde ; il faudrait aussi deux termes, l'un pour désigner le volume de la sphère et l'autre pour sa surface. (Bourlet, 1911, p. 16)

Risquons même une hypothèse : l'existence de deux termes différents empêcherait les élèves d'avoir un double regard sur le cercle (comme surface et comme ligne) : l'expression « cercle » orienterait sur un regard 1D, empêcherait de considérer des points intérieurs au cercle (notamment le centre) ; l'expression « disque » entraînerait un regard 2D.

Dans leur article, Artigue et Robinet considèrent le compas comme un outil de maniement aisé (Artigue & Robinet, 1982) qui permet un tracé immédiat, sans qu'il soit nécessaire de se rappeler des propriétés géométriques du cercle. Il nous semble que cela peut faire obstacle à la compréhension du cercle comme un objet géométrique avec des propriétés définitoires. Par contre, pour tracer un carré, il est utile de savoir par exemple qu'il a quatre côtés de même longueur et quatre angles droits. Le cercle apparaît donc bien comme un objet géométrique d'intérêt au cycle 3.

2.3.3. Recherches sur le cercle

Des recherches plus récentes (p. ex. Bulf & Celi, 2020 ; Mathé et al., 2021 ; Guille-Biel Winder & Mangiante-Orsola, 2023) prennent le cercle comme objet géométrique d'étude. Par exemple, Bulf et Celi (2020) étudient dans trois classes (CE2, CM1, 6è)[6] l'implémentation d'une situation de reproduction de figure qu'elles ont conçue (que l'une mène en CE2) : construire au compas un cercle superposable à un cercle donné graphiquement, avec l'aide d'un gabarit « demi-disque » de même rayon que le cercle modèle ; ce gabarit non pliable ne peut être utilisé que pour

[5] Les termes cercle et circonférence ont été en usage dans l'enseignement jusqu'à la réforme des mathématiques modernes (années 1970), puis ils ont été remplacés respectivement par disque et cercle.
[6] 8-9 ans, 9-10 ans, 10-11 ans.

prendre des informations sur le modèle, notamment enrichir les tracés sur la figure modèle. La finalité déclarée par les chercheuses est d'« arriver à formuler une définition du cercle par son centre et son rayon. » (Bulf & Celi, 2020, p. 134)

Les autrices remarquent que les élèves des trois classes mettent en œuvre des procédures liées aux symétries axiales du cercle : avec le gabarit, partager le cercle modèle en deux par un axe vertical, complété parfois par un axe horizontal, trouver son centre ainsi ou comme milieu approximatif du diamètre. Cette inférence de la symétrie ne nous étonne pas : elle nous semble liée à la forme du gabarit, un demi-cercle-2D, qui amorce l'axe de symétrie, un diamètre. Tout se passe comme si les élèves étaient influencés par ce qu'ils perçoivent du gabarit. Par contre la situation choisie ne nous semble pas adaptée pour « ouvrir la voie vers une conception ponctuelle du cercle » (Bulf & Celi, 2020, p. 131), dans la mesure où elle n'engage pas la vision ponctuelle contenue dans cette définition.

Dans Bulf et al. (2021), cette même situation est comparée à deux autres situations observées aussi en sixième et visant le même objectif. La première, de facture plus classique, relève d'une pratique ostensive qui consiste à faire marquer collectivement au tableau le maximum de points à la même distance d'un point A, puis à solliciter le logiciel GeoGebra pour faire rapidement augmenter le nombre de points équidistants du point A. Cette ostension convainc les élèves qu'il existe un grand nombre de points équidistants du point A, mais ils ne sont pas prêts à croire que cet ensemble de points est un cercle. Le passage d'un ensemble de points équidistants d'un point à une ligne de courbure constante semble plus complexe que pensé dans ce contexte. La seconde observation en sixième concerne aussi une situation de reproduction d'un cercle avec un gabarit « demi-disque », mais l'enseignant a ajouté d'autres instruments (règle, règle graduée, etc.) différenciés selon leur coût d'utilisation par l'élève. Ces ajouts, de notre point de vue, la rendent très complexe à mener et à analyser (ne serait-ce qu'*a priori*). Ces trois observations de classe permettent aux autrices de mettre au jour des conceptions différentes entre celles visées et/ou utilisées par l'enseignant et celles des élèves, et de pointer la difficulté à construire la définition ponctuelle du cercle visée par les enseignants de collège.

Terminons ce panorama de recherches sur le cercle en évoquant celle de Chassapis (1998) qui porte une attention spécifique au compas pour le cercle. En appui sur une analyse de données empiriques, ce chercheur indique que l'utilisation du compas dans le dessin de cercles structure l'opération de dessin d'une manière radicalement différente qu'avec l'usage de gabarits de cercles. Il souligne alors l'intérêt de l'utilisation du compas pour transformer les concepts spontanés initiaux du cercle, fondés sur des attributs saillants isolés (par exemple la rondeur ou la symétrie) en des concepts qui se réfèrent plus explicitement aux éléments de définition de base du cercle (le centre et le rayon, le rayon étant une longueur ou un segment de droite). Il va dans le sens de la potentialité du compas pour approcher la définition du cercle visée par les programmes français. Cependant, même si ces données n’ont pas été récoltées, il souligne l’influence potentielle des interactions verbales entre élèves et chercheur, sur l’avancée de la pensée, des visualisations de la figure et de l’affinement des tracés. Cette analyse conforte notre hypothèse sur l’aide que peut apporter le compas et le choix d’analyses sémiotiques.

Ce parcours de recherches sur le cercle souligne la richesse des visualisations spontanées de cette figure, comme surface ou comme ligne. L’existence d’un instrument culturel, le compas, permet la construction de cette ligne et *a priori* la compréhension du rôle que joue le centre du cercle et de la conservation de la distance du centre à un point quelconque du cercle. Par contre, rendre accessible aux élèves une définition ponctuelle du cercle (prônée par les programmes) semble plus complexe. Dans l’étude présentée ci-après, la conception du cercle en jeu, implicitement portée par le compas, est celle d’une ligne de points à la même distance d’un autre point, le centre.

3. Contexte de l’étude et premières analyses

3.1. Contexte

La séance s’est déroulée en décembre 2021 dans une classe de 19 élèves de Cours moyen, installés en quatre îlots de quatre élèves et un îlot de trois élèves. L’enseignante nous a précisé que les élèves avaient déjà travaillé avec un compas, ce que demandent effectivement les programmes. Dans la classe est installée une affiche contenant un dessin de cercle (non nommé) et « différentes parties » nommées : centre, rayon, diamètre, corde.

Le travail complet sur le texte a duré une demi-heure, découpé de la façon suivante : lecture silencieuse du texte (pas d’espace de question), travail individuel, comparaison des dessins par îlot, puis mise en commun en classe entière. La consigne donnée par l’enseignante fut de « bien lire le texte et d’essayer de reproduire ce qui est demandé », avec la remarque que le carré de la première phrase était déjà tracé.

L’organisation de la classe en îlots fut un atout pour les modes de travail (travail individuel, puis discussion dans l’îlot sur la pertinence des dessins relativement au texte), mais aussi pour la variété des données susceptibles d’être recueillies (des échanges entre élèves permettent d’avoir accès à des processus de tracé ou aux raisons de ces processus) et pour l’organisation matérielle de recueil de données. Étaient installés, pour le recueil du son, un enregistreur par groupe et un pour l’enseignante (micro-cravate), pour la partie filmée, une caméra fixe face à la classe, et trois caméras mobiles : l’une axée sur un groupe, les deux autres sur deux groupes chacune.

Nous en venons maintenant à l'analyse *a priori* de la tâche de conversion étudiée dans cet article.

3.2. Analyse de la tâche *a priori*

Les élèves doivent construire la figure correspondant au texte « *Tracer un carré. Tracer un cercle qui a pour centre un sommet du carré et qui passe par deux autres sommets* ». Ils disposent de leurs instruments de géométrie et d'une feuille sur laquelle le carré (4 cm de côté) est tracé (annexe 1).

Il s'agit donc de tracer aux instruments un cercle répondant à deux conditions : l'une contraint la position du centre (sur un sommet du carré), l'autre contraint deux points de la courbe (deux sommets du carré).

Nous identifions deux difficultés *a priori*, en quelque sorte emboîtées. Point de vue du cercle : le rayon du cercle n'est pas donné (comme abordé dans les classes d'avant, au cycle 2) ; le cercle est défini par son centre et deux de ses points, qui sont des points spécifiques d'une autre unité figurale, un carré. Point de vue du carré : trois sommets du carré sont en jeu, chacun affecté d'une seconde désignation : pour l'un, centre, pour les deux autres, points du (sur le) cercle. La compréhension de la double désignation est cruciale. *A priori* le dilemme principal est de choisir si les sommets du carré qui sont sur le cercle sont consécutifs ou opposés.

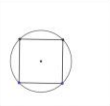
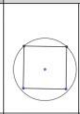
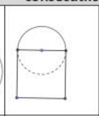
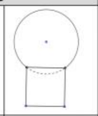
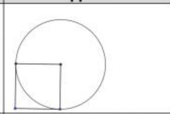
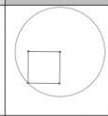
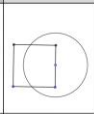
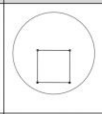
Le problème posé aux élèves est graphique. Pour le résoudre (en Géométrie 1), il faut faire des hypothèses et les tester par un tracé au compas, fictif (geste de mime avec l'instrument) ou réel. La première hypothèse porte sur le choix du sommet du carré à prendre comme centre : ce choix est indifférent, mais il n'est pas sûr que l'élève le sache *a priori*. La seconde hypothèse porte sur le choix du couple de sommets du carré qui seront points du cercle, sommets consécutifs ou opposés. Cette seconde hypothèse peut se dédoubler : faire l'hypothèse qu'un des points du cercle est le sommet opposé à celui du centre, rejeter cette hypothèse par le tracé au compas (le cercle ne peut pas passer par un autre sommet du carré), faire l'hypothèse qu'un des points du cercle est un sommet consécutif au sommet pris pour centre du carré, valider par le tracé.

Résoudre le problème géométriquement (en Géométrie 2) évite ces hypothèses : le centre du cercle étant un sommet du carré, chercher d'autres sommets du carré équidistants de ce sommet-centre permet de trouver les incidences cercle-carré et de déterminer que le cercle doit passer par les deux sommets du carré consécutifs au sommet-centre.

3.3. Productions des élèves et compléments d'analyse *a priori*

Le tableau 1 rend compte, pour chacun des dix-neuf élèves, de son dessin initial ou d'un dessin intermédiaire, gommé ou réalisé sans laisser de trace : aucun dessin final n'a été obtenu du premier coup. Nous avons attribué à chaque élève un prénom devant lequel nous avons noté le numéro de son îlot, ce qui nous permet d'observer les dessins finaux qui ont pu bénéficier d'un « effet îlot », à savoir l'accord du groupe d'élèves (tacite ou discuté) pour la production d'un même type de dessin. Les prénoms en gras sont ceux des élèves qui ont conservé comme dessin final le même type de dessin que l'initial (six élèves concernés).

Tableau 1. Types de dessins au compas produits par les élèves

	A	B	C	D	E	F	G	H
	4 sommets	**2 sommets**				**1 sommet**	**0 sommet**	
		consécutifs			**opposés**			
TYPES DE DESSINS								
Dessin initial ou intermédiaire	1Clodia, 1Jamie, 4Zoé, 5Lili, 5Tamis, 5Mary	5Luis	2Gaby, 2Kléa 3Luc, 3Paul 4Maël	2Florine	1Claire	1Adrien, 1Jamie	3Daïa	
Dessin final	**4Zoé** **5Lili, 5Tamis**	**5Luis**	**4Maël**	4Loïc, 4Norick	**1Claire**, 1Adrien, 1Clodia, 1Jamie, 2Elena, 2Florine 3Daïa, 3Luc, 3Paul, 5Mary		2Gaby	2Kléa

Nous observons une variété de propositions d'assemblages du cercle et du carré, que nous avons classés en fonction du nombre de sommets du carré appartenant au cercle : 4 (colonne A), 2 (colonnes B, C, D, E), 1 (colonne F) et 0 (colonnes G et H). Le dessin correspondant au texte, un cercle de centre un sommet du carré et qui passe par deux autres sommets du carré (colonne E), a été réalisé par dix élèves comme dessin final (soit la moitié de la classe). Une seule élève (Claire) avait envisagé ce dessin dès la lecture du texte. Trois élèves seulement (Claire, Adrien, Jamie) ont pris comme centre du cercle un sommet du carré dans leur dessin initial ou intermédiaire.

Un premier constat est à faire : le compas n'a pas apporté l'aide supposée pour la réussite de la tâche à tous les élèves. Ce qui nous conduit plus loin à analyser les connaissances en jeu pour d'une part le maniement du compas, d'autre part la conception « points du cercle équidistants de son centre », conception inhérente à ce problème.

L'analyse des dessins produits (tableau 1) confirme l'émergence des difficultés envisagées dans notre analyse *a priori* (en lien avec la double désignation : un centre est aussi un sommet) ; elle nous en révèle aussi d'autres. Les productions erronées des élèves nous amènent en effet à regarder la tâche proposée comme un problème géométrique « plus ouvert » que nous le pensions au départ (car nous considérions naturel que les élèves de Cours moyen[7] aient certaines connaissances sur le cercle et l'usage du compas, mais certains de ces élèves-là ne les avaient pas, comme nous le verrons par la suite). Nous pouvons donc maintenant compléter l'analyse *a priori*

[7] En appui sur notre interprétation des programmes

relative aux difficultés liées à la compréhension du texte en nous centrant cette fois sur les sommets du carré utilisés pour la construction du cercle (en tant que centre ou point du cercle).

Les élèves ont dû inférer, à partir du texte, le nombre de sommets du carré en jeu dans le dessin et leur « rôle » dans le dessin final. Les choix *a priori* sont les suivants.

Trois sommets sont en jeu (colonnes A, E) :

– les trois sommets sont sur le cercle : l'élève visionne alors le cercle circonscrit qui satisfait au moins à cette contrainte (colonne A) ;

– l'un des sommets est le centre, les deux autres vérifient les incidences cercle-carré du texte (colonne E) : ce sont des sommets nécessairement opposés.

Deux sommets sont considérés (colonnes B, C, D) :

– ils sont des incidences cercle-carré. C'est la seule contrainte retenue : avec le centre du cercle proche du centre du carré (colonne B, tracé du cercle circonscrit « aménagé » pour que deux sommets du carré seulement soient sur le cercle) ; avec le centre du cercle comme milieu d'un côté du carré (colonne C, le côté du carré est un diamètre du cercle) ; avec le centre du cercle sur la médiatrice d'un côté du carré (colonne D, le côté du carré est une corde du cercle) ; avec le centre du cercle sur une diagonale du carré (la diagonale du carré est une corde du cercle) ;

– l'un est le centre, l'autre un point du cercle (colonne F).

Un seul sommet est pris en compte : point du cercle ou centre du cercle.

Aucun sommet n'est pris en compte (colonnes G, H).

Dans la partie suivante, nous nous intéressons aux processus de tracé de quelques élèves, afin d'avoir un éclairage sur les connaissances qu'ils ont mis en jeu lors de la résolution de la tâche et sur leurs difficultés éventuelles.

4. L'analyse de processus de tracé

Nous avons choisi de rendre compte du processus de tracé de trois élèves (Claire, Jamie, Mary) dont les hésitations et les décisions nous semblent assez représentatives de difficultés rencontrées par les élèves de la classe.

Dans notre description des processus de tracé, nous utilisons des termes spatiaux pour désigner les sommets du carré en appui sur la position du carré par rapport à l'élève. De plus, nous associons des repères de temps à ces photos pour les situer les unes par rapport aux autres dans le déroulement de la séance. L'origine du temps est prise au début de la séance. Les élèves démarrent la tâche étudiée à environ vingt-cinq minutes du début de la séance[8].

Mary est dans l'îlot 5 avec Lili, Luis et Tamis ; Claire et Jamie sont dans l'îlot d'à côté (îlot 1) avec Adrien et Clodia. Précisons que nous analysons les processus de tracé de la figure que se représentent les élèves, même si elle n'est pas la figure du texte.

Pour faire ces analyses, nous nous appuyons sur le cadre d'analyse de la construction instrumentée de Petitfour (2015, 2017a) qui « tricote » les relations entre utilisations de l'instrument et concept géométrique naturellement associé (ici cercle et compas).

4.1. Connaissances en jeu dans l'action instrumentée

Petitfour (2015, 2017a) a défini l'expertise en dessin instrumenté en géométrie par l'articulation de différents types de connaissances activées lors d'une séquence d'actions instrumentées. Précisons qu'une telle action est celle d'un sujet qui, dans son environnement de travail, utilise un objet technique (l'instrument de géométrie) pour produire ou analyser un objet graphique (dessin) représentant un objet géométrique. Ce développement permet de pointer quelles connaissances possède l'élève et lesquelles lui manquent pour utiliser de façon adaptée un instrument de géométrie.

Nous retenons pour la présente étude quatre types de connaissances, que nous précisons en les exemplifiant avec l'utilisation du compas pour tracer un cercle à partir de son centre et d'un de ses points dans l'environnement papier-crayon.

Les *connaissances technico-géométriques*[9] sont celles qui relient l'instrument (ou certains de ses composants) avec des éléments géométriques (représentés par des objets graphiques) : elles opérationnalisent l'intention de tracer (« l'intention d'agir » (Mazeau et al., 2021) en vue d'obtenir l'objet géométrique envisagé, indépendamment des conditions matérielles de tracé. Pour un tracé de cercle caractérisé par son centre et un de ses points, il s'agit de choisir comme instrument un compas, de mettre la pointe sur le centre du cercle et la mine sur un de ses points, puis de faire tourner la mine d'un tour complet sur le papier.

Les *connaissances manipulatoires* sont celles qui pilotent, à la suite d'une intention de tracer, les actions corporelles à coordonner pour déclencher l'organisation motrice

---

[8] Une autre tâche de conversion le texte et le dessin est réalisée lors de la première partie de la séance.

[9] Nous optons pour ce qualificatif de « technico-géométrique » plutôt que « technique » pour laisser apparente dans le terme la relation entre objet technique et objets géométriques sur laquelle porte les connaissances en question.

et spatiale de l'utilisation de l'instrument : l'élève sait les mettre en œuvre si le tracé obtenu correspond à son intention. Pour le cercle à tracer, il s'agit de positionner d'abord le compas : la main dominante maintient la branche du compas avec la pointe plantée sur le centre du cercle, tandis que l'autre main tire sur l'autre branche jusqu'à placer la mine sur un point du cercle. On peut ensuite tenir le tourillon du compas par la pince pouce-index de la main dominante tandis que l'autre main est posée à plat sur le papier pour le maintenir. Une flexion progressive de l'index de la main dominante permet de mouvoir le tourillon sur le pouce et ainsi tracer le cercle voulu. Une pression plus forte sur la pointe que sur la mine doit être réalisée pendant ce mouvement. Une alternative consiste, une fois pointe et mine positionnées, à garder le compas fixe de la main dominante et faire tourner la feuille de l'autre main en pivotant autour de la pointe du compas.

Les *connaissances organisationnelles* concernent la planification des séquences de gestes précédemment décrites (au niveau technico-géométrique et manipulatoire), mais également l'organisation d'actions périphériques à la réalisation du tracé envisagé pour permettre sa réussite : aménagement de l'espace de travail (pour permettre de bonnes conditions de tracé) et apprêt du matériel.

Dans notre exemple, la feuille de tracé doit être posée sur une surface plane, non dure (comme une pochette cartonnée) pour éviter que le compas glisse quand on le pique, la mine du compas doit être taillée, la vis qui lie les deux branches doit être serrée, les deux branches doivent être réglées à la même hauteur, etc.

Les *connaissances géométriques* sont relatives aux objets, propriétés et relations géométriques. Pour le cercle à tracer, elles sont par exemple « Deux points du cercle-ligne[10] sont à la même distance du point centre », mais aussi la reformulation « Le centre du cercle est un point équidistant de tous les points du cercle-ligne ».

Les trois sections qui suivent relatent les processus de tracé de trois élèves. Rappelons que nous n'avons pas eu d'informations *stricto sensu* sur les habilités des élèves pour les tracés de cercle. L'enseignante a accepté ce projet de séance. Une leçon sur le cercle a été faite. Chaque élève était muni d'un compas, éventuellement sorti de l'armoire, et l'avait déjà utilisé.

Nous demandons au lecteur d'exercer sa vigilance sur les émergences des connaissances en jeu (ou leur absence) et d'inférer des interprétations par les élèves des expressions « centre » et « sommet ». Nous ferons une synthèse dans ce sens.

[10] L'expression cercle-ligne serait plus adaptée au cycle 3 que cercle-1D

4.2. Processus de tracé de Claire

Claire lit le texte à voix haute, puis signale à Jamie que le carré est déjà tracé : elle parcourt le contour du carré avec son doigt en précisant « Là, c'est le carré là, il est déjà fait ». Elle montre ensuite les paires de sommets par lesquelles le cercle peut passer, en réponse à l'inquiétude suivante d'Adrien : « Y'a un truc que j'comprends pas, faut qu'ça passe par deux, deux autres sommets, mais pas celui-là, pas un, c'est bizarre » (25 min 33 s). Elle place alors la pointe du compas sur le sommet « haut droite » du carré, amène la mine sur le sommet « haut gauche », saisit le compas d'une main, maintient la feuille de l'autre main et trace le cercle par à-coups. Elle soupire, dit qu'elle ne sait pas se servir d'un compas, repositionne pointe et mine sur les mêmes sommets et recommence le tracé cette fois en maintenant le compas fixe et tournant la feuille. Elle gomme le cercle, disant qu'elle va « le refaire mieux ». Elle retrace, gomme une partie parce qu'« il y a des vagues » et trace de nouveau.

Ainsi, Claire tente différentes tenues du compas lors de ses tracés (figure 2a). Elle maintient le compas par les branches, pas par le tourillon. Durant sept minutes, elle réalise six essais de cercle, qu'elle achève en épaississant le trait au crayon (figure 2b). Elle obtient un dessin (figure 3) qui ne la satisfait pas entièrement. Elle dira préférer le dessin d'Adrien « parce qu'il est bien symétrique » contrairement au sien.

Claire a eu une idée précise du cercle à tracer dès sa lecture du texte. La présentation aux membres de son îlot d'une planification cohérente d'étapes conduisant à la résolution du problème géométrique posé (figure 4) confirme sa bonne compréhension du texte : il faut tracer un cercle (37 min 40 s), quatre centres sont possibles (37 min 49 s) et une fois le centre choisi sur un sommet du carré (37 min 51 s), le cercle passe par un sommet qui lui est consécutif (37 min 58 s). L'explicitation de sa procédure à ses pairs rend compte de bonnes *connaissances technico-géométriques* et également *géométriques* (caractérisation d'un cercle par son centre et un point de sa courbe, propriétés du carré relatives à ses sommets).

Figure 2. Tracé du cercle par Claire

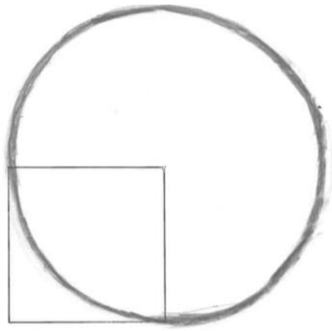


Figure 3. Production finale de Claire

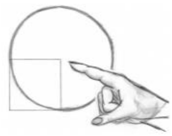
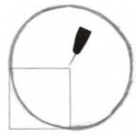
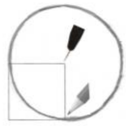
	37 min 40 s	37 min 45 s	37 min 49 s	37 min 51 s	37 min 58 s	38 min 00 s
MOTS	J'ai fait euh un cercle	alors je me suis basée sur le centre, le centre, d'un sommet	tu pouvais déjà prendre celui-là, celui-là, celui-là	J'ai pris celui-là, comme ça, j'ai pris ma pointe j'ai fait ça	j'ai relié à celui-là	puis après j'ai tracé mon cercle
ACTIONS	*Elle trace un cercle dans l'air avec l'index*	*Elle pointe un sommet du carré avec l'index*	*puis successivement les trois autres sommets du carré avec son crayon.*	*Elle met la pointe sur le sommet du carré désigné avant comme centre du cercle*	*Elle amène la mine sur un sommet consécutif au sommet pris pour centre*	*Elle mime le tracé avec son compas*
DESSINS						

Figure 4. Méthode de tracé présentée par Claire

Les difficultés de Claire se situent uniquement au niveau *manipulatoire* : la préhension du compas par les branches, et probablement un mauvais dosage dans les appuis, l'empêchent d'obtenir le tracé qu'elle envisage et la conduit à recommencer plusieurs fois. Son dessin manque de précision. Elle en est consciente. Elle cherche à améliorer le rendu de la circularité de la courbe, géométriquement correcte, en épaississant la ligne.

4.3. Processus de tracé de Jamie

Après des lectures à voix haute du texte, en interaction avec Claire qui lui précise que le carré est déjà tracé, Jamie explore différents types de dessins. Elle jette des coups d'œil réguliers sur ce que fait Claire, sa voisine, dont le dessin correspond bien au texte dès le premier tracé, mais avec un manque de précision comme nous venons de le voir. Nous relatons le déroulement de la recherche de Jamie.

Jamie place d'abord la pointe de son compas sur le sommet « haut droite » du carré et trace un arc intérieur au carré (figure 5, 25 min 36 s). Elle le gomme, puis reprend ce même tracé en réalisant le cercle complet (figure 5, 26 min 8 s), qu'elle gomme aussi, peut-être parce qu'il ne passe pas précisément par des sommets du carré ? Ce dessin est proche du dessin correspondant au texte (tableau 1, colonne E), mais Jamie ne semble pas le percevoir ainsi. En effet, elle n'ajuste pas l'écartement des branches du compas pour améliorer la précision du dessin, elle envisage un autre type de dessin (cercle circonscrit au carré) : elle place la mine du compas sur le sommet « bas gauche » du carré et la pointe dans une zone centrale, puis elle fait pivoter le compas en appui sur la pointe sans tracer (figure 5, 26 min 36 s). Notons que ce type de dessin est celui que vient juste de tracer Clodia, assise en face d'elle dans l'îlot 1. Peut-être Jamie a-t-elle voulu tenter un tracé analogue, voyant aussi Claire non satisfaite de sa proposition de dessin ?

Figure 5. Premiers essais de Jamie

Jamie écarte ensuite les branches du compas, place la mine sur le sommet « bas droite », la pointe sur le sommet opposé (« haut gauche ») et étonnamment pivote dans l'air en appui sur la mine : les deux branches du compas semblent jouer pour Jamie un rôle symétrique, ce qui ne pose pas de problème si elle cherche seulement à visualiser la ligne sans tracer. Elle semble ainsi tester une autre hypothèse pour les sommets sur le cercle.

L'enseignante arrive et demande à Jamie, qui n'a pas encore de dessin sur sa feuille, ce qu'il faut faire. Jamie répond qu'il faut faire un cercle, puis elle lit le texte (27 min 53 s) « Trace un carré. Trace un cercle qui a pour centre un sommet du carré et qui passe par deux autres » et s'exclame « Ah, il faut faire un cercle qui passe dans deux sommets ? ». Sa lecture semble lui avoir fait comprendre cette contrainte de deux sommets sur le cercle à tracer. Notons qu'elle n'exprime pas l'information sur le centre du cercle, tout comme elle ne l'a pas prise en compte dans son essai précédent.

Jamie va tester ensuite longuement une troisième hypothèse : tracer un cercle qui passe par un sommet (du carré) opposé à celui qui est centre du cercle, en mettant du temps à comprendre que cette courbe ne passe pas par un troisième sommet (du carré). Elle oriente d'abord sa feuille en format paysage. Elle positionne son compas avec la pointe près du sommet « bas droite » et la mine un peu au-dessus du sommet opposé (figure 6, 28 min 15 s). Elle pivote le compas en appui sur sa pointe, avec la mine en hauteur (figure 6, 28 min 16 s), en allant dans un sens, puis dans l'autre.

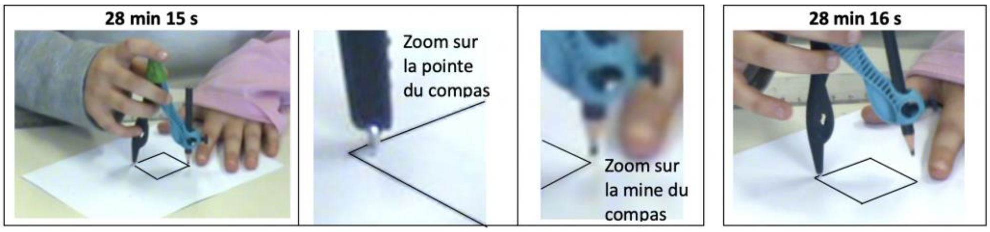


Figure 6. Positionnement du compas avant et pendant la rotation

Elle semble hésiter constatant peut-être que la ligne envisagée ne passe pas par un autre sommet (ou encore que la ligne « sort » de la feuille). Elle tourne sa feuille d'un quart de tour (format paysage), place la mine sur le sommet « bas gauche » et la pointe sur le sommet opposé (figure 7, 28 min 58 s). Elle réoriente alors sa feuille et pivote le compas en appui sur la mine placée sur le sommet « bas droite » avec la pointe très en hauteur au-dessus du sommet haut gauche (figure 7, 29 min 2 s). De nouveau, son usage du compas n'est pas approprié pour réaliser un tracé. Elle semble viser le sommet « bas gauche » (figure 7, 29 min 4 s), le compas glisse quand elle pose la pointe sur la feuille (figure 7, 29 min 5 s). Elle s'exclame « Ah non, mais j'ai bougé ! » et elle gomme.

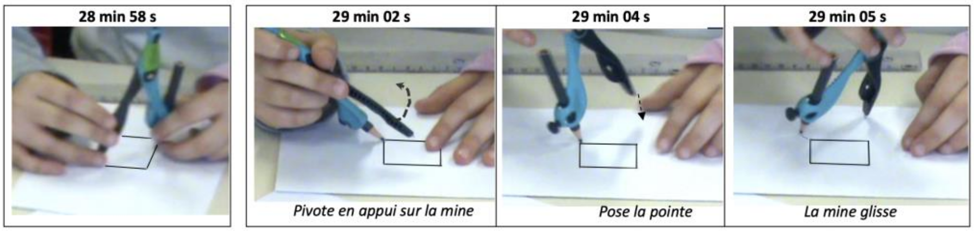


Figure 7. Jamie (28 min 58 s à 29 min 5 s)

Elle trace cette fois le cercle envisagé, démarrant du sommet « haut gauche » (figure 8, 29 min 18 s). Elle s'arrête quand elle se rend compte qu'elle n'atteint pas le sommet du carré « bas gauche » (figure 8, 29 min 23 s). D'un ton agacé en tapant ses deux mains à plat sur la table, elle dit pour elle-même : « Oh, mais là c'est pas du tout bon hein ! ». Le tracé au compas lui permet ainsi d'invalider le choix fait de deux sommets opposés du carré comme centre et point du cercle.

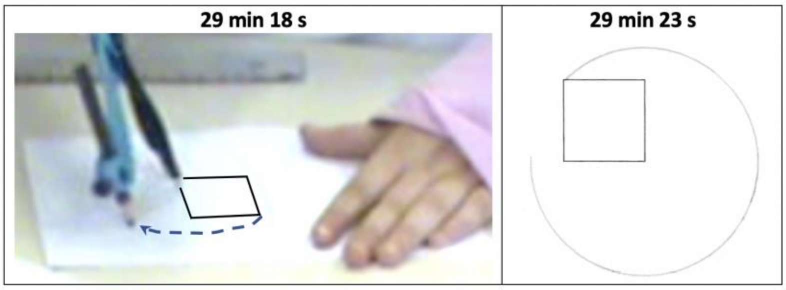


Figure 8. Jamie (29 min 18 s et 29 min 23 s)

Jamie change alors de rayon en plaçant la pointe du compas sur un sommet et la mine sur un sommet consécutif, elle trace un cercle correspondant au texte en recommençant deux fois, en vue d'améliorer la précision. Elle fait preuve de relatives facilités de manipulation du compas tout au long de sa recherche. Ses actions révèlent à la fois la présence de *connaissances technico-géométriques et manipulatoires*. Elle formule d'ailleurs ainsi à Adrien, qui s'énerve de ne pas « arriver à planter son compas », une *connaissance organisationnelle* : « Moi quand j'le plante, je fais un petit trou, comme ça je sais où j'l'ai mis si je dérape. » (32 min 24 s).

4.4. Processus de tracé de Mary

Mary lit le texte pendant une minute. Elle prend son compas, place d'abord la mine sur le sommet « haut gauche » du carré, met la pointe approximativement au centre du carré, puis mesure l'écartement pointe-mine obtenu sur sa règle graduée. Elle recommence deux fois ce placement mine-pointe sur le carré puis sur sa règle. Elle pose son compas et marque au crayon un point au jugé dans la zone centrale du carré. L'écartement des branches du compas ainsi pris est mesuré, peut-être par automatisme, Mary associant la manipulation du compas au tracé d'un cercle de rayon une mesure donnée ?

Mary remet son compas dans la position précédente, prêt à tracer, mais s'interrompt pour relire le texte. Elle échange alors avec Lili sur la nécessité de retracer un carré (ce qu'a fait Luis) jusqu'à entendre l'enseignante redire que le carré tracé doit être utilisé. Mary gomme la marque mise à l'intérieur du carré. Trois minutes se sont écoulées depuis sa première lecture du texte, Lili et Tamis ont chacun tracé un cercle « à peu près circonscrit » au carré en décidant d'un centre au jugé en quelques essais.

Mary reprend son compas et réalise sept tracés d'arc de cercle qu'elle gomme au fur et à mesure : à chaque fois, elle place la mine sur le sommet « haut gauche » du carré et la pointe approximativement au centre du carré, elle maintient le compas fixe et trace en faisant tourner sa feuille. Elle interrompt le tracé et le gomme lorsque l'arc ne passe pas sur le sommet « haut droite » du carré. Pour ces différentes tentatives, Mary conserve l'écartement du compas et fait varier, sans contrôle apparent, la position de la pointe. On peut voir sur sa production les marques laissées par la pointe du compas dans la zone centrale du carré (figure 9a). Au huitième essai, Mary utilise sa règle graduée : elle la place à peu près comme médiane horizontale du carré, puis comme médiane verticale du carré en alignant les graduations 0 et 4 sur les côtés du carré (figure 9b). Elle place cette fois-ci la pointe du compas au niveau de la graduation 2, enlève la règle et ajuste la mine du compas sur le sommet « haut gauche » du carré. Elle trace alors un cercle « à peu près circonscrit » au carré en maintenant le compas fixe et tournant sa feuille, puis elle pose son compas. Cinq minutes ont été nécessaires pour aboutir à ce tracé.

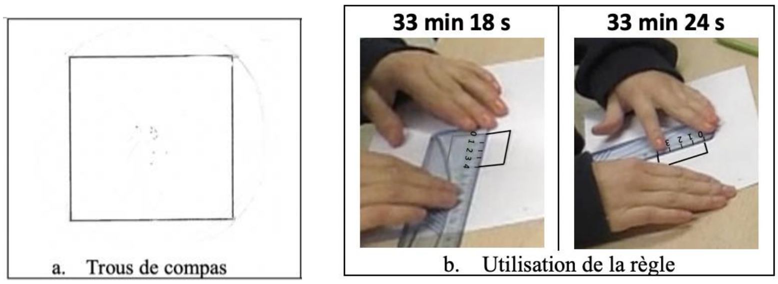


Figure 9. Recherche du centre du cercle circonscrit au carré par Mary

Ces premières observations nous dévoilent l'intention de Mary : tracer « un » cercle circonscrit au carré donné. Ce cercle passe bien par deux sommets du carré comme l'impose le texte, mais il n'a pas comme centre un sommet du carré comme il le devrait. Le dessin de Mary, analogue à celui des élèves de son îlot (Lili, Tamis, Luis), reflète la difficulté de compréhension du texte liée à la double désignation (Duval, 2014) : un sommet du carré doit aussi être le centre du cercle. Rappelons que seuls trois élèves sur dix-neuf (issus de l'îlot 1) tiennent compte de cette information sur le centre du cercle dans leur premier tracé. Dans ses premiers tracés d'arc de cercle, nous observons Mary commencer par placer la mine du compas sur un sommet du carré (haut gauche), puis maintenir la pointe sans chercher à la localiser précisément. De plus, quand la pointe bouge, elle ne cherche pas à la positionner là où elle était pour poursuivre le tracé. Elle semble ne pas envisager un centre pour le cercle, se focalisant seulement sur la ligne de courbure constante produite par le compas. Cela reflète un déficit initial de *connaissances technico-géométriques* sur le cercle (absence de mise en lien entre pointe du compas et point-centre du cercle) et de *connaissances géométriques* (cercle caractérisé par un de ses points et son centre ; cercle caractérisé par un rayon et son centre). Le dernier tracé (répondant enfin au dessin envisagé par Mary), par l'usage des graduations de la règle pour placer la pointe du compas au centre du carré, révèle l'émergence de ces connaissances, mais

Mary ne va pas les réinvestir dans la suite de sa recherche, comme nous allons le voir maintenant.

L'enseignante passe dans le groupe alors que Mary achève son tracé de cercle « circonscrit au carré », constate que les élèves sont tous les quatre d'accord sur le même dessin et leur suggère de relire le texte. Mary relit le texte, puis jette un coup d'œil sur le dessin produit par Claire dans l'îlot 1 derrière elle. Au bout de quelques secondes, elle place sa main droite sur son dessin comme sur la figure 10 : les quatre doigts pliés sont fixés au niveau du sommet « haut droite » du carré, le pouce se déplace du sommet « haut gauche » du carré au sommet « bas droite » parcourant l'arc que pourrait faire un compas. Mary semble ainsi envisager une position correcte pour la pointe/le centre (un sommet) et la possibilité pour le cercle de passer par deux sommets opposés du carré. Elle gomme alors son dessin de cercle circonscrit au carré. Dix minutes se sont écoulées depuis sa première lecture du texte.

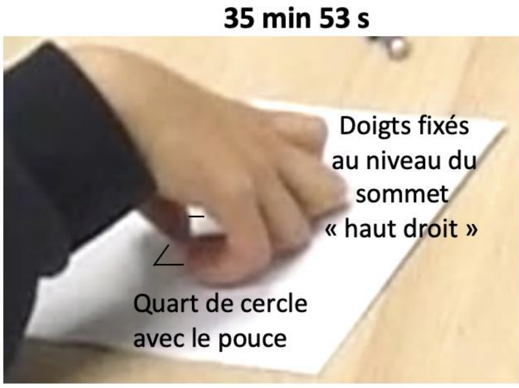


Figure 10. Mime du tracé d'un arc de cercle avec la main par Mary

Mary démarre un nouveau tracé. Elle place la pointe du compas proche du sommet « haut droite » et la mine dans la zone centrale du carré, elle trace un premier arc (figure 11, 36 min 47 s) qu'elle interrompt voyant qu'il n'atteint pas le sommet « bas droite » du carré. Elle positionne alors la mine sur le sommet « bas droite », la pointe s'éloigne de trois millimètres du sommet près duquel elle se trouvait (figure 11, 37 min 9 s). Mary pivote le compas sans tracer pour atteindre le sommet « haut gauche », la mine arrive à côté, elle la met dessus en déplaçant un peu la pointe et pivote le compas vers le sommet « bas droite », mais la mine ne l'atteint pas. Mary repositionne la mine sans se préoccuper de la pointe du compas (figure 11, 37 min 29 s) : elle tient le compas par la branche de la mine et trace un arc en poussant cette branche (figure 11, 37 min 31 s). L'arc ne passe pas par le sommet « haut gauche ». Elle repositionne le compas comme précédemment (figure 11, 37 min 40 s), trace cette fois en tenant le compas par sa partie supérieure, puis efface tout.

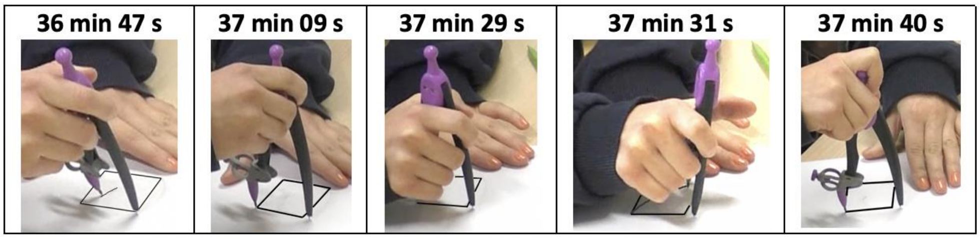


Figure 11. Tracé d'un arc de cercle d'arc de cercle à l'intérieur du carré par Mary

Mary poursuit alors ses tentatives de tracé pendant deux minutes en procédant toujours de la même manière : elle cherche à faire passer un cercle par deux sommets opposés du carré, sans se préoccuper de la pointe du compas qu'elle installe à différentes positions proches d'un sommet du carré, mais jamais précisément sur un sommet du carré. On peut voir sur sa production les marques laissées par la pointe du compas dans une zone près du sommet « haut droite » du carré (figure 12).

Mary a mis quatre minutes pour produire ce dessin, constitué d'une ligne courbe continue, formée d'arcs de cercle de centres différents : aucun n'est précisément centré sur un sommet du carré (voir cercle en pointillé sur la figure 12).

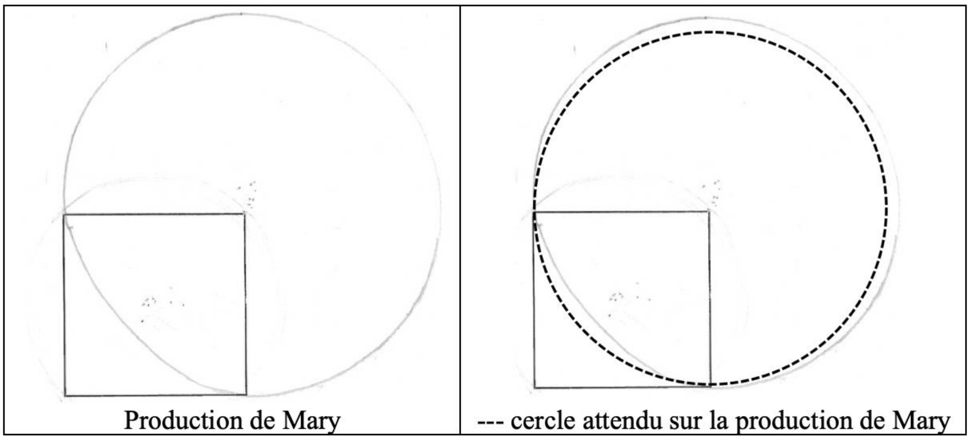


Figure 12. Production finale de Mary

Pourquoi Mary n'installe-t-elle pas la pointe du compas sur un sommet du carré ? Nous faisons plusieurs hypothèses, qui peuvent être concomitantes.

L'une relève d'une difficulté de compréhension du texte : il se peut qu'en amont de l'utilisation du compas, Mary ne réussisse pas, à partir du texte, à déterminer une position possible pour le centre. Par contre, elle a compris que le cercle passe par un sommet du carré, elle prend ce point pour entreprendre son tracé et y place la mine du compas. Sa compréhension partielle du texte, renforcée par des difficultés de manipulation (voir troisième hypothèse), la conduirait ainsi à ne guider qu'une des deux branches du compas (celle de la mine).

Une deuxième hypothèse est la mise en relation difficile entre parties de l'instrument et objets géométriques (*connaissances technico-géométriques*) : il faut placer la pointe du compas sur le centre du cercle que l'on souhaite tracer, en plus de placer la mine sur un de ses points ; ce centre est un point bien défini (objet 0D) et non un élément d'une zone (objet 2D) (*connaissances géométriques*). Mary aurait ainsi une interprétation spatiale de « centre » comme dans « au centre de la pièce ». Sur son dessin (figure 12), les traces de piquage de la pointe rendent compte de positions pour le centre du cercle visé qui sont situées dans une zone proche du sommet « haut droite » (zone centrale du cercle à tracer), sans choix privilégié de ce sommet. De même pour son premier type de dessin produit, Mary a utilisé une zone centrale du carré pour placer la pointe du compas (figure 9a) dans sa recherche de cercle au compas. Il se peut aussi qu'elle essaye de tracer à l'œil une ligne de courbure constante en utilisant le compas parce qu'elle sait que c'est l'instrument *ad hoc* pour le cercle.

Cette absence d'attention au positionnement de la pointe du compas – et donc à la détermination graphique du centre du cercle – est renforcée par des difficultés de manipulation (troisième hypothèse) qui montrent un manque de *connaissances manipulatoires* liées à l'usage du compas pour tracer un cercle : la pointe doit être nécessairement fixe pour produire un tracé circulaire et le compas se tient d'une certaine façon pour réussir le tracé, ce que ne respecte pas Mary. En témoignent aussi les photos sur la figure 11 : Mary tient le compas par les branches, le fait tourner en le penchant (36 min 47 s) ou en le poussant (37 min 31 s) ou encore fait tourner la feuille en gardant fixe le compas (37 min 40 s), mais avec des appuis mal dosés.

4.5. Que tirer de ces trois études ?

Claire a une vision claire et juste de la figure géométrique décrite par le texte dès sa première lecture, elle sait en rendre compte oralement, accompagnant son discours de gestes de pointage sur le dessin et de mime avec le compas. Elle centre son attention sur les relations entre points (centre – sommet, sommets – points du cercle) dont la position est précisée dans le texte. Le compas ne l'aide pas à préciser la figure géométrique si besoin était, à cause de certaines difficultés manipulatoires. Elle passe son temps à essayer de bien manier le compas, gommant et refaisant plusieurs fois son dessin, dans l'espoir d'obtenir une belle ligne courbe « sans vague », « bien symétrique » et passant par des sommets opposés du carré. On pourrait même dire que l'usage du compas se pose en obstacle à l'utilisation de ses *connaissances géométriques*, qu'il l'enferme dans une recherche de précision dans le tracé.

Plus généralement cela interroge l'exigence à l'école de produire un dessin « précis » pour témoigner de sa compréhension d'un texte décrivant une figure géométrique.

Claire nous prouve qu’elle a tout compris (figure 4) tout en désespérant du dessin produit, sur lequel l’enseignante aurait peut-être eu à redire. C’est un phénomène que Petitfour (2015) a relevé chez les élèves dyspraxiques et au sujet duquel elle a déjà mis en garde. Ces élèves sont mis en échec lorsqu’ils doivent exécuter des actions instrumentées : leurs productions graphiques, imprécises, coûteuses en temps de réalisation et en énergie, pourraient conduire à se méprendre sur la qualité de leur raisonnement géométrique, alors qu’elles ne reflètent en rien le projet de tracé qu’ils ont élaboré. Il ne s’agit pas de supprimer l’usage des instruments à l’école, mais d’accepter, au cas par cas, une alternative à la construction d’un dessin précis, par exemple une verbalisation du processus de construction (telle Claire s’adressant à sa camarade dans la figure 4), notamment pour un élève qui manie difficilement les instruments. Une autre possibilité est la dyade instructeur-constructeur mise au point par Petitfour (2017b). À notre avis, cette précaution est valable, quelle que soit l’activité instrumentée. L’enseignant doit rester vigilant à ce type de difficulté manipulatoire : les élèves ne doivent pas se trouver empêchés d’avancer parce qu’ils ne réussissent pas à utiliser précisément (ou « selon l’usage prévu » par l’enseignant) un instrument quelconque, usuel en géométrie ou un peu atypique.

Contrairement à Claire, Jamie ne visualise pas la figure géométrique à dessiner dès le départ : elle va explorer plusieurs pistes d’interprétation du texte, témoignant ici d’une difficulté liée au traitement du texte dans le registre langagier. Elle a bien vite considéré un sommet comme centre du cercle à venir. Elle est certes encline à jeter un œil sur le dessin de ses voisines d’îlot, elle a sans doute besoin de se persuader que c’est la bonne figure : nous interprétons ainsi le renoncement à son premier dessin qui était proche du dessin correct de Claire, l’esquisse de son deuxième dessin inspiré de celui de Clodia, son exclamation lors des essais de tracé d’un cercle passant par deux sommets opposés du carré. Le compas lui permet, comme nous en faisions l’hypothèse, de rejeter finalement l’hypothèse qu’un des points du cercle est un sommet opposé à celui pris comme centre. Sa dextérité dans le maniement du compas lui permet de multiplier des tracés fictifs ou des tracés tangibles ; ce sont ces essais répétés qui la poussent à changer d’hypothèse pour le second sommet sur le cercle.

Quant à Mary, elle ne voit pas, ne décode pas, ne tient pas compte de l’information donnée sur le centre du cercle, dans un premier temps sans doute à cause de la double désignation. Mais le compas ne l’aide pas à mieux aborder le texte, à se poser la question de la localisation du centre du cercle à tracer. Elle manque de *connaissances technico-géométriques* telles que la primauté du placement du centre du cercle pour y placer la pointe du compas. Elle amorce une courbe en utilisant la mine. C’est l’élève dont l’utilisation du compas nous a le plus surprises, par son gros manque de *connaissances manipulatoires*. De plus, il se peut que Mary interprète spatialement les termes géométriques centre, sommet, les considérant comme des zones : on la voit planter son compas sur différents points proches du sommet considéré. Cette vision de points (0D) comme unités figurales 2D, dénotant un manque de *connaissances géométriques*, est un phénomène que nous avons déjà pointé pour des élèves de Cours moyen avec le terme géométrique de milieu (Houdement & Petitfour, 2023).

5. Conclusion

La finalité de nos recherches est de relever, à partir des situations de classe ordinaires en fin d'école primaire, ce qui pourrait aider les élèves à développer des connaissances géométriques, ou ce qui pourrait empêcher ce développement. Cet article enrichit et poursuit l'étude de la conversion du même texte géométrique en un dessin à main levée (Houdement & Petitfour, 2022). Cette étude, impliquant le tracé d'un cercle « sur » un carré, et l'analyse sémiotique du processus de tracé au compas des trois élèves choisis, nous conduit à plusieurs résultats. Les uns sont relatifs au rôle de l'utilisation du compas dans une tâche de construction géométrique d'un cercle. Les autres apportent un éclairage nouveau sur des connaissances à développer en vue de conduire les élèves de cycle 3 à des apprentissages géométriques *via* la construction instrumentée.

5.1. Compas et tracé de cercle

Suite à notre étude (Houdement & Petitfour, 2022) sur la production d'un dessin à main levée correspondant au texte étudié dans cet article, nous avons fait l'hypothèse que le compas permettrait d'obtenir plus facilement un dessin correspondant à la figure géométrique décrite. Cette hypothèse se décline en deux volets. Le premier volet est géométrique, avec deux facettes : l'utilisation du compas contraindrait l'élève à s'intéresser au centre du cercle, et ainsi avancer vers une meilleure compréhension de la double désignation (le centre est un sommet) ; elle permettrait de trancher sur les incidences entre cercle et carré, deux sommets consécutifs ou opposés. Le second volet est cognitif en appui sur les travaux de Rabardel (1995) : l'utilisation du compas accroîtrait les « capacités assimilatrices » de l'élève et contribuerait « à l'ouverture de ses actions possibles ».

L'étude des processus de tracé des trois élèves nous donne des éléments de réponse. Dans cette séance, l'utilisation du compas ne semble rien apporter à Claire, elle a une vision claire de la figure qu'elle exprime oralement, du fait de ses *connaissances géométriques*. Le déficit en *connaissances technico-géométriques* et *manipulatoires* empêche Mary d'utiliser le compas comme une aide pour comprendre le texte et/ou invalider les dessins qu'elle produit. Par contre Jamie, assez habile dans le maniement du compas, réussit après plusieurs essais à produire une figure qu'elle valide comme figure attendue. Il se peut aussi que sa connaissance du compas (placer d'abord la pointe pour tracer) lui ait permis de repérer dans le texte l'information sur le centre du cercle.

En conclusion nos deux hypothèses seraient plutôt validées sous la condition que l'élève sache utiliser correctement un compas pour tracer un cercle dont le centre et un de ses points sont fixés. On peut aussi remarquer avec Claire que des *connaissances géométriques* peuvent rendre superflues le tracé précis de la figure ; encore faut-il qu'elles soient verbalisées (figure 4).

Malgré les recommandations des programmes concernant cercle et compas, notre étude a pointé qu'il existe des élèves de Cours moyen qui ne savent pas utiliser leur compas et d'autres qui conçoivent un cercle sans « penser » un centre. À notre avis ces deux manques sont liés : l'usage du compas dans des tâches simples de tracé de cercle devrait permettre de lier les *connaissances manipulatoires* (poser la pointe, ne plus la bouger, tirer sur la branche de la mine jusqu'à poser la mine et faire tourner le compas) et les *connaissances technico-géométriques* (le trou de la pointe comme centre du cercle, la trace continue de la mine comme la courbe du cercle), et de les mettre en relation avec des *connaissances géométriques* (un cercle est caractérisé par son centre (0D) et un de ses points (1D), le cercle est une ligne courbe plane fermée dont tous les points sont à égale distance du centre). Mais une formulation[11] des actions des élèves par l'enseignant – voire une trace écrite mettant en relation des parties du compas (pointe sèche, pointe mine, « écartement » des branches[12] – et des objets géométriques (point centre, point du cercle, rayon) serait nécessaire pour que ces liens se construisent. Nous retrouvons la problématique de la médiation sémiotique développée par Mariotti et Maracci (2010) avec un compas pour les savoirs liés au cercle. Le compas « évoque » des savoirs, mais l'élève ne peut se les approprier sans un accompagnement de l'enseignant.

Il est donc primordial de considérer, dans le cadre de l'enseignement, la nécessité d'entraîner les élèves à manipuler efficacement un instrument spécifique, en l'occurrence le compas, en relation avec les connaissances géométriques inhérentes à cet outil, c'est-à-dire le cercle en tant qu'entité géométrique et l'égalité de longueurs en tant que propriété géométrique. L'utilisation d'un « langage technique géométrique » (Petitfour, 2017b) accompagnant l'action peut contribuer à ancrer ces apprentissages.

On pressent aussi l'intérêt pour cette mise en relation à construire une variété de tâches à partir du type de tâches mentionné dans les programmes « construire un cercle connaissant son centre et un point, ou son centre et son rayon » (MENJ, 2020a,

[11] Cela n'empêche pas des premières verbalisations par les élèves.
[12] Plus exactement distance (ou segment) entre le point trace de la pointe du compas et le point trace de la mine sur la feuille quand le compas est bien posé.

p. 64). Par exemple, le centre est un point isolé ou un point particulier d'une autre figure (carré, cercle, rectangle) ; idem pour un point du cercle ; le rayon est un segment particulier, lié ou pas à une autre figure. Ces éléments définitoires du cercle peuvent être donnés graphiquement (points nommés par une lettre) ou insérés dans un texte et qualifiés par leur relation à une unité figurale 1D ou 2D. La tâche que nous avons étudiée relève de la dernière variante. Il nous apparaît fondamental d'aborder la conversion d'un texte géométrique vers un dessin (qu'il soit instrumenté ou, ultérieurement, réalisé à main levée et codifié) dans le cadre de l'enseignement de la géométrie.

5.2. Vers une dialectique dessin à main levée – dessin instrumenté

Nos analyses des processus de tracé d'élèves dans la résolution de la tâche de conversion d'un texte géométrique en un dessin, avec le compas dans la présente étude et à main levée dans une étude antérieure (Houdement & Petitfour, 2022), mettent au jour certains éléments relatifs au rapport des élèves à la géométrie.

Le dessin demandé, à main levée ou instrumenté, pourrait induire des regards différents sur la figure à représenter. L'absence d'instruments peut en effet engager dans une vision 2D où il s'agit de placer un cercle par rapport à un carré, d'abord globalement : il faut alors s'intéresser aux contours (1D) de ces deux objets pour respecter les contraintes données sur des points (0D). La position du centre du cercle peut rester approximative, voire ne pas du tout être interrogée, ce qui peut passer inaperçu dans la pratique du dessin à main levée. Par ailleurs, le fait que le centre du cercle ne soit pas un point dudit cercle (au sens cercle-1D tel que défini actuellement dans les programmes, cf. section 2.3.2) peut contribuer à cette omission du centre.

Nous pensions que la présence du compas engagerait tous les élèves dans la recherche du centre (0D) du cercle, mais la complexité du texte et/ou l'ignorance de la primauté du placement de la pointe du compas ont pu amener certains élèves à omettre le centre. Par contre, ils semblent tous être entrés dans leurs tracés par la ligne contour (1D) du cercle pour chercher les points d'incidence entre cercle et carré, comme ils le feraient pour un dessin à main levée : la leçon sur le cercle ne semble pas avoir enrichi leurs conceptions sur le cercle, la conception du cercle comme ligne de courbure constante reste première. Ce constat renforce l'intérêt de proposer aux élèves des tâches variées comme mentionné en fin de section 5.1.

Que le dessin soit à main levée ou non, nous avons observé à chaque fois une élève ayant très rapidement trouvé l'agencement entre le cercle et le carré, passer beaucoup de temps à gommer et refaire plusieurs fois son tracé, à la recherche d'une précision. Des élèves performants peuvent ainsi se focaliser sur un aspect de la tâche qui n'apporte rien au développement de leurs *connaissances géométriques*. Notre étude montre en particulier qu'il existe des élèves de Cours moyen qui peuvent faire de la géométrie sans savoir bien utiliser les instruments, ce qui ne veut pas dire ne pas comprendre à quoi ils servent, ni comment s'en servir. Ce résultat renforce et permet d'étendre à tout élève le point de vue développé par Petitfour (2015) pour les élèves dyspraxiques sur la vigilance à avoir quant à l'excès d'exigence d'une précision dans les tracés.

Nos recherches laissent entrevoir, pour des tâches de conversion texte vers figure, la pertinence d'une dialectique entre dessins à main levée et dessin instrumenté, sous la condition de bonnes *connaissances technico-géométriques* et *manipulatoires* du compas. Faire un dessin à main levée pourrait aider à se construire l'image d'une figure à réaliser en dessin instrumenté, à questionner des propriétés géométriques que l'instrument aurait prises en charge (peut-être à l'insu de son utilisateur). La construction instrumentée (avec des instruments géométriques classiques), travail mené en Géométrie 1, pourrait permettre d'invalider les dessins à main levée de *figures impossibles* en amont de la production d'un raisonnement déductif langagier interne à la Géométrie 2.

Les connaissances *manipulatoires* et *technico-géométriques* ne sont pas anodines pour que fonctionne cette dialectique. Nous avons pointé que leur absence fait obstacle à un travail en Géométrie 1 : sans les premières, la réalisation d'un dessin correct est compromise, sans les secondes, la validation/invalidation d'éventuelles hypothèses de tracé est empêchée (ou rendue difficile). Or, selon nous, ce travail en Géométrie 1 constitue un support pour la formulation de connaissances géométriques : c'est du moins l'hypothèse que partagent les chercheurs qui proposent des situations de restauration de figures.

Le compas est un instrument complexe : un entraînement à son usage coordonné à des connaissances géométriques sur le cercle ne doit pas être sous-estimé dans l'enseignement. L'intégration de *connaissances technico-géométriques* et *manipulatoires* par les élèves est donc un véritable enjeu d'enseignement, en particulier pour compas et cercle. Il est opportun de poursuivre des recherches dans ce sens.

Bibliographie

ARTIGUE, M., & ROBINET, J. (1982). Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches En Didactique Des Mathématiques, 3 (1),* 5-64.

ARZARELLO, F. (2006). Semiosis as multimodal process. *Revista Latinoamerica de Investigación en Matemática Educativa, Número especial Sémiotique, culture et pensée mathématique,* 267-299.

BARRIER, T., HACHE, C., & MATHE, A.-C. (2014). Droites perpendiculaires au CM2 : restauration de figures et activité des élèves. *Grand N, 93,* 13-37.

BERTHELOT, R., & SALIN, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire* [Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1].

BLANQUART, S. (2023). Activité mathématique des élèves et construction des apprentissages en géométrie plane. *Revue québécoise de didactique des mathématiques, Numéro thématique vol 2*, 5-37.

BLANQUART-HENRY, S. (2020). Raisonnements géométriques d'élèves de cycle 3, duos de situations, rôle de l'enseignant [Thèse de doctorat, Université de Paris].

BOURLET, C. (1911). Article « Mathématiques ». Dans F. Buisson (Dir.). *Nouveau Dictionnaire de Pédagogie et d'Instruction Primaire*. Librairie Hachette et Cie.

BROUSSEAU, G. (1983). Étude de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, IMAG LSD*, *45*, 183-227.

BULF, C., & CELI, V. (2015). Une étude diachronique de problèmes de reproduction de figures géométriques au cycle 3. *Grand N*, *96*, 5-33.

BULF, C., & CELI, V. (2020). Reproduire un cercle et en parler en classe de mathématique : est-ce si simple ? Quelques éléments d'analyse d'une étude didactique comparant trois mises en œuvre d'une même situation. *Recherches en éducation*, *40*, 125-147.

BULF, C., CELI, V., MILLON-FAURE, K., BEAUGRAND, C., & MENDOÇA-DIAS, C. (2021). Tracé du cercle et circulation des discours (première partie). Approche didactique des (inter) actions langagières et matérielles. *Petit x*, *114*, 3-37.

CHASSAPIS, D. (1998). The mediation of tools in the development of formal mathematical concepts: the compass and the circle as an example. *Educational Studies in Mathematics*, *37*, 275–293. https://doi.org/10.1023/A:1003696507155

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*, 221-226.

DENZIN, N. K. (1978). *The research act: a theoretical introduction to sociological methods*. McGraw-Hill.

DUCEL, Y., & PELTIER, M.-L. (1986). *Géométrie. Une approche par le dessin géométrique au CM2*. IREM de Rouen.

DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *10*, 5–53.

DUVAL, R. (2014). Ruptures et oublis entre manipuler, voir, dire et écrire. Histoire d'une séquence d'activités. Dans C. F. Brandt & M. T. Moretti (Dir.) *As Contribuições da Teoria das Representações Semióticas Para o Ensino e Pesquisa na Educação Matemática* (pp. 227-251). Editions Unijui.

DUVAL, R., & GODIN, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N, 76,* 7-27.

FREGONA, D. (1995). Les figures planes comme « milieu » dans l'enseignement de la géométrie ; interactions, contrats y transpositions didactiques. [Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1].

GRENIER, D., & LABORDE, C. (1988). Transformations géométriques : le cas de la symétrie orthogonale. Dans G. Brousseau, M. Hulin & G. Vergnaud (Eds), *Didactique et Acquisition des Connaissances Scientifiques. Actes du Colloque de Sèvres* (pp. 65-86). La Pensée Sauvage éditions.

GUILLE-BIEL WINDER, C., & MANGIANTE-ORSOLA, C. (2023). Contribution à l'étude de l'exercice de la vigilance didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *43*(2), 199-240.

HOUDEMENT, C. (2007). À la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères-IREM*, *67*, 69-84.

HOUDEMENT, C., & KUZNIAK, A. (1998-1999). Quelques éléments de réflexion sur l'enseignement de la géométrie : de l'école primaire à la formation des maîtres. *Petit x*, *51*, 5-21.

HOUDEMENT, C., & KUZNIAK, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, *11*, 175-193.

HOUDEMENT, C., & PETITFOUR, E. (2018). L'analyse sémiotique de l'activité mathématique, une nécessité didactique dans le contexte de l'adaptation scolaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *23*, 9-40.

HOUDEMENT, C., & PETITFOUR, E. (2019). Jeu de pouvoir dans l'enseignement spécialisé. In M. Abboud (Ed.), *Actes du colloque EMF 2018* (pp. 1205-1213). IREM de Paris

HOUDEMENT, C., & PETITFOUR, E. (2020). La manipulation dans l'enseignement spécialisé : aide ou obstacle ? Une étude de cas autour de la numération décimale. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 40 (2)*, 181-223.

HOUDEMENT, C., & PETITFOUR, E. (2022). Le dessin à main levée, un révélateur du rapport des élèves à la figure géométrique. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *22*, 315-340. https://doi.org/10.1007/s42330-022-00211-8

HOUDEMENT, C., & PETITFOUR, E. (2023). Que révèle la production de dessins à main levée par les élèves sur leur rapport à la géométrie ? Dans F. Vandebrouck & M.-L. Gardes (coord.) *Nouvelles perspectives en didactique : preuve, modélisation et technologies numériques* (Vol Séminaires et Posters, pp. 155-164). ARDM.

KESKESSA, B., PERRIN-GLORIAN, M.-J., & DELPLACE, J. R. (2007). Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie, *Grand N*, *79*, 33-60.

LABORDE, C., & CAPPONI, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14 (1.2),* 165-210.

MANGIANTE-ORSOLA, C., & PERRIN-GLORIAN, M. J. (2017). Ingénierie didactique de développement en géométrie au cycle 3 dans le cadre du LéA Valenciennes-Denain. Dans T. Barrier & C. Chambris. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2016.* IREM de Paris – Université Paris Diderot.

MARIOTTI, M.A., & MARACCI, M. (2010). Un artefact comme instrument de médiation sémiotique : une ressource pour le professeur. Dans G. Gueudet & L. Trouche (Eds.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 91-107). Presses Universitaires de Rennes.

MATHÉ, A.-C., BARRIER, T., & PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2020). *Enseigner la géométrie élémentaire. Enjeux, ruptures et continuités*. Academia L'Harmattan.

MATHE, A.-C., MAILLOT, V., & RIBENNES, J. (2021). Enjeux langagiers, situations de formulation et de validation en géométrie. Un exemple de travail autour du cercle en CE2. *Grand N, 108*, 27-57.

MAZEAU, M., POUHET, A., & PLOIX-MAES, E. (2021). *Neuropsychologie et troubles des apprentissages chez l'enfant* (3è édition). Elsevier Masson Paris.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2019). Attendus de fin d'année et repères annuels de progression pour le cycle 2 et le cycle 3. BOEN nº 22 du 29-05-2019. Note de service nº 2019-072 du 28-5-2019.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2020a). Programme du cycle 2. BOEN nº 31 du 20-7-2020.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2020b). Programme du cycle 3. BOEN nº 31 du 20-07-2020.

PEIRCE, C.S. (1978). *Écrits sur le signe* (1931 à 1953, rassemblés, traduits et commentés par G. Deledalle). Éditions du Seuil.

PERRIN, D. (2005). Axiomatique d'Euclide, convexité, géométries non euclidiennes. https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/Projet-geometrie/Cours1.pdf

PERRIN-GLORIAN, M.-J., & GODIN, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école, 222*, 26-36.

PETITFOUR, E. (2015). Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6e [Thèse de doctorat, Université Paris 7 – Denis Diderot].

PETITFOUR, E. (2017a). Outils théoriques d'analyse de l'action instrumentée, au service de l'étude de difficultés d'élèves dyspraxiques en géométrie. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 37*(2-3), 247-288.

PETITFOUR, E. (2017b). Enseignement de la géométrie en fin de cycle 3. Proposition d'un dispositif de travail en dyade. *Petit x*, *103*, 5-31.

PETITFOUR, E., & HOUDEMENT, C. (2022). Des effets didactiques de microphénomènes sémiotiques en mathématiques. Dans C. Houdement, C. de Hosson & C. Hache (Dir.), *Approches sémiotiques en didactique des sciences* (pp. 209-244). ISTE Éditions.

RABARDEL, P. (1995) Qu'est-ce qu'un instrument ? *CNDP–DIE*, *Outils pour le calcul et le traçage de courbes Mars 1995*, 61-65.

CATHERINE HOUDEMENT

Univ Rouen Normandie, Université Paris Cité, Univ Paris Est Créteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, LDAR, F-76000 Rouen, France

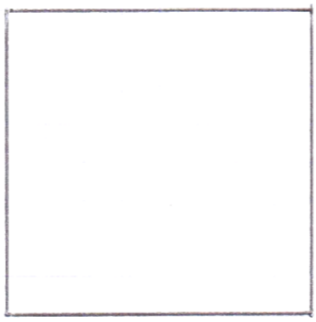
catherine.houdement@univ-rouen.fr

EDITH PETITFOUR

Univ Rouen Normandie, Université Paris Cité, Univ Paris Est Créteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, LDAR, F-76000 Rouen, France

edith.petitfour@univ-rouen.fr

Annexe 1. Supports fournis aux élèves

Dessin de carré (4 cm côté) sur feuille unie et texte sur petite feuille	
	**Tracer un carré. Tracer un cercle qui a pour centre un sommet du carré et qui passe par deux autres sommets.**