THESE

présentée à

L'UNIVERSITE LOUIS PASTEUR DE STRASBOURG

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

par

François PLUVINAGE

Difficultés des exercices scolaires en mathématique (Etude des comportements de réponse par enquêtes à plusieurs modalités).

Soutenue le 14 septembre 1977 devant la commission d'examen :

MM. G. REEB — Président

H. FREUDENTHAL

G. GLAESER

P. GRECO — Examinateurs

B. MALGRANGE

RAUSCHER J.-ll

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE LOUIS PASTEUR DE STRASBOURG

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

par

François PLUVINAGE

Difficultés des exercices scolaires en mathématique (Etude des comportements de réponse par enquêtes à plusieurs modalités).

Soutenue le 14 septembre 1977 devant la commission d'examen :

MM. G. REEB — Président

H. FREUDENTHAL

G. GLAESER

P. GRECO — Examinateurs

B. MALGRANGE

ulp
Institut
de Recherches
sur l'Enseignement
des Mathématiques
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél. (88) ~~35.83.02~~
61.48.20

UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR

STRASBOURG, Juillet 1977

Thèse de doctorat d'Etat présentée

par François PLUVINAGE

Travaux didactiques.

1° Thèse principale : difficultés des exercices scolaires en mathématique (Etude des comportements de réponse par enquêtes à plusieurs modalités).

2° Démarches individuelles de réponse en mathématique, (Educational Studies in Mathematics - 8 - 1977) - En collaboration avec Raymond DUVAL.

Travaux de mathématiques.

1° Espaces de feuilles de certaines structures feuilletées planes (Colloquium Mathematicum XVIII 1967).

2° Sur les structures feuilletées déterminées par les équations polynomales (en collaboration avec E. Fedida). C.R. Acad. Sciences T 267 p 101 - 104 - 1968

3° Sur les structures feuilletées déterminées par les équations polynomales (avec E. Fedida) Publication de l'I.R.M.A. 1969/70.

4° Feuilletages transverses du plan et feuilletages polynomiaux (avec E. Fedida). Publication de l'I.R.M.A. 1973/74.

Il me paraît normal de citer ici les noms de ceux qui ont contribué aux travaux présentés.

Direction scientifique : MM. G. Glaeser (didactique) et G. Reeb (mathématique), professeurs à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg.

Collaboration scientifique : MM. R. Duval (didactique et psychologie), maître-assistant à l'I.R.E.M. de Strasbourg, E. Fedida (mathématique), maître de conférences à l'Université de Dakar, J.C. Turlot (statistique), ingénieur statisticien au Centre Universitaire d'Etudes Statistiques (C.U.E.S.) de Strasbourg.

Informatique : M. J.P. Weber, technicien au C.U.E.S.

Réalisation matérielle : MMme et MM. Liliane Tettamanti (perforation), perforatrice au Centre de Calcul de l'Esplanade à Strasbourg ; Rosine Flach, Evelyne Le Guyader et Renée Rohfritsch (dactylographie), secrétaires à l'I.R.E.M. de Strasbourg ; C. Bodo, J.L. Christ et L. Spraul (tirage et reliure), techniciens au Département de Mathématiques de Strasbourg.

Il me faut remercier les animateurs de l'I.R.E.M. de Strasbourg qui m'ont fait bénéficier de leurs conversations et de leur aide, notamment Claire Dupuis (maître-assistante) et Jean Martinet (professeur, actuel directeur de l'I.R.E.M.) ; et les personnes qui ont bien voulu être des premiers lecteurs critiques, notamment Josette Adda (U.E.R. de Didactique des Disciplines à Paris VII) et A. Fuchs (professeur à l'Université Louis Pasteur).

Je remercie les membres du jury de thèse de la considération qu'ils veulent bien accorder ainsi à ces travaux, et je remercie tout spécialement le professeur H. Freudenthal, directeur de la revue scientifique "Educational Studies in Mathematics", qui a fait paraître plusieurs articles concernant nos enquêtes.

Une place spéciale mérite d'être réservée ici au professeur J.P. Benzécri (statistique, Université Pierre et Marie Curie), qui a bien voulu se montrer un critique très sévère, mais aussi constructif, de la partie statistique de ces travaux. Son intervention nous amènera à effectuer, à l'occasion d'enquêtes ultérieures, des essais, afin que les "enquêtes à plusieurs modalités" soient utilisables, par d'autres que nous, facilement et sans risque d'erreur dans la mise en oeuvre et l'exploitation.

François PLUVINAGE - 1977

INTRODUCTION

L'élève ou l'étudiant rencontre dans la pratique d'activités mathématiques courantes des obstacles souvent méconnus des enseignants, sinon insoupçonnés. Pourtant l'efficacité d'un enseignement (*) exige la connaissance des apprentissages (*) correspondants. Je voudrais, dans ce travail, contribuer d'une part à enrichir notre savoir sur les apprentissages mathématiques, et d'autre part exposer une méthode expérimentale permettant l'exploration de démarches intellectuelles.

Pour préciser dans quel sens comprendre l'expression "apprentissages mathématiques", on peut s'aider d'une comparaison avec l'enseignement musical : les phénomènes y sont plus observables que dans l'enseignement mathématique, parce qu'ils sont moins intériorisés. Imaginons qu'en musique, un professeur ne prenne connaissance des résultats de ses élèves que par l'audition d'enregistrements sur bande magnétique. Il lui faudrait disposer d'une bonne observation préalable ou d'un corpus d'informations précises, pour pouvoir identifier derrière telles impressions auditives une erreur de doigté ou une maladresse de position des mains. Et, à défaut d'une telle identification, comment pourrait-il proposer des exercices préparatoires ou correctifs appropriés ? Bien sûr, l'enseignement musical est loin d'être contenu dans ces seuls exercices "techniques", ces exercices d'apprentissage. On peut dire que la seule recherche de la virtuosité risque de nuire à la sensibilité musicale.

Revenons aux mathématiques. L'adjectif "scolaire" a, selon les auteurs, des significations variées. Nous conviendrons ici de l'utiliser pour distinguer certains exercices parmi les activités susceptibles d'intervenir au cours d'un enseignement mathématique : plus précisément, nous désignerons par l'expression "exercices scolaires", ces exercices "techniques" (intervenant isolément ou au contraire comme parties de questions plus amples), dans lesquels les phénomènes de la compréhension et de la découverte ne jouent, du moins en principe, qu'un rôle modeste. A titre d'exemple, voici quelques exercices de ce type : exercices de calcul sur les entiers, résolution d'équations usuelles, recherche d'asymptotes d'une courbe donnée par une équation cartésienne classique, tracé d'un triangle dont les côtés ont des longueurs données,......

A un niveau scolaire suffisant, les erreurs commises sur de tels exercices ne seront en général pas imputables à des défauts de compréhension mais à des défaillances dans l'exécution (exemples classiques : mettre 49 comme résultat de la multiplication 8 x 7, oublier qu'une quantité mise en facteur peut s'annuler pour certaines valeurs d'un paramètre, commettre une erreur de signe lors d'une simplification,...). De même que, selon l'expression de J. Adda ([1]), les malentendus nous renseignent sur la compréhension, les erreurs nous renseignent sur la difficulté. Dans la mesure où les individus sont plus ou moins sujets à certaines erreurs, il y a une notion individuelle de difficulté. Mais en observant une population, on voit apparaître des erreurs-types. On est ainsi conduit à envisager une notion générale de difficulté, dont ce travail prétend situer les effets détectables a priori, c'est-à-dire au seul examen d'un énoncé placé dans un champ de connaissances déterminé. Ainsi, parmi les exercices placés dans un ouvrage scolaire, par exemple à la fin d'un chapitre sur la mise en équation, on pourra distinguer ceux dont la résolution relève d'une démarche linéaire, ceux qui amènent à des choix, ceux qui nécessitent des retours en arrière, ceux qui nécessitent de résister à une attraction tentante (voir le chapitre 3).

Bien entendu, on est obligé de distinguer entre la pratique d'exercices orientés vers des types précis de difficulté et l'acquisition du raisonnement dit formel ou hypothéco-déductif (voir [21], tome VII, l'Intellignece, p. 154, § V).
Les mathématiques ne sont pas la matière unique sur laquelle cette acquisition repose, mais elles en sont un domaine privilégié. Si l'on ne considère pas l'acquisition du raisonnement formel comme un objectif de l'enseignement mathématique général, l'analyse de la difficulté présentée ici est parfaitement inutile.
Dans le cas contraire, cet enseignement ne doit pas être uniquement tourné vers l'apprentissage de notions, mais aussi vers la pratique des procédures qui interviennent dans le raisonnement. Et ceci exige sur les procédures des connaissances précises, auxquelles ce travail prétend apporter une contribution.
Le souci de précision a nécessité une limitation du champ d'investigation : le milieu est le milieu scolaire actuel, la tranche d'âge est d'environ 11 à 16 ans, et seul un aspect particulier des démarches intellectuelles est envisagé.
Aussi est-il nécessaire d'explorer d'autres domaines que celui relaté ici : ceci est l'objet de recherches déjà entreprises ou actuellement en cours à l'I.R.E.M de Strasbourg selon la méthode qui sera exposée plus loin.

Au départ de ma recherche, un certain nombre d'éléments étaient déjà mis en place. Ainsi dès 1920, Peterson substitua des labyrinthes symboliques (*) aux seuls labyrinthes spatiaux antérieurement utilisés ; dans Fraisse-Piaget, t. VII, loc. cit., P. Gréco cite cet exemple en signalant ses limites. Cependant, il s'agit d'un pas vers la considération d'algorithmes de résolution, qui sont plus en rapport que les labyrinthes avec les démarches intellectuelles effectivement mises en pratique. Pour ce qui est de la difficulté, terme initialement assez vague, en dépit ou à cause de sa familiarité (voir, pour information, une liste des synonimes de l'adjectif "difficile" dans un dictionnaire), un progrès important a été franchi à la suite des travaux de l'école de Chicago de B.S Bloom ([8]) : dans le domaine des mathématiques, la taxonomie de Bloom a donné naissance à la classification NLSMA (1), mise au point par W.Wilson ([9]). Wilson a mis en évidence une hiérarchie d'activités vis à vis du critère de complexité cognitive (*). On trouve chez Wittmann ([39]) un résumé du point de vue de Bloom, et dans un article de Tourneur ([38]) une traduction française abrégé de Wilson. Pour la commodité du lecteur d'une part, et d'autre part la possibilité d'utiliser de manière fiable cette classification, nous avons proposé une présentation résumée et une méthode d'application dans une annexe en fin d'ouvrage (voir annexe 2).

Considérer la difficulté comme une famille de caractéristiques intrinsèque à un exercice, et pas seulement comme l'interaction d'un exercice avec des individus, n'était pas un point de vue neuf. J'ignore à quelle date ont paru les premiers ouvrages d'enseignement faisant précéder des énoncés d'exercices par des des indications de difficulté , mais c'est certainement antérieur aux travaux de Bloom. De telles indications de niveau sont globales et empiriquement attribuées.

Il y a une analogie, malgré la grande différence de domaine d'activités, à l'affectation d'un sigle de difficulté à une ascension en montagne. Par exemple, une ascension classée D (difficile), en principe au vu de caractéristiques intrinsèques (longueur, pente, qualité du terrain, présence de prises), est en réalité impossible pour un débutant et presque facile pour un alpiniste chevronné.

(1) National Longitudinal Study of Mathematical Abilities.

(*) Ce signe renvoie à l'index en fin d'ouvrage.

Sauf d'un point de vue comparatif, une idée de difficulté intrinsèque ne sous-entend donc nullement une uniformité des comportements individuels. C'est d'ailleurs une manière féconde d'envisager les démarches individuelles que de se demander, avant de les présenter à des élèves, si deux exercices sont ou non de difficulté comparable . L'apport original de la classification NLSMA est d'avoir isolé un critère, ce qui constitue un pas important vers l'idée d'un espace de difficulté. Et préciser cet espace est l'objet de ce travail.

En ce qui concerne les méthodes, l'idée proprement dite de la méthode des questionnaires à plusieurs modalités (voir l'exposé chap. 4) est à ma connaissance originale. Cependant elle est fille de la méthode comparative, dont les études génétiques piagétiennes sont l'exemple le plus célèbre. Un questionnaire à plusieurs modalités est caractérisé par le fait que toute question n'est pas posée à tout individu intérrogé. Et la méthode des questionnaires à plusieurs modalités nécessite de recourir à l'outil statistique. C'est l'analyse factorielle des correspondances, créée par J.P Benzécri ([3]), qui se révèle la mieux appropriée à nos besoins. Nous en verrons la théorie sur l'enregistrement des résultats d'un questionnaire à plusieurs modalités au chapitre 4. Sans entrer dès maintenant dans ce sujet, il est important de préciser que la méthode n'entre pas dans la catégorie des tests, mais dans celle des enquêtes :

- Dans les tests, on observe les variations individuelles sur des exercices donnés.
- Dans nos enquêtes, on observe, sur une population donnée, les variations de réactions entraînées par des variations d'exercices.

En somme, ce qui est "testé" dans notre méthode, ce sont les exercices. La caractéristique des questionnaires à plusieurs modalités va à l'appui de l'aspect "enquête" (comment pourrait-on "juger" un individu sur une question qui ne lui a pas été posée).

La genèse de la méthode est la suivante. Dans un premier temps, un groupe d'animateurs de l'I.R.E.M de Strasbourg décida de compléter les observations d'élèves par des informations obtenues par le moyen de questionnaires.

Plutôt que de nous consacrer à des évaluations centrées sur des critères (voir par exemple Landsheere [32]), il nous paru plus intéressant d'envisager des études comparatives en proposant des

questionnaires séquentiels : la réponse à une question n'est jamais considérée isolément, mais dans la séquence qu'elle forme avec les réponses du même individu à d'autres questions du même questionnaire. Le premier questionnaire travaillé par une équipe de l'I.R.E.M de Strasbourg, organisé pour une telle interprétation, se proposait d'étudier "l'assimilation des programmes de 6e et 5e" (cf. [28]). Sans minimiser sur ce travail le rôle des différents membres de l'équipe, il faut signaler la contribution particulière de Raymond Duval à l'application de cette organisation séquentielle.
Le même principe se retrouve dans l'enquête "sur l'acquisition des structures numériques en fin de 3e" (cf. [9]) ainsi que dans nos travaux ultérieurs.

Dans un second temps, il m'apparut que les limitations dues aux effets d'induction mutuelle de questions trop proches exigeaient l'utilisation d'une méthode appropriée. C'est à cette exigence que répondent les questionnaires à plusieurs modalités. Pour des questionnaires à plus de deux modalités, les traitements "manuels" des résultats se révèlent insuffisants. Au départ, le domaine des analyses par ordinateur m'était peu familier et par ailleurs, le laboratoire de statistique dirigé par le professeur J.P Benzécri s'intéressait au problème de la reconstitution de données manquantes. Un questionnaire à modalités peut être envisagé sous cet aspect, puisque chaque élève ne répond pas à toutes les questions. On trouvera une étude concernant la reconstitution des données dans la thèse de 3e cycle de A. Bensaber ([2]). Pour ma part, le traîtement qui consiste simplement à enregistrer les résultats sans chercher à les compléter me parut très intéressant. On en trouvera la théorie au chapitre 4 et une application dans l'analyse du questionnaire n° 2 (p. 111 et suivantes).

Depuis, la méthode des questionnaires à plusieurs modalités a été utilisée pour le questionnaire 1975 proposé à des élèves de 5e (13 ans) (voir "Démarches individuelles de réponse en mathématiques" - R. Duval et F. Pluvinage - [32]). Cette même méthode organise également un questionnaire sur la géométrie en 3e, actuellement à dépouiller, ainsi qu'un questionnaire sur la négation, en préparation avec la collaboration d'un linguiste.

J'ai l'espoir que les occasions de montrer la fécondité de cette méthode se multiplieront à l'avenir.

Le présent travail est organisé en deux parties. La première, intitulée "les principes", présente l'analyse et la méthode : théorie et modalités de fonctionnement. La deuxième, intitulée "application à deux enquêtes", est essentiellement prévue comme illustration des principes sur des cas précis, et ne se prétend notamment pas exhaustive sur le sujet.

PREMIERE PARTIE : LES PRINCIPES

CHAPITRE 1 AUTOMATISMES ET HEURISTIQUE

Ce chapitre propose une description sommaire des activités en rapport avec les mathématiques et précise celles qui sont l'objet de notre étude.

1.1 Un indice de difficulté : le niveau de complexité opératoire.

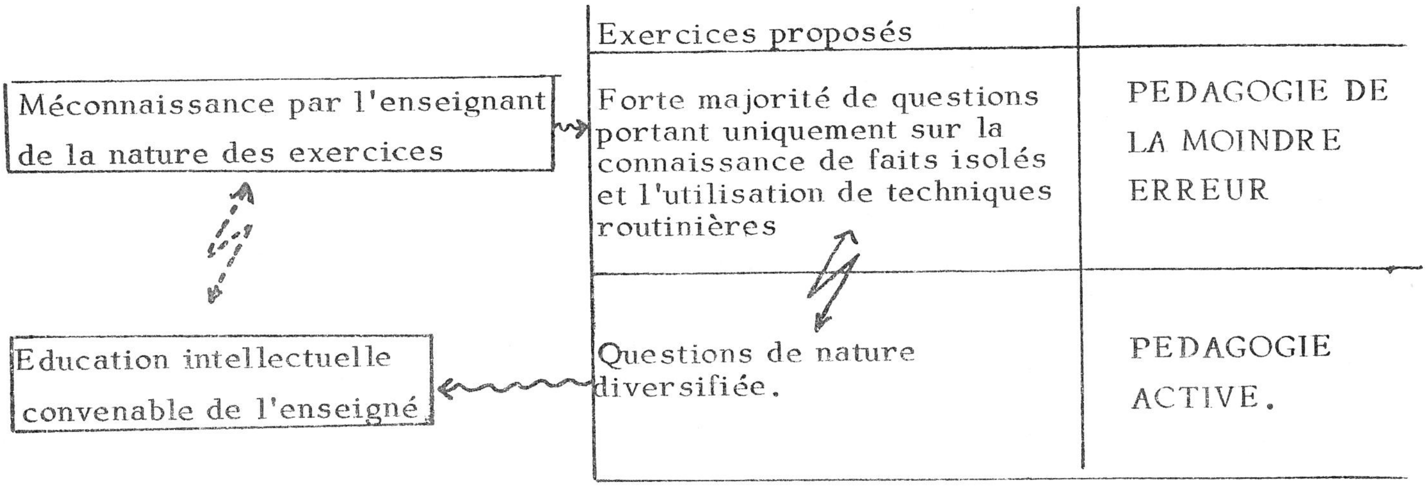
Un point de départ solide est la classification NLSMA citée dans l'introduction. Nous allons rappeler ici les mobiles qui ont conduit à élaborer une telle classification, et en souligner les insuffisances.
Nous verrons ensuite comment l'étude de la difficulté des exercices, amorcée par cette classification, peut être complétée.

On soupçonne depuis longtemps l'importance du rôle que tient la résolution de questions dans l'apprentissage mathématique. Mais on sait néanmoins très mal se donner des critères pour choisir un éventail d'exercices permettant un enseignement efficace. L'expérience révèle que la tendance naturelle chez la plupart des enseignants, comme des auteurs de manuels scolaires, est de ne poser que des exercices didactiques (*) (voir[27]). Ces exercices n'exigent que la connaissance ou la mise en oeuvre de faits isolés et de techniques routinières. Certes, outre la méconnaissance des paramètres permettant de repérer la nature des questions, intervient la pratique de ce qui peut être nommé la pédagogie de la moindre erreur : pour cette pédagogie, un élève qui "réussit" est un élève qui obtient la plupart du temps le résultat correct ; la tendance sera donc de minimiser le nombre d'échecs (non obtention "du" résultat correct), et non de maximiser le nombre de réussites. Et l'on comprend bien qu'il en résulte des répercussion sur le type des questions posées aux élèves.

Or, on se rend facilement compte qu'une éducation intellectuelle même peu poussée ne peut se suffire de ces questions finalement toutes très semblables, quoique concernant des notions mathématiques différentes. Au passage, on peut noter que la réforme de l'enseignement mathématique en France n'a pas conduit à une diversification sensible (au contraire parfois !) de la nature des questions posées, comme peut le montrer notamment l'analyse de manuels que j'ai faite en collaboration avec R. Duval (cf. [18] p. 11).

Parler de <u>types</u> de questions, plus ou moins indépendamment des notions mathématiques impliquées, suppose des classifications. On parle de <u>taxinomies</u> (ou taxonomies) lorsqu'il s'agit de classifications hiérarchisées. Conscient de l'impossibilité d'organiser les difficultés selon une unique classification hiérarchique, Wilson s'est volontairement limité à la prise en compte d'un seul critère : celui de la <u>complexité cognitive</u> (*). Dans l'article cité, Wilson commente cette expression, sans toutefois en donner une définition. L'index situé en fin de ce travail donnera quelques précisions. On peut cependant se contenter ici de dire que ce critère pose en gros la question : Quel est le "poids" du bagage des connaissances nécessaires pour l'exécution de telle tâche ?

Le but pédagogique plus ou moins directement visé par les auteurs de cette classification est notamment de permettre une <u>pédagogie active</u> (*).
Le tableau ci-dessous (dans lequel le signe ↯ figure une incompatibilité) résume, de manière schématique, la situation de l'enseignant et celle de l'enseigné.



<u>Note</u> : L'usage ici de l'expression "pédagogie active" a paru commode. Mais il réfère essentiellement à la <u>diversité des activités</u> (*) proposées aux élèves. Sinon, on peut qualifier de pédagogie active l'entraînement du rat dans son labyrinthe, ce qui vide à peu près complètement l'expression de son sens.

C'est l'enseignement du premier cycle secondaire (11-15 ans) qui est sans doute le plus concerné par les répercussions de cette analyse, car les élèves y sont à l'âge de la formation du raisonnement formel. C'est aussi une raison pour laquelle nos études portent essentiellement sur les réactions des élèves de ce cycle.

Il convient de remarquer, pour en revenir à la classificationNLSMA proprement dite, le soin pris par ses auteurs pour indiquer qu'elle ne concerne qu'un aspect de la difficulté.

Ainsi, Wilson signale, à propos des questions du niveau C (niveau assez haut placé dans cette classification) : "The difficulty of such exercices might be quite low. It should be remembered that the behavior classification of a task is based on its cognitive complexity rather than its level of difficulty" ([9], p.676).

Une telle remarque amène alors à se demander ce qui peut constituer la difficulté d'une tâche, en dehors de la complexité. Il m'a semblé que si l'on voulait préciser la notion de difficulté d'une question, une piste féconde pouvait être d'étudier la structure des algorithmes de réponse. D'ailleurs, la seule utilisation de la classification NLSMA (pour des exemples, voir [18] et [16]) est grandement facilitée par la considération des procédures de résolution : c'est par exemple elle qui permet de détecter les faits spécifiques (*), autrement dit les connaissances atomiques nécessaires à l'obtention des résultats.

Dans une étude intrinsèque des questions, nous sommes amenés à écarter des considérations directes sur les motivations (*) des élèves, malgré leur importance. En effet celles-ci prennent en compte non seulement l'énoncé des questions, mais aussi les situations dans lesquelles celles-ci sont posées.
Nous garderons néanmoins présent à l'esprit l'existence de ce phénomène de la diversité des motivations.
Nous écartons également l'étude du phénomène d'ampleur d'une tâche. C'est-à-dire que nous nous limiterons à considérer des activités qu'un individu "moyen" du niveau scolaire considéré a de bonnes chances de mener à terme dans des conditions scolaires normales (usage de papier, crayon ou stylo et éventuellement des instruments usuels de dessin, durée limitée, possibilité d'accomplissement par des individus isolés). A propos du critère A3 (p. 14) nous reviendrons un peu plus en détail sur ces conditions.

Ces limitations prises en compte, il va se poser deux questions :
- Quel modèle proposer pour repérer la difficulté d'un exercice ?
- Sachant que, pour repérer la difficulté d'un exercice, il conviendra de se référer au déroulement de sa résolution, que peut-on dire de la résolution d'un exercice au seul vu de son énoncé ?

Le paragraphe suivant ébauche les réponses à ces questions.

1.2 Profils de difficulté et procédures de résolution.

En énonçant une affirmation du type "Telle question est plus facile que telle autre", on commet deux abus.
Le premier abus consiste à parler de difficulté à propos de questions, alors que la difficulté se situe dans le déroulement de leur résolution.
Le second est un abus de pensée : il se peut en effet que deux résolutions de questions se hiérarchisent exactement, c'est à dire que tout individu qui aura réussi la première réussira également la seconde. Mais cette situation n'est nullement générale, et un examen, même superficiel, de réponses à des questionnaires montre que l'idée naïve d'"échelle totalement ordonnée de difficultés" n'est pas en accord avec l'expérience.

Oublions, très provisoirement, le premier abus pour examiner rapidement quel modèle il pourrait être raisonnable de proposer pour la notion de difficulté d'une résolution. Puisqu'un modèle unidimensionnel doit être rejeté, il faudra envisager un modèle multidimensionnel. Ceci reviendra à ne pas considérer un indice de difficulté, qui serait un nombre réel, mais à penser à un profil (*) de difficulté. Nous disons, a priori, plutôt profil que vecteur, car la notion de profil s'accomode de variables qualitatives alors que celle de vecteur exige des variables qui soient toutes quantitatives.

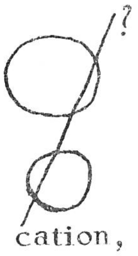
Nous serons ainsi amené à proposer un modèle qui attribue à chaque tâche envisagée un profil prenant en compte plusieurs indices, qui seront indiqués dans la suite (voir p. 38 à 44) et la présence éventuelle de pertubations (voir p. 45 à 47).

Revenons maintenant sur le premier abus, ce qui permettra en même temps d'approcher grossièrement ce qui sera notre champ d'investigation.
Il ne faut pas se cacher qu'en principe la difficulté d'un exercice a un caractère personnel : elle fait intervenir le thème de l'exercice, les informations données par l'énoncé, la formulation de l'énoncé, le matériel fourni pour la résolution, l'apprentissage préalable de l'élève, l'âge de l'élève... Ce qui est directement accessible à l'observateur est le déroulement de la procédure de résolution. C'est donc à cette procédure que nous pouvons espérer attribuer un profil de difficulté.

Mais dans la plupart des cas, il n'est pas possible au seul examen d'un énoncé, de déterminer les procédures individuelles de résolution.
Cependant, si un exercice est proposé à des individus auxquels l'enseignement a fourni un ou plusieurs algorithmes de résolution, ou si l'énoncé oriente vers une démarche précise de résolution, nous pouvons raisonnablement supposer que les individus interrogés suivent effectivement une de ces procédures pour faire l'exercice. Une telle hypothèse peut d'ailleurs être testée (voir chap. 6). Dans le cas de tels exercices, où il est possible d'être informé (moyennant un certain risque d'erreur toutefois) sur les procédures individuelles de résolution, il nous sera possible d'associer directement à l'énoncé un profil de difficulté.
Dans la suite, nous appellerons automatismes de telles questions qui font peu ou pas appel à des processus heuristiques. On peut estimer que, pour ces questions, l'enseignement a véritablement "programmé" les individus. Ceux-ci n'ont plus, dans des cas particuliers, qu'à dérouler une liste d'instructions. Un exemple-type est la résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{R}$, par des élèves du second cycle de l'enseignement secondaire. C'est au point que beaucoup d'enseignants déplorent de trouver des calculs de discriminants pour résoudre $x^2 - 4x + 4 = 0$ par exemple.

A l'opposé de ce type de questions, on trouve celles dont la résolution est du domaine de l'heuristique : les méthodes de résolution ainsi que les notions mathématiques à faire intervenir sont elles-mêmes des objets de recherche pour l'individu aux prises avec une telle question. Les problèmes d'Olympiades ou ceux du célèbre Rallye Mathématique lancé par l'I.R.E.M de Strasbourg sont généralement de ce type.

Entre ces deux extrêmes, il y a évidemment des intermédiaires.
Prenons l'exemple de l'énoncé géométrique suivant :



? Construire une droite découpée, par deux cercles donnés, suivant deux segments de même longueur.

Ce problème, proposé à des élèves de fin de Terminale sans autre indication, est évidemment à ranger dans la case "heuristique". Le champ des investigations sera plus limité si l'énoncé astreint la droite à une direction donnée.

Il le sera encore davantage si l'énoncé est précédé du titre : Exercice d'application des translations (ou des symétries), ou, s'il se trouve dans un manuel à la fin du chapitre Translations ou Symétries orthogonales. Pour des élèves entraînés à faire systématiquement opérer sur toute une figure une transformation intéressant a priori certaines parties de la figure, on n'est plus très loin dans ces conditions d'une question du type "automatisme" (ce qui en sépare encore est probablement une difficulté épistémologique : faire intervenir une transformation a priori inconnue, donc raisonner sur celle-ci et non directement sur la figure). La "procédologie" de Hirsch consiste précisément à programmer ainsi certaines démarches heuristiques qui perdent par là même le caractère heuristique.

Nous le voyons dans cet exemple, ce n'est pas l'existence de plusieurs méthodes de résolution qui permet de trancher entre automatisme et heuristique ou encore automatisme mêlé d'heuristique, c'est le degré de détermination de la démarche effective de résolution par un individu à un stade donné d'apprentissage :

$\boxed{\text{Processus de recherche fixés d'avance}} \rightsquigarrow \boxed{\text{Automatismes}}$

$\boxed{\text{Démarches "erratiques"}} \rightsquigarrow \boxed{\text{Heuristique}}$

Les paragraphes suivants ont pour but de détailler ces distinctions, en s'appuyant sur quelques exemples.

1.3 Les automatismes

L'expression "l'âne-qui-trotte" désigne, dans l'argot des mathématiciens, une partie de l'activité mathématique qui se déroule de manière toute tracée.
Mais cette expression contient plus que l'idée de programme telle que l'entendent les informaticiens : elle y ajoute un élément de linéarité, d'absence de choix.
Il en est ainsi par exemple de l'algorithme de la recherche du p.g.c.d de deux entiers par divisions successives.

Cependant, la notion d'automatisme est ainsi trop restreinte pour donner lieu à des études intéressantes. On sait par exemple qu'il n'y a guère de corrélation entre les aptitudes d'un même sujet au calcul élémentaire (les "quatre opérations" sur les entiers) et au raisonnement mathématique.

Pour élargir la notion d'automatisme, il est bon d'examiner les possibilités d'un ordinateur digital courant (lesquelles dépassent largement le cheminement linéaire) :

1° Il peut effectuer des opérations au sens mathématique du terme, c'est-à-dire associer un résultat à deux ou plusieurs données ;

2° il peut substituer, spécialiser, c'est-à-dire affecter une valeur à une ou plusieurs variables ;

3° il peut exercer des choix prédéterminés. C'est-à-dire que des tests l'amèneront à décider d'effectuer telle ou telle séquence d'instructions selon la valeur d'un résultat. Pour cela, le programme doit au préalable avoir pris en compte toutes les possibilités de choix.

Ajoutons à ceci quelques considérations sur l'entrée des données et la sortie des résultats. Notre ordinateur n'utilise pas simultanément toutes les données : celles-ci sont stockées en mémoire et appelées au fur et à mesure des besoins. Entre autres résultats, l'échec est admissible, que ce soit par dépassement des capacités de la machine ou parce que le programme n'est pas prévu pour le traitement de toutes les données possibles (quoique les informaticiens essaient d'éviter des tests conduisant à une sortie du type : "problème non résoluble par les méthodes employées").

Si l'être humain est capable de démarches heuristiques inaccessibles à la machine, il est en revanche plus limité, notamment par le temps, dans ses possibilités combinatoires, ses capacités de calcul et de mémoire. De ce fait, tout problème facile à programmer n'est pas pour autant facilement résoluble par l'esprit humain, même entraîné (sinon d'ailleurs la machine n'aurait pas d'intérêt). Nous nous imposerons donc des limitations de nombre et de nature des opérations à effectuer, pour envisager en définitive ici comme automatismes les questions qui sont à la fois à la portée de la machine et de l'homme.

Nous retiendrons, compte tenu de ces considérations, les critères suivants pour décider de compter ou non une question comme un automatisme à un niveau d'enseignement donné. Je cite ces critères avant de les commenter et de les illustrer.

Critère A1 : (Possession des éléments de programmation)

Le curriculum d'enseignement et l'énoncé de la question doivent comporter tous les éléments nécessaires à la programmation d'une solution : précision des pas élémentaires et prédétermination des choix possibles, libres ou non de condition préalable.

Critère A2 : (Absence d'ambiguité)

Le curriculum d'enseignement et l'énoncé de la question doivent comporter les indications d'appel du programme de résolution.

Critère A3 : (Limitation temporelle)

L'exécution du programme de résolution doit pouvoir être accomplie "d'un seul jet" dans les conditions normales de travail.

Un commentaire sur ces critères n'est sans doute pas superflu.

1.3 1 Commentaires sur le critère A1

Tous les éléments de programmation, aussi bien opératoires que de choix, non fixés au préalable par le curriculum (*) d'enseignement doivent l'être dans l'énoncé de la question.

Note : Nous employons le mot curriculum pour réserver à "programme" son acception algorithmique.

Voici deux exemples d'illustration.

Exemple 1 : (Niveau : Terminale)

Décomposer le polynome $X^6 - 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, en utilisant l'identité $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$.

Exemple 2 : (Niveau : Terminale)

Décomposer le polynome $X^6 - 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, en remarquant que $X^6 = (X^3)^2$.

Nous supposons dans les deux cas que l'expression "décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$" a été explicitée au préalable.

L'exercice proposé dans l'exemple 1 n'est pas un automatisme. En effet on peut très bien commencer à écrire :

$$X^6 - 1 = (X - 1)(X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1).$$

On peut alors voir que (- 1) est racine du second polynome (l'enseignement entraîne à la recherche systématique des racines dites évidentes : 1 , 0 ou (- 1).)
Et on obtient :

$$X^6 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^4 + X^2 + 1).$$

Il y a alors un blocage car l'élève n'est pas "programmé" pour factoriser $X^4 + X^2 + 1$: pour qui n'a pas lu Polya ([35]), l'écriture $X^4 + X^2 + 1 = X^4 + 2X^2 + 1 - X^2$ est une astuce. La recherche des racines complexes de $X^4 + X^2 + 1$ demande de "changer de voie", et la condition A3 ne sera plus remplie.
Et rien, ni dans le curriculum (*) d'enseignement, ni dans l'énoncé, ne conduit à remettre en cause la décomposition partielle déjà obtenue.

Au contraire, l'exercice proposé dans l'exemple 2 est un automatisme. En effet, à ce niveau, la substitution de $(X^3 - 1)(X^3 + 1)$ à $(X^3)^2 - 1$ peut être condidérée comme un fait spécifique (*) fourni aux élèves par l'enseignement.
La décomposition des polynomes du 3e degré est alors un travail routinier rapide (soit par recours à une identité, soit par recherche de racines "évidentes", choix libre de conditions préalables fourni par l'enseignement).

Exemple 3 : (Niveau : Classe de 3e)

Construire le centre 0 d'un cercle tangent à une droite D donnée en un point A donné de D, et passant par un second point B donné.

Il s'agit d'un automatisme. L'analogie avec la machine indiquée dans la présentation des critères ne doit pas induire en erreur : les "pas élémentaires" ne sont pas nécessairement que des calculs. Si j'associe à deux points distincts quelconques d'un espace affine E la droite qui les joints, je définis une application de $E \times E \setminus \{(m,m),\ m \in E\}$ vers $\mathcal{D}$, l'ensemble des droites de E. Dans ce problème, il y a à tracer dans le plan euclidien la perpendiculaire en A à D et la médiatrice de AB : ces tracés sont des instructions programmées par l'enseignement.
Notons que l'utilisation systématique de la "méthode des deux lieux" (Polya ([35]) renforcerait le caractère d'automatisme de cet exercice. Même à défaut d'un apprentissage aussi bien conduit, on peut considérer tout de même que l'association de ces deux constructions aux données de l'énoncé relève d'une démarche automatisée.

Remarque : Si l'énoncé indiquait "Construire un cercle...." (et non "le centre d'un cercle...."), on pourrait peut-être hésiter sur l'attribution de l'étiquette automatisme à cet exercice (les habitudes inculquées par l'enseignant à une classe donnée joueraient dans cette attribution).

Exemple 4 : (Niveau : Classe de 6e) Même énoncé que le précédent.

Ce n'est pas un automatisme. L'observation mentionnée dans le curriculum d'enseignement n'est pas systématisée en l'association de résultats à une situation géométrique du type de celle donnée par l'énoncé. De même, la résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{R}$ est un automatisme en classe de 1ère, mais pas en 3e.

Il ressort de ces exemples que les éléments de programmation mentionnés par le critère A1 sont :
les choix,
les opérations (au sens ensembliste), et en particulier les substitutions.

Il y a deux types de choix : les choix imposés et les choix libres.
Un choix est imposé s'il est déterminé par l'obtention d'un résultat : par exemple, lorsque l'on a calculé le déterminant associé à un système linéaire, on est conduit à procéder différemment suivant que la valeur obtenue est ou n'est pas nulle.
Un choix libre ne dépend pas, lui, de l'obtention d'un résultat. Sur le même exemple d'un système linéaire, un choix entre la méthode par substitution et la méthode par combinaisons linéaire est de ce type. Dans l'intégration par les méthodes élémentaires, les choix du genre suivant abondent : "Essayez telle méthode ; si cela ne vous conduit pas à un résultat, essayez telle autre méthode..."

Les opérations sont les résultats mis en mémoire (du moins en principe) chez les sujets par l'enseignement : aussi bien des résultats comme ceux de la table de multiplication, que des théorèmes auxquels il est fréquemment fait appel, ou encore des procédés de construction ou de calcul (comme la multiplication matricielle par exemple).

1.3 2 Commentaires sur le critère A2 : Absence d'ambiguïté.

Lors de l'apprentissage, les sujets emmagasinent un certain nombre de programmes de résolution. Il s'agit qu'en fonction de cet apprentissage, la forme de l'énoncé induise à mettre en oeuvre un programme adapté à la question. La situation est analogue à celle d'une machine qui possède l'enregistrement de plusieurs programmes : la mise en oeuvre de l'un d'eux est commandé par un signal convenable.

$(130 - t)\ (130 + t)$

Exemple 1 : (Niveau : Terminale)

Existe-t-il un naturel t tel que $16900 - t^2$ soit un nombre premier ?
Ce n'est pas un automatisme. Contrairement à l'exemple 2 de 1.2.1, où l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ est "appelée" par l'énoncé (Décomposer.... en produit....), la même identité qui devrait être utilisée ici ne résulte pas de la forme purement arithmétique de l'énoncé et de l'apprentissage à ce niveau.
Si, à la place de $(16900 - t^2)$, il y avait $(25 - t^2)$, le doute serait possible, car la perception de 25 comme le carré de 5 a un caractère attractif connu . L'indication : "On transformera $(16900 - t^2)$ en remarquant que 16900 est le carré de 130" modifierait le caractère de la question. Celle-ci serait alors un automatisme.
En effet, l'écriture $16900 - t^2 = (130 - t)(130 + t)$ montre que la seule solution a priori possible est $t = 129$. Mais $130 + 129 = 259$, lequel est divisible par 7 (une telle recherche est programmée chez les élèves). On voit que cet automatisme est déjà complexe en ce qu'il demande d'enchaîner deux programmes catalogués, à cause de l'exception que constitue la valeur $t = 129$.

Exemple 2 : (Niveau : Terminale)

Démontrer que, quelle que soit la valeur du paramètre réel a, toute solution réelle de l'équation

$$x^3 + a^2 x + 8a = 0$$

vérifie $|x| \leq 2$.

Malgré sa simplicité, cette question n'est pas un automatisme. Compte-tenu de l'apprentissage à ce niveau, la résolution passe soit par une reconnaissance de forme (la perception du trinome en a), soit par l'étude d'une question auxiliaire (par exemple sur le nombre de racines réelles de l'équation). Ces deux éléments sont, chacun, déterminants pour exclure l'automatisme.

Des rédactions possibles de la question, si l'on voulait un automatisme, consisteraient soit à indiquer de considérer le trinôme en a de paramètre x (contrairement à l'usage routinier selon lequel la variable dans un tel cas est désignée par la lettre x), soit à demander d'étudier la fonction f_a :

$$f_a(x) = x^3 + a^2 x + 8a.$$

Exemple 3 : (Niveau : Terminale)

Les entiers 1683, 3162 et 3434 sont-ils premiers dans leur ensemble ?
(Autre formulation : Quel est le générateur positif du sous-groupe de $\mathbb{Z}$ engendré par {1683, 3162 et 3434} ?).

Il s'agit d'un automatisme, malgré l'éventail de choix assez ouvert : décomposition de chaque entier en facteurs premiers, recherche par divisions successives du p.g.c.d de deux de ces trois nombres, puis incorporation du troisième nombre. Ces choix sont libres et sont tous susceptibles de conduire au résultat. Cependant, ils ne conduisent pas tous à la même durée d'exécution (c'est ce que l'on désigne par "avoir ou non de la chance en effectuant un calcul").

Exemple 4 (Niveau : DEUG)

Etudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x \, dx.$$

Ce n'est pas un automatisme, car le plan d'étude d'une série à termes positifs, fourni aux étudiants, poussera au calcul de u_n. C'est bien pourquoi, dans l'ouvrage duquel il est extrait (Klein-Reeb : Formules commentées, programme MPC, Gauthier-Villars, 1964), cet exercice est accompagné de l'indication : "Etudier directement $S_n = u_o + u_1 + \ldots + u_n$".

Ainsi, le programme d'intégration des fonctions par les méthodes élémentaires n'est pas prématurément appelé, et, le moment venu, c'est une question de continuité (celle de $\dfrac{\sin \pi x}{1 - x}$ au voisinage de $x = 1$) qui est seule soulevée par la forme de l'intégrale obtenue (la valeur de cette intégrale n'ayant pas d'importance).

1.3 3 Commentaire sur le critère A3 : Limitation temporelle.

Nous n'avons pas donné à ce critère de limitation temporelle un énoncé précis, compte-tenu de ce que l'application pratique ne l'exigeait pas. Les différentes opérations de base exécutées par un ordinateur d'un modèle donné ont une durée connue; il eût donc été possible de déterminer une durée machine à ne pas dépasser pour la résolution d'une question (par exemple 15 secondes). Mais le temps que demanderait l'établissement d'une forme aussi précise de ce critère est sans rapport avec les besoins expérimentaux : il suffit de se borner à envisager des questions pour lesquelles l'exécution proprement dite du programme de résolution ne dépasse pas quelques minutes (de une à une quinzaine suivant les niveaux) pour des sujets moyens. Ainsi, on se tient largement au dessous d'une durée critique, dont la détermination précise n'est pas notre objet.

Il est bon d'indiquer que la raison, pour laquelle nous avons retenu un tel critère de limitation temporelle, n'est pas uniquement l'utilisation de questionnaires à remplir au cours d'une heure scolaire.
Il existe en effet un phénomène d'ampleur d'une tâche, qui mériterait d'ailleurs une étude approfondie. Ne m'étant pas livré à une telle étude, je peux simplement indiquer quelques réflexions superficielles, que voici. A propos du taux de réussite opératoire, G. Brousseau ([10]) signale qu'il observe un phénomène probabiliste : Un élève de l'école élémentaire qui utilise sa table de multiplication avec, pour fixer les idées, une fiabilité de $\frac{9}{10}$ (une erreur pour dix produits de nombres à un chiffre), et qui additionne pratiquement sans erreur, aura un taux de réussite de $\frac{81}{100} = (\frac{9}{10})^2$ pour les produits d'un nombre à deux chiffres par un nombre à un chiffre, ou un taux de réussite de $(\frac{9}{10})^4$ # 0,66 pour les produits de deux nombres à deux chiffres. Localement, nous avons pu faire des essais analogues (sur l'utilisation de notions ensemblistes), qui montrent que le nombre de pas d'un programme n'est pas un élément intrinsèque de difficulté : chaque pas intervient avec sa fiabilité individuelle propre.

Mais la situation change vis à vis d'une tâche dont l'ampleur est perçue par le sujet. Celui-ci peut alors modifier sa conduite usuelle, de manière à améliorer sa fiabilité. Pour ce faire, il peut disposer de procédures de vérification. Par exemple, il est classique, devant une longue colonne de nombres à additionner, de procéder d'abord de haut en bas, puis de bas en haut. Si les résultats diffèrent, on recommence. Pour la multiplication, il y a la preuve par 9. Pour une équation intervenant dans un problème à support concret, il y a l'estimation de l'ordre de grandeur. Pour l'exploitation de certains types de données, il y a les vérifications d'homogénéïté.... Mais il n'y a pas que ces procédures : le Livre du Problème (t.1 - Pédagogie de l'exercice et du problème - [27] p. 37 à 39) insiste par exemple sur la préparation matérielle et intellectuelle du sujet face à une telle tâche. Ainsi la disposition des calculs peut contribuer à minimiser les lapsus. La préparation aboutit à une organisation particulière, ce qui fait que l'analyse, par un observateur, de la procédure de résolution est impossible *a priori*. Ici la méthode clinique (*) serait nécessaire.

Exemple (Niveau : Terminale) (adapté du Livre du Problème t. 1 loc. cit.)

On désigne par f la fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$

a) Démontrer par récurrence que la dérivée d'ordre n de f est de la forme

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$$, où $P_n(x)$ est un polynome de degré n - 1.

b) Calculer $P_2(x)$.

b') Calculer $P_{10}(x)$.

Cet exercice, réduit aux questions a) et b), entre dans la catégorie automatisme. Bien que la classification NLSMA (*) n'attribue pas un niveau plus élevé à la question b') qu'à la question b), cette question ne satisfait pas au critère A3.

1.4 Des automatismes à l'heuristique

De l'étude précédente, il résulte qu'il n'y a pas une dichotomie entre les activités mathématiques, pour laquelle les unes recevraient l'étiquette "automatisme" et les autres l'étiquette "heuristique".
Ainsi l'exemple précédemment cité ne recevrait aucune de ces deux étiquettes, la nécessité d'organiser son travail étant un élément non directement heuristique (en revanche, la "procédologie" de Hirsch, loc. cit., en tiendrait compte).
Toutefois, si l'on se réduit à l'étude des questions dont la résolution ne fait appel qu'au matériel courant pour un mathématicien et conduit à des programmes ayant une faible durée d'exécution, une telle dichotomie fonctionne. C'est à dessein, dans le but de discerner puis de préciser l'articulation des phénomènes en jeu, que seules ces questions (représentant d'ailleurs la totalité des questions de contrôle et, hélas peut-être, l'énorme majorité des questions intervenant dans l'apprentissage) ont été retenues ici. Le lecteur ne sera donc pas surpris que la présente étude n'envisage pas des énoncés comme :

"Rédiger quelques pages sur la notion de dualité", ou

"Réaliser un film sur les géodésiques du tore ".

Parmi les questions qui nous intéressent, le critère général d'identification du caractère heuristique est que l'une au moins des associations d'idées d'une procédure de résolution ne soit ni indiquée dans l'énoncé, ni résultant de l'apprentissage.

L'heuristique pure se trouverait dans des exercices susceptibles d'être instantanément résolus, pourvu que fonctionne une association d'idées adéquates. Dans la plupart des cas, outre des associations d'idées appropriées, il devra y avoir exécution de programmes bien répertoriés : automatismes et heuristique seront mêlés (l'étiquette sera néanmoins "heuristique").

Exemple 1 : (Niveau : Terminale)

Trouver, en fonction de l'entier naturel n, le plus grand diviseur commun à n et $n^2 - 1$.

Il s'agit d'heuristique pure, car l'association d'idées entre les données de cet énoncé et l'égalité de Bezout fournit immédiatement la réponse : 1 quel que soit n.
Si l'énoncé était :
"Démontrer, à l'aide de l'égalité de Bezout, que les deux nombres n et $n^2 - 1$ sont, quel que soit le naturel n, premiers entre eux"
la résolution se réduirait simplement à substituer les données de l'énoncé aux variables de l'égalité de Bezout.

Un tel exemple est plutôt exceptionnel. L'association d'idées décisive est souvent précédée d'une mise en oeuvre d'un automatisme, et conduit à l'exécution d'un programme soit original, soit habituel pour d'autres énoncés. Dans des cas plus complexes, on peut avoir une succession d'exécutions programmées entrecoupée d'associations inhabituelles vis à vis de l'apprentissage.

Exemple 2 : (Niveau : à partir de la classe de 5e).

Ranger les nombres entiers de 1 à 32 en une suite, telle que la moyenne de deux éléments ne se trouve jamais placée entre eux.

$$(\forall m,\ 1 \leq m \leq 32,\ \forall n,\ m < n \leq 32,\ \forall p,\ m < p < n,\ u_p \neq \frac{u_m + u_n}{2}).$$

Dans cet exemple, apparaît par rapport au cas précédent, une nécessité d'exécution d'opérations routinières ajoutée à "l'idée". Par exemple, une solution peut résulter du tri entre les éléments dont la moyenne est un entier (les nombres de même parité) et ceux dont la moyenne n'est pas un entier, qui peut amener une séparation entre nombres pairs et impairs.

A partir de là, l'idée de dichotomies successives conduit à une solution ; encore y a-t-il nécessité de l'écrire, c'est-à-dire d'exécuter le programme auquel on a pensé. Pour illustration, ce programme se déroulerait ainsi pour les nombres de 1 à 8 :

1 2 3 4 5 6 7 8

1 3 5 7 | 2 4 6 8

1 5 | 3 7 | 2 6 | 4 8

Comme on le voit, cet exercice se distingue facilement du précédent en ce sens que personne ne dira d'emblée "c'est évident, voici la réponse", précisément à cause de cette addition d'automatisme à l'heuristique.

L'exemple 1 de 1.3.1 est analogue à celui-ci, avec cette différence que le programme à exécuter est donné (le choix de l'objet auquel l'appliquer étant du domaine de l'heuristique).
L'exemple 2 de 1.3.2 comporte une part plus grande d'automatisme : il s'agit de trouver le moyen de se ramener à des programmes connus (étude du trinôme ou de fonctions) et d'exécuter ces programmes. L'exemple 4 qui lui fait suite est du même type, mais il présente cette particularité que "l'idée" est de ne pas exécuter le programme qui semble naturel (compte tenu de l'apprentissage).

Cette possibilité de conflit entre automatisme et heuristique apparaît de temps à autre dans l'enseignement (la remarque du bas de la page 11, sur le fait que la résolution de $x^2 - 4x + 4 = 0$ amène fréquemment des calculs de discriminant, va un peu dans ce sens).

CHAPITRE 2 QUELQUES OBSERVATIONS SUR L'ATTITUDE ET LES COMPORTEMENTS DES ELEVES

Tout traitement d'enquête implique une perte d'informations importante par rapport à la situation envisagée. Ce chapitre propose une exploration de situation, nécessaire pour l'appréciation des possibilités d'un questionnaire.
Malgré toute la prudence qui est intervenue dans la rédaction de ce chapitre, le lecteur pourra trouver à redire çà et là s'il a eu l'occasion de rencontrer les phénomènes dont il est question.
D'une part des conditions même légèrement différentes peuvent amener des observations différentes, d'autre part, certaines descriptions peuvent être tronquées ou déformées par le narrateur à son corps défendant. Néanmoins la nécessité, pour élaborer un questionnaire et pour interpréter des réponses, d'avoir une certaine expérience des attitudes des élèves m'a conduit à proposer quelques exemples d'observation, en indiquant bien qu'il ne s'agit pas d'expérimentation systématique.
Nous envisageons la situation de l'élève devant des questions. Aussi décrirons nous certains phénomènes, dans l'ordre où ils interviennent pour un élève :

- la phase qui précède la lecture des énoncés
- la lecture des énoncés (au sens large : lecture d'un texte, de figures, de tableaux à plusieurs entrées, de montages)
- la résolution
- la réponse.

2.1 La phase préliminaire

D'emblée, une tâche proposée à des élèves peut revêtir un aspect précis dans l'activité scolaire (devoir à la maison, interrogation écrite, composition,...) ou au contraire sortir quelque peu de cet éventail de tâches bien cataloguées.
Dans ce cas, on constate qu'avant même de prendre connaissance du sujet, les élèves sont portés à poser un certain nombre de questions.

Certaines de ces questions relèvent d'une curiosité normale devant toute nouveauté. Ainsi, lors de la passation d'une enquête, surgissent des questions comme :

"On aura les résultats ?"

"Peut-on utiliser du brouillon ?"

"Ca dure toute l'heure ?"

" Qu'est ce que l'I.R.E.M ?"

Mais la majorité des questions relève de la place de la tâche proposée et de la difficulté de la tâche.

Place "Ca comptera ?"

"Ca sera noté ?"

" Est-ce qu'il faut mettre son nom ?"

(Même la question : "On aura les résultats ?" est à moitié de ce type)

Difficulté

"C'est difficile ?"

"Et si on ne sait pas ?"

"C'est des maths. comme on a fait ?"

La régularité et la fréquence de ces questions conduit à parler d'ajustage des motivations (*). Dans cette phase préliminaire, il s'agit pour un élève de déterminer dans quelle mesure mobiliser son attention, ou sa mémoire, ou ses capacités d'organisation, ou son imagination. Et en effet les différences entre les comportements, soulignés dans la classification des fonctions des exercices scolaires ([21]), font apparaître comme naturel le souci de savoir à quoi se préparer ([30]).

Dans cet ajustage interviennent l'expérience personnelle de l'élève, l'intérêt que la tâche paraît présenter pour lui, son idée sur ses propres capacités. C'est dire que l'attitude (*) qui en résulte est loin d'être uniforme et qu'il serait naïf de dépouiller un questionnaire en se disant que chaque élève a tenté de répondre "de son mieux". Par exemple, j'ai observé une fois une attitude de refus complet de répondre. "C'est un cas d'allergie aux maths." m'a dit le professeur ; "Je veux faire de la télé," m'a dit l'élève, "l'enseignement qui m'est proposé n'est pas adapté ; il y a même dans l'établissement un matériel vidéo que je n'ai pas le droit de toucher, alors que personne ne s'en sert". En revanche je n'ai jamais observé d'attitude de refus localisé aux seuls questionnaires proposés.

En résumé, on peut dire qu'à la passation, l'accueil des élèves envers nos questionnaires paraît nettement favorable, et l'est en tout cas suffisamment pour que la suite des opérations (dépouillement et analyse) vaille la peine d'être entreprise.

2.2 La lecture des énoncés.

Nous avons souligné (p. 22) que les élèves ne réagissent qu'aux questions qui leur sont posées. Ceci ne signifie pas qu'ils y répondent : l'expérience fait apparaître des cas manifestes où des élèves répondent à une question autre que celle qui leur est posée. Les phénomènes connus d'oblitération ou de transformation de mots à la lecture sont susceptibles de jouer. Un phénomène particulier d'oblitération de toute une partie de la consigne me paraît intéressant à relever : celui de l'arrêt de lecture.

Ce phénomène est cité dans une intervention de R. Duval et moi-même au bulletin de l'A.P.M ([16]) à propos d'un énoncé de BEPC. Notre attention avait été attirée sur cette possibilité à la suite d'une observation dans une classe de 5e (12-13 ans). Un texte contenait : ".... dans l'énoncé, la variable a pour nom p...". Ce texte était suivi d'une question sur la variable qui figurait dans l'énoncé. Et cette question avait reçu la réponse : "C'est a".

Dans "Back to Square One" (traduit dans [30]), P. Kaner écrit :

> "We have
>
> $$A > B \text{ and } B > A \Rightarrow A = B \ \ldots$$
>
> The less intelligent child who is reading from left to right (don't we all) attempts to comprehend each part of the sentence as he goes along ..."

Ici il s'agirait plus précisément d'un arrêt-blocage (avant la flèche d'implication), alors que dans l'exemple précédent l'arrêt de lecture avait conduit à répondre. [Nota : je ne suis pas d'accord, sur le texte cité, avec l'aspect unidimensionnel de l'intelligence sous-jacent à l'emploi du qualitatif "less"].

On peut aussi faire le rapprochement avec les conflits entre le local et le global signalés par Thom ([36]) et par Freudenthal ([22]). Mais il faut souligner que les arrêts de lecture qui peuvent nous intéresser ici sont ceux qui résultent non d'un blocage, mais d'une compréhension, différente de celle de l'énoncé dans sa totalité.

A l'observation, on peut penser que la conduite de la lecture subit une évolution sur la période considérée (12-16 ans) : il semble que les élèves les plus jeunes regardent et répondent davantage page après page que les élèves en fin de période. Souvent ceux-ci évaluent l'ensemble du questionnaire et y jettent quelques coup d'oeil à différents endroits avant de répondre. Et l'ordre dans lequel ils traitent les questions n'est pas obligatoirement celui de la pagination. Néanmoins, l'ordre de la pagination reste le cas général même en fin de période. Evidemment, il serait nécessaire de faire une étude des stratégies globales de réponse à un questionnaire, pour voir si l'impression d'une évolution est confirmée et pour donner quelques résultats précis.

D'autre part, la "lecture" peut comporter du langage usuel, des symboles et aussi des schémas ou des figures. La perception des images est une forme de lecture. Mais les questionnaires envisagés ici n'ont pratiquement pas présenté de figures (seuls cas : les "patates" contenant des nombres, à ranger par ordre croissant, et il ne s'agissait pas d'interprêter la figure), aussi laisserons nous de côté les phénomènes liés à l'interprétation des figures, à l'exception du phénomène d'attraction. Ce phénomène sera envisagé plus loin (p. 44 : organisation de la perception). Mais on se rend compte que si son domaine privilégié est le domaine visuel (les illusions d'optique sont quelque chose de bien connu , alors que les illusions d'acoustique.... ?), et plus précisément celui de la vision globale d'une figure, il peut y avoir également des attractions (on dira généralement plutôt des distractions) provoquées lors d'un déroulement temporel. La devinette-piège classique : "Doit-on dire : sept-et-trois font T'onze ou sept et trois font H'onze ?", purement verbale, est de ce type. Il s'agit d'un énoncé fabriqué pour déclencher uniquement une interrogation sur le phénomène de liaison.

L'exercice-piège : "Un coureur court le 100 m en 10 sec. ; en combien de temps court-il le 5000 m ?" est du même type mais en sens inverse ; il est de nature à provoquer le calcul, ce que l'on observe effectivement chez des élèves de fin d'étude primaire ou de début de premier cycle (je n'ai pas observé le comportement, sur cet exercice, d'élèves plus âgés), alors que la devinette précédente visait à effacer l'idée d'une vérification opératoire. Il est intéressant de savoir que de telles perturbations n'apparaissent pas seulement sur des énoncés aussi "trafiqués" que ceux donnés ici comme exemples à cause de leur caractère spectaculaire .

Le phénomène de l'incompréhension envisagé par H. Freudenthal et surtout J. Adda ([1]) présente des similitudes avec les phénomènes indiqués ici. Mais il joue surtout dans les comportements heuristiques qui ne sont qu'indirectement notre objet.

2.3 La résolution

Lors de la résolution individuelle d'une question, des phénomènes analogues à ceux qui viennent d'être indiqués pour la lecture sont susceptibles d'intervenir. Ainsi, il est fréquent qu'un élève de 3e (14-15 ans) développe :

$$(2x + 1)^2 - (x - 1)^2$$

en

$$4x^2 + 4x + 1 - x^2 - 2x + 1.$$

Et ceci ne signifie pas toujours qu'il ne sait pas distribuer un signe - . En effet, il n'y a pas de parenthèses dans le second membre de l'identité

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Voici d'ailleurs des états successifs possibles de la feuille de papier (on observe souvent des intermédiaires supplémentaires comme $2 \times 2x$) :

Etat 1 : $(2x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

Etat 2 : $(2x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 -$

Etat 3 : $(2x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 - x^2 - 2x + 1.$

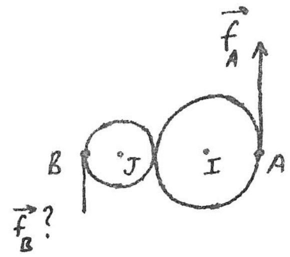
Et l'erreur s'est ainsi produite à un niveau jugé élémentaire pour cet élève, auquel il faudra surtout apprendre, dans une telle situation, non à supprimer des parenthèses, mais à en placer. On voit ici un exemple où l'information figée, statique que constitue une réponse écrite sur une copie d'élève est peu révélatrice du processus suivi (voir p. 54). Il est facile de parler des fautes d'étourderie ; mais certaines de ces fautes, comme celle qui vient d'être signalée, ont un caractère hautement attractif.

Une faute courante, qui m'avait frappé , sans que j'ai une explication satisfaisante à proposer, se produit lors de l'utilisation de variables. On voit souvent $0 \times x = x$ (dans le cours d'un calcul, pas isolément). Mais cette spécifique n'est pas l'apanage de l'utilisation de variables ; j'ai aussi observé $0 \times 2 = 2$ de manière non exceptionnelle chez des élèves de 5e (12-13 ans) - toujours en cours de calcul et non isolément.

La possibilité d'erreurs de ce type peut expliquer certaines attitudes comme la sous-compréhension systématique (cf. [28]) ou même le refus local. En effet, la pratique d'optimisation individuelle, même non consciente, est tout à fait générale. Dans la pédagogie de la moindre erreur, cette optimisation se fait sur l'obtention des résultats : un élève déterminé est poussé à choisir la méthode qui, compte tenu du niveau qu'il estime être à sa portée, lui permettra d'obtenir à coup sûr une proportion convenable de résultats exacts. Ainsi, le comportement gauche-droite vis à vis de l'utilisation des signes d'appartenance et d'inclusion (cf. [28] et [19]) est "performant" pour la plupart des exercices usüels en 6e et 5e ; il fait donc apparaître comme "inutile" (c'est-à-dire nuisible) à un certain nombre d'élèves de risquer des erreurs en essayant de dépasser ce niveau de compréhension : en effet, il pourra y avoir une période d'instabilité dans les réponses et apparition d'erreurs du type signalé ci-dessus.

Le refus local se remarque fréquemment dans les cas où, pour un type de problème donné, une nouvelle méthode de résolution est proposée, pour être substituée ou surajoutée à une méthode antérieurement présentée.

Chez certains individus satisfaits de la méthode antérieure, on rencontrera des attitudes de refus qui peuvent aller jusqu'au refus d'écouter pour ne pas être perturbé. On peut avoir l'occasion de rencontrer de tels refus aussi bien chez des élèves dans l'enseignement primaire que chez des adultes. Le lecteur pourra facilement trouver des exemples de cette attitude dans son expérience personnelle ; je souhaite simplement illustrer sur des exemples que la perturbation peut être réelle.

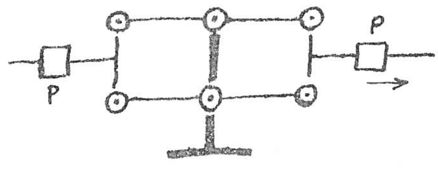


La figure ci-contre présente deux roues pouvant pivoter autour de I et J respectivement. On suppose le contact sans glissement. Une force $\vec{f}_A$ est appliquée au point A. Quelle force faut-il appliquer en B pour équilibrer $\vec{f}_A$? Dans un groupe de professeurs de technologie où cette question avait surgi, la réponse a été unanime : on doit avoir

$$\|\vec{f}_A\| \cdot \|\vec{IA}\| = \|\vec{f}_B\| \cdot \|\vec{JB}\| \qquad \text{(égalité de moments).}$$

Un exemple analogue est cité dans le livre du Problème (tome 6 : Pédagogie de l'exercice et du problème de physique, I.R.E.M de Strasbourg, en préparation aux Editions CEDIC):

Le dispositif représenté ci-contre (Balance de Roberval) est supposé en équilibre. On déplace la masse de droite le long de la tige dans le sens indiqué par la flèche. L'équilibre est-il ou non rompu, et si oui dans quel sens ?



Ici aussi, la connaissance de la notion de moment apporte une perturbation.
En mathématique, on peut rencontrer des exemples tout aussi frappant ; l'un d'eux est le sujet "Ensemble des points M du plan affine euclidien tels que l'angle de droite $(\widehat{MA,MB})$ soit constant" exposé par des candidats au CAPES : il est extrêmement difficile actuellement, pour la plupart d'entre eux, d'éliminer a priori toute considération "d'angles modulo π ou modulo 2π". La concession consentie généralement est de procéder à cette suppression après avoir raisonné "modulo π ou 2π" dans un premier temps "pour trouver".
Il est raisonnable de penser que ceux qui utilisent cette procédure y voient la sécurité la plus grande. En analyse, pour ces mêmes candidats, le conflit entre l'utilisation de dérivées et celle de différentielles est très analogue (ainsi pour la dérivation des fonctions composées).

L'annexe 1 présente une observation d'un autre genre, relevant elle aussi, selon moi, d'une conduite d'optimisation. Il s'agit d'une observation d'un élève (l'élève P...), pendant quinze minutes en classe de 4ème.

Il faut insister ici sur le caractère local des refus évoqués : les individus cités sont des sujets qui n'opposent pas une résistance systématique à l'enseignement, mais font plutôt preuve d'une "bonne volonté" générale (même l'élève P...). Une attitude de refus global sortirait du présent sujet (même si elle apparaît comme la meilleure possible pour les individus concernés).

Par ailleurs, il faudrait se garder de voir dans toute erreur une conséquence d'une conduite d'optimisation explicite ou inconsciente. L'examen détaillé des questionnaires et des résultats nous donnera l'occasion de revenir abondamment sur ce fait, mais, pour illustration, un exemple observé dans une classe de 6ème (octobre 73) est intéressant.
Il s'agissait de fabriquer la table de Pythagore de l'intersection dans l'ensemble des parties de l'ensemble à trois éléments E = {a,b,c}. La réaction de tous les élèves observés a été un remplissage par colonnes plutôt que par lignes, à l'exception de la première ligne (qui correspond à $\emptyset$). Précisons qu'il s'agissait d'une des premières heures d'enseignement consacrées à l'intersection, dont les propriétés (notamment la commutativité)

E	$\emptyset$	A						
N	$\emptyset$	A						
M	$\emptyset$	A						
L	$\emptyset$	$\emptyset$						
C	$\emptyset$	$\emptyset$						
B	$\emptyset$	$\emptyset$						
A	$\emptyset$	A						
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\cap$	$\emptyset$	A	B	C	L	M	N	E

$E = \{a, b, c\}$
$A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = \{c\}$
$L = \{b,c\}$, $M = \{c,a\}$, $N = \{a,b\}$

n'avaient pas été explicitées. J'ai observé des erreurs chez six élèves pour le remplissage de la case $M \cap A$, alors que la case $A \cap M$ avait correctement été remplie par tous. (Note : il devait aussi y avoir des erreurs sur $L \cap B$ ou $L \cap C$, mais mon compte-rendu est muet sur ce point). La difficulté de la désignation, signalée par J. Adda ([1]), ne peut donc être seule en cause ici. Mais, si l'on se réfère aux algorithmes de résolution, la différence entre les deux cas s'explique facilement : pour $A \cap M$, la conclusion résulte de l'unique constatation $a \in M$; tandis que la réponse, pour $M \cap A$, demande de faire un retour en arrière (ou : bouclage, voir p. 38) : l'élément C de M est-il élément de A ? Non. Même question à reprendre pour $a \in M$: réponse Oui.
Certes, la difficulté n'est pas bien grande, puisque la plupart des élèves la franchirent ; et même ceux qui furent arrêtés par cette difficulté dressèrent un tableau correct une fois l'explication donnée pour un cas de ce genre. Néanmoins le fait que le quart d'une classe puisse buter sur cet obstacle, un des plus minimes possibles en manière de retour en arrière, est très révélateur de ce qui peut arriver lorsque la difficulté est un peu plus grande. D'ailleurs, presque tous les élèves de la classe eurent recours à des intermédiaires d'écriture (exemple : $\{b,c\} \cap \{a,b\} = \{b\}$), preuve que le traitement complètement mental de l'algorithme de réponse paraissait trop difficile à ce niveau.

Opposé aux exemples précédents, celui-ci peut-être de nature à illustrer la différence entre complexité cognitive et complexité opératoire. Il est en effet d'une complexité cognitive faible (catégorie A3 de la classification NLSMA (+)), mais d'une complexité opératoire déjà suffisante pour poser problème à des élèves de 11-12 ans (type opératoire 2, voir p. 37).

2.4 La réponse

Après le cheminement précédemment décrit : préparation, lecture de l'énoncé, résolution (accompagnée ou non de jalons écrits), voici l'élève parvenu à l'instant où il va consigner sa réponse pour la livrer à un oeil étranger. En livrant une telle réponse, il donne donc un spectacle. Il en résulte qu'il y a lieu de ne pas méconnaître l'aspect "publicitaire" (1) d'une réponse destinée à un lecteur.

(1) Ne pas voir de nuance péjorative dans l'emploi de cet adjectif. Il s'agit essentiellement de souligner qu'une réponse écrite présente un caractère social à ne pas oublier .

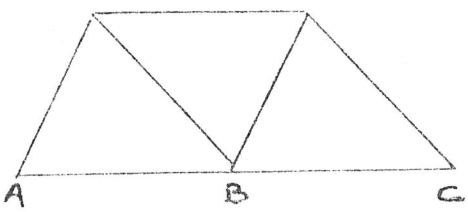
Ainsi, à propos d'une enquête sur la notion de vecteurs effectuée par des physiciens, G. Glaeser ([24] souligne ce rôle du lecteur (l'interlocuteur) en émettant l'hypothèse suivante : "Par exemple, en faisant passer un test analogue aux mêmes étudiants par des interrogateurs mathématiciens, on recueillerait sans doute des réponses tout à fait différentes". Sans se prononcer sur cette hypothèse, on peut dire qu'un individu qui souhaite obtenir, lors d'une évaluation sommative, une note ou une appréciation convenable mettra, explicitement ou implicitement, tout en oeuvre pour que sa réponse le présente sous un jour favorable.

Il y a aussi une distinction signalée par G. Glaeser entre "rédaction didactique" et "rédaction vérificatrice" ([23]). On peut penser qu'il y a de la sorte plusieurs transformations possibles de la rédaction de recherche, parsemée de jalons succints destinés au seul usage de leur auteur, à une rédaction qui répond à d'autres préoccupations que la découverte.

Un exemple d'observation courante est que la plupart des individus n'aiment guère se sentir observés lors d'une interrogation ou d'un examen. En effet, la réponse définitive pourra dissimuler certains errements qui ont eu lieu en cours de résolution. Le fait d'être épiés restreint aux yeux des candidats leur liberté d'errement.

De plus, la réponse peut surajouter des éléments qui, en fait, ne sont pas intervenus dans la résolution. Ainsi, si un énoncé de BEPC demande la nature d'un quadrilatère ABCD (au BEPC, c'est toujours un parallélogramme !), les réponses sont souvent redondantes. Même un élève qui a écrit, avec justification, $\vec{AB} = \vec{CD}$ ajoutera la plupart du temps que les côtés sont deux à deux parallèles, ou que AC et BD ont même milieu. Il semble qu'il y ait là une envie de placer judicieusement des citations qui valorisent leur auteur.

Il se produit même des cas où la citation est un moyen de donner à une réponse faible une chance de passer. En voici un exemple typique : dans une enquête (à publier) faite au niveau de la classe de 3e (14-15 ans), nous avions présenté la figure ci-contre constituée de deux parallélogrammes. La question, très simple, était de prouver que B est le milieu de AC. Nous avons été surpris du nombre de citations de Thalès à propos de cette question. Si l'on songe qu'à ce niveau, l'énoncé de Thalès a une chance non négligeable d'intervenir dans un énoncé de géométrie présentant des droites parallèles, ce comportement n'est pas tellement étonnant



en définitive. Il est à rapprocher du comportement observé devant des questions du type Vrai-Faux (cf. p. 56) ou devant des questions à choix multiples après élimination d'une partie des distractions. (*)

Pour l'essentiel, les questionnaires analysés dans la partie II du présent travail se contentaient de demander des résultats numériques. De ce fait, nous pouvons penser que les réponses ne sont pas trop parasitées par la présence d'éléments étrangers à la résolution algorithmique. Mais le moyen de vérification le plus efficace est ici encore l'étude de la cohérence dans une séquence de réponses.

CHAPITRE 3. ANALYSE DE LA DIFFICULTE DES EXERCICES A RESOLUTION PROGRAMMEE.

Dans ce chapitre, nous envisageons les exercices du type "automatismes" décrits au chapitre 1. Nous proposons un outil pour l'analyse a priori de leur difficulté, c'est-à-dire avant l'obtention de réponses individuelles. Il s'agit d'attribuer à chaque exercice un profil(*) de difficulté, prenant en compte des éléments autres que la seule complexité cognitive(*) envisagée dans la classification NLSMA(*). Le modèle de difficulté ainsi élaboré est un modèle d'observation, c'est-à-dire un modèle adapté au repérage. A ce titre, il ne peut prétendre à des visées explicatives. L'état actuel des recherches ne permet qu'une conjecture schématique sur ce que peut être le modèle explicatif ; nous l'indiquerons en fin de ce chapitre.

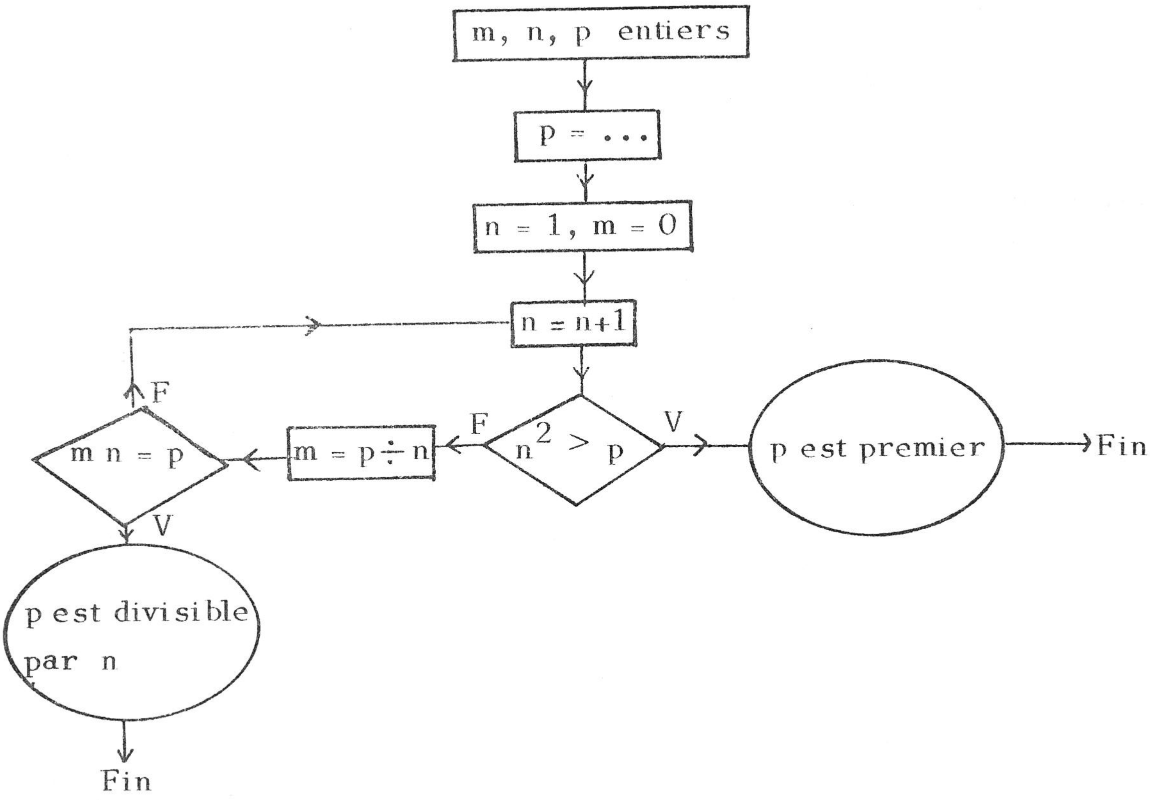
Pour mémoire, nous rappelons que la classification NLSMA permet d'attribuer à chaque exercice un niveau de complexité cognitive. Nous supposerons cette attribution faite (nous ne reviendrons sur la complexité cognitive qu'à propos de la perturbation de plongement) et nous considérerons l'algorithme de résolution d'un exercice, et plus précisément le déroulement temporel de cet algorithme ; c'est le fait de se limiter aux automatismes qui permet cette considération, déterminant un gain en information substantielle sur la seule complexité cognitive.

3.1. Description topologique des algorithmes. Type opératoire.

Ce paragraphe développe des considérations exposées dans le bulletin inter-I.R.E.M. consacré au colloque de Pont-à-Mousson ([34]).

3.1.1. Un exemple.

Voici un algorithme intéressant parce qu'il s'agit d'un cas simple présentant néanmoins les diverses caractéristiques que l'on peut rencontrer : c'est un algorithme de recherche d'un facteur premier d'un entier p. Nous ne nous inquiétons pas ici du fait qu'il y a des algorithmes plus performants pour cette recherche.



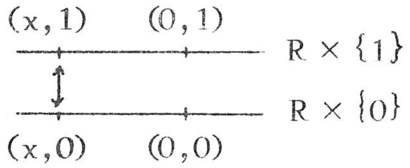
(Note : A partir de "p est divisible par n", on peut recommencer le processus en faisant $p \leftarrow m$ si l'on veut la décomposition en facteurs premiers de p).

Un tel algorithme se présente un peut comme un circuit (à sens de parcours imposé) muni d'un certain nombre de stations et de carrefours. Dans un cas un peu plus complexe que celui choisi ici, on pourrait aussi parler de labyrinthe. L'introduction de données précises à l'entrée détermine un cheminement dans ce labyrinthe, c'est-à-dire une image continue de $[0,1]$ dont l'origine est l'entrée et l'extrémité une sortie du labyrinthe.

Nous allons simplifier un peu la situation, pour pouvoir en faire une description mathématique plus précise, qui en retienne les caractéristiques importantes vis àvis de la difficulté d'un tel cheminement. En gros, nous pourrons dire qu'indépendamment du contenu des instructions, c'est l'existence de carrefours ou de retours en arrière qui est susceptible de compliquer ce cheminement.

3.1.2. Représentation du déroulement d'un algorithme.

De l'algorithme, essayons de ne retenir que le déroulement dans le temps, en oubliant le contenu précis des instructions. Nous ne pouvons toutefois être complètement indifférents à l'état des variables qui interviennent dans une instruction conditionnelle (un test), puisque le déroulement de l'algorithme en dépend. Pour tenir compte de ce fait, nous aurons recours à la notion de branchement sur une variété de dimension 1 (cf. Haefliger-Reeb [26].) Rappelons la définition du branchement simple.

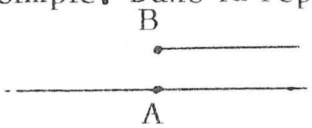


On considère l'espace $E = (R \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\})$ et la relation d'équivalence p dans E :

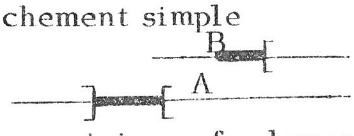
$$(x,y)\ p\ (x',y') \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = y' \text{ et } x = x' \\ \text{ou} \\ x = x' \text{ et } x < 0 \end{array}$$

Le branchement simple est l'espace quotient E/p. Il possède en particulier deux points : $\widehat{(0,0)}$ et $\widehat{(0,1)}$, qui sont distincts mais non séparés. C'est-à-dire que tout voisinage de $\widehat{(0,0)}$ coupe tout voisinage de $\widehat{(0,1)}$.

Nous avons l'habitude de conférer à nos représentations planes une structure métrique qui implique une propriété de séparation. Aussi n'est-il pas possible de donner une représentation parfaitement satisfaisante du branchement simple. Dans la représentation la plus usuelle, indiquée ci-contre, il faut voir un voisinage de A de la manière habituelle (un système fondamental de voisinages de A est constitué par les segments ouverts contenant A). Mais un système fondamental de voisinages de B est du type représenté sur la figure.



représentation usuelle du branchement simple



un voisinage fondamental de B.

Grâce à cette notion de branchement, il nous est possible de représenter le déroulement d'un algorithme par une variété à une dimension , connexe, non séparée en général. Pour cela, il suffira dans la représentation usuelle d'un algorithme de réduire les cases d'instructions à un point ou à plusieurs points non séparés.

Ainsi, la variété de dimension 1 associée à l'algorithme donné en exemple est la suivante :

Pour être précis, il faut indiquer que l'algorithme ne correspond qu'à une partie de cette variété, le processus décrit étant limité dans le temps. Mais cette limitation n'intervient pas ici en première analyse.
Ce qui est d'emblée plus important est la contrainte d'un déroulement temporel permet d'orienter la variété associée à un algorithme. Ceci exclut comme variétés associées à des algorithmes toutes les variétés non orientables ; ainsi le lasso, représenté ci-contre, est à exclure.

Lasso

Dans le paragraphe suivant, nous envisageons la strucutre déterminée par l'orientation (tel point vient après tel autre).

3.1.3. Classification des variétés de dimension un orientées, d'après la structure conférée par l'orientation.

Premier cas : L'orientation confère à l'ensemble des points de la variété une structure d'ordre total.
Dans ce cas, c'est qu'il n'y a pas de points de branchement : la variété est tout simplement une droite (c'est le cas type baptisé "âne qui trotte").

Deuxième cas : L'orientation confère à l'ensemble des points de la variété une structure d'ordre non total.
Dans ce cas, il y a des points de branchement. Mais on peut dire qu'une application continue strictement monotone de $[0,1]$ sur la variété est toujours injective.

Branchement simple

Déviation

Comme exemples, on peut donner le branchement simple et la déviation, représentés ci-contre. L'exemple de la déviation montre que la condition indiquée n'implique pas que la variété est simplement connexe.

Troisième cas : L'orientation ne confère pas une structure d'ordre à l'ensemble des points de la variété.
Dans ce cas, il y a des "retours en arrière". L'exemple le plus simple est celui de la boucle. La variété associée à l'algorithme de l'exemple est également de ce type (c'est une boucle augmentée d'un branchement).

Boucle

3.1.4. Classification des déroulements d'algorithmes : $\boxed{\text{Type opératoire.}}$

L'étude qui précède met en évidence des différences importantes en ce qui concerne les conduites opératoires. Mais elle n'isole pas le processus de boucle de processus plus complexes. Ainsi, lorsque l'on effectue un produit de deux matrices, on effectue un certain nombre d'itérations d'un même type de calculs. On sort de la boucle uniquement pour arriver à l'instruction de fin d'exécution. Au contraire, si l'on veut par exemple calculer $\int_0^{\pi} x^3 \sin x \, dx$, on effectue des intégrations par parties tant qu'il subsiste une puissance en x ; quand ce n'est plus le cas, on a encore un calcul à effectuer.

Ce qui intervient est donc la limitation de l'algorithme : Nous appellerons branchement strict pour un algorithme un branchement qui ne correspond pas à la seule instruction "fin d'exécution".
En effet, c'est le processus qui nous intéresse. De ce point de vue il est nécessaire de distinguer un simple test d'arrêt qui, dans la pratique, n'amène en fait aucune nouvelle instruction, d'un test qui conduit soit à tirer une conclusion, soit à exécuter une nouvelle séquence opératoire.
En définitive, les algorithmes seront classés, en ce qui concerne leur déroulement, de la manière suivante.

Classe	Type d'algorithmes correspondant (type opératoire)
0	Algorithmes linéaires : ni branchement strict, ni boucle
1	Algorithmes à branchements stricts, mais sans boucle
2	Algorithmes à boucles, mais sans branchement strict
3	Algorithmes à boucles et branchements stricts

Bien entendu, une classification plus fine peut être envisagée, tenant compte du nombre de boucles et de branchements stricts, mais il nous a paru préférable de nous tenir à cette classification qui prend en compte les différences importantes en ce qui concerne les conduites individuelles.

- Dans le cas 0, j'exécute une suite d'instructions.
- Dans le cas 1, j'exécute des suites d'instructions qui diffèreront suivant les données envisagées. J'ai donc à faire des choix.
- Dans le cas 2, je dois faire des retours en arrière, c'est-à-dire recommencer une séquence d'instructions.
- Le cas 3 exige à la fois choix et retour en arrière.

Au regard de ces différences, un élément comme le nombre de choix à effectuer est a priori moins pertinent, dans un exercice vérifiant le critère A3 (limitation d'ampleur), pour rendre compte d'aptitudes individuelles (ce qui ne dispense pas de vérifier aux résultats, mais nos questionnaires sont un peu pauvres pour ce faire). Par ailleurs, on sait que le nombre de pas d'un programme n'intervient pas comme facteur spécifique de difficulté : des études portant sur l'école élémentaire ont montré que le taux de réussite d'un individu à une séquence d'instructions est le produit de ses taux de réussite à chacune des instructions, ceci en l'absence de recours à des moyens de vérification -du type preuve par 9, ou de double exécution (voir les travaux de Brousseau sur la réussite opératoire, dans l'enseignement élémentaire- [10]).

Si l'on veut avancer une hypothèse sur les difficultés que peut engendrer l'exécution correcte d'un algorithme, ou sachant l'analogie de propriétés entre images visuelles et images mentales, on peut se référer à ce que dit Bertin ([6]) : "Le pinceau visuel peut s'intéresser à la forme d'ensemble... Mais il peut aussi ne s'intéresser qu'à une tache élémentaire ... Et entre les deux, il peut s'intéresser à tout groupement de taches...".
Entre la liberté naturelle, et en particulier cette absence d'ordre temporel, dans la perception et l'organisation des images, et les contraintes rigoureuses du déroulement d'un algorithme apparaît ainsi un contraste très net. Ainsi, pourrait s'expliquer le fait qu'une réduction de dimension soit fréquemment une opération plus complexe que ne l'attend le mathématicien.
<u>Exemples</u> : retrouver l'ordre des constructions géométriques effectuées pour obtenir une figure donnée peut être une question non triviale. L'origami (art du pliage) donne lieu à des études subtiles.

Dans nos questionnaires, nous nous attacherons à montrer que les caractéristiques dégagées sur le déroulement des algorithmes fonctionnent, vis à vis de la difficulté, comme des <u>paramètres</u>. C'est-à-dire que par exemple un algorithme à branchements est, à conditions égales par ailleurs, toujours plus difficile qu'un algorithme linéaire.

3.2. Autres paramètres opératoires.

3.2.1. Le mode opératoire.

Le type opératoire ne fait pratiquement pas intervenir le contenu des instructions. Nous allons à présent aborder l'examen de la part de difficulté susceptible d'être attachée à ce contenu. Le mode opératoire concerne la manière suivant laquelle il est fait appel à la mémoire. Bornons nous ici à en indiquer la classification et quelques exemples, réservant l'étude expérimentale à l'examen des résultats de questionnaires.

Numéro de classe	Mode opératoire
0	Vision ou lecture directe des résultats
1	Données mémorisées : les résultats à fournir sont enregistrés tels quels en mémoire
2	Substitution des données dans un procédé (actif ou visuel)
3	Substitution des données dans une formule symbolique

Voici quelques exemples d'illustration.

Classe 0. Il s'agit de résultats que j'obtiens directement à partir des données en lisant un affichage ou en me reportant à des tables de valeurs. "Tables de valeurs" est à comprendre dans un sens général : ainsi un dictionnaire d'images pour la transformation de Laplace est à considérer comme tel, aussi bien qu'une table trigonométrique. Mais l'expression lecture directe suppose que les données entrent directement dans une telle table, sans qu'il intervienne de changement de variable (cas du dictionnaire d'images) ou d'interpolation ; dans de tels cas le mode opératoire sera d'une classe à numéro plus élevé.

Classe 1. Les résultats associés aux données particulières sont directement en mémoire. C'est par exemple le cas pour les opérations arithmétiques, addition et multiplication des nombres à un chiffre en écriture décimale. De même pour les identités dites remarquables, les formules d'addition en trigonométrie, la dérivée ou les primitives des fonctions usuelles, ... Ceci à condition que leur utilisation soit directe, c'est-à-dire ne nécessite pas de substitution au niveau des données ; sinon le mode sera au niveau de la classe 3.

Aux niveaux des classes 2 et 3, les résultats s'obtiennent à partir des données par l'intermédiaire d'une technique ou d'une formulation concernant non ces données précises, mais un type plus général de données. Nous avons distingué deux niveaux, suivant en cela, au moins partiellement, le point de vue de Bruner ([11]). Les deux classes ont ceci de commun, qui les distingue des niveaux précédents, que les résultats ne sont pas immédiatement disponibles à partir des données.

Classe 2. Le traitement des données est du type enactif ou iconique (selon la terminologie de Bruner [11] et cité dans [39]. Il m'a paru difficile, dans un certain nombre de cas précis, de dissocier ici ces deux types : un exemple typique est la multiplication matricielle qui s'accompagne chez de nombreuses personnes d'une promenade digitale sur deux tableaux. Et il en est de même dans de nombreux cas (maniement d'une règle à calcul, opérations du calcul vectoriel, produits scalaires et vectoriels dans un espace euclidien, calcul dans $\mathbb{C}$). Je n'ai donc pas distingué, d'autant plus que le niveau scolaire auquel je me suis adressé ne permettait pas (comme on le voit d'après les exemples) une exploration de cette classe.

Classe 3. Le traitement des données de type symbolique (toujours selon la terminologie de Bruner). L'exemple type est la résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{R}$. D'autres exemples ont été donnés plus haut à propos de la classe 1. On pourrait sans peine multiplier les exemples, car, à partir d'un certain niveau de raisonnement mathématique, c'est le mode opératoire de cette classe qui est privilégié.

3.2.2. La détermination de l'objectif.

Ici nous nous écartons de la seule considération de l'algorithme de résolution, et par conséquent nous abordons le domaine propre aux comportements individuels. Un examen des types de consigne proposées aux élèves dans les différents exercices aboutit à la classification suivante.

Classe	Type de consigne
0	L'objectif est explicité
1	L'énoncé apporte des précisions sur l'objectif (sans l'indiquer complètement)

Classe	Type de consigne
2	L'énoncé ne précise pas l'objectif, mais l'apprentissage garantit son obtention
3	L'objectif n'est pas précisé et son obtention n'est pas garantie par l'apprentissage.

Voici quelques exemples d'illustration.

Classe 0. Ce sont les questions du type "vérifier que...", "démontrer que ..."; "prouver que ...", "faire .... on obtient tel résultat" dans lesquelles on indique très exactement le but à atteindre.

Classe 1. Elle comporte des questions qui commencent parfois comme les précédentes, mais sans livrer complètement le résultat. Ainsi :
"Démontrer que la composée de deux symétries centrales est une translation".
Une consigne de classe 0, pour cet énoncé, préciserait le vecteur de translation.
Mais cette classe comporte aussi des énoncés différemment libellés. Ainsi :
"Exprimer avec deux points seulement le vecteur $\vec{DC} - \vec{BA} - (\vec{AC} + \vec{AB})$."
Et les questions à choix multiples sont également à placer dans cette classe, puisque la réponse correcte n'est pas la seule indiquée.

Dans les classes 2 et 3, l'énoncé n'apporte pas sur le but à atteindre de précisions autres que celles qui correspondent à l'apprentissage. Et, à partit d'un certain niveau, celui-ci propose des méthodes qui ne conduisent pas à coup sûr à une solution pour un type donné de questions. C'est par exemple le cas pour l'intégration à l'aide des fonctions élémentaires.

Classe 2. L'énoncé renvoie à une méthode ou à un éventail de méthodes qui permet d'aboutir à coup sûr, quelles que soient les données de départ.

Classe 3. L'énoncé renvoie à une méthode ou à un éventail de méthodes qui ne permet d'aboutir que pour certaines données. Nous avons cité l'intégration à l'aide des fonctions élémentaires, un autre exemple typique, où le niveau intervient, est la "levée" d'une indétermination. Tant que l'apprentissage des développements limités n'est pas acquis, une telle question ne peut pas être résolue dans un certain nombre de cas.

La formulation de la consigne n'apparaît pas (du moins directement) dans l'algorithme de résolution. Il est intéressant de préciser la simple impression que la détermination de l'objectif joue un rôle dans l'obtention de certains comportements de réponse. Dans sa thèse de 3e cycle, Catherine BLOCH ([7]) a effectué une recherche dans cette direction. Il s'agissait d'un domaine bien différent de celui envisagé ici, puisque le travail porte sur les comportements heuristiques, repérés sur le test de Rorschach présenté avec des variations de consigne. Nous retiendrons seulement pour notre part que la détermination de l'objectif joue un rôle dans la détermination de la motivation(*) des individus. Ceci pour distinguer les classes 1, 2 et 3, car, dans le cas de la classe 0, il apparaît en outre la possibilité d'une vérification qui pourrait être reportée sur l'algorithme lui-même (arrêt si j'ai obtenu le bon résultat), si toutefois la conduite à tenir devant une contradiction était déterminée.

3.2.3. Etendue du champ.

Dans une enquête au niveau de la classe de 5e (élèves de 12-13 ans), nous avions repéré un seuil entre la bonne utilisation de deux notions (bijection et application) prises chacune séparément et la réussite à des questions les mettant en jeu toutes les deux ([28]). Nous retrouvons l'utilisation effective d'un tel type de résultat par J. PAQUAY-BECKERS (cité par G. de Landsheere ([32], p. 109), dans son "système de génération d'items pour la mathématique nouvelle au début de l'école primaire" : Aussi bien pour les objets isolés que pour les ensembles d'objets, le nombre de propriétés envisagées simultanément (1, 2, ou plus de 2) est un paramètre pris en compte.

Malheureusement, la notion de simultanéïté est discutable au niveau scolaire que nous envisageons (et aux niveaux ultérieurs) et avec les moyens (enquêtes) que nous utilisons. En effet, s'il est facile de voir quelles notions un énoncé propose (verbalement ou symboliquement), et par suite de parler du nombre de notions simultanément présentes dans un énoncé, il faudrait procéder à une étude clinique pour avoir des renseignements sur la simultanéïté lors du déroulement individuel de l'algorithme de résolution.

Ainsi, une étude intéressante serait le repérage des découpages algorithmiques individuels. Il s'agit de noter quels résultats intermédiaires sont écrits par un individu en cours de résolution, et d'examiner les segments d'algorithme délimités par ces résultats. Ensuite, il y a à évaluer l'étendue notionelle correspondant à chacun de ces segments algorithmiques. Le stockage en mémoire, en cours d'exécution, porte bien en effet sur ce champ notionnel. On en verra plus loin quelques exemples (voir deuxième partie), mais je n'ai pas procédé jusqu'à présent à cette observation de manière systématique. J'ai essayé dans les questionnaires proposés aux élèves de me limiter à des questions qui amèneraient à peu d'écritures intermédiaires. Les questionnaires remplis, montrant que tel a été effectivement le cas. Néanmoins, il ne m'est pas possible d'avancer des résultats numériques absolument précis sur ces écritures intermédiaires, car certains élèves n'ont pas respecté la consigne de tout écrire sur les feuilles distribuées et de ne rien effacer (trop d'automatismes ! ...). Un exemple peut néanmoins être cité pour illustrer des différences individuelles. Il s'agit des réponses aux questions de la page A4 (questionnaire trimodal) :

"Calculer la valeur de $y = \text{Sup}\,\{2x - 1\ ;\ 2x + 1\ ;\ - x\} + \text{Sup}\,\{1 - 2x\ ;\ - x\}$ pour $x = \ldots$".

- Certains élèves ont écrit directement leur résultat.
- D'autres ont écrit, à gauche de la case réponse, deux nombres, qu'ils ont ensuite ajoutés.
- D'autres encore ont de plus souligné deux des termes de l'expression donnée, et leurs deux nombres sont alors les valeurs prises par ces deux termes (evidemmen t cette conduite n'aboutit pas toujours au résultat correct).
- Enfin certains ont écrit les valeurs de tous les termes.

Pour ce qui nous intéresse ici, on voit sur un tel exemple qu'il faudrait procéder à des observations systématiques pour repérer le nombre des notions à stocker en mémoire lors de la résolution. Le repérage sur l'énoncé est pour le moment le seul sûr, même s'il est moins significatif que ne le serait un repérage sur la résolution.

3.3. Les perturbations.

3.3.1. Généralités.

Jusqu'ici, les éléments dégagés des énoncés et des algorithmes de résolution sont des paramètres de difficultés, c'est-à-dire qu'ils hiérarchisent la difficulté. Par exemple, il est bien clair qu'une augmentation du nombre de notions à utiliser ne se traduira pas par une diminution de la difficulté. L'étude détaillée des résultats (chapitre 6) apportera quelques précisions sur ce fait.

Certains de ces paramètres, et notamment la détermination de l'objectif, reflètent déjà une différence entre la machine et l'individu. Mais une des caractéristiques de l'être vivant est son autoréorganisation continuelle, se traduisant ici en une tendance à l'organisation de ses perceptions, organisation qui met en jeu l'état initial du sujet. Selon les circonstances, cette tendance facilite la résolution ou augmente la difficulté. Nous sommes donc amenés à considérer, à côté des paramètres pris en compte, des perturbations, susceptibles de jouer sur la difficulté dans les deux sens.

Dans ce chapitre sur l'analyse des tâches, nous sommes amenés à envisager les perturbations dont la présence peut être détectée sur un énoncé ou un algorithme donné (et non lors d'une étude des comportements individuels).
Deux types de perturbations se dégagent qui répondent à ce critère : l'organisation de la perception, le plongement. Nous les détaillons ci-dessous.

3.3.2. L'organisation de la perception.

En géométrie, on connaît le rôle joué par les "bonnes formes". Pour les questions que nous avons envisagées, le phénomène de ce type qui a une importance certaine est l'équilibrage. Un cas particulier simple est la symétrie : Un énoncé demandant d'effectuer un calcul du type $a \times b + c \times d$ donne lieu à moins d'erreurs qu'un calcul du type $a + b \times c$ (l'ordre linéaire étant plus fréquemment suivi dans ce cas). Pierre BUISSON a explicitement vérifié ce fait dans trois enquêtes réalisées à Rouen (cf. [12], [13] et [14].
Nous verrons plus loin, dans l'étude des questionnaires, le rôle joué par ce phénomène. Mais la symétrie n'est qu'un cas particulier, et c'est d'ailleurs pourquoi nous avons parlé d'équilibrage. Un exemple proposé dans les questionnaires étudiés est l'addition de rationnels écrits sous formes de développements décimaux périodiques. On demande d'effectuer la somme de 2, 258 258 258 .... et

a) 0,001 783 783 783 ....

b) 1,79 79 79 ... (il s'agit de deux additions avec retenues)

Dans le premier cas, les deux développements ont des périodes de même longueur. Dans le deuxième cas, il y a déséquilibre.. Nous verrons aux résultats (voir chap 7) qu'il y a une tendance à équilibrer les périodicités dans le second cas, ce qui remet bien entendu la numération de position en cause.

Dans la plus grande facilité de la notion de bijection que de celle d'application (voir l'enquête de 5e - [8]), le phénomène d'équilibrage est susceptible de jouer. Et pourtant, vis à vis du traitement algorithmique, c'est l'application qui est la notion la plus simple. Dans l'enquête de 5e, nos exemples portaient sur du "petit fini" et avaient pour la plupart un caractère visuel, ce qui paraît en limiter la portée.
Mais qui n'est pas surpris lors de la première rencontre d'une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui n'est pas une bijection ?

3.3.3. Le plongement.

Le plongement se rapporte à l'insertion d'un nouvel apprentissage dans l'acquis antérieur : il désigne la tendance individuelle à traiter une nouvelle notion par analogie avec les notions déjà utilisées. Soulignons la différence avec l'intégration piagétienne, laquelle envisage une démarche beaucoup plus complète. D'ailleurs, tant que l'analogie ne lui apparaît pas, le sujet est mal à l'aise vis à vis de la notion nouvelle. Dans les questionnaires envisagés, une mise en évidence de ce phénomène a été tentée, et nous verrons plus loin le résultat (p.).

Dans la pratique pédagogique, on connaît d'ailleurs l'intérêt à expliciter les analogies et les différences entre la nouvelle acquisition et ce qui est déjà assimilé. R. Thom dit que la prise de contact avec un être mathématique se fait en soumettant cet être mathématique à un certain nombre de stimuli connus, pour observer son comportement. G. Glaeser insiste sur le rôle des contre-exemples. Et en effet, pour en revenir à l'intégration piagétienne, celle-ci fait intervenir analogies et différences.

Dans l'analyse des tâches, la prise en compte de l'apprentissage antérieur permet de détecter la réduction ou l'augmentation de difficulté par plongement.

Un cas typique que nous avons traité (et qui a été également envisagé par P. Buisson. [13]) est un calcul qui fait intervenir $(0,3)^2$. On sait que le premier apprentissage numérique porte sur les entiers, pour lesquels $3^2 = 9$. Le plongement induira donc fréquemment en l'absence d'apprentissage spécifique, la réponse $(0,3)^2 = 0,9$, au lieu de 0,09.

Il serait facile (mais je ne l'ai pas fait) d'expérimenter le plongement sur une courte séquence d'items. Ainsi les deux séquences :

1) Calculer $(0,318)^2$ 2) Calculer $(0,31)^2$ 3) Calculer $(0,3)^2$	et	1) Calculer $(1,5)^2$ 2) Calculer 3^2 3) Calculer $(0,3)^2$

pourraient être comparées sur la réussite au dernier item qui leur est commun.

Dans la taxinomie NLSMA (*) , une prise en compte partielle de ce phénomène est faite au niveau intitulé B2 (faits spécifiques ou concepts en interaction - cf. [9] p. 671). Cette prise en compte n'est que partielle, car l'antériorité dans l'apprentissage n'apparaît pas dans le texte. Et pourtant cette antériorité joue dans l'un des exemples donnés par Wilson, à savoir le suivant.

"Si le numérateur et le dénominateur d'une fraction sont multipliés par un même nombre

a. la fraction est diminuée
b. la fraction est augmentée
c. la fraction garde la même valeur
d. le résultat dépend de ce que le nombre est plus grand ou plus petit que 1."

Pour une telle question, l'analyse de la difficulté doit prendre en compte les phénomènes inhérents à la multiplication dans $\mathbb{N}^*$, notamment le fait que, dans $\mathbb{N}^*$, la multiplication par un nombre autre que 1 détermine toujours un changement de valeur.

Dans les questionnaires étudiés plus loin, nous décrirons des observations de ce phénomène de plongement, qui peut réduire ou augmenter la difficulté, comme l'équilibrage.

3.4. Essai d'organisation de la difficulté.

Dans la difficulté, nous avons distingué deux aspects : l'aspect cognitif et l'aspect opératoire. Le tableau suivant en propose un regroupement. Rappelons que nous n'envisageons ici que les exercices du type automatisme.

Aspect cognitif

Paramètre : le niveau NLSMA (note : le niveau D, découverte, est exclu ici).

Perturbation : le plongement.

Aspect opératoire

Paramètres: - le type opératoire (4 niveaux), autrement dit le type topologique de l'algorithme de résolution.

- le mode opératoire (4 niveaux), classant les traitements de données à effectuer.

- le nombre de notions à faire intervenir.

Perturbation : l'équilibrage.

Elément de motivation

Détermination de l'objectif (4 niveaux).

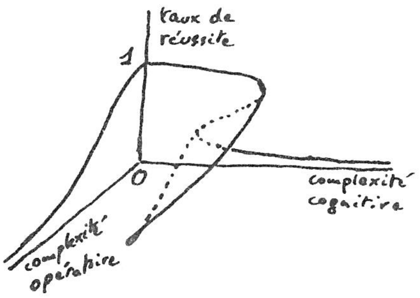
Nous avons déjà parlé de la motivation (*) (p.9). Celle-ci est individuelle et à peu près inaccessible à l'observateur. Il n'est donc pas question de l'apprécier sur un énoncé isolé. Le seul élément à notre disposition concernant ce phénomène est la détermination de l'objectif, ce qui justifie sa place et son étiquette ci-dessus. Pratiquement, ceci impliquera que nous ne prendrons pas en compte cette détermination d'objectif au même titre que les autres éléments, sauf si elle a des répercussions sur la procédure de résolution (et dans ce cas l'analyse de celle-ci la fera indirectement intervenir).

Quelques remarques s'imposent. Le lecteur familier avec un modèle comme celui de Guilford ([25]) pourra s'étonner de n'en retrouver ici que quelques fragments épars (au travers de l'un ou l'autre des paramètres ou perturbations pris en compte). C'est que le modèle de Guilford est essentiellement heuristique. Il en est de même pour d'autres classifications (comme celles des fonctions des exercices dans l'apprentissage ([27]) dont l'objet diffère de celui abordé ici.

D'autre part, nous l'avons dit, cette typologie n'est pas un modèle des comportements individuels de réponse. L'étude des réponses à deux enquêtes envisagée plus loin n'est évidemment pas suffisante pour avancer autre chose qu'une conjecture très schématique, et plus imagée qu'opératoire.

Car le gain en précision nécessite une limitation des questionnaires. Ceux-ci doivent en effet organiser la possibilité d'un nombre suffisant de recoupements.

En l'état actuel des recherches, on ne peut avancer qu'une conjecture peu précise sur un modèle de la "difficulté". J'ai quelque réticence à présenter à ce propos la figure bien connue de la fronce : la compréhension des phénomènes explorés sera, je pense, facilitée par une réflexion sur ce modèle géométrique outrancièrement simpliste. Le modèle est déjà simpliste parce que l'on y porte en abscisse la complexité opératoire et en ordonnée la complexité cognitive. Cette pratique leur assigne à chacune un modèle continu et unidimensionnel, apparamment contradictoire avec l'analyse précédente. Nous y reviendrons, mais après avoir signalé les aspects positifs de cette représentation.



Dans les questionnaires (voir chap. 7), nous verrons notamment des cas de bimodalité qui s'accordent avec l'idée d'une fronce pour laquelle la complexité cognitive serait le facteur normal. Un autre élément intéressant est la position des réponses qui ressort de l'analyse dite globale effectuée dans l'article "Démarches individuelles de réponse en mathématique" ([19]) : le plan factoriel 3 - 4 (voir au chapitre 4 des précisions sur l'analyse factorielle des correspondances) fait apparaître deux directions privilégiées, qui sont orthogonales. L'une est interprétée comme l'axe sémantique et l'autre comme l'axe combinatoire. Or, on voit très bien qu'aux traitements combinatoires est associée la complexité opératoire, et qu'à l'aspect sémantique correspond la complexité cognitive. Mais la prudence est de mise : nous prenons soin, dans l'enquête en question, de signaler que les résultats ne suffisent pas à imposer une telle interprétation comme une certitude ; il n'y a là que des éléments de présomption. La position relative des réussites et des échecs, sur le questionnaire trimodal envisagé (voir deuxième partie) est elle aussi satisfaisante vis à vis d'un tel modèle pour la difficulté. L'analyse des questionnaires (deuxième partie) montrera à quels essais de vérification locale ce modèle nous a conduit, et quels en ont été les résultats.

Mais venons en à la critique. Une objection qui peut être réfutée est celle qui porterait sur le caractère continu ou au contraire discret des complexités cognitive et opératoire. Le fait d'en proposer des typologies discrètes paraît s'opposer à ce caractère. Mais ceci n'est qu'une contradiction apparente : c'est nous qui avons mis en évidence les variations d'exercices susceptibles de conduire à des variations de résultats, autrement dit les seules variations qui se révèlent sensibles parmi toutes les variations possibles, celles-ci pouvant être aussi minces qu'un changment de forme d'une seule lettre.

Nous verrons d'ailleurs un cas (deuxième partie, questionnaire multiniveaux) à propos duquel on pouvait se demander si un effet observé ne résultait pas d'une minime imperfection typographique. Proposer une typologie discrète, c'est privilégier des cas stables et escamoter des cas intermédiaires, pour lesquels peu de chose suffit à faire "pencher la balance". On peut s'en rendre compte en imaginant des transformations continues d'énoncé faisant passer d'une procédure de résolution à une procédure différente.

Exemple 1 : Pour effectuer le produit de 3112 et de 2908, on peut choisir le rôle (multiplicande et multiplicateur) des deux nombres. Demandons à des élèves de l'enseignement primaire, de faire ce calcul sur une feuille polycopiée. Suivant que la question sera disposée ainsi :

Calculer le produit des deux nombres	3112
et	2908

, ou ainsi :

Calculer le produit des deux nombres 3112	
	et 2908

On peut penser que les procédures s'inverseront (dans le second cas, 3112 a de grandes chances d'être recopié sous 2908, et de prendre ainsi le rôle de multiplicateur). Si tel est bien le cas (je n'ai pas réalisé l'expérience), un tel exemple sera concluant, car il est clair que l'on peut passer de la première à la seconde disposition par une modification continue de la typographie.

Exemple 2 : Nous avions remarqué (p. 31) qu'en début d'apprentissage de l'écriture ensembliste, chercher l'intersection de $A = \{a\}$ et $M = \{c\ ;\ a\}$ peut correspondre à deux procédures de types différents, suivant que le premier ensemble considéré est A ou M. Nous pouvons imaginer de passer continûment de l'une à l'autre procédure par la disposition suivante :

Quel est l'ensemble intersection de $A = \{a\}$
et
$M = \{c\ ;\ a\}$

Les deux questions extrêmes seront :

Quel est l'ensemble intersection de $A = \{a\}$ et $M = \{c\ ;\ a\}$?

et :

Quel est l'ensemble intersection de $M = \{c\ ;\ a\}$ et $A = \{a\}$?

On peut imaginer des cas de variations continues autres que la disposition typographique. Ainsi les calculs de discriminant poiur l'équation dans IR : $x^2 = 1 + \lambda x$, disparaîtront des réponses d'élèves pour la valeur $\lambda = 0$.

Ce qui nous est interdit, c'est d'organiser une variation continue de complexité, analogue à celle de la position du point mobile de la "planche à catastrophe" de Zeemann : nous ferons toujours une ponction discrète dans un continuum. Mais n'en est-il pas de même par exemple lorsque l'on recherche, en biologie, l'effet sur des organismes vivants de dosages différents d'un même produit chimique ? L'autre objection, qui, au contraire, ne peut être rejetée, concerne la dimension attribuée aux complexités ; et on sait, malheureusement, que la question de dimension est essentielle en théorie des catastrophes. Dans notre cas, la route risque d'être longue jusqu'à l'obtention d'un modèle expérimental précis, à substituer au modèle conceptuel présenté.

Dans notre examen, nous avons porté notre attention jusqu'ici sur l'espace de contrôle. Or, ces considérations ne suffisent pas, même pour ce modèle purement conceptuel : il faut une dynamique, pour laquelle la variété qui apparaît dans le modèle soit celle des positions d'équilibre. Pour moi, une telle dynamique existe : il s'agit de la motivation(*). Nous en avons déjà parlé à plusieurs reprises(p.9, 26, 43, 48) ; il n'est pas inutile de préciser que la motivation peut aussi bien pousser à répondre du mieux que l'on peut qu'à répondre au hasard ou même de travers, ou encore à copier sur son voisin (il s'agit donc d'un emploi nettement différent de celui que l'on trouve dans l'expression à la mode : "Un tel est (très) motivé"). La prise en compte de la motivation amène à corriger légèrement la typologie proposée : les perturbations que sont le plongement et l'équilibrage devraient être incorporées à la motivation. Si nous les avons tout de même placées l'une avec l'aspect cognitif et l'autre avec l'aspect opératoire, c'est parce qu'elles interviennent plus spécifiquement dans ces secteurs respectifs. Il faudrait y voir des composantes du champ associé à la motivation. Nous nous trouvons ainsi en présence d'une construction satisfaisante pour l'esprit, mais ici encore c'est la confrontation avec l'expérience qui aura force de décision. Et, répétons le, le secteur actuellement expérimenté est encore bien petit.

CHAPITRE 4. METHODOLOGIE DES ENQUETES ET TRAITEMENT STATISTIQUE

Pour traiter du sujet des automatismes définis au chapitre 1, nous avons mis en oeuvre une méthode expérimentale de traitement d'enquêtes. Le présent chapitre explique les principes de cette méthode. Celle-ci a été utilisée dans des recherches sur d'autres sujets, comme nous l'avons indiqué en page 3.

4.1. L'objet d'étude.

Les exercices du type automatisme (c'est-à-dire ceux pour lesquels la résolution peut être considérée comme "programmée" par l'enseignement) ne font pas, a priori, intervenir les phénomènes les plus intéressants pour les didacticiens (la découverte - déjà citée, ou l'élaboration et l'appropriation des concepts mathématiques). Quel est alors leur intérêt ? Il réside essentiellement dans le fait que l'on dispose pour ces questions d'une possibilité de comparaison : on peut confronter les réponses avec l'algorithme de résolution donné dans le curriculum d'enseignement. Ceci conduit à l'hypothèse de travail que les individus ayant suivi ce curriculum opéreront selon des méthodes qui ne s'écarteront pas énormément de l'algorithme considéré, si toutefois elles ne le suivent pas scrupuleusement. Au terme d'un enseignement; cette hypothèse paraît justifiée pour l'emploi de notions qui sont considérées comme importantes ; mais il n'est pas mauvais néanmoins de se livrer de temps à autre à des tests de "discipline" d'emploi des méthodes sur les réponses à un questionnaire.

4.2. Choix de la population.

Une étude de l'utilisation des méthodes algorithmiques usuelles exige de s'intéresser à des questions utilisant des variables et mettant en jeu les diverses caractéristiques qui apparaissent en informatique (affectations, opérations, tests, boucles). Sur l'emploi de tout cet éventail de méthodes, il est difficile d'obtenir des renseignements auprès d'élèves trop jeunes. D'autre part, il est intéressant de s'adresser à un échantillon d'une population qui n'a pas fait l'objet d'une sélection trop sévère (et selon des critères pas toujours bien connus), sous peine de ne pas observer des phénomènes importants, éliminés par cette sélection.

C'est pourquoi, il m'a paru raisonnable de m'adresser, pour cette étude, à des élèves du premier cycle de l'enseignement secondaire (avec choix de classes de types différents). De cette manière, on envisage des échantillons représentatifs d'une très grande majorité des individus d'une tranche d'âge (les jeunes scolarisés). A titre de "ballon d'essai", pour comparaison, la première enquête envisagée ici a aussi été passée par un certain nombre d'élèves du second cycle des lycées (classes de seconde).

Un autre argument peut également jouer en faveur du choix préférentiel de ce niveau du premier cycle secondaire : à l'âge où l'on situe généralement la mise en place des capacités de raisonnement formel, ne pourrait-on pas observer une évolution des possibilités opératoires ? Pour répondre à cette question qui déborde de beaucoup notre sujet, il est nécessaire de se faire une idée de ce que sont ces possibilités et c'est en partie ce qui est entrepris ici.

4.3. Les moyens d'investigation.

Du paragraphe 4.1., retenons l'idée de confrontation entre :

1° Le ou les programme(s) de résolution d'une question

et

2° Les réponses à cette question fournies par des élèves.

Cette idée amène à considérer les moyens d'investigation des deux termes de la confrontation.
Pour les programmes de résolution d'une question, nous disposons de taxinomies, et notamment la classification NLSMA, dont il a été question au chapitre 1, ainsi que des moyens mis à notre disposition par l'informatique, dont nous avons également parlé au chapitre 1.
Pour le second type d'étude (celui de l'interprétation des réponses d'élèves), il a fallu mettre au point une méthode d'investigation spécifique. Ceci, parce que les méthodes existantes ne sont pas adaptées à ces objectifs, que ce soit la méthode clinique (utilisée notamment en heuristique). la méthode expérimentale (telle que celle pratiquée dans certaines recherches de l'INRDP) ou les méthodes d'évaluation.
Notre méthode, mise au point essentiellement par R. Duval et moi-même, pour les recherches menées à l'I.R.E.M. de Strasbourg, consiste à combiner des observations régulières de classes, faites de façon toute "impressioniste", avec des enquêtes écrites s'adressant à des échantillons représentatifs de la population scolaire du Bas-Rhin.

L'observation a pour but de se familiariser avec les réactions des élèves, de ne pas faire perdre de vue dans des propositions de modèles simplistes la complexité des phénomènes en jeu, de ne pas oublier les personnalités en cause dans tout processus d'enseignement. De plus, une telle observation révèle, de temps à autre, des phénomènes précis susceptibles de donner lieu à une exploration ultérieure détaillée. Nous en avons donné quelques exemples (chapitre 2).

Le deuxième aspect de notre méthode consiste en la pratique de questionnaires écrits, qui puissent servir d'outil d'étude au sens scientifique. Ceci suppose la mise en jeu d'un <u>principe variationnel</u>, sans lequel toute explication est soit inaccessible, soit sujette à caution. Pour des raisons déontologiques évidentes, il peut être gênant, si l'on ne prend pas des précautions très strictes (mais du même coup parfois trop limitatives pour l'étude) d'envisager sur les élèves l'application d'un tel principe ! De telles difficultés n'apparaissent pas si c'est au contraire les <u>questions</u> qui sont <u>objet d'expérience</u>. Autrement dit, il s'agira de repérer les différences entre comportements de réponses à des questions plus ou moins voisines (ce que détermine l'analyse de leur programmes de résolution). Sans variation sur les questions, ce qu'il est possible de repérer, c'est en quoi certains individus se distinguent parmi la population envisagée. Avec des variations, on peut aussi repérer en quoi les questions ou les séquences de questions se distinguent les unes des autres. C'est ici une différence importante avec la méthode des tests, telle qu'on la trouve exposée par exemple par Guilford ([25]). La méthode revient à considérer les questions, ou plus exactement les classes de questions de même résolution, comme les <u>points d'un "espace de contrôle"</u>.

Même en se limitant aux questions du type automatisme, on ne peut espérer déterminer que localement et d'une manière comparative la proximité de deux questions.

Considérons un exemple simple : la proximité des quatre questions suivantes (niveau : 5e).

Question A : Comparer 3,2 et 3,17.
Question B : Comparer 3,20 et 3,17.
Question C : Comparer 0,32 et 0,317.
Question D : Comparer 0,320 et 0,317.

On se rend compte que, pour répondre aux questions A et C, il faut (au moins mentalement) égaler les nombres des décimales avant de recourir à l'ordre lexicographique, lequel suffit pour répondre aux questions B et D. On peut donc dire que l'écart entre les questions A et B est plus grand qu'entre les questions A et C, ce dernier étant le même qu'entre B et D.

Admettons que l'on pose les questions A, B et C dans des questionnaires (en les proposant, pour éviter des effets d'induction trop forts, soit à des individus différents - nous parlerons plus loin des questionnaires à plusieurs modalités(*) -, soit aux mêmes individus avec écoulement d'un certain laps de temps). On s'attendra à obtenir moins de différence de résultats entre A et C qu'entre A et B.
La méthode la plus élémentaire d'analyse des réponses est celle de décomptes purement manuels. Ceux-ci permettent de répondre à certaines questions posées d'emblée (par exemple, la cohérence de résultats). Le tri machine constitue une amélioration appréciable pour le traitement des corpus que nous manipulons, dont la taille est au moins 200×60. Pour notre part, nous utilisons un programme de tri mis au point au Centre de Calcul de Strasbourg (programme CATHE - RINE, [20]). Ce programme, spécialement étudié pour les besoins de nos enquêtes, permet d'extraire des histogrammes partiels des individus dont les réponses satisfont aux contraintes que nous choisissons ; ainsi, on peut par exemple obtenir un histogramme des réponses à certaines questions pour les seuls individus qui ont eu un comportement de réponse identique à toutes ces questions. L'application de ce programme de tri peut permettre notamment de résoudre certains problèmes de codage des réponses, en procédant à des regroupements imposés par différents critères qui seront indiqués plus loin. Ensuite, des analyses statistiques, notamment celles décrites dans les deux tomes de l'ouvrage de J.P. Benzécri et collaborateurs ([3]), serviront de support à l'interprétation. La spécificité de l'étude menée ici impose en fait, dans un certain nombre de cas, d'adapter ces méthodes. C'est le propos des paragraphes suivants, qui abordent aussi l'utilisation pratique effective des questionnaires, correspondant aux buts fixés.

4.4. Quelques évidences sur les questionnaires.

L'exploitation de questionnaires correspond forcément à un appauvrissement de situation (avec en contrepartie, si tout se passe bien, un enrichissement de l'intelligibilité). Les étapes de cette perte d'informations sont successivement :

A) Le fait que les élèves ne réagissent qu'aux questions qui leur sont posées, donc à un échantillon de questions.

B) Le fait que le codage ne puisse prendre en compte que leurs réponses écrites et non leurs démarches de réponse (parmi les démarches, seules celles qui ont laissé une trace écrite peuvent être repérées directement).

C) Le fait que le traitement des résultats ne concerne que les numéros de code attribués aux réponses, donc des classes de réponses jugées équivalentes et non les réponses elles-mêmes.

Certes, si l'analyse révèle qu'en cours de route la perte a été trop forte pour permettre l'interprétation, il est possible de procéder à des rectifications à ces différents niveaux. Mais si des rectifications au niveau B sont déjà ennuyeuses, (il faut reprendre la correction), des rectifications au niveau A demandent de reprendre complètement un questionnaire. D'autre part, les conditions matérielles de passation d'un questionnaire, adressé à des élèves dans leur situation scolaire habituelle, limitent sa durée à une heure de classe, ce qui correspond à un maximum, par individu, d'une trentaine de questions dans le domaine opératoire envisagé ici (dans le domaine cognitif, ce maximum pourrait être plus élevé). Cette contrainte est un argument supplémentaire en faveur de questionnaires à plusieurs modalités(*), qui permettent d'agrandir le champ d'investigation.

En tout cas, on ne peut oublier, lors de l'interprétation, l'existence des contraintes qui viennent d'être indiquées, sous peine de généralisations abusives.

4.5. Différence entre répétabilité et signification.

Des théories de Zeeman ([40]) mentionnées par Thom ([37] p.201), nous ne retiendrons dans ce paragraphe qu'une idée non sujette à controverse, et d'ailleurs du domaine courant dans l'expression "s'arrêter à telle réponse" : Fournir une réponse à une question, c'est donner une image de l'obtention d'un certain état (ou mouvement) d'équilibre, après l'"excitation" créée par l'énoncé de la question.

Mais cette constatation banale ne doit pas faire croire du même coup que la réponse à une question donne automatiquement lieu à une forme précise d'interprétation. Supposons que, dans un questionnaire, nous posions la question suivante : "Lancez une pièce de monnaie. Indiquez si vous obtenez pile ou face."
Il est clair que la signification de la réponse vis à vis d'aptitudes individuelles au raisonnement est plus que douteuse. Et pourtant, une telle épreuve, présentée à un nombre suffisant de sujets, aboutit toujours au même résultat global : environ 50 % de "pile" et 50 % de "face".

En l'occurence, nous savons pertinemment que s'il y a cette stabilité globale, il n'y a pas de stabilité individuelle : si la même question (stupide) est répétée deux fois dans le questionnaire, nous serons bien obligés d'en convenir.

Dans une pratique effective de questionnaires, nous nous sommes aperçus que des questions en VRAI - FAUX peuvent déterminer des comportements de ce type (voir aussi Buisson [13]). Plus précisément le comportement d'un élève est souvent, comme le montre l'expérience, celui de "prise de risque" :

- Je sais (ou je crois savoir); alors je réponds ce que je pense
- Je ne sais pas, alors je réponds "au hasard" (j'ai une chance sur deux de tomber juste).

Dans ce dernier cas, il peut même se faire qu'une vérification de stabilité individuelle ne prouve rien : l'élève se souvient que la question lui a déjà été posée ; il se reportera alors à sa première réponse, même si celle-ci a été donnée au hasard.

Ce phénomène de "prise de risque" n'est pas inconnu des personnes qui ont travaillé sur des QCM (questions à choix multiples), dans lesquelles un tri préliminaire amène l'élève à éliminer d'abord certaines réponses comme évidemment fausses, puis à choisir au hasard entre les deux ou trois réponses qui ne lui paraissent pas invraisemblables. Dans un examen utilisant des questions à choix multiples, on tient compte de ce fait en examinant les choix de "mauvaises" réponses, appelées les distracteurs. Si les choix erronés ne se concentrent que sur un seul ou deux distracteurs, on essaie de transformer la question (l'énoncé ou le choix des distracteurs) voir [32], p.98). D'autres moyens peuvent également être envisagés, mais pour notre part, nous préférons étudier la cohérence des réponses à une famille de questions. Par exemple, il est très facile de tester sur un "VRAI-FAUX" l'hypothèse que les réponses incorrectes à une question représentant la moitié des "je ne sais pas", l'autre moitié étant constituée de réponses correctes, mais ceci demande que l'on dispose d'autres questions pour comparer. L'enquête sur les structures numériques évoque ce phénomène ([29] p. 446 et 447).

Autrement dit, avant d'attribuer une signification à une réponse, nous nous demanderons :
"Quelles sont les variations de l'énoncé de la question n'affectant pas cette réponse?"

Il s'agit bien sûr de la réponse d'un individu dans un état donné : variations selon les motivations et variations en cours d'apprentissage ne sont pas ici en question, hormis les variations dues au phénomène de micro-apprentissage sur les questionnaires eux-mêmes. Bien sûr il faut penser à l'identité (répétition de la même question) parmi les variations possibles d'un énoncé, mais ce sont des variations effectives qui permettent de décider de la signification d'une réponse (nous y reviendrons sur des exemples précis).

4.6. Conditions d'élaboration et de passation.

Pour les enquêtes envisagées ici, le déroulement s'est effectué dans des conditions analogues à celles décrites dans [28]. Rappelons les brièvement, en indiquant au passage les quelques aménagements particuliers.
L'enquête multiniveaux a concerné trois classes par niveau scolaire (4 niveaux scolaires : classes de 5e, 4e, 3e et 2e). Dans ce cas, il était nécessaire de fixer la composition de l'échantillon avant tirage au sort : ainsi pour la classe de 2e (première année de l'enseignement du second cycle secondaire), il a été décidé qu'il y aurait une classe de 2e C (lycée classique, section sciences), une classe de 2e A (lycée classique, section lettres) et une classe de lycée technique. Au contraire l'enquête trimodale n'a concerné que la classe de 3e, ce qui autorisait un tirage au sort sans condition préalable sur l'échantillon. L'échantillon obtenu est représentatif des différentes caractéristiques scolaires.

La passation a été pour l'essentiel assurée par moi-même, et dans quelques cas par R. Duval (merci aussi pour cela). Rien à signaler de particulier sur cette passation.

Il y a lieu de remarquer que la phase préparatoire avait été ici un peu plus copieuse que pour d'autres enquêtes. Dans la deuxième partie, on examinera les résultats de questionnaires d'essais. Ceux-ci avaient été fragmentés, pour que certaines rubriques puissent être testées séparément. Dans les questionnaires définitifs, certaines rubriques n'ont pas été retenues, parce que moins en rapport que d'autres avec notre sujet (ainsi j'ai préféré le domaine numérique à des questions sur l'écriture et l'utilisation des ensembles, envisagées dans les préquestionnaires). Mais il y a eu aussi élimination de certaines questions (sélection oblige), qui avaient donné lieu à des résultats suffisamment éloquents aux essais. Nous en reparlerons dans la deuxième partie.

4.7. Les types de questionnaires.

A priori, on dispose de l'éventail de possibilités suivant :

1° Présenter le même questionnaire à des élèves d'un même niveau scolaire ;

2° Présenter le même questionnaire à des élèves de niveaux scolaires différents ;

3° Présenter des questionnaires différents à des élèves d'un même niveau scolaire ;

4° Présenter des questionnaires différents à des élèves de niveaux scolaires différents.

Nous désignerons par : questionnaire simple, un questionnaire du premier type, questionnaire multiniveaux, un questionnaire du second type et questionnaire à plusieurs modalités, un questionnaire du troisième type. Le quatrième type ne pourrait pas permettre d'interpréter des dissemblances, mais seulement des similitudes dans les réponses. Nous ne l'envisagerons pas.
Le travail d'analyse effectué dans la deuxième partie porte sur des questionnaires des types 2 et 3. La passation du questionnaire multiniveaux a précédé d'une année celle du questionnaire à plusieurs modalités. Aujourd'hui, je pense que l'ordre inverse devrait être préféré pour des travaux ultérieurs. En effet la pratique du questionnaire à plusieurs modalités a l'énorme avantage de permettre une critique de la pertinence des questions posées, comme nous l'avons expliqué dans un article de méthodologie ([17]). Rappelons que l'idée essentielle d'utilisation de questionnaires à plusieurs modalités est de repérer les variations de réponses sous l'effet de variations d'énoncés.
Nous insistons sur ce point, en rappelant la distinction, classique depuis Claude Bernard, entre observation et expérimentation : la différence réside précisément dans le fait de provoquer ou non des variations dans le déroulement des phénomènes. L'idée d'un modèle catastrophique (voir p. 49) sous-tend une exigence encore plus stricte : disposer d'un espace de contrôle.

Pour mémoire, nous rappelons les diverses variantes utilisées en évaluation : questions à choix multiples de différentes sortes, questions ouvertes et questions semi-ouvertes. A ces dernières, l'élève produit une réponse de son cru, comme aux questions ouvertes, mais les types de réponse avec leurs éléments-clés sont prévus d'avance.

4.8. Le codage des réponses.

Le principe du codage est de former une partition dans l'ensemble des réponses à chaque question. Par commodité, nous nommerons ici comportements de réponse à une question les classes de la partition. Lors du dépouillement, nous attribuons des numéros, à valeur purement désignative, à ces comportements de réponses. Pour le traitement, certaines classes peuvent être regroupées, si bien que le nombre de comportements de réponse s'en trouve réduit. Et surtout, le codage de traitement est un codage totalement disjonctif; ceci signifie que, si nous avons retenu n comportements de réponse pour une question, le numéro de code attribué au j - ème de ces comportements (ceci suppose que nous leur ayons affecté un ordre), sera 0...010...0, le 1 occupant la j - ème place dans ce numéro à n chiffres et toutes les autres places étant occupées par des 0.

Nous indiquerons plus loin (p. 67) en quoi ce codage est intéressant pour l'analyse. La pratique du codage pour le dépouillement est régie par les deux soucis :

- de conserver au moins une partie de la diversité des réponses obtenues ;
- d'éviter le plus possible que l'attribution d'un numéro de code à une réponse résulte d'une interprétation personnelle du correcteur.

Par rapport au protocole général de codage mis au point par Raymond Duval et moi-même ([17] et [19]), une simplification est possible dans le domaine numérique abordé par les enquêtes étudiées dans ce travail : la netteté et la précision des éléments-clés permettent d'éviter la double correction. (Par exemple, pour une réponse numérique, on peut souvent prendre en compte comme éléments clés les différents résultats fournis par les élèves ; parfois l'addition d'un autre élément-clé est nécessaire, si deux procédures différentes peuvent conduire au même résultat.)

En définitive, les questionnaires envisagés ici ont été soumis au protocole de codage suivant.

<u>Opération 1.</u> Prélèvement d'un échantillon de réponses. Résumé de leur contenu et repérage de la relation "résultats fournis ↔ procédures utilisées".

<u>Opération 2.</u> Détermination des comportements de réponse retenus : regroupement des réponses ayant des contenus sensiblement identiques et caractérisation de ces classes par des éléments-clés (le résultat final, le résultat final et un résultat intermédiaire, un mot - par exemple : "impossible").

<u>Opération 3.</u> Classement des comportements de réponse. Il est intéressant que ce classement fasse intervenir une hiérarchie même partielle (exemple : les comportements de réponses correspondant à l'absence d'un résultat, ceux amenant à un résultat faux, ceux amenant à un résultat correct).

<u>Opération 4.</u> Codage proprement dit du paquet des questionnaires remplis par les élèves.

4.9. Considérations générales sur l'analyse des données.

Pour les questionnaires multiniveaux, on dispose de méthodes d'analyse d'emblée bien adaptées. La plus simple est le test du χ^2, appliqué par exemple pour éprouver l'hypothèse que les aléas de choix d'échantillon ne suffisent pas à expliquer des différences de réponses suivant les niveaux. L'analyse factorielle des correspondances (cf. [5]), sur laquelle nous reviendrons en détail à propos des questionnaires à plusieurs modalités, permet d'envisager simultanément la totalité des réponses ; et une caractéristique "niveau" placée en variable supplémentaire permet d'observer l'influence du niveau scolaire sur les réponses (questionnaire multiniveaux). Dans sa thèse de 3e cycle, pour laquelle nous lui avons fourni les données résultant de trois enquêtes, (dont les deux étudiées également ici), A. Bensaber ([2]) a procédé à cette étude. A ce propos, une anecdote amusante illustre la pertinence de la méthode et son efficacité : A. Bensaber ne savait pas (ou ne savait plus) que l'une des enquêtes concernait des élèves de plusieurs niveaux scolaires, et il a été très surpris de constater l'importance de l'âge des élèves dans leurs résultats ; la corrélation entre l'âge et le niveau scolaire d'un élève est une explication très convaincante mais qu'il n'avait pas, dans un premier temps, la possibilité de fournir (note : le phénomène des redoublements intervenait aussi, puisque les élèves les plus âgés de l'échantillon réussissaient moins bien que leurs cadets d'un ou deux ans). L'analyse a donc parfaitement fonctionné en attirant l'attention sur un phénomène caché au départ au praticien.

L'objectif du statisticien qui pratique l'analyse de données multidimensionnelles est de réduire l'information en minimisant la perte qui accompagne presque fatalement la réduction. Un correcteur qui attribue une note à une copie procède, mais empiriquement, à une réduction analogue : un unique paramètre numérique, la note, est substituée à toute l'information que renferme la copie, et l'on suppose implicitement que c'est ce paramètre qui rend compte au mieux du contenu de la copie (mieux que tout autre paramètre unique comme par exemple le nombre de mots utilisés dans la copie). Le statisticien dispose, lui, d'une méthodologie, et il examinera non seulement parmi les réductions à un seul paramètre laquelle est la meilleure, mais aussi parmi les réductions à deux paramètres, ou davantage, lesquelles perdent le moins de l'information initiale.

D'autre part, l'abondance de l'information initiale n'est nullement un handicap pour lanalyse sur machine (jusqu'à certaine limites toutefois, mais ces limites dépendent du matériel utilisé). Pour l'interprétation, il est alors préférable de disposer de données initiales copieuses, sinon même exhaustives (ce qui paraît utopique sur des individus). Ainsi, A. Bensaber regrette la pauvreté de nos enquêtes en informations sur le milieu naturel des élèves ([2] p. 10). Pour ma part, je préfère attendre que nos études nous permettent de décréter la représentativité d'un échantillon de questions pour incorporer de telles informations dans nos questionnaires. Autrement dit, le questionnaire devrait permettre le repérage des divers stades d'utilisation, pour se rapprocher sur les questions de la norme d'exhaustivité.

Les questionnaires à plusieurs modalités donnent lieu à des tableaux de résultats dans lesquels certaines données sont systématiquement absentes. Reconstituer au mieux ces données, en fonction des résultats présents, et analyser le tableau ainsi formé, telle peut être une étude intéressante en statistique. Dans sa thèse ([2] loc. cit.), A. Bensaber en donne un exemple. Une telle étude poursuit le même objectif que l'analyse d'un tableau complet : on peut dire que les données manquantes y apparaissent comme des accidents auxquels on commence par remédier au mieux. En revanche, ce n'est pas du tout le cas dans le simple enregistrement des résultats obtenus. Pour l'homogénéïté, il faut considérer comme un caractère le "blanc" (en informatique c'est effectivement un caractère alphanumérique), placé pour un individu en regard des questions qui ne lui ont pas été posées. Cette pratique informatique courante, qui se traduit par le fait de compter comme un comportement de réponse l'absence de réponse à une question qui ne vous a pas été posée, s'accompagne d'une transformation radicale de l'objectif de l'analyse. Il ne s'agira plus du tout de réduire l'information, mais de repérer des variations : dans un tableau mis sous forme disjonctive complète, on voit à l'oeil nu (voir annexe 3) les modalités apparaître, pour peu que les individus aient été regroupés par modalités, à cause de la présence de colonnes de 1 qui s'interrompent à l'endroit d'un changement de modalité et laissent la place à des colonnes de 0 ; l'analyse repérera si ces différences évidentes ne sont pas accompagnées de tendances à donner certaines réponses plutôt que d'autres. On dira que certaines réponses peuvent être attirées par l' une ou l'autre modalité, ou au contraire repoussées.

Le premier enregistrement simple des résultats d'un questionnaire à plusieurs modalités m'a été remis par A. Bensaber ; à l'époque nous ne disposions pas à Strasbourg des programmes d'analyse sur machine. A priori, il s'agissait d'une analyse d'essai rapide : le décodage des numéros de dépouillement pour les transformer en groupe de 0 et d'un 1 peut être programmé facilement si l'on ne désire traiter que les comportements "réussite" et "échec" , le programme de décodage pourrait à cette occasion être vérifié et l'on pouvait savoir si certaines tendances n'apparaîtraient pas, qu'il serait ultérieurement intéressant d'explorer davantage. En fait, c'est cette analyse qui retint mon attention. Depuis lors, j'en ai étudié la théorie, que l'on trouvera ci-dessous, et j'ai moi-même soumis un certain nombre de résultats d'enquêtes à ce type d'analyse. On en trouvera notamment plusieurs exemples dans l'article de R. Duval et moi-même sur une enquête au niveau de la classe de 5e ([19]).
Avant d'aborder l'exposé technique, je crois utile de répéter que la méthode d'analyse est la méthode usuelle, mais que c'est l'interprétation, c'est-à-dire la manière de considérer les résultats issus de l'analyse, qui diffère profondément de la pratique courante. Rappelons notre objectif sur un exemple volontai-

rement simpliste : supposons qu'un échantillon d'individus ait hésité sur la question : "Quelle était la couleur du cheval blanc d'Henri IV ?" Nous souhaitons savoir s'ils auraient encore hésité si l'on avait remplacé blanc par pie, ou Henri IV par Nabuchodonosor, ou cheval par tricycle, et sinon quelles attitudes se seraient substituées à l'hésitation initiale.

4.10. Rappel d'analyse factorielle des correspondances.

4.10.1. Cas général des tableaux d'occurences.

Le lecteur désireux de s'informer plus à fond pourra se reporter à l'ouvrage de J.P. Benzécri ([3]), volumineux mais très riche en exemples, ou à l'ouvrage synthétique de P. Bertier et J.M. Bouroche ([5]).

Nous allons d'abord nous intéresser au cas des tableaux d'occurences : étant donnés deux ensembles finis I et J, nous supposons observé sur $I \times J$ le nombre d'apparitions de l'évènement (i, j), rencontre de $i \in I$ et $j \in J$, ceci pour tous les couples possibles (i, j).
On peut considérer deux phases de principe dans l'analyse.

1° Transformation : Le tableau des données est mis sous la forme non d'une matrice mais d'une famille de points pondérés (ou : massifs) d'un espace euclidien. Le tableau est ainsi "vu" comme un corps mécanique solide.

2° Traitement : L'analyse proprement dite consiste à indiquer les directions principales "d'allongement" de ce corps mécanique, c'est-à-dire, plus précisément, ses axes principaux d'inerties pris par ordre décroissant d'importance. Nous allons quelque peu détailler.

On note usuellement $k(i, j)$ le nombre d'occurences de l'évènement (i, j). Des occurences ainsi obtenues, on déduit le tableau dit des profils des éléments i sur J, dans lequel $a_{ij} = \dfrac{k(i,j)}{\sum_{j' \in J} k(i,j')}$. Dans ce tableau, chaque élément $i \in I$ peut être considéré comme un vecteur de l'espace $\mathbb{R}^J$ (nous ne distinguons pas dans les notations l'ensemble J et son nombre d'éléments): le vecteur de composantes $(a_{ij}, j \in J)$. Réciproquement, chaque élément $j \in J$ apparaît comme un vecteur de $\mathbb{R}^I$ dans le tableau des profils des éléments j sur I.

Si l'on munit $\mathbb{R}^J$ d'une norme euclidienne et si l'on affecte une masse à chaque élément de I, nous pouvons percevoir nos observations non plus comme un tableau de données, mais comme un corps mécanique. Vu sa constitution, ce corps est habituellement désigné par l'expression "nuage de points" : un nuage de points n'est donc rien d'autre qu'une famille de points massifs dans un espace euclidien. La masse m_i attribuée à un point, que nous continuerons à désigner par i, est pratiquement imposée par les observations, compte tenu d'impératifs statistiques évidents :

$$m_i = \frac{\sum_{j \in J} k(i,j)}{\sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} k(i',j)}$$ (le dénominateur est le nombre total d'observations).

Pour la métrique dont $\mathbb{R}^J$ peut être muni, il existe plusieurs possibilités de choix qui distinguent les méthodes d'analyse. Dans l'analyse dite en composantes principales, l'espace $\mathbb{R}^J$ est muni d'une métrique a priori. Au contraire, la métrique de l'analyse des correspondances est issue des données, et s'intitule métrique du χ^2 de centre f_J (profil moyen observé). Grâce à cette métrique il y a symétrie entre I et J : on aurait aussi bien pu considérer le nuage de points associé au tableau des profils des éléments j sur I.
Pour simplifier, nous ne donnerons la définition de cette métrique que dans le cas particulier qui nous intéresse (voir 4.10.2). Pour le cas général, il est surtout intéressant de signaler deux conséquences de l'utilisation de la métrique du χ^2.
La première est le <u>principe d'équivalence distributionnelle</u>, dont nous empruntons la formulation à J.P. Benzécri ([3], t.2, p.152) : "Si deux éléments j_1 et j_2 ont les mêmes fréquences conditionnelles d'association avec tous les éléments i de I, i.e. si $f_I^{j_1} = f_I^{j_2}$, on ne change rien à l'analyse en substituant à j_1 et j_2 un unique élément j_o, la correspondance sur $I \times J_o = I \times [(J - \{j_1, j_2\}) \cup \{j_o\}]$ étant définie par $k(i, j_o) = k(i,j_1) + k(i,j_2)$."

Avant d'indiquer la deuxième conséquence, il est indispensable de parler de l'analyse proprement dite. En effet, nous n'avons <u>rien fait</u> en passant du tableau des observations au nuage de points : de l'un à l'autre il n'y a qu'une différence de mode de représentation. Ce que fournit l'analyse, ce sont les axes principaux d'inertie de nuage, encore appelés <u>les axes factoriels</u>, dans l'ordre décroissant de leur contribution au moment d'inertie par rapport à G, Centre de gravité du nuage. Des exemples théoriques triviaux peuvent aider la compréhension. Le plus simple est celui où le tableau observé aurait des colonnes toutes proportionnelles à la première, supposée dépourvue de 0. Dans ce cas, le tableau des profils des i a des lignes toutes identiques, donc le nuage se réduit au seul point G. Par nullité du moment d'inertie, l'analyse n'indique aucun axe (un test d'arrêt est prévu dans le programme). L'exemple qui vient ensuite à l'idée est celui d'un tableau d'observations dont les colonnes sont combinaisons linéaires de deux d'entre elles,

elles-même indépendantes (et on suppose qu'aucun $i \in I$ ne conduit à une ligne identiquement nulle). Dans ce cas, le nuage est constitué de points alignés sur une droite D. Cette droite apparaît à l'analyse (ici l'analyse produit donc un axe), puis l'analyse s'arrête car, en projection sur toute perpendiculaire à D passant par G, le nuage est réduit au seul point G, d'où nullité du moment d'inertie par rapport à G. Le lecteur peut facilement imaginer l'analyse dans les cas où le nuage est contenu dans un plan de dimension 2, 3, ...
L'analyse réelle recherche la meilleure approximation du nuage observé par ces cas théoriques successifs. Ce que l'on appelle valeur propre λ_α associée à un axe (c'est effectivement une valeur propre d'une matrice qui apparaît dans l'analyse) est le moment d'inertie par rapport à G du nuage projeté sur l'axe (avec conservation des masses : le projeté d'un point a même masse que ce point). On démontre que λ_α est toujours comprise entre 0 et 1.

La deuxième conséquence importante du choix de la métrique χ^2 est le principe barycentrique. Ce principe autorise la représentation simultanée des nuages de points, associés au tableau $I \times J$, représentant respectivement les profils des $i \in I$ et les profils des $j \in J$. Comme nous avons considéré jusqu'ici le nuage des profils des $i \in I$, nous allons énoncer le principe barycentrique en indiquant comment construire, à partir de ce nuage, le nuage des profils des $j \in J$.

Nous supposons obtenus les axes factoriels du nuage des i. Considérons un élément fixé j de J. Désignons par $F_\alpha(i)$ la projection du point i sur l'axe factoriel de numéro α, et affectons $F_\alpha(i)$ de la masse $k(i,j)$. Nous obtenons, en procédant ainsi pour tout $i \in I$, un nuage de points alignés sur l'axe numéro α ; soit $g_\alpha(j)$ le centre de gravité de ce nuage. Faisons subir à $g_\alpha(j)$ l'homothétie vectorielle de rapport $1/\sqrt{\lambda_\alpha}$; notons $G_\alpha(j)$ son transformé. Alors $G_\alpha(j)$ n'est autre que la projection, sur l'axe factoriel numéro α, du point j du nuage des profils des $j \in J$.

En considérant l'espace engendré par tous les axes factoriels, on aboutit bien ainsi à une construction des points du nuage des j. Il s'en faut d'une transformation linéaire, de valeur propre $\sqrt{\lambda_\alpha}$ dans la direction de l'axe numéro α, pour qu'il y ait une correspondance barycentrique parfaite entre les deux nuages. Un argument évident de convexité montre d'ailleurs l'impossibilité d'une parfaite correspondance barycentrique (voir [3], t.2, p.41).

4.10.2. Cas particulier des tableaux correspondant à un codage disjonctif total.

Dans le paragraphe 4.8. (p.61), nous avons vu ce qu'est le codage disjonctif total des réponses à une question, à savoir un n-uple composé de 0 et d'un unique 1 dont la place détermine le comportement de réponse d'un individu. Notre ensemble I sera celui des individus, et l'ensemble J celui des comportements de réponse. Aux occurences $k(i,j)$ sont substitués des nombres qui n'ont que les deux valeurs possibles 0 ou 1. Et de plus, pour tout $i \in I$, la somme $\sum_{j\in J} k(i,j)$ est égale au nombre de questions du questionnaire. Par suite, à une constante près, le tableau des profils des i sur J est tout simplement le tableau des données.

Et dans ce cas particulier la métrique du χ^2 est définie comme suit, à une homothétie près : soit $(e_j)_{j\in J}$ la base canonique de $\mathbb{R}^J$; on décrète orthonormée la base $(\sqrt{k(.,j)}\ e_j)\ j \in J$, avec $k(.,j) = \sum_{i\in I} k(i,j)$.

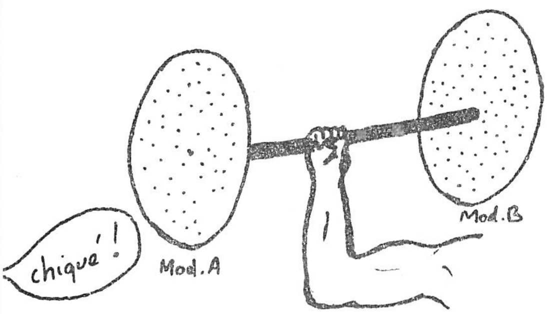
(Remarque : $k(.,j)$ est tout simplement le nombre d'individus ayant produit le comportement j).

4.11. L'analyse des tableaux issus de questionnaires à deux modalités.

Nous supposons appliqués aux questionnaires à plusieurs modalités des codages totalement disjonctifs ; de la sorte, le cas précédemment envisagé s'applique ici. Dans la pratique, les questionnaires les plus intéressants sont ceux à trois modalités, pour des raisons que nous verrons plus loin. Mais pour simplifier, il est préférable d'étudier d'abord les résultats issus des questionnaires à deux modalités seulement.

4.11.1. L'axe des modalités et son utilisation dans l'analyse.

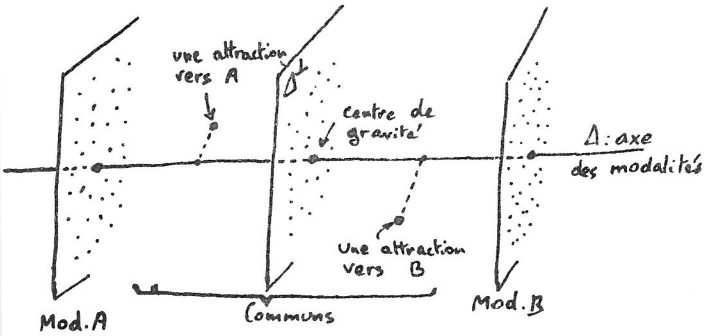
Nous montrerons plus loin que nous sommes théoriquement satisfaits d'un questionnaire bimodal lorsque le nuage des individus est en forme d'haltères. Ceci signifie qu'il existe un axe, dit axe des modalités, sur lequel les individus ayant reçu la modalité A du questionnaire se projettent orthogonalement tous sensiblement au même point, et de même pour les individus ayant reçu la modalité B : l'axe des modalités est donc la "barre d'haltères", illustrée par la figure.



Nuage en forme d'haltères
(nuage des individus)

Les individus sont sensiblement situés dans l'un ou l'autre de deux plans (de dimension en général supérieure à 2) orthogonaux à l'axe des modalités ; on pourrait dire qu'ils occupent l'un ou l'autre des deux "disques d'haltères".

A supposer que le nuage des individus ait la forme souhaitée, nous nous intéresserons ensuite, dans la pratique, au nuage des comportements de réponse, véritable objet de l'étude.



Nuage des comportements de réponse, avec présence d'une attraction vers A et d'une attraction vers B.

Les comportements de réponse aux questions spécifiques de l'une quelconque des deux modalités sont automatiquement situés dans l'un ou l'autre des deux plans orthogonaux Δ , l'axe des modalités. Notre intérêt se portera donc surtout sur les comportements de réponse en principe communs aux deux modalités. Si la répartition d'un de ces comportements communs est équilibrée entre les deux modalités, alors ce comportement est situé dans un plan passant par le centre de gravité et orthogonal à Δ (voir la figure).

Au contraire, un comportement qui aura été adopté plutôt par les individus de la modalité A que par ceux de la modalité B sera attiré par la modalité A : sa projection orthogonale sur Δ se placera entre le centre de gravité et le point spécifique de la modalité A. De même un comportement en principe commun pourra avoir été attiré vers B. Tout ceci résulte du principe barycentrique (p.64), comme nous le verrons plus en détail ci-dessous. De cette approche préliminaire a été dégagé l'objectif qui sera en premier chef (après vérification de la bonne forme du nuage des individus) celui des analyses effectives : repérer les attractions, vers l'une ou l'autre des modalités, des comportements de réponse en principe communs. Ce n'est donc pas le fait banal d'obtenir un axe de modalités qui présente un intérêt, mais c'est l'étude des coordonnées selon cet axe :

- coordonnées individuelles pour vérification ,
- coordonnées des comportements de réponse pour repérage.

Ainsi l'analyse nous offre-t-elle un instrument comparable à un cadran muni d'une aiguille susceptible d'être déviée de part et d'autre de sa position d'équilibre, le "zéro" du cadran.

Plus loin, nous étudierons le cas des questionnaires trimodaux (à trois modalités) : le principe sera le même, mais le "cadran" sera un peu plus compliqué, et en même temps plus riche en possibilités. Nous parlerons aussi de l'étude des axes factoriels autres que ceux des modalités. Mais auparavant, nous allons étayer les affirmations précédentes par des considérations théoriques.

4.11.2. Etude d'un tableau trivial.

Considérons le cas où l'on ne prend en compte, comme comportements de réponse aux questions, que réussite ou échec (tout ou rien). Ainsi, une question commune aux deux modalités du questionnaire donne lieu pour chaque individu à l'attribution de l'un ou l'autre des deux numéros :

10 (réussite) ou 01 (échec).

Et une question spécifique à l'une quelconque des deux modalités donne lieu pour chaque individu à l'attribution de l'un des trois numéros :

100 (réussite) , 010 (échec) ou 001 (question non posée).

Le cas trivial pour l'analyse est celui où tous les individus interrogés auraient eu les mêmes réussites (et donc aussi les mêmes échecs). Supposons pour fixer les idées qu'un questionnaire bimodal ait donné lieu à une réussite complète (j'ai trouvé cette hypothèse plus sympathique que celle d'un échec complet...). Moyennant un réarrangement éventuel de l'ordre des questions, le tableau des résultats est alors le suivant (dans ce tableau, les traits verticaux ne sont tracés que pour délimiter visuellement les questions).

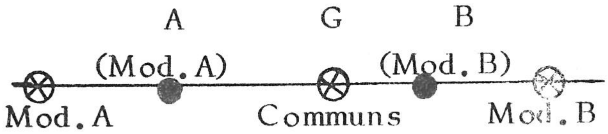
	100	...	100	001	...	001	10	...	10
	.		.	.		.	.		.
Mod. A	.		.	.		.	.		.
	.		.	.		.	.		.
I	100	...	100	001	...	001	10	...	10
(les individus)	001	...	001	100	...	100	10	...	10
	.		.	.		.	.		.
	.		.	.		.	.		.
Mod. B	.		.	.		.	.		.
	001	...	001	100	...	100	10	...	10
	Modalité A			Modalité B			Communs		

J (les comportements de réponse)

Bien que dans un tel cas, le programme machine éjecte les colonnes identiquement nulles (ceci est nécessaire pour déterminer le nuage des profils des $j \in J$ sur I), nous pouvons considérer que le nuage des individus sera placé dans $\mathbb{R}^J$. Cette manière de voir permettra d'envisager des changements de valeurs dans ce tableau, c'est-à-dire des placements de O et des 1 différents de ceux du "tableau trivial".

Le nuage des individus est, dans le cas du tableau trivial, réduit à deux points (il n'y a en effet que deux profils individuels différents). Ces deux points auront pour masses respectives (à un coefficient multiplicatif près) les nombres d'individus de chacune des deux modalités. Nous pouvons déduire du principe barycentrique (p. 67) la situation des comportements de réponses effectivement obtenus : ils sont situés sur la droite joignant les deux points A et B représentant les individus ; les comportements communs se placent au centre de gravité G du nuage (réduit à deux points) des individus, et les comportements spécifiques se déduisent de A et B par l'homothétie de centre G et de rapport $1/\sqrt{\frac{n_1}{N} GA^2 + \frac{n_2}{N} GB^2}$,

avec n_1 : nombre d'individus de la modalité A,
n_2 : " " " " B,
$N = n_1 + n_2$



Légende : ● individus
⊗ comportement de réponse

La distance des deux points A et B est exactement donnée par la formule que nous établirons plus loin (p.70) (et qui correspond à ce qui est indiqué en 4.10.2., p65) :

$$AB^2 = \frac{N}{P} \sum_j \frac{(k(1,j) - k(N,j))^2}{\sum_i (k(i,j))} \quad . \quad (k(i,j) : \text{nombre de place } (i,j) \text{ dans le tableau})$$

En désignant par p_1 le nombre de questions spécifiques à la modalité 1,
p_2 " " " " " 2,
p " " " communes aux deux modalités,
$P = p_1 + p_2 + p$,

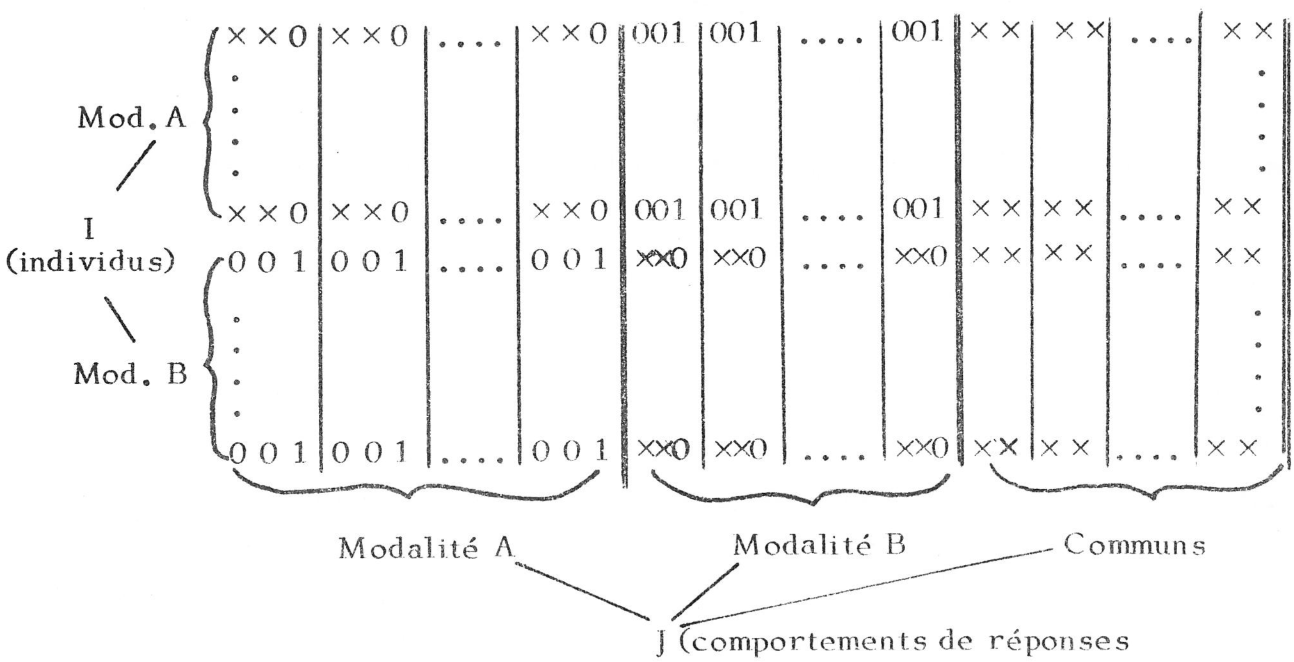
on obtient $AB^2 = \frac{N}{P} (p_1 + p_2) (\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})$.

En particulier, si les deux modalités sont équilibrées, (i.e. $n_1 = n_2$), il vient :
$AB^2 = \frac{4(p_1 + p_2)}{P}$ et G est le milieu de AB.

Si maintenant on fait l'hypothèse que le tableau des données est modifié, en ce qu'une question commune donne lieu à une réussite pour tous les individus d'une modalité et à un échec pour tous les individus de la seconde modalité, alors les comportements sur cette question commune seront pris en compte par l'analyse comme des comportements spécifiques (ce qu'ils sont effectivement). C'est-à-dire qu'ils seront placés aux mêmes points que les comportements de réponse aux questions spécifiques. De plus $(p_1 + p_2)$ augmentera alors d'une unité, ce qui affectera à AB une distance plus grande que la distance issue du tableau initial. Cette modification extrême des réponses à une question donne une idée de modifications moindres qui sont le cas général.

4.11.3. Nuage des individus : étude du cas général simplifié.

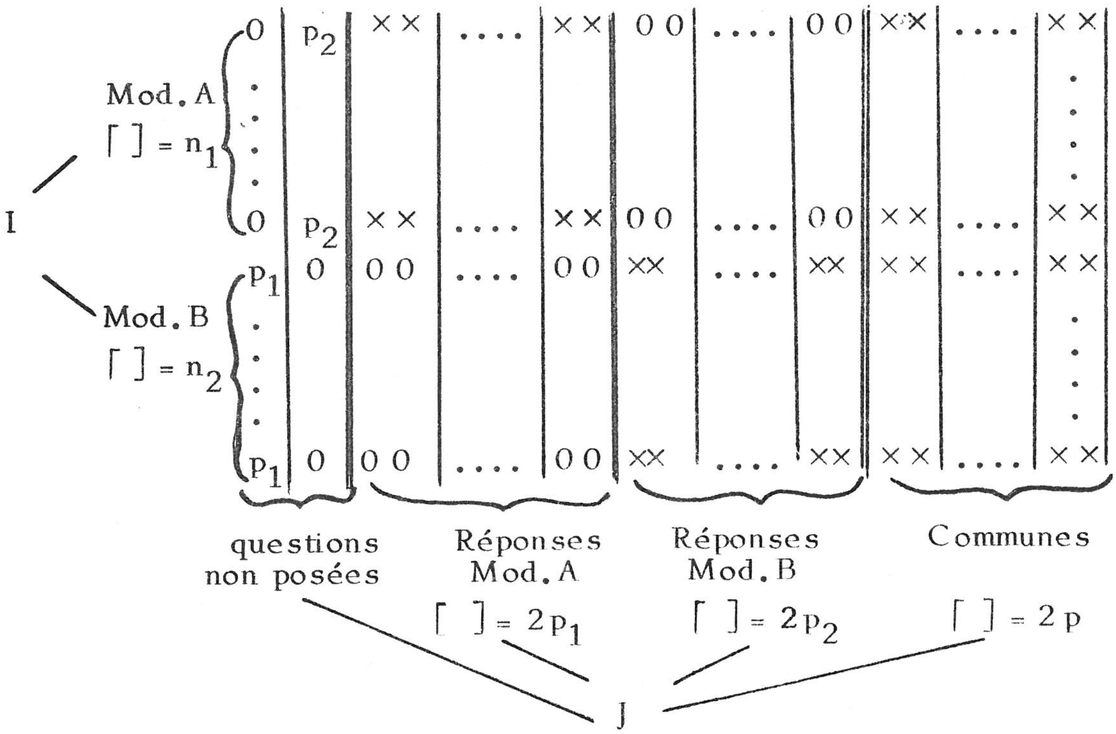
Comme précédemment, nous supposons les réponses codées en seulement deux classes : réussite ou échec. Ce codage simplifié conduit à un tableau de données de la forme suivante, où, de deux croix placées pour un individu dans la même question, l'une vaut 0 et l'autre 1.



Nous conservons les notations du cas précédent pour les nombres concernant les individus ou les questions.

Pour chaque individu, le total marginal est P, puisque chaque question lui donne lieu à l'attribution d'un unique 1 et qu'il y a P questions.

Le tableau comporte deux groupes de colonnes de profils identiques : celles dont le numéro est de la forme $3k$, avec k entier, $k \leq p_1 + p_2$. L'analyse des correspondances de ce tableau revient donc, d'après le principe d'équivalence distributionnelle (p. 63) à l'analyse du tableau réduit ci-dessous.



Pour la métrique du χ^2 de centre f_J on obtient la distance entre deux individus (profils) à partir de l'égalité

$$\| f_J^i - f_J^{i'} \|^2 = \sum_j \left(\frac{f_{ij}}{f_i} - \frac{f_{i'j}}{f_{i'}} \right)^2 / f_j ,$$

où les notations ont la signification suivante :

$f_{ij} = \dfrac{k(i,j)}{NP}$, $k(i,j)$ étant le nombre qui figure à l'intersection de la ligne i et de la colonne j,

$$f_i = \sum_j f_{ij} = \sum_j \frac{k(i,j)}{NP} = \frac{1}{N} , \quad \text{et} \quad f_j = \sum_i f_{ij} = \frac{1}{NP} \sum k(i,j) = \frac{1}{NP} k(.,j).$$

Il en résulte :

$$\| f_J^i - f_J^{i'} \|^2 = \frac{1}{P^2} \sum_j \frac{(k(i,j) - k(i',j))^2}{f_j} = \frac{N}{P} \sum_j \frac{(k(i,j) - k(i',j))^2}{k(.,j)} .$$

Le total marginal est connu pour les deux premières colonnes :

$$k(.,1) = n_2 p_1 \qquad \text{et} \qquad k(.,2) = n_1 p_2 \;.$$

La somme se décompose en :

$$\|f_J^i - f_J^{i'}\|^2 = \frac{N}{P}\left[\frac{(k(i,1) - k(i',1))^2}{n_2 P_1} + \frac{(k(i,2) - k(i',2))^2}{n_1 P_2} + \sum_{j=3}^{2+2p_1} \frac{(k(i,j) - k(i',j))^2}{k(.,j)} + \sum_{J=3+2p_1}^{2+2p_1+2p_2} \frac{(k(i,j) - k(i',j))^2}{k(.,j)} + \sum_{j=3+2p_1+2p_2}^{2+2p_1+2p_i+2p} \frac{(k(i,j) - k(i',j))^2}{k(.,j)}\right]$$

Dans cette décomposition, la valeur des deux premiers termes ne dépend que de l'appartenance des individus à l'une ou l'autre des modalités.
Cette attribution de modalité joue beaucoup dans les deux termes suivants, puisque l'un des deux termes $(k(i,j) - k(i',j))^2$ correspondant à une même question est forcément non nul lorsque i et i' désignent des individus de modalités différentes.
Par contre, le dernier terme n'est pas, lui, tributaire des modalités.

- Cas de deux individus de deux modalités différentes :

  on obtient, si $i \leq n_1$ et $i' > n_1$:

$$\|f_J^i - f_J^{i'}\|^2 = \frac{N}{P}\left[\frac{p_1^2}{n_2 p_1} + \frac{p_2^2}{n_1 p_2} + \sum_{j=1}^{p_1} \frac{(k(i,2j+1) - k(i',2j+1))^2}{k(.,2j+1)} + \frac{(k(i,2j+2) - k(i',2j+2))^2}{k(.,2j+2)} + \sum_{j=p_1+1}^{p_1+p_2}\left(\frac{(k(i,2j+1) - k(i',2j+1))^2}{k(.,2j+1)} + \frac{(k(i,2j+2) - k(i',2j+2))^2}{k(.,2j+2)}\right) + \sum_{j=3+2p_1+2p_2}^{2+2p_1+2p_2+2p} \frac{(k(i,j) - k(i',j))^2}{k(.,j)}\right]$$