

$$\text{Modalité A (70 élèves)} \begin{cases} \text{Axe 1} & 1.0123 \leq x_A \leq 1.1152 \\ \text{Axe 2} & -.3066 \leq y_A \leq -.2068 \end{cases}$$

$$\text{Modalité B (70 élèves)} \begin{cases} \text{Axe 1} & -.8813 \leq x_B \leq -.7888 \\ \text{Axe 2} & -.6592 \leq y_B \leq -.4875 \end{cases}$$

$$\text{Modalité C (72 élèves)} \begin{cases} \text{Axe 1} & -.2909 \leq x_C \leq -.2114 \\ \text{Axe 2} & .6809 \leq y_C \leq .8833 \end{cases}$$

La position des individus est donc satisfaisante, et ceci d'autant plus que, si l'on supprime de chaque modalité les quatre individus les moins bien placés, les encadrements se resserrent très nettement, comme le montrent les valeurs ci-dessous, à comparer avec les précédentes.

$$\text{Modalité A privée des quatre individus extrêmes} \begin{cases} 1.0452 \leq x_A \leq 1.1152 \\ -.2789 \leq y_A \leq -.2319 \end{cases}$$

$$\text{Modalité B privée des quatre individus extrêmes} \begin{cases} -.8813 \leq x_B \leq -.7901 \\ -.6415 \leq y_B \leq -.5249 \end{cases}$$

$$\text{Modalité C privée des quatre individus extrêmes} \begin{cases} -.2879 \leq x_C \leq -.2168 \\ .7383 \leq y_C \leq .8613. \end{cases}$$

L'excellent groupement des individus est donc manifeste. Les points moyens sont :

$$\begin{cases} X_A = 1.0775 \\ Y_A = -.2528 \end{cases} \quad \begin{cases} X_B = -.8265 \\ Y_B = -.5722 \end{cases} \quad \begin{cases} X_C = -.2440 \\ Y_C = .8021. \end{cases}$$

Et on obtient pour position des réponses dans le plan 1-2 les coordonnées suivantes :

$$\text{Réponses spécifiques à la modalité A} \begin{cases} \xi_A = 1.3581 \\ \eta_A = -.4281 \end{cases}$$

$$\text{Réponses spécifiques à la modalité B} \begin{cases} \xi_B = -1.0417 \\ \eta_B = -.9690 \end{cases}$$

$$\text{Réponses spécifiques à la modalité C} \begin{cases} \xi_C = -.3075 \\ \eta_C = 1.3583. \end{cases}$$

A un changement d'orientation près de l'axe 2, le triangle des modalités est sensiblement placé comme dans l'analyse précédente. Nous allons maintenant envisager les déviations de réponses repérées dans ce plan.

a) Déviations sur la question commune aux trois modalités.

La question sur l'inverse de $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ a été traitée ici comme commune aux trois modalités. Compte-tenu de l'analyse précédente, il était évident que la réussite à cette question (RINV) soit attirée très nettement par la modalité B. C'est effectivement ce qui se passe : RINV a pour coordonnées $(-.7965 ; -.6953)$ (comparer avec ξ_B et η_B ci-dessus). L'interprétation évidente fait de la présence de cette déviation uniquement un élément de vérification de l'analyse.

b) Déviations de réponses CA.

Par rapport à l'analyse précédente, les items 1 et 6 de la question "calculs" ont été pris en compte. Et de plus, les réponses à certains items ont donné lieu à trois comportements de réponse analysés. Nous voyons ainsi qu'à l'item 7 (CSE), la déviation enregistrée dans la première analyse ne joue pas sur les erreurs de calcul, équilibrées entre A et C. C'est l'échec ACSE qui est attiré par la modalité A ; cet échec est le fait de 19 élèves et l'analyse selon l'axe 3 le situera comme un échec nettement plus significatif que l'erreur de calcul CCSE qui concerne 39 élèves.

Très voisin, dans le plan 1-2, de ACSE se trouve CCC (erreur de calcul à l'item 5, concernant 19 élèves) que l'analyse ultérieure révèle comme un échec moyennement significatif. Au contraire, l'erreur de calcul à l'item 6 (CCSI, concernant 9 élèves) est attirée par la modalité C et apparaît à l'analyse ultérieure comme un échec très significatif. Les deux erreurs relèvent donc de phénomènes différents : pour la seconde, le petit nombre d'élèves concernés ne permet guère de se prononcer sur la déviation, mais il s'agit en tout cas d'une "véritable" erreur (défaut sur la règle des signes dans la multiplication) ; la première apparaît plutôt comme une confusion assez explicable : le prononcé de l'expression $-12 - 8$ conduit un certain nombre d'élèves à effectuer en fait $-(12 - 8)$ et donc à répondre -4 . On a vu (cf. [19]) que les confusions se produisent plus facilement en début de questionnaire, c'est-à-dire ici pour la modalité A. C'est donc à un phénomène décrit par ailleurs que peut être attribuée cette déviation.

Tous les autres comportements de réponse CA sont situés à proximité de la position de principe, c'est-à-dire qu'ils ne donnent pas lieu à des déviations notables.

c) Déviations de réponses AB.

Par rapport à l'analyse précédente, la considération, pour l'item PRD, de la réponse (0,62 x 3,47) précise la légère attraction qui avait été notée : cette réponse, désignée par PPRD, a des coordonnées très proches de APRD. Cependant le tableau de répartition montre qu'il serait hasardeux de vouloir tirer des conclusions :

	Modalité A	Modalité B	
Réponse 0,93 x 2,31	23	29	52
Réponse 0,62 x 3,47	9	8	17
Autres réponses	38	33	71
	70	70	140

d) Déviations de réponses BC.

C'est sur la famille des réponses BC que cette analyse est susceptible d'apporter les précisions les plus intéressantes, étant donné les regroupements effectués et les comportements de réponse envisagés.

Pour la question 5 des modalités B et C (portant sur $A = a^3 - a^2b + 2ab^2 - 2b^3$), nous constatons que l'obtention d'une implication ($(a = b) \Rightarrow (A = 0)$) est équilibrée entre les deux modalités ; elle n'est donc pas favorisée par la mise en facteur, ce qui était sans doute une évidence a priori (mais mieux vaut vérifier quelques évidences de ce type).

L'addition des développements décimaux périodiques conduit, elle, à un résultat moins prévisible. Rappelons que nous avons distingué ici comme comportements de réponse, dans le cas de périodicités différentes :

RADJ réussite	31 élèves
OADJ erreur de position des chiffres	32 élèves
AADJ autres réponses	79 élèves.

Pour fixer les idées considérons que la question première est celle de la modalité B, où le résultat n'est pas donné, et que la question est modifiée en modalité C par la donnée du résultat : demandons-nous alors quelles sont les conséquences de cette modification. Les réponses du type AADJ se répartissent de manière équilibrée ; autrement dit la donnée du résultat n'a pas affecté la population correspondante. Au contraire, OADJ est presque spécifique de la modalité B (rapprocher de ξ_B et η_B les coordonnées de OADJ : $-.8875$ et $-.5215$), tandis que RADJ est très nettement attiré par la modalité A ; c'est-à-dire que la donnée du résultat a amalgamé les deux populations sensibles à la périodicité.

Schématiquement, on peut donc dire que donner le résultat ne sert à rien pour un individu ignorant de la périodicité, mais sert à éviter l'attraction issue de l'équilibrage pour un individu qui a perçu la périodicité.

A priori, nous serions tentés de dire que la perception de la périodicité correspond à un apprentissage plus poussé que l'ignorance de cette périodicité, qui se traduit souvent par des réponses obtenues par simple addition des chiffres écrits dans l'énoncé :

$$\begin{array}{r} 2,258258258 \\ + 1,797979 \\ \hline 4,056237258. \end{array}$$

Nous verrons qu'il n'en est rien : cette addition, qui correspond à un malentendu au sens de J. Adda ([1]), n'est pas significative vis à vis de réussite ou échec d'ensemble. Au contraire, un mauvais placement des chiffres correspond à un échec d'ensemble. Nous y reviendrons à propos de l'étude de l'axe réussite-échec d'ensemble.

Par rapport à la première analyse, la question A sur l'algorithme donne ici lieu à la prise en compte d'un comportement de réponse supplémentaire : le fait de conclure à la présence de 0 dans le couple d'arrivée, sans remarquer que le second élément varie avec a et b (nombres initiaux). Contrairement à la conclusion "maximale", ce comportement de réponse est équilibré entre les deux modalités. Par suite, il apparaît comme moins tributaire des possibilités opératoires, si toutefois on accepte, à la suite de la première analyse, leur rôle vis à vis de la conclusion "maximale".

7.4.2. L'axe réussite-échec

De même que dans la première analyse, l'axe numéro 3 est l'axe réussite-échec d'ensemble. Les précisions que nous pouvons attendre ici portent sur les types particuliers de réponses qui ont été envisagés, outre le seul fait de donner ou non une réponse correcte. Nous allons donc envisager les questions successives ayant donné lieu à l'analyse de comportements de réponse particuliers.

1° L'item 3,14 x (0,3)²

La présente analyse renforce les conclusions de la première (p. 138). En effet, la prise en compte de la seule erreur de virgule (réponse : 2,826) amène à un tri parmi les réponses erronées. De la sorte, les réponses autres que 0,2826 et 2,826 (sigle : ACQU) sont placées comme des échecs déjà nets. Au contraire, les deux réponses particulières envisagées sont pratiquement neutres (0,2826 à peine du côté réussite et 2,826 à peine du côté échec).

2° Les items de calculs avec substitution de valeurs à des variables

Les erreurs de calcul ont des significations variables : échec très significatif pour l'item 6, échec moyennement significatif pour les items 5 et 7, et neutralité (très légèrement du côté réussite) pour l'item 8. Ces différences sont facilement explicables :

- l'erreur à l'item 6 (CCSI) provient de l'obtention du résultat -7 pour la somme $(a + b)$ avec $a = 4$ et $b = -3$. Par ailleurs (cf. [29]), nous avons eu l'occasion de constater que la méconnaissance de la notion d'opposé est un très net indice d'échec général.

- les erreurs aux items 5 et 7 ont leur source dans une accumulation de signes $-$, ou (pour l'item 7) dans la méprise non exceptionnelle (dont il a déjà été question) : $-2 \times 0 = -2$. L'exécution mentale des calculs, en augmentant la simultanéité, facilite les erreurs ; ci-dessus (p. 148) l'illustration est donnée pour l'item 5.

- l'item 8 est celui qui correspond à l'accumulation la plus grande. Parmi les items de cette question, c'est alors lui qui donne lieu à la réussite la plus significative, et le fait de ne trébucher que sur un signe en fin de calcul (ce à quoi correspond en général CCHU, avec la réponse -2) ne peut certainement pas être considéré comme un indice défavorable.

Schématiquement nous pourrions résumer ces considérations en concluant pour un élève de ce niveau :

- une erreur en présence d'un seul signe $-$ est un net indice d'échec général,
- une erreur concernant une succession de deux signes $-$ permet une présomption mais non une certitude d'échec général,
- une erreur concernant une succession de plus de deux signes $-$ ne permet pas de se prononcer.

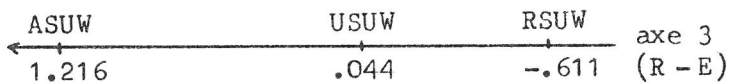
Bien sûr, il ne s'agit ici que d'erreurs sur les opérations : les autres erreurs (exemple : erreurs de priorités opératoires) apparaissent d'une manière générale plus significativement du côté échec ; exception : CCSI est un échec encore plus significatif que ACSI.

3° Approximation de 2 par des produits de deux nombres

Je m'attendais à ce que la réponse $0,62 \times 3,47$ figure sur cet axe à proximité de la meilleure réponse : $0,93 \times 2,31$. Or ce n'est pas le cas : même si cette réponse est du côté réussite, elle est nettement inférieure à la réponse $0,93 \times 2,31$. Il ne me paraît pas possible d'avancer sur ce phénomène d'interprétation suffisamment solide ; des essais supplémentaires, avec introduction de variations, seraient nécessaires (par exemple, changer l'ordre de la présentation, ou remplacer 2,31 par 2,32).

4° Addition de deux Sup

Les réponses USUV et USUW, qui consistent en la donnée d'un résultat non issu d'une addition, apparaissent comme neutres. Dans l'analyse précédente, les items désignés ici par SUV et SUW avaient pour indicatifs 32A et 32C. Ces items apparaissent comme donnant lieu à des résultats remarquables (voir p. 139). Une précision importante apparaît ici : si l'échec est en général significatif, il existe néanmoins un type d'échec qui ne l'est pas, celui précisément qui est envisagé ici. Cette "neutralité" suffit-elle pour parler d'une divergence ? Je pense que oui, au moins pour un certain nombre d'élèves. Mais il y a cependant,



Place en réussite-échec des réponses à l'item SUW.

d'après ce résultat, des élèves qui ont "penché" de façon nette vers la procédure correcte, sinon les comportements RSUW et USUW seraient plus proches sur l'axe réussite-échec qu'ils ne l'ont effectivement été. Autrement dit, l'instabilité n'a affecté qu'une partie de la population interrogée.

Cependant le phénomène risquerait d'être précisé si les questions et le codage n'avaient pas amalgamé ici deux réponses qui sont sans doute à dissocier. L'une de ces réponses consiste à prendre la plus grande de toutes les valeurs en jeu ; l'autre à prendre seulement les valeurs en jeu dans le premier des deux Sup. Ces deux conduites déterminent le même résultat (+1) pour le premier item (SUV) et (+3) pour le troisième (SUW), qui sont d'ailleurs les items pris en compte ici. Au contraire, elles fournissent des résultats différents (+1 et +3) dans le second ; mais j'ai codé de la même façon ces deux réponses. Après analyse, je pense qu'il y aurait eu lieu de faire la distinction, mais la population concernée ici aurait alors été trop faible (il faudrait que la question figure dans un moins deux des modalités).

Pour avoir une idée, j'ai revu sur les copies les réponses résultant de l'absence d'addition à l'item 2, et le tableau ci-dessous indique les coordonnées individuelles selon l'axe 3 (réussite-échec) des élèves concernés.

Mod. A, question 3.2.b	
Réponses (+1)	Réponses (+3)
-.369 ←	-.445
-.260	-.294 ←
-.119 ←	-.157 ←
-.114 ←	.006 ←
.088 ←	.112
.098	.154 ←
.302 ←	.197
.403	.247 ←
.445 ←	.447 ←

Coordonnées selon l'axe 3 des élèves ayant fourni les réponses 1 ou 3.

Dans ce tableau les flèches désignent les élèves qui ont eu le même comportement devant les trois items de la question, à savoir ne pas commettre d'autre erreur que l'absence d'addition. On se rend compte immédiatement que les élèves se répartissent également d'après les deux réponses. La réponse (+1), qui pourrait correspondre à une attitude de refus, semble s'accompagner d'une réussite légèrement supérieure à celle qui accompagne la réponse (+3), qui pourrait correspondre à une attitude de composition. Ce léger déséquilibre s'accroît quelque peu si l'on ne prend en compte que les coordonnées désignées par une flèche. Mais il n'est malgré tout pas considérable, et on peut

en déduire que les conséquences de l'abus de codage qui a été signalée sont minimales. De ce fait, il n'y a pas lieu de remettre en chantier l'interprétation ci-dessus sur l'instabilité pour tenir compte de sous-populations particulières.

5° Nullité de $A = a^3 - a^2b + 2ab^2 - 2b^3$

Le partage de C52E (première analyse) en INUL (obtention de l'implication $a = b \Rightarrow A = 0$) et ANUL (aucun résultat) ne modifie pratiquement pas le point de vue issu de la première analyse : il s'agit d'une question difficile à ce niveau, c'est-à-dire que la réussite est très significative et l'échec (complet ici) peu significatif. Le comportement INUL va faiblement du côté réussite, ce qui était attendu car la complexité opératoire associée à cette réponse est très faible selon tous les paramètres ; et le niveau cognitif est peu élevé lui aussi, puisque cette réponse n'exige qu'une traduction partielle de l'énoncé en ce qui peut s'écrire $A(a,a) = 0$ pour tout a , suivie de la règle $a^m a^n = a^{m+n}$. Et de plus, l'utilisation de ces connaissances est relativement idolée dans le questionnaire.

6° Les développements décimaux illimités

Nous avons déjà annoncé le résultat (p. 149), à savoir qu'ici les échecs divers (les plus représentés étant le fait de ne prendre en compte qu'une partie des développements décimaux : 42 élèves, et la non-réponse : 17 élèves, soit au total 59 élèves sur les 79 codés AADJ) sont neutres, tandis que les erreurs de position des chiffres constituent un échec.

Par suite ce résultat contredit une hiérarchie des comportements qui se référerait à la prise en compte des éléments cognitifs en jeu. Dans le cas précis, on peut dire qu'il est préférable (vis à vis du résultat d'ensemble) d'ignorer la périodicité, dans l'hypothèse où l'on n'atteint pas la réussite. Dans ([29], p. 458) nous disions que l'enseignement n'a pas toujours que des effets heureux. Sommes-nous ici devant un cas analogue ? Pouvons-nous trouver illusoire que l'on (cf. programmes scolaires) veuille faire admettre les propriétés des opérations dans \mathbb{R} à une population scolaire dont seule une très petite minorité sait faire la plus simple d'entre elles, l'addition ? La réponse à ces questions demanderait d'autres expériences. ⁽¹⁾

7° L'algorithme

Les réponses codées ZCON (conclusion que l'algorithme aboutit à un zéro, mais non obtention de la dépendance entre le second terme et les données initiales) apparaissent sur l'axe réussite-échec au même niveau que RALG (fait de mener correctement au moins un algorithme). Cette observation confirme celle de la position de ZCON dans le plan des modalités (voir p. 150).

8° Remarques sur les questions non envisagées dans la première analyse

Nous avons déjà parlé de l'item 6 de la question "calculs". L'item 1 de la même question est nettement un item facile (réussite RCUN non significative, échec ACUN significatif).

Les questions verbales sur les opérations dans \mathbb{Z} (VBE) ou dans \mathbb{D} (VBD) sont très proches l'une de l'autre (nous avons regroupé pour l'analyse les deux items sur \mathbb{Z} et les deux items sur \mathbb{D}) et se révèlent discriminantes.

(1) Tout récemment (octobre 1976), j'ai profité d'un besoin d'informations pour glisser dans un questionnaire, distribué en début d'année universitaire à des candidats au CAPES (professorat de l'enseignement secondaire), la question suivante.

$$\text{Calculer } I = \int_0^1 \frac{2x dx}{(2x^2 - 1)^2} .$$

Certes, outre la consigne qui ne suscite aucune suspicion, il intervient une attraction par plongement vers la forme $\frac{du}{u}$. Cependant, j'avais choisi les données pour que le résultat du "calcul" (fautive) soit (-1), c'est-à-dire un nombre négatif. Malgré cette possibilité de mise en doute, vu le signe évident de la fonction à intégrer, et malgré la présence sur la même page d'une question de convergence d'intégrale, 32 étudiants (sur 58) ont ici obtenu un résultat. Seul un étudiant a été apparemment troublé par le signe de ce résultat ; il a alors refait son calcul pour aboutir à $2\sqrt{2}$ (!).

Rappelons que nous avons envisagé essentiellement dans notre étude des questions à la portée à la fois de la machine et de l'être humain (cf. chap. 1). L'analyse en réussite-échec d'ensemble nous a conduit à distinguer entre les erreurs. Certaines sont associées à un échec d'ensemble et d'autres non. Dans ces conditions, ne peut-on comprendre l'adage "Errare humanum est" comme illustrant non l'imperfection, mais la spécificité de l'individu ?

Au vu de certaines erreurs, nous aurions envie de dire qu'il s'agit de conséquences d'une conduite machinale. Mais le principe d'économie (ou d'optimisation) que nous voyons apparaître à la source de telles erreurs semble s'opposer à cette interprétation courante. Pour éclairer ce propos, je propose une comparaison avec la conduite automobile : là aussi, on parle de "conduite machinale". C'est par exemple le cas lorsqu'un automobiliste

Ce qui est intéressant est l'apparition d'un phénomène analogue à celui observé dans l'enquête étudiée ici. En effet, les 26 étudiants qui n'avaient pas obtenu le résultat se partageaient en 15 qui avaient conclu à la divergence et 11 qui n'avaient pas conclu du tout. Et cette population qui a l'air ici de "sécher" obtient par ailleurs de meilleurs résultats que celle qui a vu la forme $\frac{du}{2}$. Par exemple, deux autres questions mettaient en jeu la continuité uniforme ; l'une en demandait simplement la définition, l'autre demandait si les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} continues et bornées sont uniformément continues. A la deuxième question, les réponses "oui" (au nombre de 9) proviennent uniquement de ceux qui ont "calculé" l'intégrale. Quant à la définition, elle a donné lieu aux effectifs suivants.

Pour ceux qui ont "calculé" I : Quantification fautive : 8,
 Quantification incomplète : 13,
 Réussite : 11.

Pour ceux qui n'ont pas "calculé" I : Quantification fautive : 3,
 Quantification incomplète : 7,
 Réussite : 16

(parmi les 16 réussites, 8 dans la population de ceux qui ont "séchés" sur I).

Le peu de résistance aux attractions pourrait donc être un révélateur assez général, et l'on voit que des réponses trop hâtives aux deux questions posées dans le texte pourraient être injustifiées. Il est important de souligner "résistance", car si aucune remise en question ne découle de l'attraction (ainsi c'est le cas pour l'obtention de 2,826 comme résultat de $3,14 \times (0,3)^2$) la situation s'avère différente.

emprunte un itinéraire familier. C'est aussi le cas lorsqu'il se décide, consciemment ou non, à suivre un autre véhicule. Souvent, une économie d'attention (la route est "ouverte"), voire même un gain de temps (s'il y a du brouillard, ou si l'itinéraire est peu connu de l'automobiliste), résultant de cette façon de faire. Qu'il arrive alors à notre automobiliste de commettre une erreur d'itinéraire ne me paraît pas constituer un indice défavorable. Mais il n'en est pas de même s'il persiste à "coller" au véhicule précédent, à l'arrivée sur une intersection où lui-même s'apprête à poursuivre tout droit, alors que le véhicule précédent se déporte à gauche, clignotants en marche : la démobilitation est trop grande, les signaux d'avertissement sont inopérants. C'est encore plus évident, si notre automobiliste s'avère insensible à l'allumage des feux de freinage du véhicule précédent...

Une telle comparaison peut amener à étudier systématiquement le rôle de "signaux d'avertissement" dans la signification des erreurs. Ainsi peut-on se demander si l'erreur dans le placement de la virgule pour $(0,3)^2$ n'aurait pas une signification autre dans l'item

$$(0,9)^2 + (0,3)^2 = \dots$$

que dans l'item

$$3,14 \times (0,3)^2 = \dots$$

Récapitulation des résultats

Les conclusions, présentées à l'endroit des analyses où elles sont apparues, se trouvent éparpillées dans la deuxième partie (chapitres 5 à 7). Le tableau récapitulatif ci-dessous indique où se situent dans ces analyses les conclusions en rapport avec les éléments de la première partie (chapitres 1 à 4). Les numéros réfèrent à la pagination ; sont encadrés les numéros de page contenant une mise en évidence que je considère comme rigoureuse, selon les critères de la méthode expérimentale .

Complexité cognitive	Complexité opératoire					Perturbations	
	Mise en évidence générale	Type opératoire	Mode opératoire	But	Simultanéité	Equilibrage	Plongement
140	93-94	109	88	135	103	102	103
145	104	139	104	149		138	105
152-153	106-107			150		142	138
	139						
	141						

On voit combien il y a encore à faire. Autant que possible, j'ai d'ailleurs indiqué dans le texte les vérifications ou les essais qui pourraient être entrepris.

Ce tableau fait apparaître le rôle joué par la complexité opératoire dans les "exercices scolaires" envisagés. Mais il ne met pas en évidence le phénomène le plus important peut-être : même pour ces exercices scolaires, produire une réponse ne consiste pas seulement à restituer des connaissances ou à appliquer des algorithmes standards, mais surtout à indiquer l'aboutissement d'un processus d'optimisation. Si tel n'était pas le cas, la plupart des expériences tentées dans ces enquêtes n'auraient pas été concluantes. Au contraire, les erreurs (*) dans les réponses sont apparues comme des indices, révélateurs de la spécificité des réactions individuelles à des questions qui sont pourtant à la portée à la fois de l'homme et de la machine.

Une observation d'un élève

Pendant quinze minutes, en janvier 1976, une séance de correction se déroule dans une classe de 4^e. Les élèves sont habitués à ma présence en tant qu'observateur. Je me suis assis à proximité de l'élève P... qui, à aucun moment, ne fera attention au fait que je prends des notes sur son comportement pendant cette séance (pour preuve, dans le compte-rendu ci-dessous, la question qu'il me pose tranquillement vers 15 h 45).

L'élève P... est un élève généralement faible (conditions familiales défavorables : père en "vadrouille" notamment), qui a eu des ennuis de santé dans son enfance. Encore actuellement, il a des difficultés à simplement disposer une figure sur une page (voir ci-dessous la reproduction d'une figure faite en mai 1976). Mais de temps en temps, ses réponses étonnent son professeur et il faut dire que la disparité de ses résultats est surprenante. Dans l'observation ci-dessous, on va le voir éviter de faire attention (c'est mon interprétation) jusqu'à ce que le sujet qui le travaille soit abordé. En même temps, il se tient de manière à donner le change au professeur si celui-ci vient à le regarder. Comment ne pas penser que l'élève P... n'a pas, au moins inconsciemment, cherché à conserver le fil de ses idées pour profiter au mieux de l'exercice 7 (l'ouvrage qui intervient est celui de l'I.R.E.M. de Strasbourg, classe de 4^e, p. 36-37). Ainsi on voit qu'il a attendu que le tableau soit assez bien rempli pour l'examiner globalement (pendant un peu moins d'une minute) ; mais il ne s'est pas laissé aller à écouter (ce qui est plus prenant qu'un examen visuel), sauf lorsqu'il a eu l'oreille attirée par le nombre 1000 000, et pourtant, il a du mal à distinguer "carré" et "racine carrée". On remarque que, durant les quinze minutes de correction, l'élève P... a été attentif pendant moins de quatre minutes. Une telle proportion n'est nullement exceptionnelle, comme on peut le constater par d'autres observations.

3. Quel est le symbole des jeux olympiques ?



Reproduction d'une figure de l'élève P... lors d'un test
(Mai 1976)

Observation de l'élève P... pendant quinze minutes en classe de 4e (janvier 76)

Heure	Professeur - Classe	Elève P...
15 h 38	"Prenez le chapitre 12 d'algèbre"	
39	Distribution des copies d'une interrogation écrite. "Vous faites attention 5 à 10 mn"	Prend son cahier. Prend son livre N'a pas entendu (parle à son voisin).
41	"Valeurs approchées ... ? " (exercice 5) "c = $\sqrt{2}$." " $(\sqrt{3})^2 = \dots$?"	Fait un calcul sur feuille, en rapport avec l'exercice 7. Jette, de temps en temps, un coup d'oeil au tableau, sans écouter. Regarde le chapitre 13, puis revient au chapitre 12. Regarde $\sqrt{2}$, puis se replonge aussitôt dans l'exercice 7.
45	" $(\sqrt{4})^2$? $\sqrt{4}$? " $\sqrt{5}$	Me demande si $13 \times 13 = 169$. (Je lui réponds affirmativement) Regarde le tableau, où figurent les nombres indiqués, pendant moins d'une minute.
47	Un élève : "Ca va pour les petits nombres, mais pour des grands, comme 1000 000 ... ?" "Justement, combien obtient-on pour $\sqrt{1000\ 000}$? " Obtention de la réponse 1000	Regarde à nouveau le chapitre 13. Intéressé. Dit "100". N'est pas entendu.
48	"Exercice 7 !" "25 = ... ?" Rectification de 625	Intéressé. Dit "625". La réponse à donner était 5^2 .

Heure	Professeur-Classe	Elève P...
15 h 50	Explications, à la suite de quelques questions d'élèves (notamment sur l'utilité du symbole \checkmark).	Écoute l'exercice 7 pendant 2 mn 30 s. N'écoute plus ensuite :
53	Fin de correction	démonte son stylo, puis feuillette son cahier à la recherche d'une feuille. Se met à réfléchir sur le chapitre 13.

ANNEXE 2.1La classification N L S M AAvertissement.

Cette classification s'applique aux énoncés d'exercices mathématiques. Elle ne prétend situer qu'une partie de leur difficulté : celle qui concerne la complexité des connaissances nécessaires à leur résolution. Son application exige de connaître l'apprentissage qui précède un exercice.

Préliminaire.

Définition 1. Les faits spécifiques sont les "connaissances atomiques" : parmi les connaissances, les faits spécifiques sont caractérisés par le fait d'être isolément mémorisés et formulés. Autrement dit, un fait spécifique est exprimé par une phrase, française ou symbolique, simple (c'est-à-dire sans subordonnée).

Définition 2. Un concept est un ensemble de faits spécifiques.

La classification.

Niveau A : La connaissance et l'utilisation des faits spécifiques mémorisés.

A1 : Connaissance des faits spécifiques.

A2 : Connaissance de la terminologie.

A3 : Aptitude à effectuer des algorithmes.

Niveau B : La connaissance et l'utilisation des concepts mémorisés.

B1 : Connaissance des concepts.

B2 : Connaissance de principes, règles, généralisations.

B3 : Connaissance des structures mathématiques.

B4 : Aptitude à traduire un énoncé d'une formation à une autre.

B5 : Aptitude à suivre un raisonnement.

Niveau C : Les applications.

C1 : Aptitude à résoudre des problèmes routiniers.

C2 : Aptitude à comparer, ordonner.

C3 : Aptitude à interpréter des données.

C4 : Aptitude à reconnaître des relations (ex: périodicité, symétrie... reconnaissance de formes).

- Niveau D : La découverte.
- D1 : Aptitude à résoudre des problèmes inhabituels.
- D2 : Aptitude à découvrir des relations.
- D3 : Aptitude à démontrer.
- D4 : Aptitude à critiquer la validité d'un raisonnement.
- D5 : Aptitude à formuler et valider des généralisations.
-

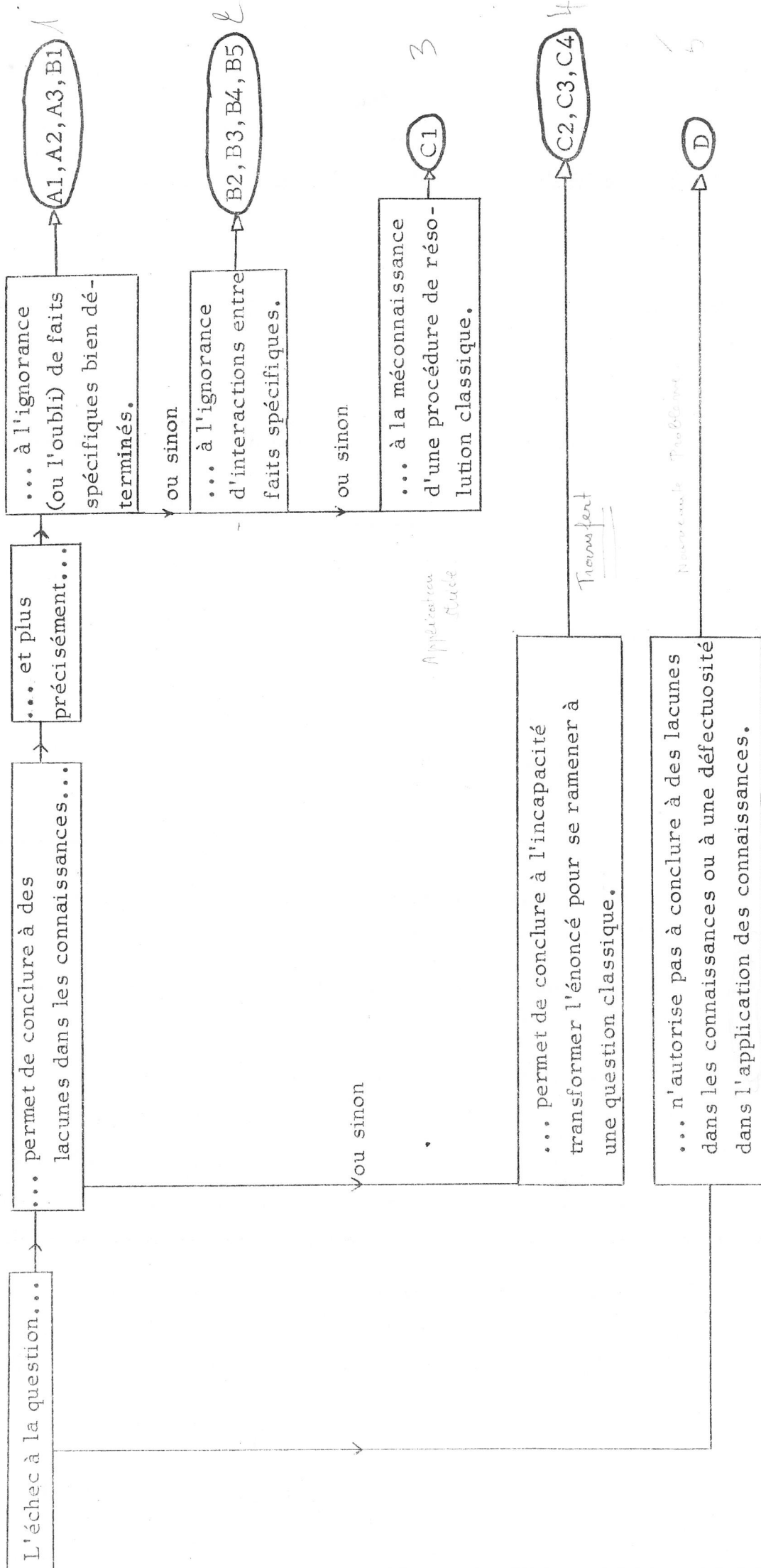
Addendum.

Aux quatre niveaux ci-dessus concernant le domaine cognitif, Wilson ajoute deux niveaux qui concernent le domaine affectif :

- Niveau E : Attitudes et intérêts (motivation, appréhensions, goûts personnels).
- Niveau F : Appréciation (utilité des math., valeur de l'enseignement mathématique, élaboration).

Signification de l'échec(*) à une question et niveau NLSMA.

Niveaux NLSMA possibles pour la question.



ANNEXE 2.3

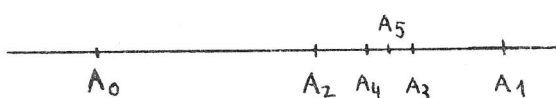
Exemples de géométrie euclidienne plane (géométrie de la classe de 3e).

A 1. Parmi les valeurs ci-dessous, lesquelles sont inacceptables comme distance de deux points du plan ?

4 -2 1 100 -3

A 2. Comment nomme-t-on une transformation qui conserve les distances ?

A 3.



On indique que :

- la distance de A_0 à A_1 est égale à 1.

- A_2 est le milieu de $[A_0, A_1]$
 A_3 " " " $[A_1, A_2]$
 A_4 " " " $[A_2, A_3]$
 A_5 " " " $[A_3, A_4]$

Quelle est la distance de A_4 à A_5 ?

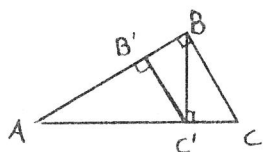
B 1. Trois points A, B, C alignés sont tels que $d(B, C) - d(A, C) = -d(A, B)$. Comment sont disposés ces trois points ?

B 2. Quelle est la longueur de la diagonale d'un rectangle dont les côtés ont pour largeur 5 et 12 ?

B 3. Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Quelle est la distance des deux points A et B tels que $\vec{AB} = 2\vec{AC}$ avec $\vec{OA} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{OC} \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$?

B 4. Démontrer que la médiatrice du segment $[A, B]$, avec $\vec{OA} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{OB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (le plan est rapporté à un repère orthonormé) passe par le point M, avec $\vec{OM} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

B 5.

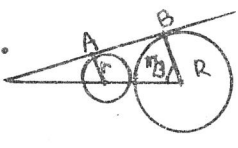


Pour calculer le rapport de $B'C'$ à BC , suffit-il de calculer le rapport de BC' à BC ou faut-il faire un nouveau calcul pour le rapport de $B'C'$ à BC' ?

(N.B. on présente d'abord le calcul de $\frac{BC'}{BC}$.)

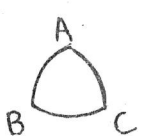
B 6. Les côtés d'un triangle ABC ont pour longueur : $AB = 31$, $BC = 29$ et $CA = 11$. Le triangle ABC est-il rectangle ?

- C 1. Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Quelle est la nature du triangle ABC, avec $\vec{OA} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{OB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{OC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?
- C 2. On sait qu'un triangle ABC a, pour longueurs de côtés $AB = 4,4$ et $AC = 0,8$. On sait aussi que la longueur de BC est un nombre entier. Quel peut être ce nombre ?
- C 3. Quelle est la nature d'un parallélogramme dont les sommets sont situés sur un même cercle ?

- C 4.  La droite AB est tangente aux deux cercles qui sont eux-mêmes tangents.
Calculer r en fonction de R .

- D 1. Sur un bateau un observateur est à 10 m au dessus de l'eau. Quelle sera la plus grande distance à laquelle il pourra apercevoir le feu d'un phare situé à 50 m au dessus de l'eau ?

- D 2. Quelle est la somme des angles d'un quadrilatère ?

- D 3. A partir d'un triangle équilatéral, on a tracé la figure ci-contre, constituée de trois arcs de cercle joignant deux des sommets et centrés au troisième sommet.
-  Prouver que le pied à coulisse fournirait une largeur constante pour cette figure.

- D 4. Voici une "démonstration" de l'inégalité : $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha \geq 2$ pour tout angle α .

$$\text{Par définition } \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

$$\text{Donc } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

$$\text{D'où } \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha \geq 2 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 \geq 2 \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 - 2 \operatorname{tg} \alpha \geq 0.$$

Mais $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 - 2 \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \operatorname{tg} \alpha + 1 = (\operatorname{tg} \alpha - 1)^2 \geq 0$. Ce qui démontre le résultat. Qu'en pensez-vous ?

- D 5. Calculer le périmètre d'un polygone régulier à n côtés.

ANNEXE 3 QUELQUES SORTIES-MACHINE

Les tableaux de résultats sont relatifs à l'enquête à trois modalités (chapitre 7).

Le premier groupe de tableaux se rapporte à la première analyse effectuée et le deuxième groupe à la seconde.

Pour les sigles désignant les comportements de réponse, se reporter au texte (p. 131 et 145).

QUESTIONNAIRE A TROIS MODALITES : Première analyse.

Tableau des effectifs par comportement de réponse (réussite ou échec uniquement). Les sigles correspondent à ceux qui sont utilisés dans le texte (voir p. 131).

12R	12F	12QN	13R	13E	13QN	14R	14E	14CN	15R	15E	15QN	17R	17E	17QN	18R	18E	18QN	21R
22.	70.	70.	121.	21.	70.	81.	61.	70.	113.	29.	70.	84.	58.	70.	63.	79.	70.	113.
21F	21QN	22R	22E	22QN	231R	231E	231N	232R	232E	232N	31R	31E	31QN	32AR	32AE	32AN	32BR	32BE
27.	72.	87.	53.	72.	98.	42.	72.	52.	89.	22.	69.	1.	142.	39.	31.	142.	29.	41.
32RN	32CR	32CE	32CN	4AR	4AE	4ACN	4BR	4BE	4BN	4CR	4CE	4CN	5R	5E	5ON	C2R	C2E	C2QN
142.	37.	33.	142.	12.	58.	142.	40.	20.	142.	5.	65.	142.	5.	137.	70.	42.	30.	140.
C51R	C51E	C51N	C52R	C52E	C52N	C4R	C4E	C4CN	A11R	A11E	A11N	A13R	A13E	A13N	A21R	A21E	A21N	A22R
11.	61.	140.	10.	132.	70.	24.	48.	140.	135.	7.	70.	104.	38.	70.	80.	62.	70.	4.
A22E	A22N	A23R	A23E	A23N	B3R	B3E	B3CN	B4R	B4E	B4ON	B51R	B51E	B51N	B61R	B61E	B61N	B62R	B62E
138.	70.	13.	129.	70.	19.	51.	142.	46.	24.	142.	14.	56.	142.	8.	62.	142.	7.	63.
362N	PP1	PP2	PP3	PP4	PP5	PF1	PE2	PE3	PE4									
142.	60.	82.	32.	27.	10.	48.	66.	44.	53.	6784.								

Tableau des comportements de réponses dans l'espace des quatre premiers axes factoriels. Outre la coordonnée de chaque comportement, le tableau fournit sa corrélation (COR) et sa contribution (CTR).

J1	OLT	POID	INRI	1#F	COR	CTR	2#F	COR	CTR	3#F	COR	CTR	4#F	COR	CTR
12R	689	18	71	561	411	101	-421	232	81	136	24	31	-38	2	0
12F	175	3	141	658	50	21	-284	9	11	-720	60	171	206	5	2
12QN	1000	10	101	-1168	674	241	813	326	161	-6	0	01	1	0	0
13R	663	18	71	568	429	101	-413	228	71	49	3	01	-28	1	0
13F	75	3	141	624	43	21	-324	12	11	-258	7	21	163	3	1
13QN	1000	10	101	-1168	674	241	813	326	161	-6	0	01	1	0	0
14R	383	12	101	613	232	81	-348	75	31	175	19	41	-74	3	1
14E	285	9	111	528	113	41	-469	89	51	-223	20	51	98	4	1
14QN	1000	10	101	-1168	674	241	813	326	161	-6	0	01	1	0	0
15R	691	17	71	553	349	91	-432	214	71	66	5	11	10	0	0
15F	325	4	131	668	71	31	-274	12	11	-242	9	31	-40	0	0
15QN	1000	10	101	-1168	674	241	813	326	161	-6	0	01	1	0	0
17R	692	12	91	497	162	51	-514	174	81	313	64	121	0	0	0
17E	629	9	111	691	180	71	-234	21	11	-444	74	171	0	0	0
17QN	1000	10	101	-1168	674	241	813	326	161	-6	0	01	1	0	0
18R	461	9	111	569	137	51	-406	70	41	539	123	271	-61	2	0
18F	516	12	101	582	201	71	-395	93	41	-423	107	211	48	1	0
18QN	1000	10	101	-1168	674	241	813	326	161	-6	0	01	1	0	0
21R	658	17	71	45	2	01	715	584	201	83	9	11	-1	0	0
21F	231	4	141	110	2	01	711	74	51	-331	16	41	10	0	0
21QN	999	11	101	-111	6	01	-1389	993	491	-5	0	01	0	0	0
22R	514	13	91	-107	8	01	726	367	161	418	121	221	-90	6	1
22F	376	8	121	329	36	11	696	162	91	-676	153	361	151	8	2
22QN	999	11	101	-111	6	01	-1389	993	491	-5	0	01	0	0	0
231R	573	14	81	81	6	01	713	437	181	286	70	121	88	7	1
231E	329	6	131	4	0	01	719	128	81	-655	106	271	-202	10	3
231N	999	11	101	-111	6	01	-1389	993	491	-5	0	01	0	0	0
232R	459	8	121	-95	3	01	726	171	101	737	177	421	252	21	6
232E	587	13	91	148	16	01	708	356	161	-420	132	241	-147	15	3
232N	999	11	101	-111	6	01	-1389	993	491	-5	0	01	0	0	0
31R	980	10	111	1284	795	291	616	183	91	65	2	01	-25	0	0
31F	88	0	161	1305	8	01	627	2	01	-3589	61	191	1781	15	6
31QN	1000	21	51	-632	813	141	-303	187	51	-5	0	01	0	0	0
32AR	885	6	131	1278	368	161	614	85	51	1058	252	641	-678	104	31
32AE	861	5	131	1292	286	131	619	66	41	-1301	290	771	853	125	40
32AN	1000	21	51	-632	813	141	-303	187	51	-5	0	01	0	0	0
323R	785	4	131	1276	258	121	613	69	41	1419	319	861	-856	116	37
32BE	836	6	131	1290	399	171	618	92	61	-981	231	581	606	88	26
32BN	1000	21	51	-632	813	141	-303	187	51	-5	0	01	0	0	0
32CR	859	5	131	1277	345	151	614	80	51	1081	247	631	-672	96	29
32CE	844	5	131	1291	307	141	619	71	41	-1183	259	681	754	105	33
32CN	1000	21	51	-632	813	141	-303	187	51	-5	0	01	0	0	0
4AR	422	2	151	1278	98	51	616	23	21	1329	106	311	-703	30	10
4AE	843	9	111	1285	622	241	616	143	81	-258	25	61	146	8	2
4AQN	1000	21	51	-632	813	141	-303	187	51	-5	0	01	0	0	0
4BR	625	6	131	1280	381	161	616	88	51	647	97	251	-354	29	9
4BE	525	4	131	1289	274	131	616	63	41	-821	114	301	473	37	12
4BQN	1000	21	51	-632	813	141	-303	187	51	-5	0	01	0	0	0
4CR	410	1	151	1277	39	21	620	9	11	1450	51	151	-707	12	4
4CF	935	10	111	1284	729	271	616	168	91	-96	4	11	54	1	0

Les valeurs propres et les pourcentages associés sont les suivants :

Axe 1 : Valeur propre : 0,5859, Pourcentage : 29,30

Axe 2 : " " : 0,4173, " : 20,87

Axe 3 : " " : 0,1004, " : 5,02

Axe 4 : " " : 0,084, " : 4,20.

		1#F			2#F			3#F			4#F				
J1	Q1T	POID	INR1	COR	CTR1	COR	CTR1	COR	CTR1	COR	CTR1	COR	CTR1		
40QN	1000	21	51	-632	813	141	-303	187	51	-5	0	01	0	0	0
5P	26	1	151	439	5	01	-604	9	11	459	5	21	95	0	0
5F	900	20	61	581	617	121	-392	283	71	-12	0	01	-3	0	0
50N	1000	10	101	-1168	674	241	813	326	161	-6	0	01	1	0	0
C2P	714	6	131	-114	3	01	-1395	482	291	236	14	31	237	14	4
C2E	627	4	131	-107	2	01	-1380	314	201	-345	20	51	-334	19	6
C20N	999	21	51	57	6	01	715	993	251	3	0	01	1	0	0
C51P	356	2	151	-113	1	01	-1382	105	71	476	12	41	469	12	4
C51E	848	9	111	-109	5	01	-1390	782	421	-92	4	11	-85	3	1
C51N	999	21	51	57	6	01	715	993	251	3	0	01	1	0	0
C52R	401	1	151	-760	29	11	-51	0	01	1295	83	251	2162	231	82
C52E	886	19	61	-622	641	131	-322	172	51	-104	18	21	-163	44	6
C52N	1000	10	101	1284	813	291	616	187	91	13	0	01	0	0	0
C4R	356	4	141	-113	2	01	-1389	247	161	162	3	11	198	5	2
C4E	632	7	121	-109	4	01	-1389	565	321	-90	2	11	-100	3	1
C40N	999	21	51	57	6	01	715	993	251	3	0	01	1	0	0
A11R	909	20	61	-611	657	131	-348	213	61	9	0	01	20	1	0
A11E	324	1	151	-1034	37	21	563	11	11	-305	3	11	-385	5	2
A11N	1000	10	101	1284	813	291	616	187	91	13	0	01	0	0	0
A13R	602	15	81	-640	396	111	-289	81	31	161	25	41	289	80	15
A13E	324	6	131	-609	81	41	-340	25	21	-463	47	121	-789	136	42
A13N	1000	10	101	1284	813	291	616	187	91	13	0	01	0	0	0
A21R	480	12	101	-626	238	81	-318	62	31	226	34	71	477	138	32
A21E	411	9	111	-639	170	61	-283	33	21	-319	42	91	-614	157	41
A21N	1000	10	101	1284	813	291	616	187	91	13	0	01	0	0	0
A22R	306	1	151	-638	8	01	-312	2	01	988	19	61	2042	80	29
A22E	944	20	51	-632	747	141	-302	172	41	-34	2	01	-58	7	1
A22N	1000	10	101	1284	813	291	616	187	91	13	0	01	0	0	0
A23P	454	2	151	-513	17	11	-566	21	11	892	52	151	1756	202	70
A23E	869	19	61	-644	646	131	-276	119	41	-96	15	21	-176	49	7
A23N	1000	10	101	1284	813	291	616	187	91	13	0	01	0	0	0
B3R	677	3	141	-1172	135	71	808	64	41	958	90	261	1835	332	112
B3E	856	8	121	-1167	432	171	815	211	121	-365	42	101	-681	147	42
B30N	1000	21	51	576	674	121	-400	326	81	3	0	01	0	0	0
B4R	642	7	121	-1170	380	161	815	184	111	225	14	31	430	51	15
B4E	390	4	141	-1164	173	81	810	84	61	-450	26	71	-818	86	28
B40N	1000	21	51	576	674	121	-400	326	81	3	0	01	0	0	0
B51R	532	2	151	-1170	97	51	808	46	31	954	64	191	1947	268	93
B51E	852	8	111	-1168	490	191	815	238	131	-246	22	51	-484	84	23
B51N	1000	21	51	576	674	121	-400	326	81	3	0	01	0	0	0
B61P	830	1	151	-1174	54	31	829	27	21	732	21	61	1888	140	50
B61E	971	9	111	-1167	564	211	811	272	141	-101	4	11	-241	24	6
B61N	1000	21	51	576	674	121	-400	326	81	3	0	01	0	0	0
B62R	813	1	151	-1178	47	21	832	24	21	413	6	21	1282	56	20
B62E	973	9	111	-1167	577	221	811	278	151	-52	1	01	-140	8	2
B62N	1000	21	51	576	674	121	-400	326	81	3	0	01	0	0	0
		6 784.0	1000	1000			1000			1000			1000		

Questionnaire trimodal
 - deuxième analyse -
 Valeurs propres et
 Comportements de réponse
 (coordonnées selon les axes 1 à 4)

AXE *

 VALEUR PROPRE *
 TEST *
 POURCENTAGE *

CLASSE	(1)	***COORD**	(2)	***COORD**	(2)	***COORD**	(2)	***COORD**	(2)	***COORD**	(2)	***COORD**	(2)	***COORD**	(2)
F(PCUN)	135.0	.57*	.5050	.4367	1.60%	-.0638	.04%	-.1029	.27%						
F(ACUN)	7.0	1.51*	.6772	.3035	.03%	1.0069	1.06%	2.0380	5.49%						
F(MCUN)	70.0	1.05*	-1.0417	-.9690	2.11%	.0224	.01%	-.0053	.70%						
F(PCOE)	120.0	.54*	.4965	.4959	1.48%	-.1386	.35%	-.0563	.10%						
F(ACOE)	22.0	1.40*	.6066	.3780	.15%	.6849	1.54%	.3785	.60%						
F(MCOE)	70.0	1.05*	-1.0417	-.9690	2.11%	.0224	.01%	-.0053	.00%						
F(PCTR)	121.0	.67*	.5027	.4883	.85%	-.0622	.07%	-.1195	.33%						
F(ACTR)	21.0	1.41*	.5758	.4163	.19%	.2840	.25%	.7062	1.98%						
F(MCTR)	70.0	1.05*	-1.0417	-.9690	2.11%	.0224	.01%	-.0053	.00%						
F(PCQU)	81.0	.97*	.5561	.4234	.70%	-.1964	.47%	-.0910	.13%						
F(VCQU)	40.0	1.27*	.4404	.5656	.22%	.1219	.09%	.1565	.21%						
F(ACQU)	21.0	1.41*	.4888	.5193	.14%	.4509	.64%	.0516	.01%						
F(MCQU)	70.0	1.05*	-1.0417	-.9690	2.11%	.0224	.01%	-.0053	.00%						
F(PCCI)	113.0	.73*	.4862	.5069	.74%	-.1401	.33%	-.1027	.23%						
F(CCCI)	19.0	1.42*	.7601	.2117	.30%	.3068	.27%	.3517	.44%						
F(ACCI)	10.0	1.49*	.3234	.6522	.03%	.8441	1.07%	.5293	.53%						
F(MCCI)	70.0	1.05*	-1.0417	-.9690	2.11%	.0224	.01%	-.0053	.00%						
F(PCSI)	123.0	.56*	.5459	.4442	1.02%	-.1289	.31%	-.0933	.20%						
F(CCSI)	9.0	1.50*	.0498	1.0030	.00%	1.1876	1.90%	-.1951	.06%						
F(ACSI)	10.0	1.49*	.5332	.4160	.08%	.3597	.19%	1.3507	3.45%						
F(MCSI)	70.0	1.05*	-1.0417	-.9690	2.11%	.0224	.01%	-.0053	.00%						
F(PCSE)	14.0	.94*	.4119	.5827	.41%	-.4211	2.23%	-.1591	.45%						
F(CNSE)	39.0	1.24*	.5925	.3827	.38%	.4044	.29%	-.0719	.04%						
F(ACSE)	19.0	1.42*	.7552	.2084	.31%	.9494	2.56%	.9145	3.00%						
F(MNSE)	70.0	1.05*	-1.0417	-.9690	2.11%	.0224	.01%	-.0053	.00%						
F(PCHU)	63.0	1.10*	.5058	.4802	.45%	-.4949	.73%	-.1385	.23%						
F(CCHU)	23.0	1.39*	.5506	.4194	.20%	-.1563	.08%	-.6109	1.62%						
F(ACHU)	56.0	1.15*	.5013	.4988	.39%	.5930	2.95%	.4133	1.81%						
F(MCHU)	70.0	1.05*	-1.0417	-.9690	2.11%	.0224	.01%	-.0053	.00%						
F(PCRU)	113.0	.73*	.1458	-.7037	.07%	-.0643	.07%	-.0254	.01%						
F(AORU)	28.0	1.36*	.1927	-.6115	.03%	.2501	.52%	.1459	.11%						
F(NORU)	71.0	1.04*	-.3081	1.3612	.19%	.0037	.00%	-.0155	.00%						
F(PORU)	87.0	.92*	-.0062	-.7324	.00%	-.3653	1.74%	-.3085	1.56%						
F(AORD)	53.0	1.17*	.4273	-.6429	.27%	.6057	2.91%	.4896	2.40%						
F(NORD)	72.0	1.03*	-.3075	1.3583	.19%	-.0045	.00%	.0123	.00%						
F(RPRU)	98.0	.84*	.1773	-.6989	.09%	-.3266	1.56%	-.0367	.02%						
F(APRU)	42.0	1.25*	.1123	-.6977	.01%	.7697	3.72%	.0644	.03%						
F(NPRU)	72.0	1.03*	-.3075	1.3583	.19%	-.0045	.00%	.0123	.00%						
F(RPRD)	52.0	1.18*	.0003	-.7471	.00%	-.7431	4.30%	-.1042	.11%						
F(PPRD)	17.0	1.44*	.2275	-.6730	.02%	-.2452	.15%	-.4233	.58%						
F(APRD)	71.0	1.04*	.2572	-.6691	.13%	.6075	3.92%	.1651	.37%						
F(NPRD)	72.0	1.03*	-.3075	1.3583	.19%	-.0045	.00%	.0123	.00%						
F(RSUV)	39.0	1.28*	1.3504	-.4253	1.97%	-.5867	2.01%	-.9213	5.26%						
F(USUV)	17.0	1.44*	1.3663	-.4370	.88%	.16%	.11%	1.0058	3.25%						
F(ASUV)	14.0	1.46*	1.3693	-.4251	.73%	1.2924	3.50%	1.3082	4.53%						

	1	2	3	4
F(NSUV)	142.0	1.77%	32%	0.00%
F(RSUM)	37.0	1.87%	34%	5.12%
F(USUW)	16.0	0.82%	16%	2.57%
F(ASU4)	17.0	0.89%	15%	4.16%
F(NSUW)	142.0	1.77%	32%	0.00%
F(RSUZ)	12.0	0.61%	11%	0.66%
F(ASUZ)	58.0	2.97%	53%	0.12%
F(NSUZ)	142.0	1.77%	32%	0.00%
F(RINV)	24.0	0.42%	58%	2.84%
F(AINV)	188.0	0.05%	07%	0.36%
F(RVBE)	26.0	1.32%	23%	2.28%
F(AVBE)	44.0	2.27%	41%	1.27%
F(NVRE)	142.0	1.77%	32%	0.00%
F(PVRD)	28.0	1.41%	26%	1.68%
F(AVBD)	42.0	2.18%	39%	1.05%
F(NVRD)	142.0	1.77%	32%	0.00%
F(RFRA)	95.0	1.17%	25%	0.63%
F(AFRA)	47.0	0.60%	07%	1.19%
F(NFRA)	70.0	3.58%	64%	0.00%
F(RFAC)	25.0	0.38%	00%	3.03%
F(AFAC)	117.0	1.39%	37%	0.62%
F(NFAC)	70.0	3.58%	64%	0.00%
F(RNUL)	10.0	1.17%	01%	4.03%
F(INUL)	35.0	0.42%	10%	0.24%
F(ANUL)	97.0	1.17%	26%	0.84%
F(NNUL)	70.0	3.58%	64%	0.00%
F(RADI)	8.0	0.25%	37%	2.30%
F(AADI)	62.0	1.86%	2.93%	0.32%
F(NADI)	142.0	1.04%	1.62%	0.00%
F(RADJ)	31.0	0.19%	1.23%	1.10%
F(OADJ)	32.0	0.70%	44%	0.27%
F(AADJ)	79.0	0.96%	23%	0.09%
F(NADJ)	70.0	3.58%	64%	0.00%
F(RCOU)	135.0	1.61%	45%	0.00%
F(ACOU)	7.0	0.17%	16%	0.00%
F(NCOU)	70.0	3.58%	64%	0.00%
F(RCOD)	104.0	1.32%	20%	0.00%
F(ACOD)	39.0	0.44%	13%	1.17%
F(NCOD)	70.0	3.58%	64%	3.08%
F(RALG)	80.0	1.00%	20%	0.00%
F(AALG)	62.0	0.77%	12%	0.00%
F(NALG)	70.0	3.58%	64%	4.06%
F(RCON)	13.0	0.13%	13%	0.00%
F(ZCON)	53.0	1.17%	13%	4.28%
F(ACON)	76.0	1.00%	10%	1.97%
F(NCON)	70.0	3.58%	64%	4.00%

CONTRIBUTIONS
 (1): Inertie totale
 (2): Inertie par rapport à l'axe

34872913+00
 79685757+04
 14.71

11674370+00
 73003348+04
 4.93

92451295+01
 57711436+04
 3.90

.0036	.007%	.0088	.00%	.00%
-.9359	2.07%	-.6114	2.07%	5.12%
.9225	.00%	.0442	.00%	2.57%
1.1384	3.76%	1.2160	3.76%	4.16%
.0036	.00%	.0088	.00%	0.00%
-.5383	4.3%	-.4912	4.3%	0.66%
.1025	.06%	.0802	.06%	0.12%
.0036	.00%	.0088	.00%	0.00%
.7920	5.44%	-1.2303	5.44%	2.84%
-.1011	.69%	.1571	.69%	0.36%
-.6509	.86%	-.4700	.86%	2.28%
.3906	4.1%	.2494	4.1%	1.27%
.0036	.00%	.0088	.00%	0.00%
-.5635	.93%	-.4711	.93%	1.68%
.3534	5.1%	.2844	5.1%	1.05%
.0036	.00%	.0088	.00%	0.00%
.1866	1.68%	-.3439	1.68%	0.63%
-.3563	3.66%	.7215	3.66%	1.19%
-.0074	.00%	-.0178	.00%	0.00%
.8015	5.21%	-1.1798	5.21%	3.03%
-.1568	1.21%	.2627	1.21%	0.62%
-.0074	.00%	-.0178	.00%	0.00%
1.2331	1.48%	-1.1133	1.48%	2.30%
-.1551	.26%	.1689	.26%	0.32%
.0026	.00%	-.0110	.00%	0.00%
.4341	.59%	-.3572	.59%	1.10%
-.2120	.73%	.3914	.73%	0.27%
-.0779	.00%	-.0026	.00%	0.09%
-.0074	.00%	-.0178	.00%	0.00%
.0018	.00%	-.0123	.00%	0.00%
.0388	.18%	.4144	.18%	0.00%
-.0074	.00%	-.0178	.00%	0.00%
.2445	1.15%	-.2717	1.15%	1.17%
-.6554	3.43%	.7764	3.43%	3.08%
-.0074	.00%	-.0178	.00%	0.00%
.4625	2.33%	-.4410	2.33%	0.00%
-.5985	3.22%	.5891	3.22%	4.06%
-.0074	.00%	-.0178	.00%	0.00%
1.3193	2.58%	-1.1518	2.58%	4.28%
.4433	1.99%	-.5013	1.99%	1.97%
-.5280	3.60%	.5629	3.60%	4.00%
-.0074	.00%	-.0178	.00%	0.00%

QUESTIONNAIRE A TROIS MODALITES : Deuxième analyse présentée

Début de la matrice des réponses individuelles (les 28 premiers élèves de la population interrogée). Il s'agit d'un codage disjonctif total, mais les "1" ont été remplacés par des gros points. Au simple examen visuel, il est facile de détecter les trois modalités ; la modalité A concerne les individus de 1 à 10, la modalité B de 11 à 18 et la modalité C de 20 à 28. L'examen de la question "NUL" illustre bien le texte : en modalité A, cette question n'a pas été posée ; elle a au contraire été posée dans les modalités B et C ; et l'on voit que les "échecs" (codés 0010) sont plus nombreux, dans cet échantillon du moins, en modalité C qu'en modalité B. L'attraction des réussites

(forte : 1000, ou faible : 0100) apparaît effectivement dans l'analyse appliquée à toute la population interrogée (v. p. 13 :

	CUN	CDE	CTR	CQU	CCI	CSI	CSE	CHU	ORU	ORD	PRU	PRO	SUV	SUV	SUZ	INV	VBE	VBD	FRA	FAC	NUL	ADI	ADJ	COU	COU	ALG	CON	
1	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	
2	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
3	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
4	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
5	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
6	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
7	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
8	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
9	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
10	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
11	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
12	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
13	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
14	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
15	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
16	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
17	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
18	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
19	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
20	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
21	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
22	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
23	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
24	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
25	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
26	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
27	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
28	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000

Les sigles désignant les questions sont ceux du texte (voir p. 145).

INDEX-GLOSSAIRE

Avertissement

Cet index-glossaire ne prétend ni à l'autonomie, ni à l'exhaustivité d'un dictionnaire quant aux définitions données. Son but est de faciliter la lecture du texte en donnant un aperçu sur les sens de certains termes, ou sur le sens dans lequel ils sont employés dans le texte. Pour le vocabulaire psychologique, une possibilité d'approfondir est de consulter le "Vocabulaire de Psychopédagogie" par R. Lafon, P.U.F 1973.

ACTIVITES DIVERSIFIEES

La diversité est à entendre non comme l'utilisation d'êtres mathématiques variés, mais comme l'occurrence de tâches relevant de différents niveaux de classifications de type taxinomique, ou mettant en jeu les paramètres de classifications de type factoriel.

APPRENTISSAGE

Modification ou acquisition durable systématique d'un comportement ou d'une conduite. Ne pas confondre avec ENSEIGNEMENT.

ARRET DE LECTURE

Phénomène particulier d'oblitération par un lecteur d'une partie d'un texte. N'est prise en compte que la partie qui précède le premier endroit où la compréhension est possible. Exemple : Combien y a-t-il d'applications de $\{1 ; 2 ; 3\}$ vers $\{1 ; 2 ; 3\}$ | qui ne sont pas des bijections ? (le trait vertical indique une possibilité d'arrêt de lecture).

ATTITUDE

"Une attitude n'est pas une réaction, mais une disposition plus ou moins permanente, à réagir d'une certaine manière à un objet ou à une situation" (Newcomb)

CLASSIFICATION N.L.S.M.A (ou taxinomie N.L.S.M.A)

Voir l'annexe 2. Cette classification repose sur la COMPLEXITE COGNITIVE.

COMPLEXITE COGNITIVE

Expression employée par Wilson ([9] p. 676) dans sa présentation de la classification NLSMA, pour indiquer que la difficulté d'une tâche, observée aux résultats, n'est pas le critère d'élaboration de cette classification. On peut donc décréter par principe que la classification NLSMA constitue une définition pragmatique de la complexité cognitive. La référence à la notion de FAIT SPECIFIQUE permet d'être plus explicite. Pour une question donnée posée à l'issue d'un apprentissage donné, considérons la chaîne de faits spécifiques composant sa réponse (pour simplifier, nous supposons ici que cette chaîne est unique). Attribuons le niveau 1 aux faits spécifiques mémorisés et directement appelés par l'énoncé de la question, le niveau 2 aux faits spécifiques mémorisés appelés moyennant une transformation convenable de l'énoncé, et le niveau 3 aux faits spécifiques à contruire. Dénombrons les faits spécifiques de chaque niveau, nous associons ainsi à la chaîne un triplet d'entiers. L'ordre lexicographique sur ces triplets d'entiers constitue un modèle convenable pour la complexité cognitive telle qu'elle apparaît dans la classification NLSMA.

COMPORTEMENT

Selon le point de vue behavioriste, désigne les réactions observables de réponse à des stimuli. Dans un sens plus large, synonyme de CONDUITE. Nous avons fait dans le texte, par commodité, un emploi abusif de ce terme en l'utilisant pour désigner un élément d'une partition des réponses individuelles obtenues pour une question, ou un item (voir MODALITE).

CONDUITE

Réaction d'un sujet à une situation, en fonction de la signification qu'elle prend pour lui. Cette réaction constitue une réponse qui a un sens et s'exteriorise par des manifestations observables.

CURRICULUM

Synonyme de "programme scolaire". Employé dans le texte pour éviter la confusion avec l'acceptation de "programme" utilisée notamment en informatique.

DEROULEMENT

Dans le déroulement d'un algorithme interviennent les données et le paramètre temps. Un même algorithme donne éventuellement lieu à des déroulements différents lorsqu'il est appliqué à des données différentes (si l'algorithme comporte des tests, les sorties des tests sont tributaires des données).

DIDACTIQUE

Etude des phénomènes liés à l'enseignement, et indirectement à l'apprentissage. Ne pas confondre avec PEDAGOGIE. Exercice didactique : exercice ayant pour objectif la fixation de connaissances ou l'acquisition d'automatismes (cf. [27]).

DISTRACTEURS

Réponses incorrectes présentées dans un questionnaire à choix multiples en même temps que les réponses correctes.

ECHEC

Connotation d'insuffisance, ressentie par le sujet ou diagnostiquée par un observateur. Ne pas confondre avec ERREUR.

ENSEIGNEMENT

Ne pas confondre avec APPRENTISSAGE.

EQUILIBRAGE

Attraction définie au chapitre 3. Distinguer avec l'équilibration : en gros l'équilibrage est la tendance à équilibrer, l'équilibration la tendance à s'équilibrer.

ERREUR

Très haute vertu humaine. Ne pas confondre avec ECHEC.

EXPLICATION

Voir [37], chapitre 2, où sont distinguées les explications réductionnistes et l'explication structurale, avec pour élément commun l'idée de "réduction de l'arbitraire dans la description".

FAIT SPECIFIQUE

Connaissance atomique (en général non autonome). Voir annexe 2.

LABYRINTHE SYMBOLIQUE

Labyrinthe déterminé non par des contraintes spatiales mais par des contraintes symboliques. Un précurseur du genre est un casse-tête de Sam Loyd (1841-1911) (cf. Les casse-têtes mathématiques de Sam Loyd, par M. Gardner, Paris, Dunod 1970, tome 1 p. 71). Il s'agit d'un damier muni de cases numérotées. On part d'une case centrale et on cherche à atteindre exactement le bord du damier. Chaque déplacement consiste à sauter dans une direction quelconque (horizontale, verticale ou diagonale) un nombre de cases égal au numéro de la case déjà atteinte.

Un tel labyrinthe met en défaut la règle de sortie des labyrinthes spatiaux, attribuée à Euler.

METHODE CLINIQUE

Méthode qui repose sur l'observation de cas individuels. Dans cette méthode l'interprétation fonctionne en référence permanente aux individus qui ont provoqué les observations.

MODALITE

Modalité d'un questionnaire, questionnaire à plusieurs modalités : voir chapitre 4. Le terme "Modalité de réponse" est souvent employé pour désigner les classes de réponses déterminées lors d'un codage ; pour éviter des confusions, nous avons employé abusivement avec ce sens l'expression "COMPORTEMENT de réponse".

MOTIVATION

Dynamique selon laquelle un sujet cherche à réduire les tensions (inconscientes et conscientes) qui lui sont propres, à travers l'adaptation à la situation perçue.

PEDAGOGIE

Ensemble des projets, des interventions, des situations et des techniques mis en oeuvre par des individus ou des groupes pour transmettre à d'autres des connaissances, pour leur procurer de l'expérience ou pour les faire progresser. Ainsi entendu, le terme s'écarte de son étymologie (au point

qu'il est possible de parler par exemple de "pédagogie du troisième âge"). Dans son acceptation actuelle, ne pas confondre avec "sciences de l'éducation" ou avec DIDACTIQUE. En effet, l'action éducative ou la démarche d'un enseignement mettent en jeu d'une part des connaissances, et d'autre part des options économiques, idéologiques, philosophiques et sociales.

PEDAGOGIE ACTIVE

La pédagogie active érige en principe que l'apprentissage résulte de l'activité individuelle. Elle conduit donc à proposer aux élèves la pratique d'ACTIVITES DIVERSIFIEES. Ses limites sont peut-être indiquées par des observations d'individus qui ont, à un moment donné et dans un domaine donné, atteint un degré de compréhension mais non de production.

PLONGEMENT

Attraction conduisant à traiter une notion mathématique par simple assimilation à des notions antérieurement apprises (voir chapitre 3). Peut-être la première étape d'un processus d'intégration, mais peut-être aussi tendance persistante.

PROCEDURE DE RESOLUTION

Classe d'algorithmes de résolution. Exemple : La résolution de divers systèmes d'équations peut être obtenue par la même procédure de substitution.

PROFIL

Vecteur ligne d'une matrice de données convenablement réduite. A partir d'une matrice initiale $I \times J$ à termes positifs ou nuls, on forme une matrice $(f_{i,j})$ telle que $\sum_{i,j} f_{ij} = 1$ en multipliant par une constante. Le profil de l'élément i sur J est le vecteur ligne dont la $j^{\text{ème}}$ composante est $f_{ij} / \sum_1 f_{il}$. Cette division par la "masse" totale de la ligne permet des confrontations entre les lignes, indépendantes des masses respectives de ces lignes. L'analyse des correspondances (voir chapitre 4) utilise une distance entre profils. Grâce à des méthodes appropriées de codage, on peut dresser des profils à partir d'observations prenant en compte des variables non nécessairement quantitatives (exemples : couleur des yeux, activité professionnelle).

QUESTIONNAIRE CENTRE

Un principe d'incertitude (exemple : impossibilité d'effectuer simultanément une évaluation de questions et une évaluation d'élèves) exige qu'un questionnaire soit élaboré en fonction d'un objectif déterminé. Il est alors dit centré.

QUESTIONNAIRE DELIMITE

Un questionnaire est délimité si les consignes différentes qu'il propose sont en petit nombre, ainsi que les thèmes des questions posées. L'intérêt de présenter des questionnaires délimités est double : gain en temps de compréhension des consignes, d'où possibilité de répondre à davantage de questions, réduction de l'effet d'échauffement (caractérisé par des confusions de termes) à un petit nombre de questions.

STRATEGIE DE RESOLUTION

Phase qui précède la résolution proprement dite. Exemples : recherche d'invariances dans un énoncé, décision d'avoir recours à la géométrie analytique pour traiter telle question, recours à des cas particuliers.

TAXINOMIE (ou Taxonomie)

Etude des classifications hiérarchisées (ordre en général non total) et des méthodes d'élaboration de ces classifications.

ZEBULE

Objet plus long que large.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. ADDA L'incompréhension en mathématique et les malentendus
Educational Studies in Mathematics (Dordrecht, Boston) 6, 1975.
- [2] A. BENSABER Sur le traitement des enquêtes pédagogiques et la reconstit-
tution de données manquantes systématiques - Thèse
3^e cycle Université de Paris VI 1976.
- [3] J.P BENZECRI L'analyse des données - Tome 1. La Taxinomie
Tome 2. Les correspondances
Paris, Dunod 1973.
- [4] J.P BENZECRI La place de l'a priori dans les sciences humaines.
Paris, Encyclopédia Universalis (Organum).
- [5] P. BERTIER Analyse des données multidimensionnelles - Paris,
J.M BOUROCHE P.U.F, 1975.
- [6] P. BERTIN La graphique. Revue Communications (p. 169 à 185)
Paris, Seuil, 1970. (Cet article se trouve reproduit
dans l'Encyclopedia Universalis).
- [7] C.BLOCH Etude de quelques comportements heuristiques au moyen
du test de Rorschach - Influence d'une modification de
la consigne. Thèse 3^e cycle (psychologie). Paris,
Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, 1975.
- [8] B.S BLOOM Taxonomie des objectifs pédagogiques. Tome 1 : Le
domaine cognitif. Montréal. Education nouvelle 1969.
- [9] BLOOM MADAUS Handbook of formative and summative evaluation of student
HASTING learning. New York, Me Graw Hill 1971.

- [10] G. BROUSSEAU Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels. Enseignement élémentaire des mathématiques n° 13. Publication de l'I.R.E.M de Bordeaux 1972-73.
- [11] J.S BRUNER Der Prozess der Erziehung - 2. Aufl. Berlin 1972.
- [12] P. BUISSON Les élèves de 5^e et les nouveaux programmes de mathématique, photocopié, I.R.E.M Rouen 1973.
- [13] P. BUISSON Les élèves de 4^e et les nouveaux programmes de mathématique, photocopié, I.R.E.M Rouen 1974.
- [14] P. BUISSON Evaluation dans le premier cycle (12-16 ans) - Educational Studies in Mathematics, Vol. 6, n° 4 (mars 1976).
- [15] L. CHOPARD-LALLIER, F. FLESCHE, J.C KEYLING, G. MEHL, F. PLUVINAGE Une analyse comparative de sujets de bacc. Paris, Bulletin APM n° 305, 1976.
- [16] R. DUVAL Pas d'interprétation hâtive.
F. PLUVINAGE Paris, Bull. APM n° 297, 1975.
- [17] R. DUVAL Enquêtes et description des démarches intellectuelles
F. PLUVINAGE des élèves en mathématique. Compte-rendu du colloque Inter I.R.E.M, I.R.E.M Bordeaux, 1975.
- [18] R. DUVAL Une grille d'analyse et son application à deux manuels
F. PLUVINAGE scolaires - Paris, Bull. APM n° 301 - 1975.
- [19] R. DUVAL Démarches individuelles de réponse en mathématique
F. PLUVINAGE A paraître dans Educational Studies in Mathematics Dordrecht, Boston.
- [20] J. FLORSCH Un programme de dépouillement d'enquêtes et son mode
J.P WEBER d'emploi (programme CATHE-RINE), Photocopié, Centre de Calcul de l'Esplanade, Strasbourg, 1974.
- [21] P. FRAISSE Traité de Psychologie expérimentale (9 fascicules)
J. PIAGET 2^e Edition, Paris, PUF, 1967.

- [22] FREUDENTHAL Mathematic as an educational task - Dordrecht.
D. Reidel Publ. C°, 1973.
- [23] G. GLAESER Mathématiques pour l'élève professeur , 2^e Edition,
Paris, Hermann, 1973.
- [24] G. GLAESER Note sur l'article "Vecteurs, scalaires et grandeurs
physiques" Revue de la Société Française de Physique
Encart pédagogique. Sept. 1973.
- P. GRECO Voir Fraisse-Piaget ([21]), fasc. VII.
- [25] J.P GUILFORD The Nature of human intelligence, New York,
Mc. Graw Hill 1967.
- [26] A. HAEFLIGER Variétés (non séparées) à une dimension et structures
G. REEB feuilletées du plan p. 107-125, l'Enseignement Mathéma-
tique (Genève), 3, 1957.
- [27] I.R.E.M de Le Livre du Problème, tome 1, Lyon, Cedic, 1974 .
Strasbourg
- [28] I.R.E.M de (Une équipe de l'I.R.E.M) Sur l'assimilation des pro-
Strasbourg grammes de 6^e-5^e. Educational Studies in Mathematics
(Dordrecht, Boston) 5, 1973.
- [29] I.R.E.M de (Une équipe de L'I.R.E.M) L'acquisition des structures
Strasbourg numériques en fin de 3^e. Educational Studies in
Mathematics (Dordrecht, Boston) 5, 1974.
- [30] P. KANER Back to square one, polycopié Exeter, 1974. Traduit
en français dans NICC 19 (Bruxelles), 1975.
- [31] G. DE LANDSHEERE Introduction à la recherche en éducation, 3^e édition
Armand Colin, 1970.
- [32] G. DE LANDSHEERE Evaluation continue et examens. Précis de docimolo-
gie. Bruxelles. Paris, Labor. et F. Nathan, 1974.
- [33] G. DE LANDSHEERE Définir les objectifs de l'éducation. Collection
Pédagogie d'aujourd'hui - Paris, P.U.F, 1975.

- [34] F. PLUVINAGE Notion de variable. Compte rendu du Colloque Inter I.R.E.M de Pont-à-Mousson - Bull. Inter I.R.E.M (France), n° spécial, février 1975.
- [34] G. PCLYA La découverte des mathématiques. Les modèles. Une méthode générale. Traduct. français : Collection Sigma Paris, Dunod, 1967.
- [35] R. THOM Les mathématiques "modernes". Une erreur pédagogique ou philosophique. Paris, L'âge de la science - Vol. III n° 3, 1972.
- [36] R. THOM Modèles mathématiques de la morphogenèse. Paris, 10/18 1974.
- [37] Y. TCURNEUR Taxonomie des objectifs pédagogiques : Etude du modèle de la NLSMA - Mathematica et Paedagogia (Bruxelles) n° 57, 1972.
- [38] WILSON Voir BLCCM - HASTING - MADAUS ([9]).
- [39] E. WITTMANN Grundfragen des Mathematikunterricht - Vieweg - Braunschweig 1974.
- [40] E.C ZEEMANN Topology of the brain - Londres, Medical Research Council, 1965.

E R R A T A

Page	Ligne (db= depuis le bas)	Au lieu de	Lire
2	20	l'intelligence	l'intelligence
3	22	Tourneur ([38])	Tourneur ([37])
3	22	enseignements	enseignement
5	21	m'aitait	m'était
10	11 db	pertubations	perturbation
15	6	Polya ([35])	Polya ([34])
20	4	$f_n(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$	$f_n(x) = \frac{P_n(x^2)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$
25	21	$A > B$ and $B > A$	$A \subset B$ and $B \subset A$
27	9 db	cette spécifique	cette faute spécifique
30	9	l'élément C	l'élément c
32	3	distractions	distracteurs
35	figure		
36	4	temporel	temporel qui
45	16	(p.)	(p. 140)
50	2	poivr	pour
51	4	en page 3	en page 5
55	17 db	Thom ([37] p. 201)	Thom ([36] p. 201)
62	7 et 11	occurrences	occurrences
63	4	$m_i = (\sum_{j \in J} k(i, j)) / \sum_{i' \in I, j \in J} k(i', j)$	$m_i = (\sum_{j \in J} k(i, j)) / \sum_{i' \in I, j \in J} k(i', j)$
65	2	(p. 61)	(p. 58)
66	10	des deux plans orthogonaux Δ .	de deux plans orthogonaux à Δ .
72	9	$i > n_1$ et $i' > n$	$i > n_1$ et $i' > n_1$
73	11db	ou très peut	ou très peu

E R R A T A (suite)

Page	Ligne (db=depuis le bas)	Au lieu de	Lire
75	13	(cf. [32])	(cf. [19])
77	19 et 20	lune correspond à la motivation A et l'autre à la motivation B.	l'une correspond à la modalité A et l'autre à la modalité B.
85	9	(voir p.)	(voir p.45)
86	7	en page	en page 97
89	12db	chiffres près la virgule	chiffres après la virgule
101	placer 2 et 1db en 7 et 6db		
102	après 1 db		<p><u>Remarque 1</u> : 13% des élèves de 5e n'entrent pas en 4e. Les augmentations observées ici correspondent à un taux nettement supérieur à cette élimination.</p> <p><u>Remarque 2</u> : pour un tel tableau de rangs (12 objets rangés selon 4 classements), on peut avoir recours au coefficient de concordance W de Kendall ([S. Siegel, Non-paramétrie Statistics..., Mc Graw Hill, 1956]). Ici $W = 0,94$ (très proche de 1). Bien sûr, au seuil .01, la valeur critique χ^2 à 11 degrés de liberté, qui est 24,72, est largement dépassée par $4 \times (12-1) \times 0,94 = 41,38$.</p>
106	Tableaux	Item 1 (approcher 2) Item 2 (approcher 4)	Item 1 (approcher 4) Item 2 (approcher 2)
108	11db	J. Adda	J. Adda ([1], p. 317)
161	8db entre 7 et 6db	d'une formation	d'une formulation
	3db	Aptitude à interpréter les données	B6 Aptitude à interpréter les données C3 Aptitude à analyser les données
177	2	acceptation	acception

ADDITIF.

A.1. Généralités didactiques et statistiques.

A.1.1. Présentation de cet additif.

L'objet de cet additif est de compléter le texte, d'une part en approfondissant l'étude théorique effectuée sur l'analyse des questionnaires à plusieurs modalités *, d'autre part en présentant des analyses supplémentaires, utilisables pour des vérifications ou même des recherches originales. Pour l'étude théorique, le texte (pages 65 à 79) considère les profils individuels, ce qui revient à envisager les lignes d'un tableau de résultats. Dans cet additif, on considère les colonnes. Une lecture autonome est donc possible. Mais les tableaux-types, présentés pages 69 et 70, peuvent dans ce cas être consultés au préalable pour servir de support "concret" à la réflexion.

Nous voyons un double intérêt à cet additif. Pour le praticien de l'analyse des données, il offre une étude détaillée des invariants de nos analyses, c'est-à-dire des phénomènes présents quels que soient les résultats des individus interrogés. Pour l'utilisateur, il met en évidence, directement ou par intermédiaires interposés, un certain nombre de précautions nécessaires à l'emploi et lors de l'interprétation. Nous espérons que soient ainsi évitées des erreurs inutiles.

Il ne serait pas exact de m'attribuer seul la paternité de cet additif. Pour les études théoriques comme pour les analyses effectives, une grande partie du travail est le fruit d'une collaboration entre J.C. Turlot et moi-même. Au professeur Benzécri revient un double rôle d'instigation et de mise en forme de la partie théorique.

A.1.2. Réussite et échec.

Les questions pour lesquelles nous souhaitons voir les analyses statistiques apporter des éléments de réponse sont relatives à des variations : comment se modifient les réponses individuelles à des items sous l'effet de changements dans l'organisation du questionnaire ou l'énoncé de ces items ? Et, dans les cas où les réponses individuelles sont effectivement influencées par de telles modifications, est-ce du côté "réussite" ou du côté "échec" ?

* Ce signe renvoie à l'index-glossaire, pages 173 à 178.

La première des deux questions ci-dessus n'est pas particulière à la didactique ; elle pourrait aussi bien être posée par exemple à propos d'enquêtes d'opinions. Des enquêtes "voisines", dans un sens à préciser, conduisent-elles à des réponses voisines ? La seconde des deux questions est au contraire beaucoup plus liée aux phénomènes d'apprentissage. Pour ceux-ci, il est possible d'utiliser des critères d'appréciation des réponses, conduisant à des regroupements des réponses en classes d'équivalence. Le critère le plus simple (et aussi le plus justifié à mon avis) consiste, pour chaque question, à constituer une classe formée des réponses qui contiennent certains éléments décrétés comme caractéristiques ; les réponses restantes sont regroupées en une seconde classe. L'une des deux classes est nommée "réussite" et la seconde "échec" à la question envisagée. En cas de besoins, de nouvelles dichotomies peuvent être effectuées sur l'une, l'autre ou les deux classes "réussite" et "échec" ; la technique des éléments supplémentaires, en analyse factorielle des correspondances, permet de bien suivre ces subdivisions successives lors de l'interprétation.

La détermination, pour chaque question d'un questionnaire, des éléments caractéristiques des réponses est un crible de réussite. Plusieurs cribles de réussite peuvent être utilisés pour un même questionnaire, chacun d'eux donnant lieu à une analyse. Deux remarques méritent d'être faites. La première est que les notions de réussite et d'échec ainsi déterminées par l'expérimentateur peuvent s'écarter très sensiblement de l'acception courante. Ainsi nous est-il arrivé de distinguer, dans un questionnaire, réussite forte et réussite faible, ce qui conduisait à deux cribles de réussite différents (voir [29]) ; la réussite faible englobait des cas qui, au sens usuel, seraient qualifiés d'échecs. La deuxième remarque est que l'utilisation éventuelle de plusieurs cribles de réussite, et la possibilité de subdivisions successives, font qu'il n'y a pas ici contradiction avec ce que nous avons indiqué en annexe dans "Démarches de réponse..." ([19]) : "ne pas se contenter de relever les réussites et échecs à chaque question et les interpréter isolément" (de toute façon, l'analyse factorielle s'oppose à cette dernière partie de l'assertion, puisqu'elle prend en compte des croisements de réponses).

La pratique montre que l'utilisation d'un crible de réussite pour un questionnaire simple suffisamment limité* et centré* conduit généralement, en analyse factorielle des correspondances, à l'obtention d'un premier axe qui est celui de la réussite ou l'échec d'ensemble au questionnaire.

On reconnaît cet axe à ce que toutes les réussites y ont une coordonnée de même signe, et tous les échecs une coordonnée de même signe opposé à celui des réussites. Dans le cas où l'on voudrait noter chaque individu sur ses résultats complets, cet axe serait de plus celui qui correspondrait au meilleur choix au sens des moindres carrés, compte-tenu des réponses fournies par toute la population interrogée. Une façon de préciser le rôle de cet axe est de dire que, si on ne connaît d'un individu qu'une seule réponse et si cette réponse se trouve classée comme significative selon cet axe, alors on est conduit à une présomption sur les résultats d'ensemble de cet individu.

La notion de réussite ainsi précisée, revenons aux questions que nous nous étions posées sur les variations.

A.1.3. Sur les analyses de questionnaires à plusieurs modalités.

L'utilisation de questionnaires à plusieurs modalités* est sans doute, pour des études didactiques, un moyen non unique mais irremplaçable. Cependant l'analyse des réponses à de tels questionnaires soulève des problèmes particuliers. La méthode d'analyse citée dans le texte est nommée "simple enregistrement des résultats" (voir p. 61), mais il apparaît que l'expression la plus appropriée est : analyse apparente. En effet, ce que cette analyse prend en compte est tout simplement ce qui est apparent sur les cartes perforées comportant les réponses individuelles codées : là où une question n'a pas été posée, la colonne correspondante reste blanche, et le "blanc" est un caractère en informatique (comme en imprimerie d'ailleurs). Ainsi interviennent dans l'analyse à la fois les réponses réellement fournies par la population interrogée et des simili-réponses, dues en fait à l'expérimentateur, correspondant à ces blancs : non-réponse-parce-que-question-non-posée.

L'analyse apparente n'a évidemment d'intérêt que comme révélateur d'une analyse réelle, n'ayant pour support que les véritables réponses individuelles. Le contrôle du nuage des individus que propose le texte (voir par exemple p. 147) peut être considéré comme un aspect de la confrontation analyse apparente-analyse réelle, dont l'étude approfondie constitue l'objet des paragraphes suivants.

Une validation des résultats peut elle-même être obtenue comme résultat de nouvelles analyses. Celles qui sont présentées ici le sont à ce titre de complément et de contrôle, mais nous n'excluons pas de les utiliser à l'avenir, sur de nouveaux questionnaires, pour obtenir des résultats. Il s'agit des méthodes que nous avons nommées :

- 1° L'analyse projetée,
- 2° L'analyse scindée.

L'analyse projetée est un cas particulier de celle décrite dans [3] (chapitre [Red. Tens.]) ; l'analyse scindée fait appel à la technique des éléments supplémentaires tout en prenant en compte de plusieurs façons les mêmes questions. Mais ces analyses, ainsi que des résultats obtenus, ne sont étudiées qu'après l'analyse apparente que nous allons maintenant envisager. Pour la compréhension de ce qui suit, il est important de remarquer que dans nos tableaux de résultats, formés de 0 et de 1, chaque colonne s'interprète comme la fonction caractéristique d'une partie de la population interrogée ($f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction caractéristique de $A \subset I$ si $f(x) = 0$ pour $x \notin A$ et $f(x) = 1$ pour $x \in A$). Il convient également de ne pas oublier que nous utilisons des codages disjonctifs complets, c'est-à-dire que tous les individus donnent lieu à la même somme marginale.

A.2. Profil d'une partie d'un ensemble fini à éléments équipondérés.

A.2.1. Notations et définitions.

Soit I un ensemble fini à n éléments. Étant donné un sous-ensemble $a \subset I$, on désignera par $|a|$ le nombre d'éléments de a .

Définition. On appelle profil d'une partie non vide a de I , et on désigne par a_I , la loi de probabilité qui a pour support a et pour laquelle tous les éléments de a ont même masse.

Soit χ_a la fonction caractéristique de a . Il résulte de la définition que $a_i = \frac{1}{|a|} \chi_a(i)$ et $a_I = \{a_i, i \in I\}$. (Toutefois, on n'écrit pas $a_I = \frac{1}{|a|} \chi_a$, car a_I est une mesure et non une fonction). Autrement dit, a_i est égal à $1/|a|$ si $i \in a$ et à 0 sinon, ce que nous écrirons symboliquement :

$$a_i = \langle i \in a \rangle \frac{1}{|a|} \diamond 0.$$

(lecture: a_i égale, si $i \in a$, alors $1/|a|$, sinon 0).

Cas particuliers : $\{i\}_I$, profils des singletons, et I_I , profil de la partie pleine.

a) Singletons : $\{i\}_{i'} = \delta_{ii'}$, (symbole de Kronecker).

b) Partie pleine : $I_i = \frac{1}{n}$ pour tout $i \in I$.

Simplexe des profils : Dans \mathbb{R}_I , espace des mesures dans I , l'ensemble des profils sur I forme un simplexe \mathcal{P}_I .

Pondération et métrique : Au profil a_I sera affecté la masse, notée m_a , donnée par $m_a = |a|/n$. Cette masse est la fréquence relative de a dans I . L'espace \mathbb{R}_I est classiquement muni de la métrique χ^2 de centre I_I , associée au produit scalaire :

$$\langle p_I, q_I \rangle = \sum_I p_i q_i / I_i = \sum_I n p_i q_i.$$

Au coefficient n près, il s'agit de la métrique usuelle de \mathbb{R}^n . Désormais nous supposons \mathbb{R}_I muni de cette métrique du χ^2 de centre I_I .

A.2.2. Relations entre parties de I et propriétés géométriques des profils.

On désigne par $\mathcal{P}'(I)$ l'ensemble des parties de I privé de la partie vide. Nous énonçons d'abord les propriétés relatives à deux profils de parties, et, pour commencer, celles qui résultent de l'inclusion ensembliste.

Propriété P1.

$$\forall (x, y) \in \mathcal{P}'(I) \times \mathcal{P}'(I), \quad (x \subset y) \Rightarrow (\langle x_I, y_I \rangle = 1/m_y).$$

$$\text{En particulier, pour tout profil } x_I, \text{ on a } \|x_I\|^2 = \langle x_I, x_I \rangle = 1/m_x.$$

Propriété P'1.

$$\forall (x, y) \in \mathcal{P}'(I) \times \mathcal{P}'(I), \quad (x \subset y) \Rightarrow (\|x_I - y_I\|^2 = \frac{1}{m_x} - \frac{1}{m_y}).$$

Propriété P2.

$$\forall (x, y) \in \mathcal{P}'(I) \times \mathcal{P}'(I), \quad (x \cap y = \emptyset) \Rightarrow (\langle x_I, y_I \rangle = 0).$$

Propriété P3. (barycentrique).

$$\forall (x, y) \in \mathcal{P}'(I) \times \mathcal{P}'(I), \quad (x \cap y = \emptyset) \Rightarrow (m_x x_I + m_y y_I = (m_x + m_y)(x \cup y)_I).$$

Cette propriété barycentrique est complétée par l'égalité : $m_x + m_y = m_{x \cup y}$.
La vérification des propriétés P1 à P3 est facile.

Propriété P4. (propriété d'inertie).

$$\forall (x, y) \in \mathcal{P}'(I) \times \mathcal{P}'(I), \quad (x \cap y = \emptyset) \Rightarrow (m_x \|x_I - (x \cup y)_I\|^2 + m_y \|y_I - (x \cup y)_I\|^2 = 1).$$

Démonstration : On sait que, si G est barycentre de (A, α) et (B, β), alors

$$\alpha GA^2 + \beta GB^2 = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} AB^2.$$

Avec les notations présentes, P3 permet donc d'écrire :

$$m_x \|x_I - (x \cup y)_I\|^2 + m_y \|y_I - (x \cup y)_I\|^2 = \frac{m_x m_y}{m_x + m_y} \|x_I - y_I\|^2.$$

Compte-tenu de P2 et P1, cette dernière expression a bien pour valeur 1.

Cinétiquement : La propriété P4 signifie que le nuage des deux points (x_I, m_x) et (y_I, m_y) a, par rapport à son centre de gravité (qui est $(x \cup y)_I$), une inertie totale égale à 1.

Nous allons maintenant envisager les propriétés mettant en jeu plusieurs parties.

Propriété P5.

$$\forall (x, y, z) \in \mathcal{P}'(I) \times \mathcal{P}'(I) \times \mathcal{P}'(I), \quad ((x \subset y) \text{ et } (y \cap z = \emptyset)) \Rightarrow (\langle x_I - y_I, z_I - y_I \rangle = 0).$$

Géométriquement : le triangle $\{x_I, y_I, z_I\}$ est rectangle en y_I . Cette propriété est une conséquence simple de P2 et P1.

Proposition 1.

$\forall (x, y, z) \in \mathcal{P}'(I) \times \mathcal{P}'(I) \times \mathcal{P}'(I), (y \cap z = z \cap x = x \cap y = \emptyset) \Rightarrow$

(1) $m_{x \cup y \cup z} = m_x + m_y + m_z$,

(2) $m_x x_I + m_y y_I + m_z z_I = (m_x + m_y + m_z) a_I$, avec $a = x \cup y \cup z$,

(3) $\langle x_I - a_I, y_I - z_I \rangle = \langle y_I - a_I, z_I - x_I \rangle = \langle z_I - a_I, x_I - y_I \rangle = 0$,

(4) $m_x \|x_I - a_I\|^2 + m_y \|y_I - a_I\|^2 + m_z \|z_I - a_I\|^2 = 2.$

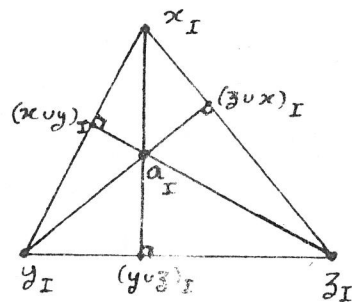


Figure : illustration géométrique de la proposition.

Géométriquement : Le nuage $\{(x_I, m_x), (y_I, m_y), (z_I, m_z)\}$ a pour centre de gravité l'orthocentre du triangle $\{x_I, y_I, z_I\}$. Les pieds des hauteurs de ce triangle sont les centres de gravité des sous-nuages formés de deux des trois points.

L'inertie totale du nuage par rapport à son centre de gravité est égale à 2.

Seule l'égalité (4) n'est pas immédiate. Pour la démontrer, on peut appliquer le théorème de Huyghens au sous-nuage $\{(y_I, m_y), (z_I, m_z)\}$, dont l'inertie par rapport à $(y \cup z)_I$ est égale à 1 (d'après P4). Comme $(y \cup z) \cap x = \emptyset$, l'inertie du nuage $\{(y \cup z)_I, m_y + m_z), (x_I, m_x)\}$ par rapport à a_I est aussi égale à 1. Et ces deux inerties sont à ajouter, d'où le résultat.

Généralisation :

Cette proposition se généralise immédiatement, par récurrence, au cas d'une famille de p parties de I deux à deux disjointes. En particulier :

- la droite joignant un point du nuage au centre de gravité du nuage est orthogonale au plan affine (de dimension $(p-2)$) déterminé par les $(p-1)$ autres points du nuage ;
- l'inertie totale du nuage par rapport à son centre de gravité est égale à $(p-1)$.

A.2.3. Application aux tableaux disjonctifs complets.

Dans ce paragraphe, on applique les résultats de A.2.2. pour retrouver des résultats connus.

Soit $\{k(i,j), (i,j) \in I \times J\}$ un tableau fini formé de 0 et de 1. On dira que I est l'ensemble des lignes et J l'ensemble des colonnes du tableau. Chaque colonne j s'interprète comme la fonction caractéristique d'un sous-ensemble de I , que l'on peut encore, par abus, noter j (il n'y a pas de confusion possible, car $j \in J$ ou $j \subset I$ selon le cas). Le tableau est dit disjonctif complet si les colonnes peuvent être regroupées en questions, soit $J = \cup \{J_q, q \in Q\}$, de telle sorte que pour chaque question les j correspondant forment une partition de I .

Pour un tableau disjonctif complet, la masse de chaque élément $i \in I$ est égale au nombre de questions. Par suite de cette équipondération, le tableau f_I^j , dit en analyse des correspondances tableau des profils des j sur I , n'est autre que le tableau des profils des sous-ensembles j de I (au sens défini ci-dessus). Et la loi marginale f_I n'est autre que le profil I_I de la partie pleine.

Les résultats de A.2.2. peuvent donc être appliqués ici. Pour chaque question, le nuage $\{(f_I^j, f_j), j \in J_q\}$, avec $f_j = \frac{|j|}{n \times |Q|} = \frac{m_j}{|Q|}$, aura alors

- pour centre de gravité f_I ,
- pour masse totale $\frac{1}{|Q|}$,
- pour inertie par rapport à son centre $(|J_q| - 1)/|Q|$

(on divise par $|Q| = \text{card } Q$ les valeurs obtenues en A.2.2.).

L'inertie totale du nuage $\mathcal{N}(J)$ associé à la correspondance k_{IJ} est donc égale à

$$\sum \{(\text{card } J_q - 1)/\text{card } Q, q \in Q\} = (\text{card } J - \text{card } Q)/\text{card } Q.$$

A.2.4. Décomposition de l'espace des profils associé à une partition.

Pour examiner le nuage $\mathcal{N}(J)$ déterminé par un questionnaire à plusieurs modalités, nous construisons ici une décomposition de l'espace \mathbb{R}_I des mesures sur I (ensemble fini).

A.2.4.1. Notations de sous-espaces particuliers de \mathbb{R}_I .

On désignera par :

A_I : l'hyperplan affine des mesures de masse totale 1 (support du simplexe des lois de probabilité sur D),

H_I : la direction de A_I (i.e. hyperplan des mesures de masse totale nulle).

Soit X une partie de \mathbb{R}_I , on désignera par

LX : le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}_I engendré par X ,

AX : le support affine de LX (mesures de support X et de masse totale 1),

DX : la direction de AX .

Remarque : $\forall x \in X, DX = L \{(x' - x), x' \in X\}$.

Soit S un ensemble de parties de I : $S \subset \text{Part } I$. Chaque élément $s \in S$ a un profil $s_I \in \mathbb{R}_I$. Pour abrégé, nous poserons

$$LS = L\{s_I, s \in S\},$$

$$AS = A\{s_I, s \in S\},$$

$$DS = D\{s_I, s \in S\}.$$

Soit s une partie de I : $s \in \text{Part } I$. Cette partie s est une réunion de singletons (deux à deux distincts) : $s = \cup \{\{i\}, i \in s\}$. Pour abrégé, nous poserons

$$L\{s\} = L\{\{i\}_I, i \in s\},$$

$$A\{s\} = A\{\{i\}_I, i \in s\},$$

$$D\{s\} = D\{\{i\}_I, i \in s\}.$$

Remarque : $\forall x \in \mathcal{P}'(D), (x \subset s) \Rightarrow (x_I \in A\{s\})$.

A.2.4.2. Position dans le cas de partitions.

Proposition 2.

Soit S une partition de I . Alors H_I est somme directe orthogonale de DS et des $D\{s\}$ pour $s \in S$.

Démonstration.

On utilise essentiellement les propriétés de A.2.2. De la propriété P2, il résulte que $L\{s\}$ est orthogonale à $L\{s'\}$ si s et s' sont deux éléments de S distincts. Et par suite $D\{s\}$ et $D\{s'\}$ sont orthogonaux. D'autre part, d'après une remarque de A.2.4.1., $DS = L\{(s'_I - s_I), s' \in S\}$, s étant un élément arbitraire fixé de S ; de même $D\{s\} = L\{(x_I - s_I), x \subset s\}$. Grâce à la propriété P5, on peut affirmer qu'alors tout triangle $\{x_I, s_I, s'_I\}$ est rectangle en s_I . Ceci établit, pour tout $s \in S$, l'orthogonalité de $D\{s\}$ avec DS . Et pour des raisons évidentes de dimension, DS et la famille des $D\{s\}$, $s \in S$, engendrent alors bien H_I tout entier.

A.3. Les questionnaires à plusieurs modalités.

Rappelons que la population complète interrogée est divisée a priori en plusieurs séries (en général nous nous arrêtons à trois séries). Dans chaque série, les individus répondent au même questionnaire, légèrement différent du questionnaire proposé aux autres séries. Il se trouve des questions posées seulement à certaines des séries. Nous décrivons ici l'analyse apparente, indiquée en A.1.3.

A.3.A. Réponses et questions-non-posées.

L'ensemble I des individus est muni d'une partition S (en général nous utilisons des partitions en trois classes).

Soit S' un sous-ensemble de S , nous désignerons par $Q^{S'}$ l'ensemble des questions posées aux classes de S' et non posées aux classes de $S \setminus S'$. De la sorte, l'ensemble des questions se décompose en :

$$Q = \cup \{Q^{S'}, S' \in \text{Part } S\}.$$

En fait il convient de considérer comme vide $Q^{S'}$ pour $S' = \emptyset$; il s'agit des questions qui n'ont été posées à personne ! De plus, il peut se faire que pour certains S' non vides, $Q^{S'}$ soit vide. Par exemple $Q^S = \emptyset$ signifie qu'aucune question n'a été posée dans toutes les modalités du questionnaire considéré. Au contraire, $Q^{S'} = \emptyset$ pour $S' \neq S$ signifierait qu'il s'agit d'un questionnaire simple.

Après avoir envisagé les questions, il convient de passer aux réponses, qui déterminent le tableau des résultats. Pour ce faire, il convient de distinguer les questions de Q^S et celles des $Q^{S'}$ pour $S' \neq S$.

- Pour les questions de Q^S , on procède comme d'habitude. Si $q \in Q^S$, l'ensemble des réponses est partagé en un certain nombre de classes, souvent appelées les modalités de réponse, que nous désignerons par J_q^p .
- Pour les questions de $Q^{S'}$, $S' \neq S$, nous considérons comme précédemment les modalités de réponse J_q^p . Mais nous leur adjoignons la non-passation de la question, que nous désignons par q^o . Le 1 ainsi affecté, dans le tableau des résultats, aux individus à qui la question n'a pas été posée, conserve le caractère disjonctif complet d'usage. En revanche, cet additif que nous écrirons symboliquement

$$J_q^o = J_q^p \cup \{q^o\}$$

rend a priori les données hétérogènes : en effet, les J_q^p expriment le comportement des sujets interrogés, alors que q^o exprime la décision de l'expérimentateur (après laquelle tous les sujets de certaines séries seront partiellement identifiés). C'est pourquoi nous avons souligné la nécessité de considérer que l'analyse de la correspondance définie par un tel tableau est une analyse apparente. En définitive, les colonnes-réponse de cette analyse apparente sont :

$$J = (\cup \{J_q^p, q \in Q^S\}) \cup (\cup \{J_q^o, q \in Q - Q^S\}).$$

A.3.2. Le nuage des modalités.

Nous consacrerons ce paragraphe essentiellement à l'étude des tableaux issus de questionnaires à trois modalités et constitués comme décrit ci-dessus. Il s'agit essentiellement d'appliquer à ce cas les résultats vus en A.2. Ici $S = \{a, b, c, \}$, et les cas à examiner sont donc $Q^{\{a\}}$, $Q^{\{b, c\}}$ et Q^S qui, à des permutations de S près, représentent toutes les possibilités de questions. Nous allons situer les réponses par rapport au triangle $\{a_1, b_1, c_1\}$ (voir A.2.2, proposition).

A.3.2.1. Les questions de $Q^{\{a\}}$.

Pour que $q \in Q^{\{a\}}$, $q^o = b \cup c$ et pour tout $j \in J_q^P$ (réponse effective), on a $j \subset a$, puisque les réponses sont le seul fait d'individus de la série a . D'après A.2.2., propriété P5, la droite $(a_I f_I^j)$ est perpendiculaire à $(a_I b_I)$, ainsi qu'à $(a_I c_I)$. Il en résulte que cette droite est orthogonale au plan $(a_I b_I c_I)$, comme illustré sur la figure.

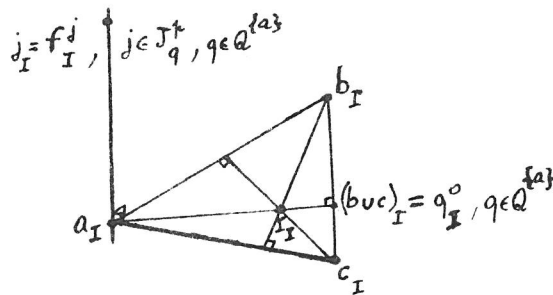


Figure : un profil de réponse à une question de $Q^{\{a\}}$.

La masse à attribuer au profil $f_I^j = j_I$ est, d'après la marge du tableau k_{IJ} :

$$f_j = \frac{m_j}{\text{card } Q} \quad (\text{cf. A.2.3.}). \text{ Ainsi le nuage des réponses effectives à la question } q, \mathcal{N}(J_q^P) = \{(f_I^j, f_j), j \in J_q^P\}, \text{ a}$$

- pour masse totale $m_a / \text{card } Q$,
- pour centre de gravité a_I ,
- pour inertie par rapport à a_I la valeur $(\text{card } J_q^P - 1) / \text{card } Q$.

Le nuage $\mathcal{N}(J_q)$ s'obtient par adjonction à $\mathcal{N}(J_q^P)$ du point pondéré $(q_I^o, m_{b \cup c} / \text{card } Q) = ((b \cup c)_I, m_{b \cup c} / \text{card } Q)$. Or l'inertie par rapport à I_I du nuage

$\{(a_I, m_a / \text{card } Q), ((b \cup c)_I, m_{b \cup c} / \text{card } Q)\}$ est égale à $1 / \text{card } Q$ (cf. §A.2.2, P4).

Donc, d'après le théorème de Huyghens, l'inertie par rapport à I_I du nuage $\mathcal{N}(J_q)$ est égale à $(\text{card } J_q - 1) / \text{card } Q = \text{card } J_q^P / \text{card } Q$.

Il en est de même pour les questions de $Q^{\{b\}}$ et de $Q^{\{c\}}$. Rappelons que, de plus les $\Lambda\{a\}$, $\Lambda\{b\}$ et $\Lambda\{c\}$ sont deux à deux orthogonaux et que leurs directions $D\{a\}$, $D\{b\}$, $D\{c\}$ engendrent, avec la direction DS du plan du triangle, l'espace H_I tout entier.

A.3.2.2. Les questions de $Q^{\{b,c\}}$.

Ici, pour tout $j \in J_q^p$, $j \in b \cup c$. Donc $(j_I - (b \cup c)_I) \in D\{b \cup c\}$, et par suite j_I se projette orthogonalement sur le plan du triangle en un point du côté $(b_I c_I)$; on aurait aussi pu directement utiliser la propriété P5 pour affirmer que le triangle $\{j_I, (b \cup c)_I, a_I\}$ est rectangle en $b \cup c$.

Pour l'inertie du nuage $\mathcal{N}(J_q^p)$ et celle du nuage $\mathcal{N}(J_q)$, les résultats sont analogues aux précédents. Nous reviendrons sur l'inertie au § A.4.

Une propriété intéressante s'ajoute à l'étude précédente : si la projection orthogonale de j_I sur le plan du triangle est $(b \cup c)_I$, c'est que les fréquences de j conditionnées par b et par c sont égales, et réciproquement. En formules :

$$|j \cap c| / |c| = |j \cap b| / |b| = |j| / |b \cup c|.$$

Cette propriété découle du résultat plus général établi en A.3.2.4. ci-dessous. Elle découle également du résultat que nous allons maintenant établir, pour l'utiliser plus loin dans l'étude de propriétés d'inertie.

Proposition 3. Soit j une partie de deux des modalités d'un questionnaire, notées b et c : $j \subset (b \cup c)$. La projection orthogonale du profil j_I sur la droite affine (b_I, c_I) est déterminée par les fréquences de j de la façon suivante. Posons $p = |j \cap b|$ et $q = |j \cap c|$, et soit \vec{u} le vecteur $\vec{u} = (c_I - b_I) / \|c_I - b_I\|$. Alors l'abscisse x^j de la projection orthogonale de j_I sur l'axe déterminé par \vec{u} est :

$$x^j = \langle j_I, \vec{u} \rangle = K \frac{-p/|b| + q/|c|}{(p+q)/(|b|+|c|)}, \text{ avec } K = \sqrt{\frac{n|b||c|}{(|b|+|c|)^3}}.$$

Remarques : La constante K ne dépend que des effectifs des populations initiales et pas de la répartition de j . Les quantités $(p+q)/(|b|+|c|)$, $p/|b|$ et $q/|c|$ sont respectivement la fréquence de j dans $(b \cup c)$, celle de j conditionnée à b et celle de j conditionnée à c . L'égalité de ces deux dernières implique bien $x^j = 0$.

Démonstration. D'après la propriété P3 de A.2.2., on peut écrire :

$$(p+q) j_I = p(j \cap b)_I + q(j \cap c)_I.$$

$$\text{D'où : } \langle j_I, c_I - b_I \rangle = \langle j_I, c_I \rangle - \langle j_I, b_I \rangle = \langle \frac{q}{p+q} (j \cap b)_I, c_I \rangle - \langle \frac{p}{p+q} (j \cap b)_I, b_I \rangle,$$

compte tenu de la propriété P2, qui assure de la nullité des autres termes. Et en appliquant P1, on obtient :

$$\langle j_I, c_I - b_I \rangle = \frac{q}{p+q} \frac{1}{m_c} - \frac{p}{p+q} \frac{1}{m_b} = \frac{n}{p+q} \left(\frac{q}{|c|} - \frac{p}{|b|} \right).$$

Le résultat indiqué s'obtient alors en remarquant que :

$$\|c_I - b_I\|^2 = \langle c_I - b_I, c_I - b_I \rangle = \|c_I\|^2 + \|b_I\|^2 = \frac{n}{|c|} + \frac{n}{|b|}.$$

A.3.2.3. Les questions de Q^S .

A une question de Q^S ne correspondent que des colonnes de réponses effectives, et pas de colonne "question-non-posée". Le centre de gravité du nuage des réponses à une question de Q^S est le point I_I , puisque la population complète est concernée.

Comme pour le cas précédent, il y a équivalence entre le fait que pour $j \in J_q^P$, j_I se projette orthogonalement sur AS en I_I et le fait que les fréquences de j conditionnée par les différentes séries d'individus sont toutes égales.

A.3.2.4. Cas général : projection orthogonale et fréquences conditionnelles.

Proposition 4. Soit S une partition de I et soit $S' \subset S$. Pour $j \in Q^{S'}$, il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes.

- (1) La projection orthogonale sur AS de j_I est x_I , avec $x = U\{s, s \in S'\}$
- (2) La fréquence conditionnelle de la réponse j sur toute classe d'individus à qui la question a été posée est égale à la fréquence de j sur la totalité des individus à qui la question a été posée.

Démonstration. Puisque $j \subset x$, j est partitionnée selon S' :

$$j = U \{j \cap s, s \in S'\}.$$

A cette partition de j , on peut appliquer la généralisation de la proposition du § A.2.2. Notamment s'applique la formule barycentrique :

$$\sum_{s \in S'} |j \cap s| (j \cap s)_I = |j| j_I.$$

D'où :

$$\begin{aligned} j_I &= \sum_{s \in S'} (|j \cap s| / |j|) (j \cap s)_I \\ &= \sum_{s \in S'} (|j \cap s| / |j|) s_I + \sum_{s \in S'} (|j \cap s| / |j|) ((j \cap s)_I - s_I). \end{aligned}$$

Sous cette forme, j_I est décomposé en deux termes dont le second est orthogonal à AS (conséquence de PS), alors que le premier est un élément de AS . Donc la projection orthogonale de j_I sur AS est égale à ce premier terme :

$$\text{pr}(j_I) = \sum_{s \in S'} (|j \cap s| / |j|) s_I.$$

Or

$$x_I = \sum_{s \in S'} (|s| / |x|) s_I.$$

En comparant, il vient :

$$(x_I = \text{pr}(j_I)) \Leftrightarrow (\forall s \in S', (|j \cap s| / |j|) = (|s| / |x|)).$$

Et cette dernière propriété équivaut à :

$$\forall s \in S', |j \cap s| / |s| = |j| / |x|.$$

Il s'agit bien de la condition (2) de la proposition énoncée.

A.4. Propriétés d'inertie.

Etant donné un questionnaire à $(\text{card } S)$ modalités soumis à l'analyse des correspondances que nous avons nommée "analyse apparente" (voir A.1.3), le sous-espace engendré par les $(\text{card } S - 1)$ premiers axes propres sera souvent proche de l'espace AS des modalités (voir A.2.4). C'est ce que nous allons examiner ici de deux façons. :

- en indiquant des cas où AS est exactement espace principal d'inertie,
- en évaluant l'inertie du nuage expliqué par AS , pour nous apercevoir de sa grande importance.

Auparavant, indiquons l'intérêt de la proximité de AS avec l'espace principal d'inertie déterminé par les premiers axes factoriels (note : le nuage étant fini, la notion de proximité est ici évidente) : Lors de l'interprétation, il nous sera possible de nous référer à l'étude faite en A.3., pour donner un sens aux écarts éventuels entre la projection de certaines réponses et celle du profil de la population concernée. Ceci bien sûr demande une estimation préalable de la proximité indiquée, ou alors des vérifications a posteriori des possibles déviations observées ; nous y reviendrons plus loin.

A.4.1. Part d'inertie du nuage $\mathcal{N}(J)$ projeté sur AS .

Comme indiqué en A.2.3., l'inertie totale du nuage $\mathcal{N}(J)$ est égale à

$$(\text{card } J - \text{card } Q) / \text{card } Q.$$

En projection sur AS , chaque question non dans Q^S (c'est-à-dire non posée à la population complète) donne lieu à un point de non passation (question-non-posée) et à deux ou plusieurs points de réponses effectives. L'inertie sera minimum lorsque ces points de réponses effectives seront confondus, ce qui correspond à l'égalité de fréquences conditionnelles (voir A.3.2.4). Pour une question, l'inertie en projection sur AS est donc au moins celle du doublet

$$\{ (I(q)_I, |I(q)| / (n|Q|)), (q_I^0, (n - |I(q)|) / (n|Q|)) \},$$

où $I(q)$ désigne la partie de I concernée par la question q . Ce doublet a une inertie, par rapport à I_I , égale à $1/|Q|$ (voir A.2.3, propriété P4).

Il en résulte que l'inertie du nuage $\mathcal{N}(J)$ projeté sur AS est égale à

$$(\text{card } Q - \text{card } Q^S) / \text{card } Q.$$

La part afférente à la projection sur AS est donc au moins égale à

$$(\text{card } Q - \text{card } Q^S) / (\text{card } J - \text{card } Q).$$

Ce taux est important comme on peut le voir sur des exemples.

Exemple 1: $\text{card } S = 2$; $S = \{a, b\}$; $|Q^{\{a\}}| = |Q^{\{b\}}| = |Q^{\{a, b\}}| = |Q|/3$;

$\forall q \in Q, |J_q^P| = 2$ (analyse en réussite-échec).

Dans ce cas, AS est réduit à la droite (a_I, b_I) . L'inertie en projection sur cet axe est bornée inférieurement par $(\text{card } Q - \text{card } Q^{\{a, b\}}) / \text{card } Q = 2/3$. Et la part afférente à cette projection est au moins de

$$(\text{card } Q - \text{card } Q^{\{a, b\}}) / (\text{card } J - \text{card } Q) = (2|Q|/3) / (8|Q|/3 - |Q|) = 2/5.$$

Exemple 2 : $\text{card } S = 3$; $S = \{a, b, c\}$; $Q^S = \emptyset$ (aucune question commune aux trois séries) ; $\forall q \in Q, |J_q^P| = 2$ (analyse en réussite-échec).

Dans ce cas, AS est le plan (a_I, b_I, c_I) . En projection sur ce plan, l'inertie est bornée inférieurement par 1 puisque $\text{card } Q^S = 0$. Et la part afférente à cette projection est donc au moins égale à $1/2$, puisque $\text{card } J = 3 \text{ card } Q$. Dans le cas où les effectifs des trois séries sont égaux, le triangle $\{a_I, b_I, c_I\}$ est équilatéral ; tout axe du plan AS explique alors la même part d'inertie, soit au moins un taux de 0,25, moitié du précédent.

A.4.2. Cas où AS est espace principal d'inertie.

On sait que le premier axe principal d'inertie est la droite passant par le centre sur laquelle le nuage projeté a la plus forte inertie. De même le plan principal engendré par les deux premiers axes est le plan sur lequel le nuage projeté a la plus forte inertie. Et ainsi de suite.

L'importance de l'inertie du nuage projeté sur AS suggère que AS est voisin d'un espace principal d'inertie. Il faut toutefois prendre garde qu'à une faible variation de l'inertie au voisinage de son maximum (variation du 2e ordre) peut correspondre une rotation notable (rotation du 1er ordre). C'est pourquoi nous allons indiquer des cas où l'on est assuré que AS est un espace principal.

Remarquons qu'est espace principal tout espace déterminé par des axes principaux. Un tel espace est caractérisé par la nullité de tout produit d'inertie entre un quelconque de ses axes et un quelconque des axes qui lui sont perpendiculaires. Donc AS sera espace principal si tout axe inclus dans AS fournit avec tout axe perpendiculaire à AS un produit d'inertie nul. Nous ne nous inquiéterons pas ici de savoir si cet espace est alors bien engendré par les premiers axes principaux : ceci est sans importance pour les analyses effectives, dans lesquelles l'espace voisin de AS apparaît immédiatement (et, en général, ce sera effectivement l'espace engendré par les premiers axes principaux).

Proposition 5. Soit un questionnaire à modalités proposé à des séries $\{s, s \in S\}$ constituant une partition de la population interrogée. Si, pour toute question, toute colonne réponse est telle que soient égales ses fréquences conditionnelles sur les différentes séries interrogées, alors ΛS , l'espace des modalités du questionnaire, est espace principal d'inertie du nuage $\mathcal{N}(J)$.

Symboliquement, en désignant par $PS(q) \subset S$ la population à qui a été posée la question q , les hypothèses de cette proposition s'écrivent :

$$\forall q \in Q, \forall j \in J_q^P, \forall s \in PS(q), |j \cap s|/|s| = |j|/|U\{s, s \in PS(q)\}|.$$

Géométriquement, il s'agit de la coïncidence entre la projection orthogonale de j_I et le profil de la population interrogée, coïncidence étudiée plus haut (voir A.3.2.). Rappelons que de plus, il s'agit de la condition pour que l'inertie du nuage projeté sur ΛS atteigne la borne inférieure calculée précédemment (voir A.4.1.).

Démonstration. En utilisant la caractérisation indiquée plus haut d'un espace principal d'inertie, on a à démontrer la nullité de l'expression

$$\sum_{j \in J} (f_j x^j y^j) = (1/|Q|) \sum_{j \in J} (|j| x^j y^j),$$

où x^j est la coordonnée de j_I sur un axe quelconque inclus dans ΛS et y^j la coordonnée de j_I sur un axe perpendiculaire à ΛS . En effet, f_j est la masse affectée à j_I .

Or, pour toute question q , il y a nullité de $\sum_{j \in J_q^P} (|j| x^j y^j)$.

En effet, tout $j \in J_q^P$ se projette sur ΛS au même point X_I , avec $X = U\{s, s \in PS(q)\}$.

Donc les x^j sont, dans cette somme, tous égaux à un même x . Et de plus les y^j ont moyenne nulle, car leur centre de gravité est X_I qui est un point de ΛS , donc de coordonnée y nulle :

$$\forall q \in Q, \sum_{j \in J_q^P} (|j| x^j y^j) = x \sum_{j \in J_q^P} (|j| y^j) = 0.$$

Commentaire. Une critique pourrait être formulée, à la suite de cette proposition. En effet, ΛS est espace principal d'inertie précisément dans un cas sans intérêt

pratique, où il n'y aurait aucune "attraction" d'une réponse vers l'une ou l'autre des séries interrogées, mais au contraire égalité des fréquences conditionnelles. Or nous sommes intéressés par le repérage de telles attractions, dues soit à des effets de questions antérieures dans le questionnaire (ou même postérieures) soit à des variations d'énoncés, ceci dans la mesure où il s'agit de phénomènes qui dépassent les fluctuations d'échantillonnage. Nous allons voir que l'existence de telles attractions n'est pas incompatible avec le fait que AS soit, comme ci-dessus, espace principal d'inertie.

La configuration du nuage $\mathcal{N}(J)$ donne à penser que AS est encore espace principal d'inertie si les réponses "s'équilibrent", entre les modalités, d'une question à l'autre. Schématiquement, ceci reviendrait à dire qu'une question plus difficile pour l'une des séries d'individus est compensée par la présence d'une question plus facile pour cette même série que pour les autres. Dans un cas particulier simple qui donne une bonne idée du cas général, nous allons voir que cet "équilibre" fait que AS est bien, comme ci-dessus, espace principal d'inertie.

Il s'agit de l'analyse en réussite-échec ($\forall q \in Q, |J_q^P| = 2$) d'un questionnaire dont chaque question a été posée à deux des séries d'individus ; de plus nous supposerons les séries d'individus d'effectifs égaux, pour simplifier.

Définition. Soient s_1 et s_2 deux séries d'individus de même effectif ($|s_1| = |s_2|$). Soit j_1 une classe de réponses distinguée sur la question q_1 , et j_2 une classe de réponses distinguée sur la question q_2 . On dira que les questions q_1 et q_2 s'équilibrent entre s_1 et s_2 sur les réponses j_1 et j_2 , pour dire que :

$$1^\circ |j_1 \cap s_1| = |j_2 \cap s_2|,$$

$$2^\circ |j_2 \cap s_1| = |j_1 \cap s_2|,$$

$$3^\circ |j_1 \cap j_2 \cap s_1| = |j_1 \cap j_2 \cap s_2|.$$

Remarque : Ces égalités d'effectifs devraient être remplacées par des égalités de fréquences conditionnelles dans le cas où s_1 et s_2 seraient d'effectifs différents. Ici ces égalités reviennent en gros à dire qu'une fois obtenues $j_1 \cap s_1$ et $j_2 \cap s_1$, on obtient les réponses de la série s_2 par report en croisant de celles de s_1 dans le tableau K_{IJ} .

Proposition 6. Soit un questionnaire à modalités proposées à des séries d'individus d'effectifs égaux, soumis à une analyse en réussite-échec (pour chaque question, les réponses sont réparties en deux classes). Si les questions peuvent être réparties en deux familles :

- la première composée des questions pour lesquelles les réponses se répartissent entre les séries avec égalité des fréquences conditionnelles,
- la seconde composée de questions pouvant être regroupées en paires de questions qui s'équilibrent, entre les séries concernées, sur la réussite (et donc aussi sur l'échec),

alors l'espace AS des modalités est espace principal d'inertie.

Démonstration. Il suffit de prouver, comme pour la proposition 1, qu'il y a nullité des produits d'inertie attachés, ici, à une paire de questions équilibrées. Soit x^j la coordonnée de j_1 suivant un axe de AS et y^j la coordonnée suivant un axe perpendiculaire à AS.

$$\sum \{f_j x^j y^j, j \in (q_1 \cup q_2)\} = f_{j_1} x^{j_1} y^{j_1} + f_{j'_1} x^{j'_1} y^{j'_1} + f_{j_2} x^{j_2} y^{j_2} + f_{j'_2} x^{j'_2} y^{j'_2},$$

où j_1 et j'_1 désignent les réponses à q_1 et j_2 et j'_2 les réponses à q_2 .

En fait, il suffit, puisque deux séries d'individus sont seules concernées, de considérer la coordonnée x^j sur l'axe déterminé par ces deux séries : l'axe $((s_1)_1, (s_2)_1)$. La proposition 3 est alors utilisable, et conduit ici à

$$x^j = K \frac{-p/|s_1| + q/|s_2|}{(p+q)/(|s_1| + |s_2|)} = 2K \frac{-p+q}{p+q},$$

où $p = |j \cap s_1|$, $q = |j \cap s_2|$ et où K ne dépend que des effectifs concernés et non des réponses. Pour $f_j x^j$, il vient :

$$f_j x^j = \frac{p+q}{|Q|} (2K \frac{-p+q}{p+q}) = \frac{2K}{|Q|} (-p+q).$$

Il en résulte que $f_{j'_1} x^{j'_1} = -f_{j_1} x^{j_1}$ et $f_{j'_2} x^{j'_2} = -f_{j_2} x^{j_2}$. Et de plus, puisque

$p_2 = q_1$ et $q_2 = p_1$, d'après les premières hypothèses d'équilibre, l'égalité

$f_{j_2} x^{j_2} = -f_{j_1} x^{j_1}$ est également vérifiée. On peut donc mettre $f_{j_1} x^{j_1}$ en facteur.

$$\sum \{f_j x^j y^j, j \in (q_1 \cup q_2)\} = f_{j_1} x^{j_1} (y^{j_1} - y^{j'_1} - y^{j_2} + y^{j'_2}).$$

Or, les hypothèses d'équilibre nous assurent que

$$y^{j_1} - y^{j'_1} = y^{j_2} - y^{j'_2}.$$

Et par suite le produit d'inertie envisagé est bien nul.

Les conséquences pratiques de cette proposition sont importantes. Lors de l'élaboration d'un questionnaire, il sera intéressant de répartir les difficultés entre les modalités. Un plan de répartition peut, pour ce faire, s'avérer utile. Suite à l'application d'un tel principe d'équilibre entre modalités, la proposition est très rassurante quant aux possibilités d'interprétation correcte. Il ne peut toutefois y avoir de certitude plus totale que celle qui résulte de la confrontation entre l'analyse apparente et l'analyse projetée, décrite plus loin. Mais auparavant, nous allons envisager plus complètement l'analyse apparente : jusqu'à présent nous avons exploité l'étude des profils pour examiner l'obtention dans l'analyse de l'espace AS des modalités (ou d'une variété voisine de AS). A supposer cette obtention réalisée dans une analyse, il va alors se poser le problème de la signification des réponses. Autrement dit, qu'en est-il du nuage projeté sur le supplémentaire orthogonal de AS ? C'est ce que nous allons maintenant examiner, en nous servant de l'analyse complète d'un cas modèle.

5. Analyse apparente et analyse réelle.

Dans la pratique des questionnaires à modalités, les phénomènes que nous prétendons observer sont ceux qui sont doués d'une stabilité suffisante pour se reproduire avec régularité dans des groupes d'individus suffisamment nombreux. Ainsi, il serait sans doute illusoire d'utiliser de tels questionnaires pour des recherches directes sur l'heuristique : si le fait de découvrir la solution de problèmes peut donner lieu à une évaluation raisonnable dans une population, les façons de "tomber" sur une solution auront dans la plupart des cas un caractère accidentel et individuellement imprévisible (que l'on pense à Archimède et Newton). Vis à vis des phénomènes "globaux" qui nous est intéressant, il est licite de considérer comme peu différentes deux séries d'individus formées pour une enquête à modalités. Dans le cas modèle que nous allons envisager, nous considérerons comme identiques les séries d'individus. Autrement dit, le même ensemble-type de sujets, que nous noterons IT, constitue les différentes séries.

De même, nous nous attachons à constituer des modalités de questionnaire voisines : il nous serait absolument impossible de tirer une conclusion raisonnable de la confrontation de deux modalités de questionnaire étrangères l'une à l'autre. D'ailleurs, la proposition 6 de A.4.2. illustre bien ce propos. L'interprétation fonctionnera au mieux sur des écarts localisés se distinguant d'une similitude globale. Dans le cas modèle, nous supposerons identiques les modalités du questionnaire. Autrement dit, le même questionnaire-type, que nous noterons QT constitue les différents ensembles de questions $Q^{\{a\}}$, $Q^{\{b\}}$, ... $Q^{\{S\}}$ (cf. A.3.).

Notons qu'à partir d'un questionnaire simple, la confection, pour simulation, d'un cas modèle est très facile : il nous suffit de "bégayer", en reprenant à la fois certaines lignes individuelles et certaines colonnes réponses, tout en ajoutant les colonnes "question-non-posée" nécessaires.

5.1. Les données du modèle.

On note

QT : le questionnaire type,

JT = $\cup \{J_q^P, q \in QT\}$: l'ensemble des modalités de réponse effective,

IT : l'ensemble type de sujets,

S : l'ensemble des séries de sujets ($S = \{a, b, c\}$ pour trois modalités de questionnaire),

PS un ensemble de parties de S ($PS \subset \mathcal{P}(S)$) invariant par rapport au groupe des permutations de S ; il revient au même de dire que si PS contient une partie S' de S ayant pour cardinal p, il contient toute autre partie de S ayant aussi pour cardinal p. Par exemple, pour $S = \{a, b, c\}$, on peut prendre $PS = \{\{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b\}\}$. Dans la suite, nous considérons (sauf indication contraire) que $PS = \mathcal{P}(S)$; pour un cas où $PS \neq \mathcal{P}(S)$, il suffirait de considérer $S' \notin PS$ comme une famille d'objets supplémentaires de masse nulle afin d'être ramené au cas où PS est l'ensemble des parties tout entier.

I = $IT \times S$: l'ensemble des sujets du cas modèle que nous construisons,

s = $IT \times \{s\} \subset I$: la série s, qui pourra encore être notée I_s ,

is = $(i, s) \in IT \times \{s\}$: l'individu i tel qu'il apparaît dans la série s,

$IS' = \bigcup \{IT \times \{s\}, s \in S'\} = \bigcup \{s, s \in S'\}$: l'ensemble des sujets des séries de $S' \subset S$,

$Q = QT \times PS$: le questionnaire du cas modèle. Pour abrégé, nous noterons qS' pour $(q, S') \in QT \times PS$; il s'agit de la question q de QT , posée aux séries de S' .

$Q^{S'} = \{qS', q \in QT\}$: le sous-ensemble des questions du cas modèle posées aux séries de S' ,

$J^P = JT \times PS$: l'ensemble des modalités de réponse effective aux questions du cas modèle. Pour abrégé nous noterons jS' pour $(j, S') \in JT \times PS$.

$qS'^0 = I - IS' = I(S - S')$: la modalité de non-passation de qS' .

A.5.2. Le nuage $\mathcal{N}(I)$.

Les hypothèses de la proposition 5 sont satisfaites de par la symétrie du modèle. Par suite, AS est espace principal d'inertie. Toute modalité de réponse effective jS' donne lieu à un profil jS' , dont la projection orthogonale sur AS est le point IS'_I ; et qS'^0_I est le point $I(S-S')_I$ de AS .

Compte-tenu de l'égalité d'effectif des séries de sujets, de l'invariance de PS par rapport aux permutations de S et de l'équilibre parfait des questionnaires ($Q^{S'} \approx QT$ pour tout $S' \subset S$), le nuage projeté sur AS a les propriétés d'inertie d'une sphère. D'après A.4.1., l'inertie totale de ce nuage est :

$$\begin{aligned} J(\text{pr}_{AS} \mathcal{N}(I)) &= (\text{card } Q - \text{card } Q^S) / \text{card } Q \\ &= \langle S \notin PS \rangle 1 \diamond (|PS| - 1) / |PS|, \end{aligned}$$

en utilisant la notation de A.2.1.

Ceci donne lieu à une valeur propre de multiplicité $|S| - 1$, notée λ_{AS} :

$$\lambda_{AS} = (1 - \delta_{PS}^S / |PS|) / (|S| - 1),$$

$$\text{avec } \delta_{PS}^S = \langle S \in PS \rangle 1 \diamond 0.$$

Ainsi $\lambda_{AS} = 1/2$ si $S = \{a, b, c\}$ et si $PS = \{\{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b\}\}$.

Dans la proposition 2 (cf. A.2.4.2), nous avons vu que H_I se décompose en somme directe orthogonale :

$$H_I = DS \oplus D,$$

avec $D = \bigoplus (D\{s\}, s \in S)$. Nous venons d'étudier comment $\mathcal{N}(I)$ se projette sur AS , de direction DS .

En projection sur le supplémentaire orthogonal D , on rapporte les vecteurs au centre I_I du nuage. Ainsi AS tout entier se projette à l'origine. Par suite, seules les modalités de réponse effective sont susceptibles de se projeter ainsi en des points autres que l'origine. Soit donc $jS' \in JT \times PS$ une modalité de réponse effective :

$$\text{pr}_D(jS'_I - I_I) = \text{pr}_D(jS'_I - IS'_I),$$

car IS'_I est comme I_I un élément de AS . Or, d'après la généralisation de la proposition 1 (cf. A.2.2) :

$$|S'| (jS'_I - IS'_I) = \Sigma \{ (js_I - Is_I) , s \in S' \}$$

(propriété barycentrique). La figure illustre la situation dans le cas de trois modalités.

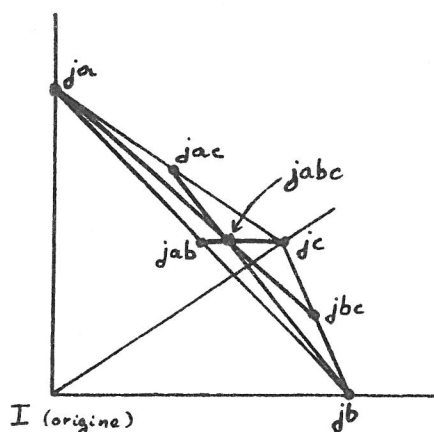


Figure :

Cas $S = \{a, b, c\}$. Projection partielle sur D . Pour abrégé, on a mis I pour $\text{pr}_D(I_I)$, ja pour $\text{pr}_D(ja_I)$ et ainsi de suite. Le triangle $\{ja, jb, jc\}$ est équilatéral.

Grâce à cette égalité, il suffit pour voir le nuage $\mathcal{N}(J)$ en projection sur D de considérer le nuage $\{js_I, j \in JT\}$ en projection sur $D\{s\}$. Or ce nuage est identique, à une homothétie près- indépendante évidemment du choix de s dans S - au nuage type $\mathcal{N}(JT)$. En effet, le nombre d'individus du cas modèle est le produit par $|S|$ de celui du cas type, et donc (voir la métrique utilisée en A.2.1) :

$$\forall s \in S, \forall (j, j') \in JT \times JT, \|js_I - j's_I\|^2 = |S| \times \|j_{IT} - j'_{IT}\|^2,$$

$$\forall s \in S, \forall j \in JT, \|js_I - Is_I\|^2 = |S| \times \|j_{IT} - I_{IT}\|^2.$$

Et plus généralement, pour S' quelconque :

$$\forall S' \subset S, \forall (j, j') \in JT \times JT, \|jS'_I - j'S'_I\|^2 = (|S| / |S'|) \times \|j_{IT} - j'_{IT}\|^2,$$

$$\forall S' \subset S, \forall j \in JT, \|jS'_I - IS'_I\|^2 = (|S| / |S'|) \times \|j_{IT} - I_{IT}\|^2.$$

Les masses à affecter aux profils dans le cas modèle sont, elles aussi, aisément reliées à celles du cas type. En effet : $f_j = |j|/(|IT| \times |QT|)$ et

$$\begin{aligned} f_{jS'} &= |jS'|/(|I| \times |Q|) = |jS'|/(|IT| \times |S| \times |QT| \times |PS|) \\ &= |j| \times |S'|/(|IT| \times |QT| \times |S| \times |PS|) = (|S'|/(|S| \times |PS|)) \times f_j. \end{aligned}$$

Ainsi pour $S = \{a, b, c\}$ et $PS = \{\{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b\}\}$, $f_{jbc} = \frac{2}{9} f_j$.

Et pour les contributions à l'inertie en projection sur D , il vient:

$$f_{jS'} \times \|jS'_I - IS'_I\|^2 = f_j \times \|j_{IT} - IT_{IT}\|^2 \times 1/|PS|.$$

Cette égalité fait que, finalement, l'inertie totale de $\mathcal{N}(J)$ projeté sur D n'est autre que l'inertie du nuage type $\mathcal{N}(J)$, puisqu'il y a $|PS|$ modalités dans le cas modèle.

A.5.3. L'analyse du cas modèle.

Nous allons voir que l'analyse du cas modèle se réduit à celle du cas type. Le nuage type $\mathcal{N}(J)$ admet des axes principaux d'inertie que nous noterons Axe_α , avec des valeurs propres λ_α .

Or nous avons vu que le nuage $\{js_I, j \in JT\}$ en projection sur $D\{s\}$ est identique, à une homothétie près, à $\mathcal{N}(JT)$. Et $D\{s\}$ est la direction de $\Lambda\{s\}$, espace des mesures de masse totale 1 et de support $Is \approx IT$, espace qui s'identifie donc à Λ_{IT} . Le sous-nuage $\{js_I, j \in JT\}$ projeté sur $D\{s\}$ a pour axes principaux d'inertie les axes, notés $Axe_\alpha(s)$, qui correspondent aux Axe_α dans cette identification.

Pour α fixé, soit Esp_α le sous-espace de D engendré par $\{Axe_\alpha(s), s \in S\}$. Ce sous-espace est de dimension $|S|$, car les $Axe_\alpha(s)$ sont deux à deux orthogonaux, donc forment un système indépendant.

Proposition 7 : Soit λ_α la valeur propre de numéro α du nuage $\mathcal{N}(JT)$ d'un cas type donné. Soit Esp_α le sous-espace correspondant dans un cas modèle associé à ce cas type. Alors Esp_α est un espace principal d'inertie pour le nuage du cas modèle, et la part d'inertie afférente à Esp_α est λ_α .

Démonstration. L'idée est la même que pour la proposition 5. Les produits d'inertie s'annulent en somme partielle sur chaque $\{j S', j \in J^P\}$ parce que $Axe_\alpha(s)$ est pour tout s un axe principal d'inertie. Quant à la part d'inertie afférente à Esp_α , c'est la même que la part d'inertie afférente à Λxe_α en vertu de l'égalité d'inerties vue à la fin de A.5.2. ; et cette dernière est précisément λ_α .

Pour achever l'analyse, il ne reste alors plus qu'à faire l'étude en projection sur Esp_α .

Proposition 8. Si $PS = \{\{s\}, s \in S\}$, Esp_α a, pour tout α , les propriétés d'inertie d'une sphère (on obtient donc, pour tout α , une valeur propre de multiplicité $|S|$). Si PS contient des éléments autres que les singletons de S , alors Esp_α a, pour tout α , les propriétés d'inertie d'un ellipsoïde de révolution autour d'un axe $Diag_\alpha$ (on obtient donc une valeur propre simple notée λ_{Diag_α} et une valeur propre de multiplicité $|S| - 1$, notée λ_{Trans_α}).

Et $\lambda_{Diag_\alpha} = [\sum \{|S'| / (|S| \times |PS|), S' \in PS\}] \lambda_\alpha = Moy(|S'| / |S|) \lambda_\alpha$.

Démonstration.

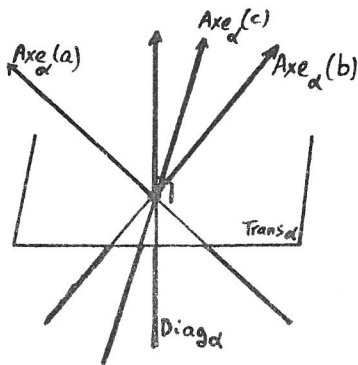


Figure : Esp_α dans le cas de 3 modalités ($S = \{a, b, c\}$).

La première partie de la proposition est évidente. Ce cas serait d'ailleurs d'un intérêt pratique nul, car aucun point de comparaison entre modalités n'en ressortirait : l'analyse fonctionnerait comme une analyse disjointe des questionnaires $Q^{\{s\}}$ pour $s \in S$. Toutefois, nous verrons dans l'analyse scindée comment tirer parti d'une situation semblable, grâce à l'utilisation d'éléments supplémentaires.

Pour la deuxième partie de la proposition, il suffit de remarquer les propriétés de symétrie du modèle. L'axe $Diag_\alpha$ est déterminé par le vecteur dont la projection sur chaque $Axe_\alpha(s)$, $s \in S$, est le vecteur unitaire de cet axe.

La figure représente ces axes, ainsi que l'orthogonal $Trans_\alpha$ de $Diag_\alpha$, dans le cas où $S = \{a, b, c\}$. Quant au calcul de λ_{Diag_α} , il a pour clef le fait que sur $Diag_\alpha$ tous les jS' correspondant à un même j ont même coordonnée, qui n'est autre que celle de j suivant Axe_α . En effet, d'après A.5.2,

$$\|j_{S_I} - I_{S_I}\|^2 = \|j_{IT} - IT_{IT}\|^2 \times |S|,$$

et $\|pr_{Diag_\alpha}(j_{S_I} - I_{S_I})\|^2 = \|j_{S_I} - I_{S_I}\|^2 / |S| = \|j_{IT} - IT_{IT}\|^2.$

Ceci est valable, pour j fixé, pour tout $s \in S$, donc aussi pour $j S'_I - I_I$, puisque $j S'_I$ est au centre de gravité de $\{j s_I, s \in S'\}$. Par suite, on a bien l'égalité des coordonnées :

$$\forall j \in JT, \forall S' \subset S, F_{\text{Diag}\alpha}(j S') = F_\alpha(j).$$

On en déduit, en utilisant à nouveau un résultat de (A.5.2), fournissant ici $f_{j S'}$:

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{Diag}\alpha} &= \sum \{f_{j S'} (F_\alpha(j))^2, j \in JT, S' \in PS\} \\ &= [\sum \{|S'| / (|S| \times |PS|), S' \in PS\}] [\sum \{f_j (F_\alpha(j))^2, j \in JT\}] \\ &= [\sum \{|S'| / (|S| \times |PS|), S' \in PS\}] \lambda_\alpha. \end{aligned}$$

Et $\sum \{|S'| / (|S| \times |PS|), S' \in PS\} = (1/|PS|) \times \sum \{|S'| / |S|, S' \in PS\}$ mérite le nom de moyenne de $|S'| / |S|$ sur $PS \subset \mathcal{P}(S)$.

Puisque (proposition 7) l'inertie totale afférente à Esp_α est λ_α , on déduit $\lambda_{\text{Trans}\alpha}$ de $\lambda_{\text{Diag}\alpha}$:

$$(|S| - 1) \lambda_{\text{Trans}\alpha} = \lambda_\alpha - \lambda_{\text{Diag}\alpha},$$

d'où :

$$\lambda_{\text{Trans}\alpha} = [(1 - \text{Moy}(|S'| / |S|)) / (|S| - 1)] \lambda_\alpha$$

A.5.4. Discussion.

L'analyse du cas modèle est claire lorsque les valeurs propres se succèdent dans le bon ordre : λ_{AS} , puis $\lambda_{\text{Diag}1}$, puis $\lambda_{\text{Trans}1}$, puis $\lambda_{\text{Diag}2}, \dots$

Rappelons les résultats obtenus en A.5.2 et A.5.3 :

$$\lambda_{AS} = (1 - \delta_{PS}^S / |PS|) / (|S| - 1), \text{ ordre de multiplicité : } |S| - 1,$$

$$\lambda_{\text{Diag}\alpha} = \text{Moy}(|S'| / |S|) \lambda_\alpha, \text{ simple si PS ne comporte pas que des singletons;}$$

$$\lambda_{\text{Trans}\alpha} = [(1 - \text{Moy}(|S'| / |S|)) / (|S| - 1)] \lambda_\alpha, \text{ ordre de multiplicité : } |S| - 1.$$

Pour illustrer le propos, prenons l'exemple de $S = \{a, b, c\}$ avec $PS = \{\{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b\}\}$.

Dans ce cas $\text{Moy}(|S'|/|S|) = 2/3$, et il vient :

$$\lambda_{AS} = 1/2 = 0,5,$$

$$\lambda_{\text{Diag}\alpha} = \frac{2}{3} \lambda_{\alpha} \quad \text{et} \quad \lambda_{\text{Trans}\alpha} = \frac{1}{6} \lambda_{\alpha}.$$

On le voit dans ce cas, il est peu vraisemblable que $\frac{2}{3} \lambda_1$ surpasse 0,5.

En revanche $\lambda_{\text{Diag}2} = \frac{2}{3} \lambda_2$ a de grandes chances de l'emporter sur $\lambda_{\text{Trans}1} = \frac{1}{6} \lambda_1$.

Au delà du troisième axe, l'analyse va donc souvent être embrouillée. Il sera donc prudent dans la pratique de ne pas pousser l'analyse au delà de l'axe Diag_1 . Mais les besoins de nos enquêtes s'accommodent d'une telle limitation, puisque ce sont les variations de réussite-échec qui nous intéressent, comme indiqué dans les généralités (voir A.1.2.).

Toutefois, la pratique s'écarte du cas modèle et d'autres risques que celui qui vient d'être indiqué peuvent se présenter. Au lieu de questionnaires $Q^{S'}$ reproduisant un même questionnaire Q , nous avons à faire avec des questionnaires voisins, si les résultats se révèlent satisfaisants de ce point de vue, c'est-à-dire s'il n'y a pas ce faisant de modifications notables du premier facteur. L'analyse scindée, décrite à la suite de l'analyse projetée, permet une vérification, susceptible de valider les résultats de l'analyse apparente, en mettant en évidence dans quelle mesure un cas effectif s'écarte du cas modèle étudié.

A.6. L'analyse projetée.

On sait ([3], chapitre [Red. Tens] TII B n°6) que l'analyse de correspondance équivaut à la réduction de la mesure f_{IJ} considérée comme élément du produit tensoriel $\mathbb{R}_I \otimes \mathbb{R}_J$ des deux espaces euclidiens munis respectivement de la métrique du \mathcal{X}^2 de centres f_I et f_J . A une homothétie près, la métrique sur \mathbb{R}_I est la métrique euclidienne usuelle de \mathbb{R}^n ($n = \text{card } I$).

On considère la décomposition de \mathbb{R}_I en somme directe orthogonale :

$$\mathbb{R}_I = LS \oplus D\{S\},$$

où S est une partition de I , LS est l'espace engendré par les profils $\{s_I, s \in S\}$ et $D\{S\} = \oplus \{D\{s\}, s \in S\}$ (voir A.2.4).

Projeter le tableau k_{IJ} des données sur $D\{S\} \otimes \mathbb{R}_J$ équivaut à retrancher de k_{IJ} sa projection sur $DS \otimes \mathbb{R}_J$. Or cette projection est facile à obtenir. En effet la projection orthogonale px de $x \in \mathbb{R}_I$ sur LS est constante sur les classes, et telle que $\langle px - x, s_I \rangle = 0$ pour tout $s \in S$. On voit alors que px attribue à tout i la valeur moyenne de x sur $s(i) \in S$, $s(i)$ désignant la classe de i .

On obtient donc le tableau projeté de k_{IJ} sur $D\{S\} \otimes \mathbb{R}_J$ en opérant séparément sur chaque partie de colonne $\{k(i, j), i \in s\}$ pour en retrancher sa moyenne.

D'où le tableau k'_{IJ} projeté sur $D\{S\} \otimes \mathbb{R}_J$:

$$k'(i, j) = k(i, j) - |j \cap s(i)| / |s(i)|.$$

Ce tableau n'est pas, contrairement au tableau initial k_{IJ} , un tableau de mesure. Mais le problème de sa réduction peut être commodément résolu dans la pratique grâce à un programme d'analyse en composantes principales (ACP). En effet, les individus (ensemble D) sont équipondérés. Il suffit donc de munir \mathbb{R}_J d'une métrique appropriée M pour obtenir la réduction cherchée ; celle-ci est à un coefficient près la métrique du χ^2 de centre f_j , le coefficient étant destiné à permettre la confrontation avec l'analyse du tableau des profils effectuée en AFC (analyse factorielle des correspondances). D'où

$$M = \begin{pmatrix} \cdot & & 0 \\ \cdot & p/k(\cdot, j) & \\ 0 & p/k(\cdot, j) & \cdot \end{pmatrix} = \frac{p}{k(\cdot, j)} \text{Id}_J,$$

avec Id_J = matrice identité de \mathbb{R}_J et $p = |Q|$.

Dans la pratique, nous serons satisfaits (au moins partiellement, voir l'analyse scindée en A.7) de l'analyse apparente (AFC) lorsque l'analyse projetée (ACP) montrera que l'espace AS est voisin d'un espace principal d'inertie, donc que l'analyse apparente fournit une réduction correcte de l'espace transverse à AS. Et ceci se voit en comparant les coordonnées de rang α dans l'ACP projetée avec les coordonnées correspondantes de rang $(\alpha + |S| - 1)$ dans l'AFC, à supposer que l'espace réputé voisin de AS soit bien déterminé par les $(|S| - 1)$ premiers axes principaux.

A.7. L'analyse scindée.

L'analyse projetée permet de vérifier l'obtention dans l'analyse apparente d'un espace voisin de l'espace AS des modalités. Mais pour être complètement satisfaisante, du point de vue envisagé, l'analyse apparente doit restituer une bonne image des premiers axes des questionnaires des différentes modalités. C'est ce que nous avons indiqué dans la discussion du cas modèle (cf. A.5.4).

Nous supposons donc ici que l'analyse projetée s'est avérée positive. Par suite l'axe de rang $|S|$ de l'analyse apparente serait voisin de l'axe noté Diag 1 s'il s'agissait du cas modèle. La propriété remarquable de l'axe Diag α dans le cas modèle est que les réponses $jS' y$ ont pour coordonnée la même que j selon l'axe α , quelle que soit la partie S' de S. (Voir A.5.3., proposition 8).

Il en résulte comme conséquence que la coordonnée d'une réponse selon l'axe de rang $|S|$ devrait être indépendante de la ou des séries de rattachements de la question. Il y a là une difficulté qui n'est qu'apparente : en effet, pourrait-on dire, une fois effectués la partition S de I et le codage, la situation échappe à l'expérimentateur. Il n'en est rien, car deux questions peuvent différer suffisamment peu pour qu'il soit possible à volonté d'analyser ou non leurs réponses comme si elles ne correspondaient qu'à une unique question. Et inversement, on peut décider que l'effet de contexte permet toujours d'envisager comme différentes deux questions de même énoncé posées dans deux modalités différentes. Dans une certaine mesure donc, nous sommes maître de l'attribution des questions à telle ou telle série s . Et si nous n'avons pas un questionnaire qui donne du cas modèle une image trop "gondolée" (du moins en ce qui concerne le premier axe du questionnaire type), la coordonnée d'une réponse selon l'axe de rang $|S|$ de l'analyse apparente doit peu varier lorsque l'on décide de rattacher à l'une ou l'autre des séries concernées la question correspondante. Naturellement, tout ceci est sans objet pour les questions spécifiques à l'une des modalités du questionnaire.

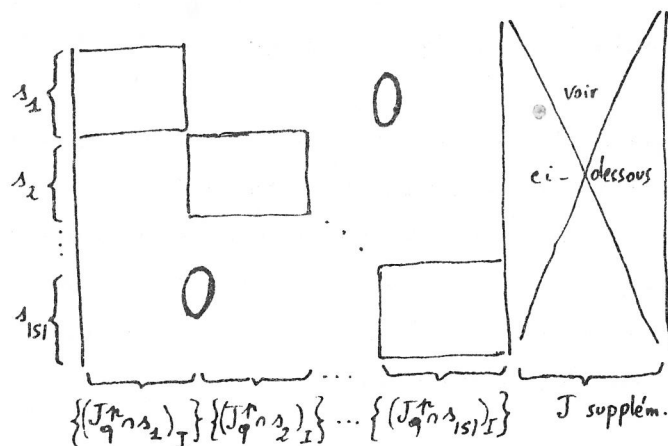
Pour remplir la tâche de confrontation que nous venons d'indiquer, le plus simple serait d'effectuer une analyse séparée de chacune des modalités du questionnaire. Chacune de ces $|S|$ analyses de correspondance fournit un premier axe factoriel. Et l'on comparera les coordonnées d'une réponse donnée selon ceux de ces axes pour lesquels il y a lieu de le faire, ainsi que selon l'axe de rang $|S|$ de l'analyse apparente.

Mais il est possible de remplir très exactement ce programme tout en faisant un peu plus. C'est ce que nous avons appelé l'analyse scindée.

Pour l'analyse scindée, nous procédons simultanément à l'analyse séparée des résultats des différentes séries $s \in S$ et à une comparaison utilisant la technique des éléments supplémentaires. Soit q une question du questionnaire Q , soit $I(q)$ la population concernée par la question ; $I(q)$ est une réunion de séries de S . Le questionnaire posé à la série s est $\{q \in Q / s \subset I(q)\} = Q^s$. Et les résultats de la série s sont, selon une notation déjà utilisée (voir A.5.1) : $\{J_q^p \cap s, q \in Q^s\}$. Le tableau que nous considérons, sans les objets supplémentaires indiqués ci-dessous, est le tableau dont l'ensemble des colonnes est :

$$\{J_q^p \cap s\}_I, \quad q \in Q^s, \quad s \in S\}.$$

C'est un tableau dont les blocs non nuls se succèdent le long de la diagonale, et dont nous représentons ci-dessous l'allure :



Quant à la partie du tableau concernant les objets supplémentaires, elle est tout simplement constituée des J_q^p , $q \in (Q - \cup \{Q^{\{s\}}\}, s \in S)$.

Ainsi il n'y a pas de modalité de non-passation comme dans l'analyse apparente. En revanche toute question non spécifique à l'une des séries figure à plusieurs endroits du tableau : elle figure dans chacune des séries concernées et est répétée dans les objets supplémentaires.

Nous savons que l'analyse d'un tel tableau revient à l'analyse séparée de chacun de ses blocs diagonaux. Plus précisément, l'analyse conduit à l'obtention de la valeur propre 1 avec l'ordre de multiplicité $|S|$, puis à des axes qui sont les axes principaux respectifs des différents blocs, avec des valeurs propres identiques à celles que fourniraient les analyses séparées de ces blocs. Pour répondre à l'exigence indiquée en début de paragraphe, nous avons à prendre en compte le premier axe principal de chacun des blocs.

En outre, la prise en compte des objets supplémentaires va enrichir cette comparaison des réponses à une même question posée à diverses séries, par le principe barycentrique.

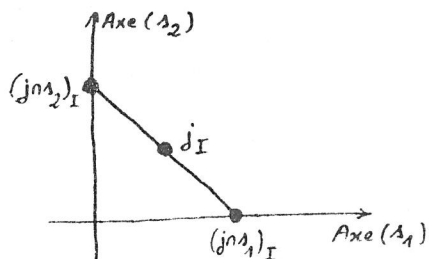


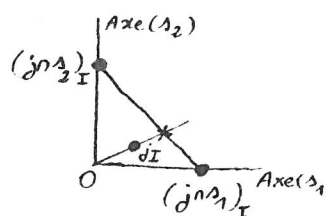
Figure : une réponse à une question de $Q^{\{s, s\}}$.

Pour fixer les idées, considérons une réponse j à une question $q \in Q^{\{s_1, s_2\}}$. Dans le plan déterminé par l'axe principal d'inertie de s_1 et celui de s_2 , cette réponse apparaît à trois endroits. Une fois sur l'axe $\text{Axe}(s_1)$, comme réponse à une question de Q^{s_1} . Une fois de même sur $\text{Axe}(s_2)$. Et enfin en un point situé sur le segment joignant les deux points précédents, à titre d'élément

supplémentaire. Ce point est barycentre des deux extrémités du segment affectées de masse égales à $|j \cap s_1|$ et $|j \cap s_2|$. Sa place sur le segment nous fournit donc un renseignement de même nature que celui qui résulte de l'analyse apparente.

Pour ce qui est du contrôle voulu, celui-ci résulte de la considération de la pente des segments tel que celui qui vient d'être envisagé. L'analyse apparente sera tout à fait validée, après une analyse projetée favorable, jusqu'à l'axe Diag 1, lorsque ces segments sont dirigés selon la deuxième bissectrice des axes. En effet ceci signifie qu'il y a bien l'égalité voulue des coordonnées. Ainsi la figure illustre une position satisfaisante.

Remarque : Cette dernière vérification reste la même pour $q \in Q^{S'}$ avec $|S'| > 2$. En revanche, il y a lieu de prolonger le segment joignant O à j_I jusqu'à la rencontre



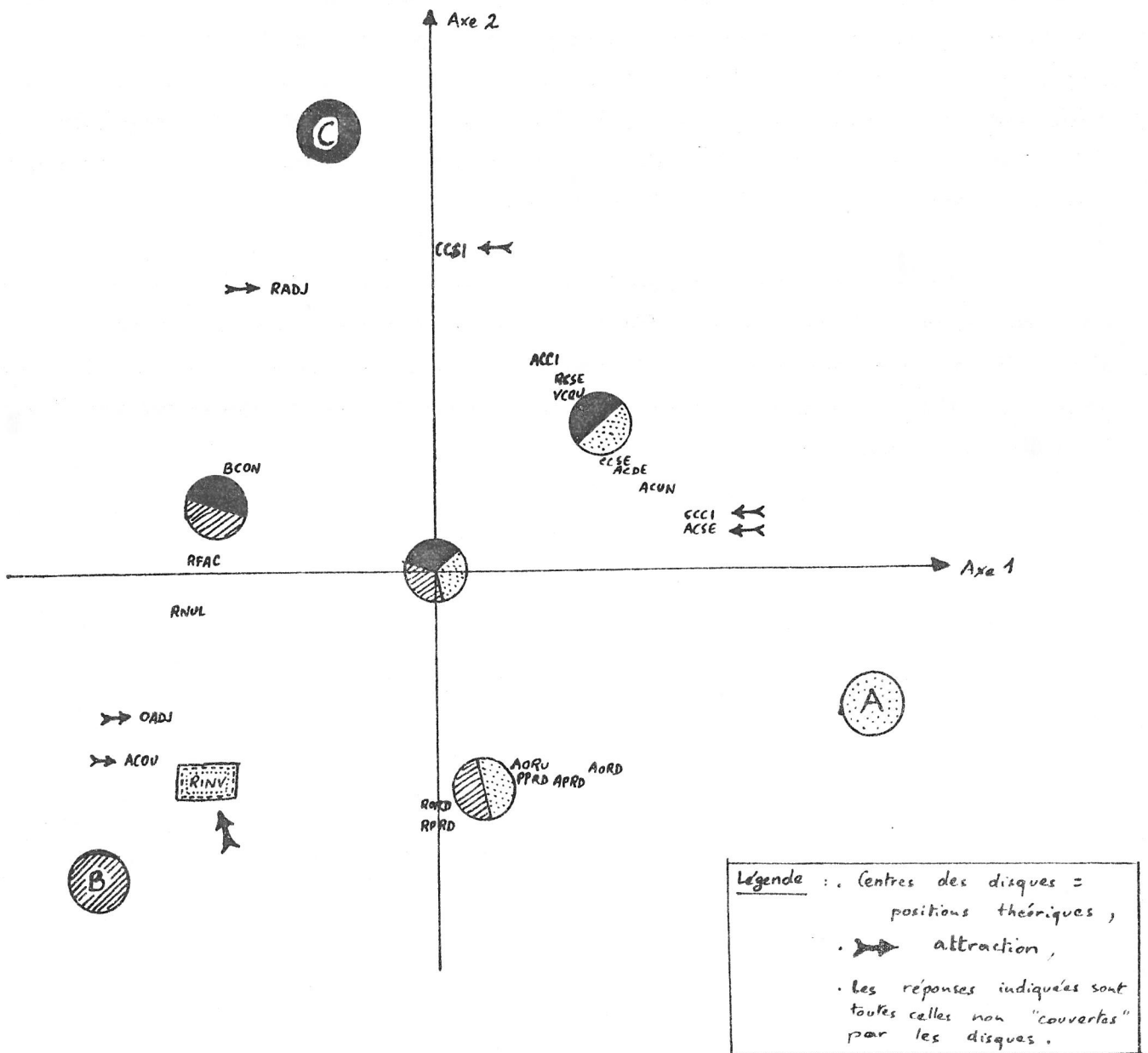
avec le segment qui nous intéresse, avant d'avoir recours au principe barycentrique entre les deux séries envisagées. En effet les séries autres que s_1 et s_2 se projettent toutes en O sur le plan (Axe (s_1) , Axe (s_2)).

On le voit, l'analyse scindée est susceptible de fonctionner de manière autonome pour l'interprétation, avec mise en évidence des mêmes phénomènes que l'analyse apparente. En théorie, elle est beaucoup plus simple que l'analyse apparente, mais elle est aussi beaucoup moins commode à l'exploitation, car les résultats ne sont pas directement visibles (les segments ne sont pas tout tracés) et restent en définitive moins spectaculaires que dans l'analyse apparente. Nous allons le voir, en concluant cet additif par une illustration concrète, faite sur le questionnaire analysé dans le texte (deuxième codage du questionnaire à trois modalités).

A.8. Analyses d'un questionnaire présentées pour illustration.

Notre propos n'est pas ici de revenir sur une étude déjà effectuée dans le texte, mais de montrer le fonctionnement des outils que nous venons de décrire, sur un questionnaire que nous connaissons bien.

Si l'on regarde le plan 1-2 de l'analyse apparente, on constate aisément qu'il mérite le nom de plan des modalités (voir figure), comme nous le vérifions d'ailleurs plus bas.



DEUXIEME ANALYSE : PLAN DES MODALITES (texte p. 146 à 150)

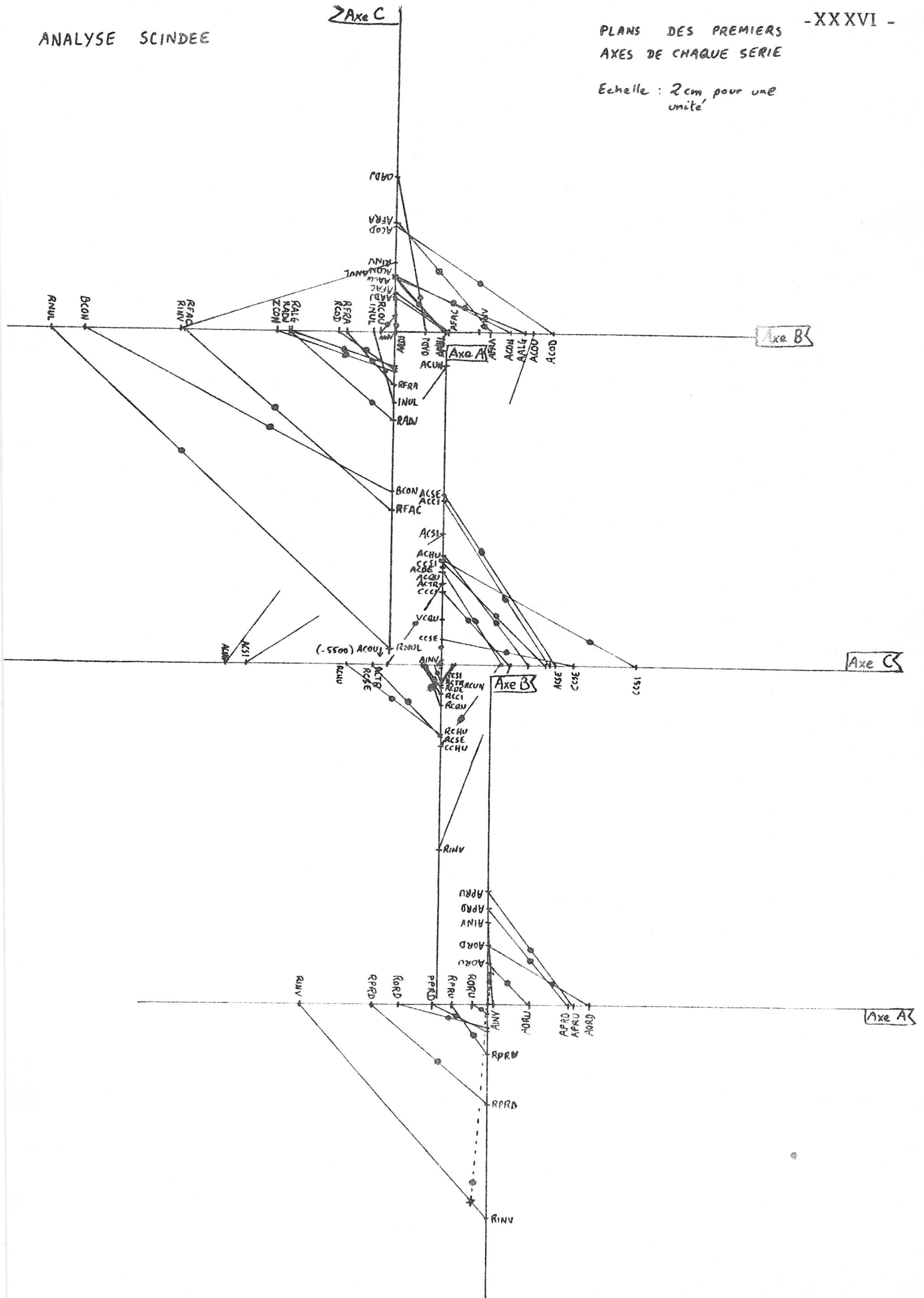
L'équilibre indiqué notamment dans la proposition 6(A.4.2) est nettement obtenu ici : sur le côté AB, il n'y a pratiquement pas d'attraction sensible ; sur le côté BC, les réponses RNUL et RFAC (réussites) compensent en partie la question ADJ (RADJ et OADJ) ; RINV contribue pour sa part à "redresser" ACOU ; sur le côté CA, on remarque la symétrie CCCI - CCSI et ACSE - ACCI, les autres réponses n'étant pas notablement attirées vers l'une ou l'autre extrémité.

Nous avons cependant procédé à l'analyse projetée, pour vérification. Les résultats ont été tout à fait concluants : sur les sorties graphiques, il était impossible de discerner un plan factoriel déterminé par les axes de rang α et β dans l'analyse projetée et le plan factoriel des axes de rang $(\alpha + 2)$ et $(\beta + 2)$ dans l'analyse apparente. Et il est difficile de dire si les très faibles différences de coordonnées entre l'un et l'autre cas excèdent l'incertitude des calculs (vérification effectuée jusqu'au facteur de rang 3 de l'analyse projetée, donc de rang 5 de l'analyse apparente). Autrement dit : pour ce questionnaire, le plan 1-2 de l'analyse apparente est bien le plan AS des modalités.

Après cette analyse concluante, nous avons effectué l'analyse scindée. En toute rigueur, le relevé des effectifs-satisfaisant pour l'analyse apparente - aurait dû nous pousser à modifier le codage si l'analyse scindée avait été effectuée seule. Que l'on prête attention aux effectifs qui ne dépassent pas la valeur 7 dans le tableau ci-dessous.

	A	C		A	B		B	C	
RCUN	66	69	RORU	56	57	RADJ	7	25	
ACUN	4	3	AORU	14	13	OADJ	25	7	
RCDE	58	62	RORD	38	49	AADJ	38	40	
ACDE	12	10	AORD	32	21	RCOU	64	70	
RCTR	59	62	RPRU	50	48	ACOU	6	2	
ACTR	11	10	APRU	20	22	RCOD	52	52	
RCQU	42	39	RPRD	23	29	ACOD	18	20	
VCQU	18	22	PPRD	9	8	RALG	39	41	
ACQU	10	11	APRD	38	33	AALG	31	31	
RCCI	54	59		A	B	C	BCON	5	8
CCCI	12	7					ZCON	26	27
ACCI	4	6	RINV	2	19	3	ACON	39	38
RCSI	63	60	AINV	68	51	69			
CCSI	2	7		B	C				
ACSI	5	5							
RCSE	37	47	RFRA	46	48				
CCSE	21	18	AFRA	24	24				
ACSE	12	7	RFAC	14	12				
RCHU	31	32	AFAC	56	60				
CCHU	12	11	RNUL	6	4				
ACHU	27	29	INUL	17	18				
			ANUL	47	50				

Malgré ces réserves quant à la présence d'effectifs faibles, il était intéressant de procéder à la confrontation des premiers facteurs dont nous avons parlé plus haut. La page suivante présente les résultats graphiques de cette confrontation.



Sur les graphiques nous voyons que la direction générale des segments est satisfaisante : il s'agit bien dans chaque cas d'une direction voisine de celle de la deuxième bissectrice des axes (il se trouve que l'orientation réussite-échec est le même pour les trois axes, donc la bissectrice à prendre en compte est la seconde). Il y a toutefois quelques renversements ; mais ceux-ci font précisément intervenir des réponses d'effectif faible, comme RINV (graphiques BC et CA), ACUN et ACSI (graphique CA). D'autres cas correspondent à l'étude du texte, et nous n'y revenons pas.

Les points que nous avons placés sur les segments correspondent aux objets supplémentaires (voir A.7.). Les attractions repérées dans le plan des modalités se retrouvent bien ici. Mais une remarque vaut d'être faite concernant ce repérage : il est bien plus commode d'interpréter l'analyse apparente, pour deux raisons. La première est la nécessité de compléter les sorties-machine par le tracé des segments, dans le cas de l'analyse scindée. La deuxième est que la position des objets supplémentaires n'a pas de sens dans le plan, mais seulement sur leur segment respectif. Par exemple, sur le plan BC apparaissent deux points très proches : celui de ACQU et celui de CCCI ; pourtant seul CCCI correspond à une attraction. C'est pourquoi, il nous semble que l'interprétation directe d'une analyse scindée est délicate. Mais pour le but que nous nous étions fixé ici, l'analyse scindée a rempli son rôle, et l'analyse apparente se trouve nettement validée par l'utilisation successive des analyses projetée et scindée.

LA DIFFICULTE DES EXERCICES SCOLAIRES EN MATHEMATIQUE

Etude de la complexité opératoire et de la complexité cognitive des activités mathématiques mettant en jeu des automatismes.

- Introduction

- PREMIERE PARTIE : LES PRINCIPES

- . Chapitre 1 Automatismes et heuristique p. 1
- . Chapitre 2 Quelques observations sur l'attitude et les comportements des élèves p. 23
- . Chapitre 3 Analyse de la difficulté des exercices à résolution programmée p. 33
- . Chapitre 4 Méthodologie des enquêtes et traitement statistique p. 51

- DEUXIEME PARTIE : APPLICATION A DEUX ENQUETES

- . Chapitre 5 Les pre-questionnaires p. 80
- . Chapitre 6 Questionnaire multiniveaux p. 92
- . Chapitre 7 Questionnaire trimodal p. 112
- Annexe 1 Une observation d'un élève p. 158
- Annexe 2 Sur la classification NLSMA et ses applications p. 161
- Annexe 3 Quelques sorties-machine p. 166
- Index - glossaire p. 173
- Bibliographie p. 179
- Errata p. 183
- . Additif p. I à XXXVII

NOTE : Dans tout le texte les numéros entre crochets correspondent à la bibliographie, et le signe (*) envoie à l'index-glossaire.