Et les sommes marginales vérifiant :

$$k(.,2j+1) + k(.,2j+2) = n_1 \quad , \text{ pour } j = 1,\dots, p_1$$

$$k(.,2j+1) + k(.,2j+2) = n_2 \quad , \text{ pour } j = p_1+1,\dots, p_1+p_2 \, .$$

- Cas de deux individus de la modalité A :

Dans le cas où $i \leq n_1$ et $i' \leq n_1$, la somme se réduit à :

$$\|f_J^i - f_J^{i'}\|^2 = \frac{N}{P}\left[\sum_{j=1}^{p_1}\left(\frac{(k(i,2j+1) - k(i',2j+1))^2}{k(.,2j+1)} + \frac{(k(i,2j+2) - k(i',2j+2))^2}{k(.,2j+2)}\right)\right.$$

$$\left. + \sum_{j=3+2p_1+2p_2}^{2+2p_1+2p_2+2p} \frac{(k(i,j) - k(i',j))^2}{k(.,j)}\right]$$

- Cas de deux individus de la modalité B :

Dans le cas où $i > n_1$ et $i' > n$, on obtient :

$$\|f_J^i - f_J^{i'}\|^2 = \frac{N}{P}\left[\sum_{j=p_1+1}^{p_1+p_2}\left(\frac{(k(i,2j+1) - k(i',2j+1))^2}{k(.,2j+1)} + \frac{(k(i,2j+2) - k(i',2j+2))^2}{k(.,2j+2)}\right)\right.$$

$$\left. + \sum_{j=3+2p_1+2p_2}^{2+2p_1+2p_2+2} \frac{(k(i,j) - k(i',j))^2}{k(.,j)}\right]$$

Ces expressions font apparaître que les individus d'une même modalité sont situés à une distance inférieure à celle qui sépare les deux modalités, pourvu que p soit suffisamment petit par rapport à p_1 et p_2 et qu'il n'y ait pas de comportement de réponse trop rare ($k(.,j)$ petit). Et le fait que cette distance intra-modalité soit plus petite que la distance inter-modalités nous assure que le nuage des individus a certainement la forme d'haltères (mais peut être seulement d'haltères "à boules" et non la forme souhaitée d'haltères "à disques" - nous y reviendrons).

Pour préciser ce phénomène, nous allons l'étudier en détail dans le cas où $n_1 = n_2$ (effectifs équilibrés entre les deux modalités) et sous l'hypothèse d'école que, pour tout j,

$$\frac{1}{3} \leq \frac{k(.,2j+1)}{k(.,2j+1) + k(.,2j+2)} \leq \frac{2}{3} \, .$$

Autrement dit, nous supposons, dans cet exemple théorique :

- que la répartition des deux modalités entre les individus est équilibrée,
- que les effectifs correspondant à un comportement de réponse restent compris entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ de la population concernée.

En considérant alors des cas extrêmes, nous obtenons les majorations et minorations suivantes.

- Pour $i \leq n_1$ et $i' > n_1$,

$$\|f_J^i - f_J^{i'}\|^2 \geq \frac{N}{P}\left[\frac{p_1}{n_2} + \frac{p_2}{n_1} + \frac{3p_1}{2n_1} + \frac{3p_2}{2n_2}\right] = 5 \; \frac{p_1 + p_2}{P} = 5(1 - \frac{p}{P}).$$

- Pour $i \leq n_1$ et $i' \leq n_1$,

$$\|f_J^i - f_J^{i'}\|^2 \leq \frac{N}{P}\left[\frac{3p_1}{n_1} + \frac{3p_1}{2n_1} + \frac{3p}{N} + \frac{3p}{2N}\right] = \frac{9}{2} \; \frac{2p_1 + p}{P} = \frac{9}{2}(1 + \frac{p_1 - p_2}{P}) .$$

- Pour $i > n_1$, et $i' > n_1$,

$$\|f_J^i - f_J^{i'}\|^2 \leq \frac{9}{2}\left(1 + \frac{p_2 - p_1}{P}\right).$$

Dans la pratique normale, les modalités servent à repérer des variations, et par suite les nombres de questions spécifiques sont les mêmes ou très peut différentes entre les deux modalités. Si donc $p_1 = p_2$, on est assuré que la distance $\|f_J^i - f_J^{i'}\|$ correspondant au premier cas sera supérieure à $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (majorant de la distance entre individus d'une même modalité) dès que la proportion $\frac{p}{P}$ sera inférieure à $\frac{1}{10}$. Ceci représente, dans l'une quelconque des deux modalités, 2 questions communes pour 9 questions spécifiques.

En conclusion, dans le cas où $n_1 = n_2$, les conditions suivantes :

- les effectifs d'un comportement de réponse quelconque sont compris entre le tiers et les deux tiers de la population,
- chacune des deux modalités comporte 2 questions communes pour 9 spécifiques,

sont <u>suffisantes</u> pour l'obtention d'un nuage d'individus en forme d'haltères.

4.11.4. Nuage des individus : la pratique effective des questionnaires à deux modalités.

Dans la pratique, on rencontrera des questions pour lesquelles les choix sortent de la fourchette [1/3, 2/3]. Mais il y aura aussi des questions donnant lieu à des choix équilibrés. Or l'étude théorique avait constamment pris en compte les valeurs extrêmes de la fourchette. La pratique établit ainsi une compensation, entre les comportements pour lesquels les effectifs ne sont pas compris entre le tiers et les deux tiers de la population, et les comportements concernant une proportion voisine de la moitié de la population.

On peut se poser ensuite la question de savoir si on obtiendra effectivement dans la pratique :

- une distance entre deux individus de modalités différentes voisine du minorant théorique calculé précédemment ,
- une distance entre deux individus d'une même modalité voisine du majorant théorique.

On s'aperçoit que le minorant risque d'être approché dans la pratique, alors que le majorant est moins réaliste. En effet, le minorant serait atteint pour deux individus qui auraient adopté :

- des comportements semblables sur les questions communes,
- les comportements les plus fréquents sur les questions spécifiques.

En revanche, atteindre le majorant reviendrait à trouver dans la même modalité deux individus ayant adopté des comportements constamment différents d'un bout à l'autre du questionnaire. On peut donc raisonnablement espérer obtenir un nuage en forme d'haltères avec, dans chaque modalité, une proportion de questions communes par rapport aux questions spécifiques supérieure à $\frac{2}{9}$. Mais, nous l'avons déjà dit, la forme vraiment intéressante n'est pas seulement celle d'haltères, mais celle d'"haltères à disques" : en effet le premier axe factoriel, qui n'est autre que la "barre d'haltères", ne repère dans ce cas que la seule appartenance d'un individu à l'une ou l'autre des deux modalités. Autrement dit, l'obtention d'un axe de modalités ne crée pas de biais dans la suite de l'analyse que nous envisagerons plus loin (nuage des comportements).

Dans la pratique, on n'obtiendra pas pour les individus des coordonnées toutes exactement égales à l'une ou l'autre de deux valeurs, ce qui correspondrait exactement à la situation des haltères à disques, mais le questionnaire devra être construit de telle sorte que l'obtention de coordonnées voisines soit possible.

Qu'est-ce à dire pour l'élaboration effective ? C'est essentiellement une exigence d'équilibre entre les deux modalités : ne pas concentrer toutes les difficultés dans une seule des deux modalités, faire en sorte que les durées d'exécution soient voisines, incorporer les mêmes notions dans les deux modalités. En une phrase, il s'agit de préserver dans le questionnaire l'homogénéïté des deux populations posée a priori en hypothèse entre les deux modalités. De toute façon, un défaut dans l'élaboration sera repéré par l'analyse : les individus d'une même modalité se trouveront affectés de coordonnées nettement différentes sur l'axe des modalités.

Pour donner une idée, voici un exemple effectif, qui peut être considéré comme satisfaisant. Il s'agit de l'analyse des correspondances appliquée aux résultats sur la page "symboles ensemblistes" d'un questionnaire pour des élèves de 5e (cf. [32]). Cette page comportait 7 questions communes en VRAI-FAUX, 5 questions en VRAI-FAUX spécifiques de l'une des modalités pour 3 questions dans l'autre modalité, ainsi que 6 questions à réponses codées sur trois colonnes (trois comportements de réponse enregistrés) spécifiques de l'une des modalités, pour également 6 questions du même type dans l'autre modalité. Les effectifs des modalités étaient déséquilibrés : $n_1 = 120$, tandis que $n_2 = 272$ (rappelons que le questionnaire complet était à trois modalités, dont deux se rejoignaient sur cette page).
Le premier axe issu de l'analyse est bien l'axe des modalités :

- pour la première modalité, les coordonnées des individus sont comprises entre - 1,27 et -1,18.
- pour la deuxième modalité, les coordonnées des individus sont comprises entre 0,50 et 0,58.

On voit que dans ce cas précis, le nuage des individus a une forme très nette "d'haltères à disques".

4.11.5. Nuage des comportements de réponse.

Désormais, nous supposons issu de l'analyse un axe des modalités satisfaisant. Autrement dit, les coordonnées sur cet axe des individus d'une même modalité sont voisines ; et notamment, si les effectifs n_1 et n_2 sont peu différents, ces coordonnées ont pour valeurs $\pm(0,5 + \varepsilon_i)$ où ε_i est un réel particulier à chaque individu mais toujours petit devant 0,5.

Nous n'allons pas étudier directement la forme du nuage des comportements de réponse, mais nous allons partir du nuage des individus, déjà obtenu, et utiliser le principe barycentrique (voir P.64).
Appliqué au cas particulier qui nous intéresse, à savoir un tableau de description logique totalement disjonctif (voir 4.10.2.), le principe barycentrique nous indique comment s'obtient la projection orthogonale d'un comportement de réponse sur l'axe des modalités :
puisque tous les individus ont même pondération, on prend le centre de gravité des projections des individus qui ont adopté le comportement de réponse considéré. Autrement dit, on sort du nuage des individus, projeté sur l'axe des modalités, ceux qui n'ont pas adopté le comportement considéré , et on considère le centre de gravité (ou isobarycentre) du nuage projeté restant. Ensuite, on fait subir à ce centre de gravité une homothétie de centre 0 et de rapport $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$, où λ_1 est la valeur propre associée à l'axe des modalités.

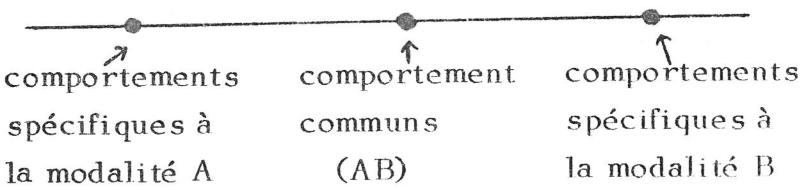
On en déduit que :

1° Les comportements de réponse spécifiques de l'une des modalités ont sensiblement tous la même coordonnée (quel que soit leur effectif dans cette modalité)

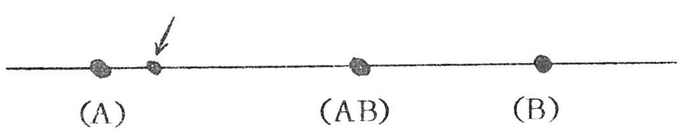
2° Les comportements de réponse aux questions communes ont une première coordonnée qui ne dépend que de leur répartition entre les modalités, et plus précisément du rapport des effectifs dans chaque modalité.

Ainsi, toutes les questions donnant lieu à une répartition équilibrée entre les modalités seront placées à proximité de l'origine, quels que soient leurs effectifs. Dans le cas fréquent où les effectifs n_1 et n_2 sont peu différents, on peut dire qu'une question à répartition équilibrée entre les modalités donne lieu à des comportements situés au milieu du segment des modalités.

Situation théorique



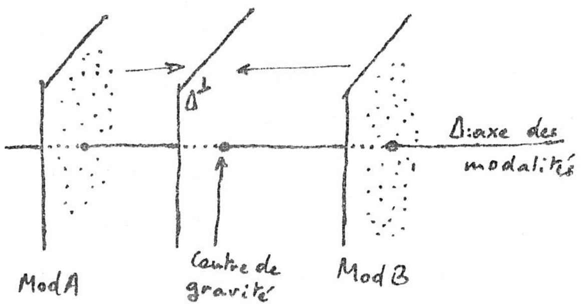
Une "attraction" vers A



La situation théorique est la situation très simple décrite par la figure ci-contre. Dans la pratique, toutes les déviations par rapport à cette situation théorique vont donc être mises en évidence par l'analyse : Celle-ci détectera toutes les attractions vers l'une des modalités d'un comportement de réponse en principe commun.

Un simple test de χ^2 nous permettra de décider du caractère significatif à attribuer à ces attractions considérées isolément.
Toutefois, si l'analyse en restait là, elle serait d'un intérêt limité. Il faut envisager les axes suivants, qui, eux, amèneront à une interprétation globale moins évidente que celle qui vient d'être faite :
Ainsi, s'il se dégage un axe interprétable comme celui de réussite-échec général, il est très intéressant de savoir de quel côté s'y projettent les comportements attirés vers l'une des modalités.

Or, dans le cas où un axe des modalités satisfaisant est issu de l'analyse, le nuage projeté sur l'orthogonal de cet axe dans l'espace du nuage, n'est autre que la superposition des deux nuages correspondant aux deux modalités.



Nous savons en effet que, lorsque nous avons obtenu un axe principal d'inertie du nuage, les axes suivants sont aussi ceux du nuage projeté sur l'orthogonal de cet axe.
Or, dans le cas d'un axe de modalités satisfaisant, il n'y a, à de petites variations près, que deux valeurs de la projection sur Δ, l'axe des modalités : lune correspond à la motivation A et l'autre à la motivation B.

La figure illustre la situation. Nous voyons que dans ce cas le nuage projeté est bien obtenu sans déformer le nuage initial autrement qu'en superposant les deux modalités. Autrement dit, : l'obtention d'un bon axe de modalités s'accompagne d'une absence de biais dans l'analyse ultérieure.

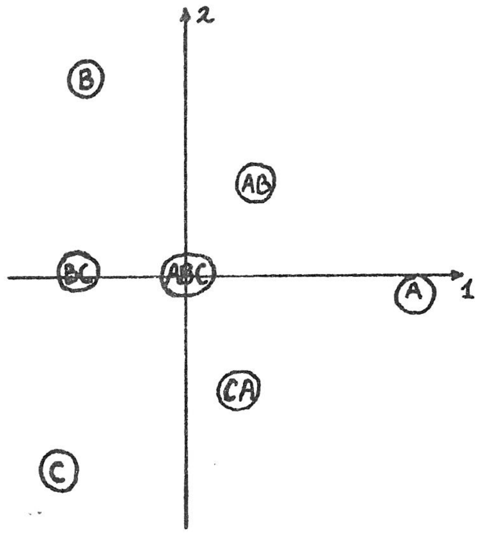
Bien entendu, s'il n'y a pas modification des axes par rapport à une analyse qui ne prendrait en compte que les comportements de réponse, il y a en revanche une modification des valeurs propres et des pourcentages, dont il est possible de tenir compte lors de l'interprétation.

4.12. Les questionnaires à trois modalités.

L'étude théorique et pratique faite dans le cas des questionnaires à deux modalités se transpose facilement au cas de trois modalités : du seul point de vue des modalités, il y a trois sortes d'individus, que nous désignerons par A, B et C.

Il faut donc substituer à l'axe des modalités un plan des modalités , de dimension deux. Souvent dans la pratique, l'une des modalités se distinguera un peu plus des deux autres que celles-ci entre elles ; l'axe factoriel numéro 1 opposera cette modalité aux deux autres, qui seront opposées sur l'axe factoriel numéro 2. Il se peut aussi que ce soit l'opposition de deux modalités qui s'impose en premier lieu. Ce cas, par rapport au précédent, revient à un échange des deux premiers axes factoriels (1↔2).
Comme dans le cas de deux modalités, la considération des coordonnées individuelles, cette fois-ci dans le plan des modalités, constituera un moyen de contrôle intéressant.

Dans le cas où le plan des modalités est satisfaisant, et si les effectifs pour les trois modalités sont sensiblement égaux, la forme du nuage des comportements de réponse est celle illustrée par la figure, compte tenu du principe barycentrique : un triangle aux sommets duquel se situent les comportements spécifiques aux modalités respectives. Le milieu des côtés est la position de principe des comportements de réponse aux questions communes à deux des trois modalités. Enfin, le centre de gravité du triangle, qui est l'origine du plan des deux axes, est la position de principe des comportements de réponse communs aux trois modalités. On peut de plus remarquer que, si les valeurs propres λ_1 et λ_2 diffèrent peu, alors le triangle des modalités est sensiblement équilatéral.



Comportements de réponse : un triangle de modalités.

Par rapport aux questionnaires à deux modalités, ceux à trois modalités présentent le désavantage d'exclure toute possibilité d'analyse sans machine : il y aurait beaucoup trop d'éventuelles déviations à explorer. Cet inconvénient (qui n'en est pas un si l'on dispose de moyens suffisants) mis à part, les questionnaires à trois modalités représentent certainement la forme d'exploitation la plus intéressante. On se rend immédiatement compte du gain en richesse par rapport à deux modalités. Mais aussi la configuration obtenue est plus "stable", c'est-à-dire que l'on a plus de chances d'obtenir une analyse intéressante à partir d'un questionnaire à trois modalités. Alors, pourquoi ne pas continuer, en proposant un nombre de modalités supérieur à trois ? C'est qu'alors l'interprétation ne pourrait plus avoir de support visuel direct.

En effet, ce sont des feuilles de papier qui sortent des imprimantes, ce qui autorise la confection de graphiques plan (et sur écran, il en est de même). Dès qu'il y a quatre modalités (donc un tétraèdre de modalités), l'espace des modalités cesse d'être directement observable. Et la pratique montre que cet inconvénient est très gênant, à cause des risques d'oublis ou d'erreurs qu'il suscite (j'ai essayé une fois, et une seule, un questionnaire à quatre modalités...).

C'est pourquoi nous avons décidé de travailler habituellement sur des questionnaires à trois modalités. Dans la deuxième partie, on trouvera le premier d'entre eux. On pourra se rendre compte qu'il ne constitue pas un questionnaire exploitant à fond l'utilisation de trois modalités ; à ce titre je demande un peu d'indulgence au lecteur : d'une part l'étude présentée dans ce chapitre est postérieure à l'élaboration du questionnaire, d'autre part, je me proposais essentiellement, dans ce questionnaire, ainsi que dans le questionnaire multiniveaux, d'expérimenter l'analyse de la difficulté envisagée au chapitre 3. Si je devais présenter un "modèle" de questionnaire à trois modalités, je choisirais le questionnaire sur la négation, pour lequel nous en sommes, au moment où j'écris ces lignes, à la phase du codage des réponses.

DEUXIEME PARTIE : APPLICATION A DEUX ENQUETES

Chapitre 5 LES PRE-QUESTIONNAIRES

Usuellement, on se borne à mentionner l'existence de questionnaires d'essai. Il a cependant paru intéressant ici de présenter en partie les pré-questionnaires ainsi que leurs résultats les plus notables, à cause du caractère exploratoire de ces questionnaires, dont le champ d'investigation a nettement débordé celui des questionnaires définitifs. Nous réserverons aux chapitres suivants l'examen complet des raisons du choix des questions retenues, nous limitant dans ce chapitre à indiquer la prise en compte des résultats des essais pour l'élaboration des questionnaires définitifs. Ce chapitre fait donc peu appel aux éléments du chapitre 3.

5.1. Objectifs des pré-questionnaires

A priori le champ d'investigation apparaissait trop vaste pour faire l'objet d'une étude exhaustive en une ou deux enquêtes. Il fallait donc choisir. Rappelons qu'il y a intérêt à délimiter toute enquête (alors que la dispersion des questions peut être préférée pour un examen). Lorsque le sujet d'une enquête est d'emblée suffisamment précis, un pré-questionnaire n'est qu'un outil de vérification, présenté aux élèves de quelques classes, mis hors échantillon. Vérification individuelle : Le temps imparti permet-il aux élèves de répondre à la totalité du questionnaire sans excessive précipitation ? Quel est l'accueil apparemment réservé par les élèves au questionnaire ? Vérification des items : Y en a-t-il auxquels aucun élève ne répond ? Y en a-t-il qui donnent lieu à une réussite totale ? Y en a-t-il qui donnent lieu à des malentendus gênants pour l'objectif de l'enquête ? A ces vérifications par lignes (individus) et par colonnes (items) peuvent éventuellement s'ajouter quelques examens comparatifs (colonnes entre elles). Les pré-questionnaires ainsi prévus ont une forme très proche de celle des questionnaires définitifs ; souvent, quelques retouches seulement font la différence entre les uns et les autres.

Les présents questionnaires d'essai permettaient de telles vérifications. Mais l'objectif principal était d'effectuer un <u>tri</u> parmi les questions, pour procéder ensuite à des études plus précises. Le nombre des items présentés aux essais dépasse donc largement celui des enquêtes ultérieures. Certaines rubriques des essais n'ont pas du tout été retenues, et les autres ont été limitées. Dans le temps imparti pour les passations, la différence apparaît nettement : Chaque élève "d'essai" a disposé, pour répondre, de trois séances (une "heure" scolaire), tandis qu'une seule séance était prévue pour chaque élève de l'échantillon d'enquête. Il est évident qu'une telle réduction dans le temps imposait un tri sévère parmi les items. Sans nous étendre sur le choix des items d'essai, bornons nous à indiquer qu'il a été dicté par le souhait de mettre en jeu les différents ingrédients des procédures de résolution, cognitifs et opératoires (voir chapitre 3). Le "survol d'ensemble", organisé pour ces essais, pourrait être comparé à l'étude générale d'un site archéologique avant l'ouverture d'un chantier de fouilles. Ce survol a porté essentiellement sur les <u>possibilités</u> des élèves dans le domaine numérique, et leur <u>évolution</u> éventuelle entre les âges moyens de 13 et 15 ans. Une partie des items présentés seulement aux élèves les plus jeunes concernait les notions ensemblistes ; mais leur objet était en fait l'utilisation des variables, à comparer avec la même utilisation dans le domaine numérique. Il est difficile de préciser davantage les raisons du choix des items sans en indiquer la liste explicite. Mais la consultation des questions concernant les opérations numériques (liste des items au début du paragraphe 5.3.) peut éventuellement suffire à fixer le lecteur sur la nature de l'exploration ainsi projetée (différences cognitives entre les items, différences de procédure de résolution, présence de perturbation, simultanéïté de notions,...), en attendant la prise de connaissance des questionnaires d'essai (ou plutôt de la partie de ces questionnaires présentée dans ce chapitre).

5.2. Déroulement des essais

Rappelons que le niveau scolaire jugé le plus intéressant pour cette recherche est celui de la classe de 3^{e} (âge moyen des élèves : 15 ans), où les "automatismes" de toute sorte ont déjà une place non négligeable ; pour comparaison, il était intéressant d'envisager aussi les niveaux scolaires voisins (nous avons donné plus de détails en page 53). Pour une enquête sur des élèves d'un niveau scolaire donné, on peut intervenir soit à ce niveau en fin d'année scolaire, soit au niveau supérieur en début d'année scolaire. Les pré-questionnaires, ayant été construits en début d'année scolaire, ont été présentés (octobre 1972) aux trois classes indiquées dans le tableau ci-dessous.

niveau (désignation scolaire française)	4e	2e C	2e AB
âge normal des élèves en début d'année	13 ans	15 ans	15 ans
caractéristiques des études	enseignement général	lycée, section "scientifique"	lycée, section "littéraire"

Pour ce qui est des questionnaires définitifs, passés en fin d'année scolaire, le premier a été présenté à des élèves des niveaux 5e, 4e, 3e et 2e, et le second à des élèves de 3e uniquement.

J'ai personnellement assisté, en compagnie des professeurs, aux neuf séances (trois dans chaque classe d'essai), au cours desquelles les élèves ont répondu aux pré-questionnaires. Je suis reconnaissant envers ces professeurs de leur sympathique concours et de leur aide matérielle qui a permis un excellent déroulement des passations. Qu'ils m'excusent de ne pas les remercier nominalement, mais ce n'était guère possible à partir du moment où certains résultats de leur classe étaient mentionnés ici.

Dans la suite, les questionnaires seront désignés selon l'indicatif sous lequel ils ont été présentés aux élèves. Le questionnaire pour les élèves de 4e avait été intitulé A5. Il comportait une partie "calculs" (numériques et avec variables) en pages A51, A52, A53 et A56, et une partie sur l'usage du symbolisme ensembliste en pages A54 et A55 (partie non retenue en définitive, et non présentée ici). Le questionnaire pour les élèves de 2e (C et AB) était intitulé A3. Les items "calculs" occupaient les pages de A31 à A34, tandis que les pages A35 et A36 étaient consacrées à des équations et des inéquations (de même que la partie ensembliste de A5, cette partie de A3 n'est pas présentée ici).

Le déroulement des essais a été organisé comme suit.

Classe de 4e : Une séance pour les pages A51 et A52
Une séance pour les pages A53 et A56
Une séance pour les pages A54 et A55

Classes de 2e : Une séance pour les pages A31 et A32
Une séance pour les pages A33 et A34
Une séance pour les pages A35 et A36.

Les questionnaires sont présentés ci- dessous, partie par partie, et les résultats des élèves sont indiqués et commentés à la suite de chaque partie. Pour des raisons de place, la disposition des items sur les feuilles remises aux élèves n'est pas respectée ici ; toutefois cette disposition est indiquée en note lorsque c'est nécessaire.

Page A51. Consigne unique : Effectuer les opérations suivantes. Les résultats sont à écrire ou reporter dans les cases.

(1) $\begin{array}{r} 74836 \\ + \underline{93282} \end{array}$ (2) $\begin{array}{r} 427 \\ \times \underline{239} \end{array}$ (3) 5363 + 27 + 42370 + 255

(4) (78 - 6) - (-2 + 18 - 7) (5) 6 x 1,00001

(6) (-47 + 514) - (41872 - 100000 + 4) (7) 9 + 1,00001 (8) 3,14 x $(0,3)^2$

(9) 123456,789 + 987,654321 (10) (-78 + 271) x (48 - 50) + 62 x (-52 + 51)

(11) 1357,9 - 864,208 (12) -(672 - 81 - 5) x (37 - 100) - (19 - 532 + 262)

(13) 0,085 x 0,07.

(Note : Sur les feuilles remises aux élèves, chaque item occupait une ligne comportant à son extrémité une case réponse. Verbalement, il avait été demandé aux élèves d'effectuer tous leurs calculs sur les feuilles.)

Page A31. Cette page est la même que la page A51, à l'exception des items n° 1, 2 et 3 qui n'y figurent pas.

Il peut être intéressant pour le lecteur de suspendre ici sa lecture et d'essayer de deviner comment les items ont pu être classés auprès des élèves, de l'item réussi par le plus grand nombre d'élèves à l'item le moins réussi. Une telle réflexion préliminaire peut apporter un éclairage intéressant sur le tableau des résultats qui suit.

Le tableau des résultats ne comporte pas les items 1, 2 et 3, présentés aux seuls élèves de 4e. Ces items ont été respectivement réussis par 23, 11 et 11 élèves, sur les 24 que comportait la classe lors de cette séance. Dans le tableau, les items sont présentés pour chaque classe dans l'ordre décroissant des taux de réussite auprès des élèves. Leur numéro de désignation dans ce tableau de résultats est celui de la liste ci-dessus.

4e (24 élèves)		2e C (34 élèves)		2e AB (28 élèves)	
Item n°	Taux de réussite	Item n°	Taux de réussite	Item n°	Taux de réussite
5	.93	5	1.00	5	.96
4	.54	4	.83	7	.93
9	.46	9	.79	9	.93
11	.34	11	.79	4	.75
13	.29	7	.76	11	.71
7	.17	13	.73	13	.71
8	.17	8	.44	8	.46
12	.12	6	.38	10	.29
10	.08	10	.32	6	.29
6	.04	12	.18	12	.07

Le phénomène le plus remarquable est le peu de différences entre les trois classements, malgré de gros écarts des taux de réussite entre la 4e et les deux 2e. Pour les nombres à virgule, seul l'item "9 + 1,00001" fait exception : en milieu de liste (resp. sixième et cinquième) pour la 4e et la 2e C, il est en seconde position pour la 2e AB. Si l'on restreint le tableau aux seuls nombres à virgule (items n° 5, 7, 8, 9, 11 et 13), cet item est en quatrième position pour la 4e et la 2e C, et en seconde pour la 2e AB. Un examen plus détaillé des réponses montre, sur cet item, huit cas où le résultat donné est 9,00009 (confusion avec la multiplication). Est-ce dû à la proximité et la similitude avec l'item "6 X 1,00001" ? Une modification sera à prévoir dans le questionnaire définitif (1). Et l'évolution, avec l'âge, des réussites à cet item modifié devra être examinée tout particulièrement, puisque l'item n° 7 du questionnaire d'essai est celui qui donne lieu à la plus importante augmentation du taux de réussite.

(1) La modification adoptée a été de remplacer 1,00001 par 0,00002.

Le premier item du tableau pour lequel le taux de réussite en classe de 2e est inférieur à .50 est l'item n° 8 : "$3,14 \times (0,3)^2$". L'erreur très nettement prépondérante sur cet item est la réponse 2,826 ; cette réponse donne lieu aux taux suivants. En 4e : .33, en 2e C : .47 et en 2e AB : .46. Il s'agit d'une réponse plus fréquente que la réponse exacte (0,2826). Au vu des copies d'élèves sur lesquelles l'opération $3,14 \times 0,9$ est généralement effectuées par écrit, on peut affirmer que la seule erreur qui entache cette réponse provient du "plongement" (voir p.   ) :

$(0,3)^2 = 0,9$ au lieu de $(0,3)^2 = 0,09$.

Si besoin était, la comparaison avec les résultats à l'item n° 13 apporterait une confirmation. Pour l'ensemble des élèves "d'essai", le tableau en réussite-échec à ces deux items est le suivant :

		$3,14 \times (0,3)^2$	
		Réussite	Echec
$0,085 \times 0,07$	Réussite	26	27
	Echec	5	28

Comme on pouvait s'y attendre, il n'y a pas indépendance entre les résultats à ces deux items : $\chi^2_1 = 10,5$, significatif au seuil .01. Mais il apparaît surtout que l'un des items est manifestement plus "difficile" que l'autre (réussir $3,14 \times (0,3)^2$ implique pratiquement de réussir $0,085 \times 0,07$, mais pas réciproquement). Il est important de préciser que l'opération $0,085 \times 0,07$ figure par écrit sur la plupart des copies d'élèves, ce qui est à rapprocher de la présence fréquente de l'opération $3,14 \times 0,9$. On ne peut donc pas soutenir que la différence des résultats s'expliquerait par le fait que l'item n° 7 comporte deux multiplications successives alors que l'item n° 9 ne comporte qu'une multiplication. C'est bien le <u>plongement</u> qui est en cause. Toutefois, il serait illicite de déduire d'une telle affirmation que le phénomène aurait été le même si l'on avait substitué $(0,3)^2$ à $3,14 \times (0,3)^2$. Des vérifications écrites auraient, par exemple, très bien pu être effectuées sur la multiplication $0,3 \times 0,3$, ce qui n'a pas été le cas ici. Autrement dit, si l'on peut dire que la présence de la deuxième multiplication n'est <u>pas</u> une source <u>d'erreur supplémentaire</u> appréciable, on peut très bien supposer qu'elle a pour rôle de <u>détourner l'attention</u> et donc de favoriser l'erreur due au plongement.

L'item n° 12, qui n'atteint pas un taux de réussite de .20, est à supprimer des questionnaires définitifs. Compte-tenu de la présence de l'item n° 10, l'item n° 6 ne paraît pas non plus nécessaire.

Au contraire, les items n° 1 et 2, qui ont donné lieu en 4e à un taux de réussite modeste (.46), devront être proposés à des élèves de niveau supérieur. On aboutit ainsi, pour cette rubrique "opérations numériques", aux items du questionnaire définitif, présentés en page .

Pages A52 et A32.

A52 Effectuer les divisions euclidiennes suivantes

1) 2829 par 27 2) 77777 par 888

3) 546 par 617 4) 123456 par 789.

Note : Les cases-réponses étaient de la forme

Quotient :
Reste :

A32 Mettre les rationnels suivants sous forme d'une fraction irréductible.

1) $\frac{2}{3} \times \frac{45}{35}$ 2) $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) \times \left(\frac{3}{16} - 1 \right)$ 3) $\dfrac{\frac{5}{6} + \frac{1}{12}}{\frac{9}{16} - \frac{7}{6}}$

4) $\dfrac{\frac{32}{24} + \frac{28}{21}}{\frac{32}{24} \times \frac{28}{21}} : \frac{3}{4}$ 5) $\frac{1}{55} + \frac{1}{66} + \frac{1}{77}$.

La page A52 donne lieu à des nombres de réussites faibles :

Item 1 : 15 réussites (sur 24 élèves)

Item 2 : 8 réussites

Item 3 : 5 réussites

Item 4 : 6 réussites.

L'imprégnation de la division avec décimales (chiffres après la virgule) peut expliquer en partie cette faiblesse. C'est ainsi que pour l'item n° 3, huit élèves introduisent une virgule dans le quotient, tandis que par ailleurs quatre élèves estiment la division impossible. L'introduction des nombres réels en classe de 4e ne risque pas d'améliorer ce manque "d'automatisme" sur la division euclidienne. Aussi est-il préférable de ne pas retenir cette question pour les questionnaires définitifs : la variété des réponses serait trop grande, et demanderait un examen délicat des étapes de chaque opération. On peut s'en apercevoir sur quelques cas particuliers qui se dégageaient de la classe d'essai. En voici deux, pour lesquels nous présentons chaque fois deux opérations, telles qu'elles apparaissent sur les copies d'élèves concernées.

1° $\begin{array}{l|l} \overset{\frown}{28}29 & 27 \\ \hline 012 & 112 \\ \ \ 5\underset{1}{9} & \\ \ \ 05 & \end{array}$ et $\begin{array}{l|l} \overset{\frown}{1234}\underset{11}{5}6 & 789 \\ \hline \ \ \ 56 & 1 \end{array}$

retenues

2° $\begin{array}{l|l} 77777 & 888 \\ \hline \ 57 & 9822 \\ \ \ 17 & \\ \ \ \ 17 & \end{array}$ et $\begin{array}{l|l} 123456 & 789 \\ \hline \ 53 & 17636 \\ \ \ 44 & \\ \ \ \ 25 & \\ \ \ \ \ 46 & \\ \ \ \ \ \ 4 & \end{array}$

Dans le premier cas, c'est la considération des derniers chiffres qui l'emporte. Par exemple, 12 divisé par 27 fournit 1 pour quotient et 5 pour reste (voir la première division). La deuxième opération est interrompue, mais après prise en compte d'un trop grand nombre de chiffres au dividende pour la première division.

Dans le deuxième cas, seul le premier chiffre du diviseur est considéré à chaque étape. Dans la première opération, il s'y ajoute l'erreur 56 = 8 x 8 au lieu de 56 = 8 x 7.

Evidemment, de tels cas particuliers ne sont pas sans intérêt (1), mais ils eussent été difficilement incorporables à un traitement d'ensemble.

(1) Le point de départ matériel de la thèse de 3e cycle de psychologie de C. Bloch ([7]) s'est situé dans l'examen d'élèves de cette classe sur un test de Rohrschach avec allègement de consigne. Sans lui donner d'indication préalable sur leurs résultats mathématiques, j'avais communiqué à C. Bloch une petite liste d'élèves de cette classe. Je pensais que des caractéristiques comme des difficultés de retour en arrière ou de choix pouvaient se retrouver sur des épreuves non mathématiques. Ce fut manifestement le cas pour deux élèves nettement "typés" de ce point de vue ; mais ce qui apparut surtout comme frappant fut la possibilité d'influence de l'allègement de consigne sur l'ensemble des résultats au test. Cette influence de la consigne sur le test de Rohrschach fut ensuite étudiée plus systématiquement par C. Bloch et fait l'objet de sa thèse (loc. cit.).

La page A32 discrimine nettement les deux classes de 2e, ce qui n'était pas le cas pour la page A31. Faute de temps, les élèves n'ont pas traité le dernier item. Voici les résultats pour les quatre autres items.

Item n°	Taux de réussite 2e C (34 él.)	Taux de réussite 2e AB (28 él.)
1	.73	.36
2	.53	.32
3	.12	.11
4	.06	.04

Pour le nombre total de réussites à cette question, on observe
en 2e C : 4 réussites ... 1 élève
3 réussites ... 4 élèves
2 réussites ... 9 élèves
en 2e AB : 3 réussites .. 2 élèves
2 réussites .. 6 élèves.

Et le tableau des nombres de réussites à cette question est le suivant :

n : nombre d'items réussis	2e C	2e AB	
$n \geq 2$	14	8	22
$n = 1$	15	6	21
$n = 0$	5	14	19
	34	28	

Remarque : C'est pour que le test du χ^2 soit applicable que les nombres de réussites de deux et plus sont regroupés dans ce tableau. On obtient $\chi^2_2 = 8,24$, significatif au seuil .05.

Pour le questionnaire multiniveaux, une question sur les fractions ne peut être retenue (apprentissage insuffisant en 5e et 4e). En revanche, au vu des différences qui apparaissent ici, il paraît intéssant de retenir une telle question pour le questionnaire trimodal présenté aux élèves de fin de 3e.

5.4. Rangement de nombres et utilisation de variables

Page A53. Chacun des exercices suivants présente une liste de nombres décimaux, sous lesquels figurent des cases. Il s'agit dans chaque cas de ranger les nombres par ordre croissant, en inscrivant 1 sous la case correspondant au plus petit, 2 sous la case du suivant, et ainsi de suite.

1) 1,08 ☐ 1,11 ☐ 1,07 ☐ 1,12 ☐ 1,09 ☐

2) 94,66 ☐ 3,696 ☐ 10,770 ☐ 9,466 ☐ 845 ☐ 62,962 ☐ 138,5 ☐

3) 0,213 ☐ 0,321 ☐ 1,023 ☐ 0,231 ☐ 1,203 ☐ 0,123 ☐ 0,132 ☐

4) 1,004 ☐ 0,004 ☐ 0,1010 ☐ 1,0101 ☐ 0,0007 ☐ 0,0038 ☐ 0,1001 ☐ 0,00369 ☐

Résultats. Seuls deux élèves n'ont pas compris la consigne, mais six l'ont comprise globalement : ceux-ci ont donc travaillé sur le rangement des vingt-sept (!) nombres donnés. Tous les autres élèves ont correctement rangé les nombres du premier item. Le deuxième item également donne lieu à une réussite quasi complète de ces élèves (un seul échec). En revanche, il y a cinq échecs au troisième item, et une seule réussite au dernier. Les deux éléments qui peuvent différencier les items sont le nombre et la forme des nombres donnés. L'item 2 semble montrer que la présence de chiffres après la virgule ne provoque pas d'erreur si le rangement n'exige que la considération des parties entières. Pour les questionnaires définitifs, un tel type d'item n'est donc pas nécessaire, et il est préférable de limiter à sept les nombres proposés dans un item.

Pages A54 et A33. Voici cinq expressions littérales :

1) $ab - 2bc$ 2) $a - ac + b - bc$ 3) $(a + b)(b + c)$

4) $(a + b - c)(c - a) - abc$ 5) $a(b + c) + bc - b(a + c) + ca$

1° Calculer dans $\mathbb{Z}$ (entiers relatifs) la valeur de chacune de ces expressions dans le cas où l'on prend : $a = 8$, $b = 3$ et $c = 0$.

2° Même question pour : $a = -3$, $b = 4$ et $c = -1$.

3° Calculer dans Q la valeur de chacune de ces expressions dans le cas où l'on prend : $a = 1$, $b = -\frac{3}{2}$ et $c = -\frac{1}{3}$.

<u>Note</u> : Pour la classe de 4e, seuls les calculs dans **Z** des trois premières expressions étaient proposés. Pour les classes de 2e, le premièrement n'était pas proposé, et cet exercice de substitution de valeurs était également limité aux trois premières expressions. Nous avons toutefois présenté les deux dernières expressions, parce qu'elles interviennent dans les questions qui suivent.

<u>Pages A55 et A34</u> (suite des pages précédentes).

4° <u>Simplifier</u> les cinq expressions littérales dans le cas où l'on prend $b = a + 1$ et $c = 2a$, sans fixer de valeur à a.

5° Essayer (ce n'est pas toujours possible) de remplacer chacune des cinq expressions par une expression identiquement égale qui ne contienne pas plus d'une fois chaque lettre. ("Identiquement égale" veut dire "égale pour toutes les valeurs de a, b, c dans $\mathbb{R}$".)

<u>Résultats</u>. Les substitutions de valeurs donnent lieu à de bons résultats dès la classe de 4e. Voici ces résultats item par item (le tableau donne les taux de réussite).

		4e (23 élèves)	2e C (35 élèves)	2e AB (28 élèves)
	1	.87		
1°	2	.74		
	3	.87		
	1	.83	.89	.71
2°	2	.48	.66	.50
	3	.78	.91	.79
	1		.43	.43
3°	2		.51	.29
	3		.63	.21

Note : Les petites fluctuations des nombres d'élèves, d'un tableau à l'autre, sont dues au fait que la passation des essais s'est faite en plusieurs séances, espacées de quelques jours.

On pouvait se demander si les parenthèses étaient susceptibles de gêner les élèves. Le tableau des résultats montre qu'il n'en est rien en ce qui concerne la troisième expression. Toutefois l'équilibrage (ici : symétrie de l'écriture) a pu constituer un élément de facilité dans ces calculs. Le peu de difficulté des calculs mettant en jeu la troisième expression n'est en défaut que dans la classe de 2e AB et pour le seul dernier calcul. Or dix élèves de 2e AB n'ont pas traité du tout ce dernier item. Et il s'est avéré, à la passation, que le temps de réponse aux premiers items avait été relativement long dans cette classe. On peut donc penser que beaucoup d'élèves ont tout simplement renoncé à répondre ici, pour s'attaquer plutôt à la question suivante.

Le nombre de réussites complètes (six items) a été :

5 en 4e,

7 en 2e C,

2 en 2e AB.

En conclusion, il est intéressant de retenir une telle question de substitution pour les questionnaires définitifs.

La situation est très différente pour les simplifications. La question 4° est bien comprise par les élèves dès la 4e, puisque la quasi-totalité des réponses ne comporte que la seule lettre a (seuls deux élèves de 4e, dont l'un n'a donné aucune réponse, ne sont pas dans ce cas). Mais en revanche la simplification proprement dite est toujours défectueuse en 4e (une seule réussite fait exception, pour l'expression n° 3). Et, en 4e, il n'y a aucune réussite à la question 5°. Curieusement, il y avait eu quelques réussites, dans la même classe, à des questions analogues portant sur les opérations ensemblistes, comme $(A \cap B) \cup (C \cap B)$. Cette partie des questionnaires d'essai A5 n'est pas présentée ici, car les questionnaires définitifs ne comportent pas d'items sur ce sujet, essentiellement pour éviter l'éparpillement des consignes. Au niveau de la classe de 2e, seule la quatrième question donne lieu à un nombre correct de réussites ; et cette question discrimine assez bien les deux classes de 2e : elle semble prendre les élèves au dépourvu, en n'indiquant pas de méthode de résolution ou en ne renvoyant pas à une méthode de résolution connue. Or, rappelons le, ce sont les questions pour lesquelles la quasi-totalité des élèves opèrent selon des procédures bien déterminées qui devraient être proposées dans les questionnaires définitifs.

Chapitre 6 LE QUESTIONNAIRE MULTINIVEAUX

6.1. Présentation de l'enquête

6.1.1. La population interrogée

Le questionnaire étudié ici a fait l'objet d'une passation auprès de 308 élèves en mai-juin 1973. Ces élèves étaient répartis sur quatre niveaux scolaires, de la classe de 5^e (âge normal : 13-14 ans) à la classe de 2^e (16-17 ans). Trois collèges d'enseignement secondaire (un en milieu urbain, un suburbain et un rural) ont chacun "fourni" une classe de 5^e, une de 4^e et une de 3^e. Les trois classes de 2^e interrogées provenaient l'une d'un lycée technique et les deux autres de lycées classiques (pour l'une des classes : section "lettres", et pour l'autre : section "sciences") ; à noter que l'un de ces lycées prolonge le collège de milieu urbain interrogé.

Cette composition de l'échantillon permet une étude <u>longitudinale</u> pertinente. En revanche, à aucun niveau scolaire, nous ne sommes en droit de considérer que la population interrogée est représentative. Cette recherche d'une certaine représentativité est d'ailleurs, entre autres, une raison d'être de l'enquête à trois modalités présentée au chapitre 7. Il est cependant intéressant de souligner que des résultats concernant le domaine numérique sont beaucoup moins fluctuants d'une classe à une autre classe de même niveau que ne le sont des résultats dans le domaine géométrique, ou, dans une moindre mesure, des résultats concernant l'apprentissage ensembliste. Nous pourrons nous en apercevoir ici en rapprochant, dans les cas où cela est possible, les résultats observés de ceux obtenus sur des populations représentatives (par exemple, pour certaines de nos propres enquêtes, cf. [29], ou pour des enquêtes effectuées dans l'académie de Rouen par P. Buisson, cf. [14]).

6.1.2. Objectifs du questionnaire

Sans méconnaître les aspects évoqués ci-dessus, qui concernent les possibilités de généralisation des résultats individuels, la présente enquête se proposait principalement une étude de variations de réponses à des questions "voisines". Pour une étude de ce type, les variations longitudinales apparaissent comme un phénomène secondaire (bien qu'intéressant par les possibilités d'explication qu'il risque d'autoriser). Mais, par exemple dans le cas de deux questions, le simple fait qu'il puisse y avoir un écart important dans les résultats, peut constituer le phénomène principal.

En voici un exemple, qui était dans ce questionnaire une "expérience cruciale", puisqu'elle justifie la prise en compte de la complexité opératoire. Il s'agit de la question 3.4. du questionnaire.

Parmi les produits de deux des nombres suivants, lequel est le plus proche de 4 ? le plus proche de 2 ?

0,62 0,93 1,72 2,31 3,47

Réponses :

Le plus proche de 4 :	.... X ....
Le plus proche de 2 :	.... X ....

D'un item à l'autre, une différence de compréhension de la consigne est à exclure (note : par ailleurs, l'hésitation possible sur le fait d'envisager ou non les carrés des nombres présentés n'influe pas sur le résultat, ni à l'item 1, ni à l'item 2). Le niveau cognitif (i.e. celui résultant de la classification NLSMA) est exactement le même dans les deux cas. Enfin il n'y a pas d'écart dû à la fiabilité opératoire.

Si une grande partie des élèves effectue tous les calculs (il y a dix produits en éliminant les carrés), seules des erreurs de calcul peuvent amener à des fluctuations d'un item à l'autre, et celles-ci devraient alors se répartir de manière à peu près équilibrée entre les deux items. Mais notre hypothèse était que telle ne serait pas la stratégie de réponse, et qu'en réalité les élèves n'effectueraient pour la plupart qu'un petit nombre de produits, déterminés par une procédure de choix. Pourvu que les faits confirment cette hypothèse naturelle, l'item 1 est alors construit pour donner lieu à plus de réussites que l'item 2, et ce dans la mesure où la complexité opératoire a une influence sur les résultats individuels. En effet, la rencontre fréquente de 4 comme carré de 2, jointe à la présence dans la liste de 1,72 (un peu plus petit que 2) et de 2,31 (un peu plus grand que 2, donc équilibrant 1,72), fait du produit 1,72 X 2,31 un "candidat" excellent. En revanche, il n'y a pas de "candidat" aussi apparent dans le second cas, et, de plus, deux produits s'avèrent très proches : 0,62 X 3,47 et 0,93 X 2,31.

Remarquons au passage que la question n'est pas construite pour permettre d'isoler un constituant de la complexité opératoire : si écart de résultats il y a, on ne peut trancher entre l'existence d'un produit "attractif" et la présence de deux résultats proches. D'autres expériences seraient nécessaires pour évaluer les poids respectifs de l'élément facilitant le résultat à l'item 1 et de l'élément créant une difficulté dans l'item 2 (exemple : avec la même famille de nombres, proposer d'approcher 1). Mais il s'agissait dans ce cas précis d'évaluer l'importance possible de la complexité opératoire sur les résultats.

Nous verrons plus loin (p. 106) que les résultats permettent de conclure : les deux items donnent lieu à des résultats très significativement différents ; par suite on en déduit, puisqu'ils ont même complexité cognitive, qu'il y a nécessairement entre eux une différence de complexité opératoire, influente sur les résultats.

Le questionnaire propose d'autres expériences analogues. C'est par exemple le cas pour le rangement de nombres selon des procédures différentes. Dans cet exemple, il était également nécessaire de faire une hypothèse sur les procédures (le fait que des consignes différentes impliqueraient des procédures différentes) : comme dans le cas précédent, cette hypothèse reposait sur le principe d'économie, ou d'optimisation, dont il a été question dans la première partie (chap. 2). La vérification de cette hypothèse impliquait alors un écart entre les résultats, dont l'importance indique l'influence du paramètre "type opératoire" dans la complexité opératoire. Mais pour cet exemple, ainsi que d'autres, nous attendrons pour entrer dans les détails d'avoir présenté le questionnaire et les résultats.

6.1.3. Le questionnaire présenté aux élèves

I.R.E.M. DE STRASBOURG

10, rue du Général Zimmer

67 - STRASBOURG

Année 1972/73

QUESTIONNAIRE B

Vos réponses à ce questionnaire doivent nous servir uniquement à mieux comprendre certains processus de raisonnement. Votre classe a été choisie parce que nous la pensons représentative d'une catégorie d'élèves. Nous avons besoin de voir vos essais, aussi n'utilisez pas de brouillon, mais effectuez tous calculs sur les présentes feuilles.

L'Institut de Recherche sur
l'Enseignement des Mathématiques.

Etablissement :

Classe :

Nom :

Prénom :

Date de naissance :

Profession des parents :

Profession envisagée par vous :

Question générale

Expliquer brièvement, au besoin en donnant des exemples, comment on effectue les opérations suivantes. En cas d'ignorance, passer à la question suivante pour ne pas perdre de temps.

1. Addition de deux entiers relatifs (de même signe, de signes contraires).

2. Multiplication de deux entiers relatifs.

3. Addition de deux nombres à virgule (nombres décimaux).

4. Multiplication de deux nombres à virgule.

5. Comparaison de deux entiers relatifs.

Question 2 : Quelques calculs rapides.

Mettre les résultats dans les cases.

1. $\begin{array}{r} 427 \\ \underline{\times\ 83} \end{array}$ = ☐

2. $5363 + 27 + 42370 + 255$ = ☐

3. $(78 - 6) - (- 2 + 18 - 7)$ = ☐

4. $6 \times 1{,}00001$ = ☐

5. $1234{,}56 - 65{,}4321$ = ☐

6. $9 + 0{,}00002$ = ☐

7. $3{,}14 \times (0{,}3)^2$ = ☐

8. $(-78 + 271) \times (48 - 49) - 62 \times (-51 + 49)$ = ☐

9. $a \times b - 2 \times b \times c$ pour : $a = -3$, $b = 4$, $c = 1$ = ☐

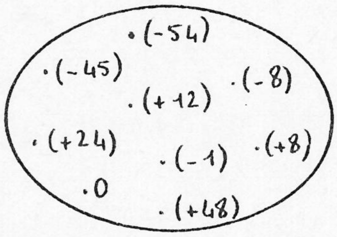
10. $(a + b) \times (b + c)$ pour : $a = 4$, $b = -3$, $c = -1$ = ☐

11. $a \times (b + c) + b \times c - b \times (a + c) + c \times a$
pour : $a = 2$, $b = 2$ et $c = 0$ = ☐

12. $(a + b - c) \times (c - a) - a \times b \times c$
pour : $a = -1$, $b = -1$ et $c = -1$. = ☐

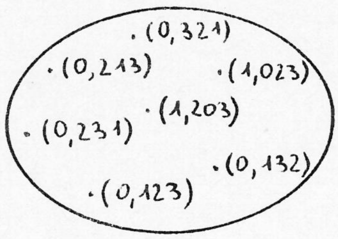
Question 3 : Placements.

1. Recopier en les rangeant du plus petit au plus grand les entiers relatifs de l'ensemble suivant :



....

2. Même question pour l'ensemble de décimaux suivants :



....

3. Cette fois-ci, placer 1 dans la case située sous le plus petit, puis 2 dans la case du suivant, et ainsi de suite.

1,004	0,1010	0,004	1,0101	0,0007	0,0038	0,00369
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

4. Parmi les produits de deux des nombres suivants, lequel est le plus proche de 4 ? le plus proche de 2 ?

0,62 0,93 1,72 2,31 3,47

Réponses :

Le plus proche de 4 : .... X	
Le plus proche de 2 : .... X	

Question 4 : Sup d'un ensemble fini de nombres.

Etant donné un ensemble de nombres $\{a_1 ; a_2 ; \ldots ; a_n\}$, on désigne par Sup $\{a_1 ; a_2 ; \ldots ; a_n\}$ le plus grand des nombres de cet ensemble.

Exemples : Sup $\{0 ; 2\} = 2$ Sup $\{3 ; 5 ; 6\} = 6$

1) Indiquer :

Sup $\{0 ; 2 ; 8\} =$ $\boxed{}$

Sup $\{-2 ; 0\} =$ $\boxed{}$

Sup $\{1{,}04 ; 1{,}07 ; 1{,}009\} =$ $\boxed{}$

2) Calculer

$y = \text{Sup}\,\{2x - 1 ; 2x + 1 ; -x\} + \text{Sup}\,\{1 - 2x ; -x\}$

pour

a) $x = 0$ $y =$

b) $x = -1$ $y =$

c) $x = +1$ $y =$

3) On pose maintenant $z = \text{Sup}\{x - 1 ; -x - 1 ; 2x - 3\}$

Trouver toutes les valeurs de x

a) pour lesquelles $z = 0$

Réponse : $\boxed{}$

b) pour lesquelles $z = +1$

Réponse : $\boxed{}$

c) pour lesquelles $z = -3$

Réponse : $\boxed{}$

d) pour lesquelles $z = +3$

Réponse : $\boxed{}$

6.2. Les résultats

Sont détaillés ici les principaux résultats directement observables (i.e. résultats de décompte). L'analyse statistique sur machine me paraît surtout intéressante, dans un cas de ce genre, en présence de modalités ; dans la première partie (chap. 4), les raisons ont été données, dont la principale réside dans le doute sur le caractère représentatif de l'échantillon des questions choisies. Il ne faudrait cependant pas en déduire que des analyses statistiques sont inutiles dans le cas présent : elle peuvent permettre de constater la cohérence d'ensemble des résultats, de situer systématiquement les difficultés relatives des questions et d'observer les comportements individuels selon l'âge ou le niveau scolaire.

Dans le cas présent, de telles analyses ont été effectuées par A. Bensaber, à partir des résultats individuels que je lui avais fournis sur cartes perforées. Les résultats de ces analyses sont étudiés dans une partie de sa thèse de 3e cycle ([2]). Les remarques essentielles qui s'en dégagent me paraissent être les suivantes :

- la cohérence d'ensemble des résultats est affirmée de deux façons. La première est la forme nette de croissant parabolique épousée par le nuage réussite-échec dans le plan factoriel 1-2 de l'analyse ([2] loc.cit., p. 37-38). La deuxième est consécutive à un essai de simulation de modalités, dans lequel 5542 réponses individuelles ont été volontairement "effacées". En reconstituant à l'ordre 1, sur le vu des autres réponses, on n'obtient que 1172 erreurs (i.e. : réponse reconstituée différente de la réponse effacée), soit à peine plus d'une sur cinq reconstitutions.

- c'est le paramètre âge (1) qui a été observé chez les individus dans l'analyse, plutôt que le paramètre niveau scolaire (que nous envisagerons plus loin). On constate l'existence d'un saut important entre 14 et 15 ans (évolution régulière vers les réussites jusqu'à 14 ans, grand saut entre 14 et 15 ans, stabilité ensuite - et même recul pour les élèves de 18 ans ou plus,

(1) Voir ([2], p. 38) où les âges ont été placés en variables supplémentaires. Ce placement est correct, mais en revanche, il y a une erreur dans le tableau qui suit ([2], p. 39) (erreur de programmation probablement). Les effectifs d'élèves par âge dans notre échantillon sont : 12 ans : 3, 13 ans : 52, 14 ans : 79, 15 ans : 71, 16 ans : 68, 17 ans : 29, 18 ans et plus : 6. (ces élèves ayant nécessairement été, dans notre échantillon, affectés par des redoublements).

6.2.1. La page "calculs"

Tableau des réussites, par niveau scolaire, rangés par ordre décroissant.

5^e	4	1	2	6	5	3	10	11	12	9	7	8	◀ Item n°
76 élèves	.92	.91	.82	.72	.71	.57	.55	.35	.28	.22	.14	.12	◀ Taux de réussite
4^e	1	4	3	5	2	6	10	11	9	12	7	8	◀ Item n°
84 élèves	.99	.93	.88	.87	.81	.77	.77	.58	.57	.49	.45	.37	◀ Taux de réussite
3^e	1	4	10	2	5	6	3	11	9	12	7	8	◀ Item n°
69 élèves	.94	.90	.85	.84	.81	.80	.72	.62	.57	.57	.49	.42	◀ Taux de réussite
2^e	4	1	3	2	5	6	10	11	9	12	7	8	◀ Item n°
79 élèves	.96	.89	.86	.86	.85	.84	.81	.77	.61	.53	.52	.42	◀ Taux de réussite

Il ressort de ce tableau :

1° La persistance d'une hiérarchie des items d'un niveau à l'autre, malgré des différences importantes de taux de réussite (exemples : l'item 11 qui passe de .35 en 5^e à .77 en 2^e, l'item 7 qui passe de .14 en 5^e à .52 en 2^e),

2° L'existence d'un saut important entre la 5^e et la 4^e, sensible sur tous les items, suivi d'une évolution faible (certains items sont même mieux réussis en 4^e qu'en 3^e ou 2^e).

Détaillons ces deux observations. La hiérarchie qui apparaît entre les items est la suivante :

- le groupe des deux items 1 et 4, qui sont à tous les niveaux les mieux réussis,
- le groupe 2, 5 et 6,
- les items à variables 11, 9 et 12 : l'item 11 est toujours le mieux réussi des trois, et 9 et 12 se "tiennent" d'assez près,
- les items 7 et 8 dans cet ordre.

Seuls les items 3 et 10 occupent une place variable dans cette hiérarchie qui résulte de l'examen aux différents niveaux scolaires. L'item 3 est placé tantôt avant le groupe 2, 5, 6, tantôt après ; en tout cas, il reste au voisinage immédiat de ce groupe. L'item 10 vient toujours avant les autres items à variable, mais en général juste avant eux, sauf pour la 3^e où il vient en troisième position (donc avant le groupe 2, 5, 6). Ces légères fluctuations ne me paraissent de toute façon pas de nature à exiger une étude détaillée.

En comparant avec les résultats obtenus aux questionnaires d'essai (voir p. 83 et 84), on s'aperçoit qu'il y a concordance : les items communs se classent de la même manière et avec des taux de réussite très proches. Ainsi, en induisant depuis les essais, on peut dire que l'item $0{,}085 \times 0{,}07$ se classerait entre les items 11 et 9.

Une autre concordance est intéressante, parce qu'elle prend en compte un élément de variation : dans ses questionnaires, Pierre Buisson a introduit lui aussi la quantité $(0{,}3)^2$, mais dans un tableau à compléter, du type

x	$x + 1$	x^2	
2			
-1			
0,3			

Pour $(0{,}3)^2$, il relève les pourcentages de réussite suivants :
en 5^e, 23 %
en 4^e, 54 %
en 3^e, 60 % (voir [14], p. 440).

Les taux de réussite qui apparaissent ici pour $3{,}14 \times (0{,}3)^2$ sont légèrement inférieurs : .14 en 5^e, .45 en 4^e et . 49 en 3^e. Dans les deux enquêtes l'<u>évolution</u> est exactement <u>la même</u> ; et l'écart constamment présent ne peut être imputé uniquement aux erreurs numériques dans la multiplication, qui sont en nombre infime, ni aux erreurs d'opération seules (effectuer par exemple le carré de $3{,}14 \times 0{,}3$), elles aussi en nombre infime (au total, les erreurs de l'un et l'autre type sont le fait de 14 élèves sur les 308 interrogés). Et pourtant, la question de P. Buisson n'était pas la plus simple possible (qui serait $(0{,}3)^2 = \ldots$), comme il le remarque lui-même.

Il y aurait donc ici une difficulté <u>intrinsèque</u>. Ceci signifie, pour parler en termes probabilistes, que la probabilité de réussite à $3{,}14 \times (0{,}3)^2$ ne peut être déduite des probabilités respectives de réussite à $0{,}3^2$ et à $3{,}14 \times 0{,}09$. Il n'y a pas indépendance : la présence du second produit à effectuer (celui par 3,14) <u>diminue</u> la réussite à $(0{,}3)^2$ et <u>favorise l'erreur</u> de placement de la virgule. On voit dans un tel cas comment la simultanéïté peut être un facteur <u>spécifique</u> de difficulté, en favorisant <u>par détournement d'attention</u> l'attraction due au plongement (voir première partie, chapitres 2 et 3).

Une telle conclusion demande toutefois à être étayée par d'autres exemples : ici nous faisons appel aux résultats de deux populations différentes (académies de Strasbourg et Rouen). L'obtention d'une certitude scientifique demanderait soit de multiplier les exemples, soit de "modaliser".

La hiérarchie obtenue sur les items n'est pas la hiérarchie cognitive. Ainsi l'item 4, qui fait intervenir un décimal, figure toujours avant l'item 2 qui ne met en jeu que $\mathbb{N}$. Ce n'est pas non plus le nombre de "calculs élémentaires" (opérations atomiques) qui organise seul cette hiérarchie : par exemple, l'item 1 comporte 15 opérations élémentaires contre seulement 11 pour l'item 2, qui obtient pourtant une réussite plus faible (10 % de perte au moins, à tous les niveaux). Dans ce cas précis, il est nécessaire d'envisager la <u>procédure opératoire</u> qui résulte de la manière dont l'énoncé est posé : on est en droit de penser que l'écart de réussites entre les deux items aurait été supprimé si la disposition du second avait été verticale, comme illustré ci-contre. Mais la disposition horizontale était précisément destinée à permettre l'observation d'un écart éventuel. Le présent résultat est à rapprocher du rangement de nombres selon des procédures différentes (voir p. 107).

$$\begin{array}{rr} & 5363 \\ & 27 \\ & 42370 \\ + & 255 \\ \hline \end{array}$$

Au contraire, les substitutions ne créent pas par elles-même une difficulté. Aux essais nous nous étions aperçus qu'il n'en aurait pas été de même ici s'il avait fallu substituer des lettres à d'autres lettres (par exemple faire b = 2a et c = -a), au lieu de valeurs numériques (cf. chap. 3, le mode opératoire). Et les substitutions de valeurs proposées ici, aboutissent à des calculs numériques plus "légers" qu'à l'item 8 (bien que les ingrédients cognitifs soient les mêmes : addition <u>et</u> multiplication dans $\mathbb{Z}$), amènent dans tous les cas et à tous les niveaux à des résultats supérieurs d'au moins 10 % à ceux obtenus pour l'item 8. Dans une étude plus limitative, les substitutions entre lettres, exclues de notre enquête (bien qu'incorporées aux essais), devraient être envisagées.

La deuxième remarque issue du tableau concerne l'évolution d'un niveau à l'autre. Le phénomène constitué par la progression entre la classe de 5^e et celle de 4^e concerne à la fois les nombres décimaux et les entiers relatifs : on constate une augmentation des réussites supérieure à 20 % sur <u>tous</u> les items pour lequel le taux de réussite en 5^e était en dessous de .70.

Pour les décimaux, l'apprentissage poussé proposé en 4^{e} peut constituer une explication, comme le remarque d'ailleurs P. Buisson (loc.cit. p. 440) ; mais nous constatons ici que cette explication ne suffit pas.

L'évolution n'est pas plus uniforme d'un item à l'autre qu'elle ne l'est d'un niveau à l'autre. Pour les items 4, 1 et 2, qui dès la 5^{e} sont réussis à plus de .80, il n'y a pas d'évolution appréciable. Au contraire, pour des items comme l'item 11 et l'item 7, il y a une progression ininterrompue ; l'item 7 est l'item $3,14 \times (0,3)^2$: on a envie de dire que les occasions de rencontre de cas analogues lors de l'apprentissage sont dans ce cas la raison de l'évolution des réussites ; pour l'item 11, on peut penser que la prise en compte de $c = 0$ avant l'exécution des autres calculs est favorisée par la pratique du calcul polynomiale. Je ne m'apesantirai pas davantage sur ces phénomènes qui, à mon avis, n'ont qu'une valeur localisée. Enfin, pour une dernière catégorie d'items, la réussite atteint un palier en classe de 4^{e}, et il n'y a plus ensuite d'évolution sensible ; c'est par exemple le cas pour les items 5, 3, 8 et 12. La question ouverte par l'évolution des réussites observée ici est de savoir s'il y a un développement opératoire assez général qui se produirait dans l'intervalle d'un an entre la classe de 5^{e} et celle de 4^{e}, ou entre les âges de 13 et 15 ans (13-14 ans pour les uns et 14-15 ans pour les autres).

Une observation séquentielle précise la question. Considérons les quatre items :

$$6 \times 1,00001 \qquad 1234,56 - 65,4321 \qquad 9 + 0,00002 \qquad 3,14 \times (0,3)^2.$$

En 5^{e}, la séquence prépondérante est RRRE (réussite aux trois premiers, échec au dernier) produite par 34 élèves sur les 76 de ce niveau. Elle est suivie des séquences RREE (11 élèves), RERE (9 élèves) et RRRR (6 élèves seulement). Dès la 4^{e}, la séquence RRRR (réussite complète) l'emporte, suivie par la séquence RRRE :

en 4^{e}, RRRR : 41 élèves, RRRE : 29 élèves (sur un total de 83)
en 3^{e}, RRRR : 34 élèves, RRRE : 20 élèves (sur un total de 69)
en 2^{e}, RRRR : 36 élèves, RRRE : 28 élèves (sur un total de 79).

Il s'agit donc, apparemment, moins d'un passage de l'ignorance à la connaissance que d'une évolution du plongement à l'insertion, entre la classe de 5^{e} et les classes ultérieures.

A côté des observations qui viennent d'être indiquées, il apparaît quelques remarques, dont l'une doit être signalée parce qu'elle conduit à une modification pour la suite : à l'item 12 le résultat 0 ne peut être interprêté sans indication supplémentaire. En effet, ce résultat peut provenir soit d'une erreur dans les priorités opératoires, qui conduit à considérer l'expression comme si c'était $(a + b - c) \times (c - a) \times (-a \times b \times c)$, soit de l'erreur de calcul consistant à donner -1 comme résultat de la multiplication -1×0 (au chapitre 2, nous avons signalé que ce type d'erreur se rencontre de temps à autre). Pour éliminer cette ambiguïté, le questionnaire à plusieurs modalités (voir chap. 7) propose un item modifié à la place de celui-ci.

6.2.2. La page "placements".

Cette page comportait deux parties : ordonner des nombres, approcher des nombres. L'approximation constituait notre "expérience cruciale" (voir p. 2) ; nous examinons donc les résultats de cette question 3.4 avant les résultats des questions 3.1, 3.2 et 3.3.

Les résultats mettent en évidence une réussite nettement meilleure pour l'approximation de 4 que pour l'approximation de 2, comme le font apparaître les tableaux ci-dessous.

		Item 1 (approcher 2) R	Item 1 (approcher 2) E	
Item 2 (approcher 4)	R	82	15	97
	E	93	118	211
		175	133	308

Tableau a : Prise en compte de la meilleure réponse pour chaque item.

		Item 1 (approcher 2) R	Item 1 (approcher 2) E	
Item 2 (approcher 4)	R	112	21	133
	E	63	112	175
		175	133	308

Tableau b : Prise en compte de la meilleure réponse pour le premier item et d'une des deux meilleures réponses pour le second item.

Le tableau a désigne par R (réussite) la donnée de la meilleure réponse dans chaque cas et par E (échec) toute autre réponse. Un tableau aussi net rend superflu tout test statistique : il n'y a pas indépendance des résultats aux deux items, et l'item 2 est manifestement plus difficile que l'item 1.

Le tableau b montre que la netteté des résultats mise en évidence par le tableau a ne tient pas à ce que de nombreux choix se seraient portés sur la "deuxième" réponse (0,62 X 3,47), proche de la meilleure réponse (0,93 X 2,31). En effet, malgré cette prise en compte de deux réponses comme bonnes pour l'item 2, les résultats restent spectaculaires, puisqu'il y a inversion des nombres de réussites et échecs dans le tableau b. Et les conclusions d'indépendance et de difficultés relatives subsistent manifestement dans ce tableau b.

Preuve est donc faite de l'effet possible de la seule complexité opératoire sur les résultats individuels.

La même page du questionnaire proposait le rangement de nombres. Sous l'hypothèse que des procédures différentes seraient adoptées à la suite des consignes données (toujours d'après un principe d'économie), il devait être possible d'observer entre les questions 3.2 et 3.3 un écart indiquant l'effet de ces différences de procédures. Il convient toutefois de préciser, car les mêmes questions font aussi intervenir la possibilité de différences dues à l'attraction pour l'ordre dans $\mathbb{N}$ (cas particulier du phénomène de plongement), qui conduit par exemple à dire par erreur que 0,0038 est plus petit que 0,00369, "parce que" 38 est plus petit que 369. La question 3.3 fait intervenir ce phénomène, mais pas la question 3.2 : tous les décimaux qui y sont proposés ont trois chiffres après la virgule. Pour éliminer cet effet éventuel, il faut comparer les résultats à la question 3.3 à ceux de la question 3.2 <u>et</u> de la question 4.1.c, demandant la valeur de Sup {1,04 ; 1,07 ; 1,009}. Nous obtenons ainsi le tableau de résultats suivant.

3.2 <u>et</u> 4.1.c

		R	E	
3.3	R	108	23	131
	E	114	63	177
		222	86	308

Le test χ^2_1 conduit bien au rejet de l'indépendance au seuil .01. On peut aussi se poser la question de difficulté comparée, qui consiste à envisager le rejet de la fréquence observée $\frac{108}{131}$ comme observation issue du tirage au hasard de 131 des 308 individus interrogés (ayant donné lieu à la proportion $\frac{222}{308}$). Pour ce faire, le rapport $\frac{222}{308}$ est considéré comme fréquence théorique d'apparition du phénomène "réussite à 3.2 et 4.1.c". Les minimums numériques ($\frac{131 \times 222}{308} \geq 10$ et $\frac{131 \times 86}{308} \geq 10$) étant dépassés, on peut considérer que la proportion de réussite à 3.2 et 4.1.c dans une sous-population de 131 individus suit une <u>loi normale</u>, de moyenne $\frac{222}{308}$ et d'écart type

$$\sqrt{\frac{1}{131} \times \frac{222}{308} \times \frac{308 - 222}{308}}.$$

Pour la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, on est amené, au seuil .01, à rejeter $\chi \geq 2{,}33$ (intervalle d'acceptation illimité à gauche). On trouve ici

$$\chi = \frac{\frac{108}{131} - \frac{222}{308}}{\sqrt{\frac{1}{131} \times \frac{222}{308} \times \frac{86}{308}}} = 2{,}86.$$

On en déduit donc que la question 3.3 est <u>significativement plus difficile</u> que la question constituée par 3.2 et 4.1.c. Cependant, ce résultat n'est pas entièrement satisfaisant, car nous avons dissocié deux sources de difficulté : d'une part l'ordre entre décimaux n'ayant pas mêmes nombres de chiffres après la virgule, d'autre part le fait de ranger une famille de sept nombres. Or l'expérience montre que les réussites séparées n'impliquent pas nécessairement la réussite conjuguée (voir par exemple p. 103). En d'autres termes, nous ne sommes pas certains que les 222 réussites à 3.2 et 4.1.c peuvent être assimilées à des réussites à la question suivante (qui n'a pas été posée, évidemment).

Recopier en les rangeant du plus petit au plus grand les nombres de l'ensemble suivant.

1,004 0,1010
0,0007
0,004 1,0101
0,0038
0,00369

Et c'est pourtant ce qu'il nous faudrait pouvoir affirmer pour conclure que la procédure mise en oeuvre à la suite de cette question est plus facile que la procédure impliquée par l'énoncé du questionnaire (mettre des numéros d'ordre dans des cases). Malgré des résultats apparemment concluants, il est donc nécessaire de reprendre ces questions pour acquérir une certitude. C'est ce qui est proposé dans le questionnaire à trois modalités (chapitre 7).

En revanche, je ne souscris pas à l'hypothèse, émise par J. Adda, selon laquelle le fait de numéroter des nombres peut être ici une source d'incompréhension. Ceci pour deux raisons. La première est qu'il ne s'agit pas de manipuler les numéros à la place des nombres (ce serait par exemple le cas si on demandait d'effectuer le produit du numéro 2 et du numéro 4), mais seulement d'<u>affecter</u> ces numéros ; ainsi je suis persuadé que la question ne serait pas plus facile si on demandait d'affecter aux cases les lettres a, b, c, ... au lieu des numéros 1, 2, 3, ... La deuxième raison est la distinction très (trop) nette entre les décimaux et les entiers : nous avons eu l'occasion de constater que l'inclusion $\mathbb{N} \subset \mathbb{D}$ n'est nullement une évidence pour beaucoup d'élèves (cf. [29]).

A titre d'anecdote, signalons qu'il y a tout de même une possibilité de malentendu sur l'énoncé de la question 3.3 : n'utiliser que les numéros 1 et 2 (évidemment avec répétition). Ce malentendu est le fait de moins de 9 élèves sur 308, car nous avons relevé en tout neuf numérotations incorrectes, c'est-à-dire n'établissant pas une bijection entre les cases et $\{1,2,\ldots,7\}$.

On peut donc estimer que, si la vérification proposée par le questionnaire à trois modalités est satisfaisante, le rôle du type topologique de la démarche sera effectivement mis en évidence par ces questions.

Par ailleurs, le questionnaire à trois modalités peut permettre d'examiner un phénomène a priori curieux : de nombreux placements de 0,1010 comme le plus grand ou le second des nombres en jeu (c'est-à-dire l'attribution à 0,1010 du numéro 7 ou du numéro 6). Une légère imperfection typographique grossissait le premier "1" de 0,1010. Etait-elle à la source de ce placement de 0,1010 au dessus de nombres supérieurs à 1 ? Une modification typographique de la question, dans le questionnaire à trois modalités, peut permettre de répondre. Pour ne pas y revenir, indiquons tout de suite que l'enquête à trois modalités ne conduit pas à affirmer que l'imperfection typographique a joué un rôle. En effet, il subsiste des placements de 0,1010 parmi les nombres plus grands que 1 ; ils sont plus rares que dans l'enquête multiniveaux, mais si on ne prend en compte dans celle-ci que les résultats des élèves de 3^e, la différence entre les deux enquêtes n'est pas significative.

Pour mettre en évidence le parallélisme avec les résultats à la page "calculs", voici les résultats à cette page "placements", présentés par niveau.

	Question 3, n°					Rappel effectif
	1	2	3	4a	4b	total interrogé
Niveau 5^e	50	57	14	23	11	76
4^e	79	74	43	53	31	84
3^e	64	58	35	40	24	69
2^e	73	65	41	60	32	79

L'évolution des résultats, <u>même</u> pour la première famille de nombre proposée, constituée d'entiers relatifs, est pour cette page de questionnaire : saut important entre la 5^e et la 4^e, stabilité ensuite.

6.2.3. Les questions sur le "Sup" et la question verbale.

Il peut paraître a priori curieux d'associer des questions aussi dissemblables que la question "Expliquer comment on effectue les opérations suivantes" et les questions sur le Sup d'une famille finie de nombres. En pratique, les deux ont été liées pour des raisons de temps. En effet, la question verbale a amené des explications plus longues que prévu, ce qui s'est répercuté en fin de questionnaire pour un certain nombre d'élèves, et notamment les plus jeunes. Pour obtenir néanmoins des informations substantielles sur le comportement des élèves devant la dernière question, il a été demandé dans un certain nombre de classes de ne répondre qu'à la fin à la question verbale. Mais l'analyse des résultats à ces deux pages (la première et la dernière) du questionnaire ne présente alors pas suffisamment de garanties pour être effectuée ici. Nous préférons, sur ces questions, nous borner à l'enquête à trois modalités (voir chapitre 7).

Pour la première page de questions sur le Sup, voici le tableau des taux de réussite par niveau.

	4.1.a	4.1.b	4.1.c	4.2.a	4.2.b	4.2.c
5^e (76 élèves)	.93	.80	.66	.24	.09	.18
4^e (84 élèves)	.97	.97	.90	.52	.24	.43
3^e (69 élèves)	1.00	.96	.91	.58	.33	.45
2^e (79 élèves)	.99	.96	.84	.66	.35	.53

Les mêmes observations déjà indiquées sont mises en évidence par ce tableau : stabilité de la hiérarchie entre les items, saut considérable de la 5^e à la 4^e. Pour la question 4.2., l'amélioration des réussites continue au delà de la 4^e.

Si on compare les résultats avec ceux de la page "calcul" du questionnaire (voir tableau p. 102), on est tenté de rapprocher l'item 4.2.a de l'item 2.9. Et l'examen des algorithmes de résolution, présenté ci-dessous, justifie ce rapprochement.

$a \times b - 2 \times b \times c$	$\mathrm{Sup}\{2x-1 ; 2x+1 ; -x\} + \mathrm{Sup}\{1-2x ; -x\}$
Les multiplications sont prioritaires sur la soustraction	Il faut déterminer les Sup avant d'additionner
pour $a = -3$ et $b = 4$, $a \times b = -12$	pour $x = 0$, le premier Sup est $\mathrm{Sup}\{-1 ; +1 ; 0\} = 1$
pour $b = 4$ et $c = 1$, $b \times c = 4$ et $2 \times b \times c = 8$	pour $x = 0$, le second Sup est $\mathrm{Sup}\{1 ; 0\} = 1$
$-12 - 8 = -20$	$1 + 1 = 2$

Il n'est pas étonnant que la réussite chute brusquement pour l'item 4.2.b, car, pour $x = -1$, les Sup ne peuvent plus résulter d'une lecture directe comme c'était le cas pour $x = 0$ (lecture des termes constants). Pour $x = 1$, c'est à nouveau plus facile, puisqu'il suffit de supprimer de la vision les "x" pour apercevoir les valeurs des Sup. Néanmoins, l'algorithme de résolution est encore dans ce dernier cas en quelque sorte un sur-algorithme de l'algorithme indiqué ci-dessus. Et l'on voit que les résultats individuels s'en ressentent.

Nous atteignons toutefois ici les limites de l'observation directe si nous souhaitons pousser l'étude davantage. En effet, l'étude séquentielle des réponses à la question 4.2. ne peut guère nous apporter de renseignements. Le croisement des résultats avec l'un ou l'autre item de la question calcul n'est pas suffisant. Dans un cas comme celui-ci, l'analyse des correspondances est un outil irremplaçable. C'est sa mise en oeuvre qui nous proposerons au chapitre 7, en utilisant en outre un questionnaire à trois modalités pour préciser et enrichir l'étude effectuée dans ce chapitre.

Chapitre 7 QUESTIONNAIRE TRIMODAL

Le questionnaire à trois modalités présenté ici est le premier du genre, comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, avant de mentionner ses successeurs. Il a été présenté aux élèves en mai-juin 1974. L'objectif était de reprendre l'enquête multiniveaux auprès d'un échantillon représentatif des élèves de 3^{e}(15-16 ans) du Bas-Rhin, en précisant certains résultats et en profitant de l'occasion pour se livrer à quelques études supplémentaires. Ainsi les questions sur le rangement des décimaux pouvaient, sous leur première forme, laisser planer un doute sur l'interprétation des résultats. Elles ont donc été modifiées dans le présent questionnaire. Des questions sur les fractions ne pouvaient être présentées dans le questionnaire multiniveaux ; elles pouvaient en revanche être posées aux élèves de 3^{e}. Il en était de même pour les développements décimaux illimités, qui pouvaient permettre d'explorer une forme d'équilibrage(*) (cf. p. 114) autre que la symétrie. Enfin, le rôle de la détermination de l'objectif n'avait pratiquement pas été examiné ; l'un ou l'autre essai pouvait être tenté.

La modalité A du questionnaire trimodal (p. 118 à 122) est très proche du questionnaire précédent. Le nombre des calculs a été réduit pour permettre une question sur l'inverse. La question verbale sur les opérations a été rejetée en fin de questionnaire, pour éviter que les élèves se lancent à son propos dans de trop longues explications, qui réduisent de manière importante le temps de réponse au reste du questionnaire.

Les modalités B et C (p. 123 à 130) "s'appuient" sur la modalité A, l'une par l'intermédiaire des calculs et de la question sur l'inverse de $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$, l'autre par l'intermédiaire des placements (p. 119). Les modalités B et C se rejoignent sur une question d'algorithme, et comportent un certain nombre de questions dont les présentations diffèrent de l'une à l'autre modalité.

7.1. Le choix des questions

Les calculs numériques sont repris du questionnaire précédent, mais leur nombre a été réduit. En principe la comparaison des résultats de cette enquête avec les résultats précédents devrait nous suffire. Une transformation, mineure toutefois : pour éviter (voir p. 106) que deux procédures différentes conduisent au même résultat (erroné) 0, l'item

"Calculer

$$(a + b - c) \times (c - a) - a \times b \times c \text{ pour} \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}"$$

a été transformé en

"Calculer

$$(a + b) \times (c - b + a) - a \times b \times c \text{ pour} \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}"$$

En ce qui concerne la page intitulée "placements" (rangements et approximation), un changement s'imposait pour équilibrer les deux familles de nombres proposés, comme nous l'avons déjà remarqué (voir chapitre 6, p. 108). D'autre part, nous nous demandions si le placement fréquent du nombre 0,1010 parmi les plus grands ne tenait pas à une minime imperfection typographique (voir p. 109). Il fallait donc conserver le deuxième item en modifiant simplement la typographie. C'est donc la famille de nombres proposée dans le premier item qui a été modifiée, pour être "alignée" sur la seconde famille de nombres : ainsi, elle se compose dans le présent questionnaire de décimaux n'ayant pas tous autant de chiffres après la virgule. En fait, une vérification d'homogénéïté tout à fait scrupuleuse eût demandé une <u>inversion de consigne</u> : échanger entre deux modalités les familles donnant lieu à une "patate" ou à des cases. Mais alors, à cause de la nécessité de comparer les populations des diverses modalités sur des questions identiques, il eût fallu présenter cette question (avec ses deux modalités) dans <u>les trois modalités</u> du questionnaire. Pour ne pas trop réduire l'investigation, je ne l'ai pas fait, me contentant ici de ma propre conviction de l'homogénéïté entre les deux familles de nombres.

L'enquête multiniveaux apportait peu de renseignements sur le rôle joué par le <u>type de consigne</u> (voir p. 42). Dans les modalités B et C de cette enquête, on a utilisé les divers types de consigne, mais il n'a pas été possible d'organiser systématiquement des variations sur ce seul paramètre. Pour cela, il eût fallu abandonner d'autres objectifs de l'enquête, sous peine de dépasser les limites du temps imparti pour la passation.

Eu égard à la position particulière de ce paramètre dans la complexité opératoire, il m'a semblé que son étude détaillée pouvait être reportée à des expérimentations ultérieures, au "profit" immédiat des autres paramètres et des perturbations. Dans la présente enquête, il y a donc occurence des divers types de consigne (nous le verrons dans l'analyse des questions posées), mais non variation systématique.

Quelques expériences supplémentaires étaient rendues nécessaires, d'une part pour vérifier le bien fondé de l'usage de questionnaires à plusieurs modalités, d'autre part pour compléter l'étude notamment de l'équilibrage(*), mentionné au chapitre 3. Concernant la première vérification, on trouvera par exemple dans les questionnaires un item qui rassemble toutes les conditions pour donner lieu à une meilleure réussite dans l'une des modalités que dans les deux autres : il traite de l'inverse de $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$. Dans la modalité B, le résultat $(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ est donné ; il s'agit simplement de prouver que les deux nombres sont inverses l'un de l'autre. Au contraire, le résultat n'est qu'indiqué dans les modalités A et C, sous la forme $(a\sqrt{3} + b\sqrt{2})$, avec a et b entiers à déterminer (voir les questionnaires p. 122 et 129). On verra, lors de l'analyse des résultats, qu'un cas aussi évident est parfaitement en accord avec l'étude menée au chapitre 4, sur l'analyse des correspondances appliquée à l'enregistrement simple des résultats d'un questionnaire trimodal.

Concernant l'équilibrage, la présente enquête est précisément à l'origine du choix de ce terme, pour désigner une perturbation que nous avions surtout rencontrée auparavant comme "attraction de la symétrie". Par exemple, nous avons signalé que l'on observe moins d'erreurs de priorités opératoires dans un calcul du type

$$a \times b + c \times d$$

que dans un calcul du type

$$a + b \times c.$$

Ici, il s'agit bien uniquement d'une "tendance à la symétrie". Mais la difficulté rencontrée par les élèves pour lire et interpréter une écriture du type

$$\{a, b, \{a, b\}\}$$

(cf. enquête 5e, [19]) ne relève-t-elle pas d'un phénomène plus général ?

En effet, une écriture de ce genre met en défaut moins une symétrie visuelle qu'une "symétrie de rôle". C'est peut-être aussi cette "symétrie de rôle" qui intervient dans la tendance de certains élèves à faire figurer dans une multiplication une ligne entière de zéros, comme par exemple :

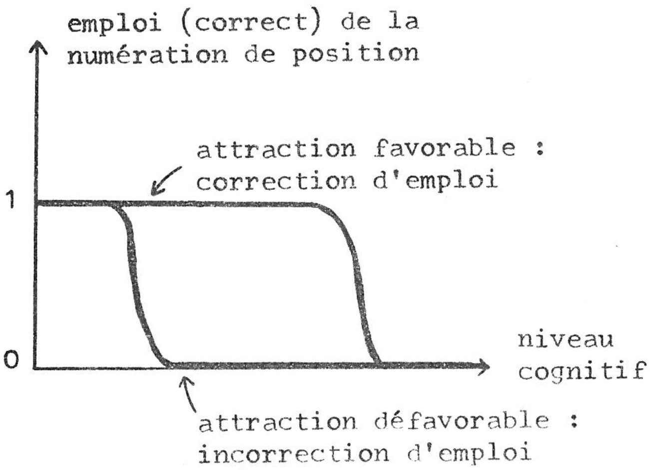
$$\begin{array}{r} 3257 \\ \underline{\times\ 308} \\ 26056 \\ 0000 \\ \underline{9771} \\ 1003156 \end{array}$$

Que cette manière de faire soit spontanée ou qu'elle soit consécutive aux conseils d'un enseignant convaincu de son moindre risque d'erreur, cette manière d'effectuer l'opération, qui équilibre bien le rôle des différents chiffres du multiplicateur, correspond à notre propos. Supposant effective une telle "tendance à équilibrer", je devais pouvoir l'utiliser pour une remise en cause momentanée d'acquis supposés solidement en place, à condition d'opérer à un niveau cognitif suffisant.

On pourrait alors rencontrer dans l'apprentissage des phénomènes du type hystérésis (avec toutefois la réserve faite en fin de chapitre 4 qu'une observation de cas de variations continues des paramètres en jeu n'apparaît pas faisable). Un acquis qui paraît solide chez des élèves de 3^e est la numération de position. Toutefois, lors des questionnaires d'essai, la perturbation crée par le plongement dans une situation déjà complexe (nombres décimaux) pour certains élèves de début de 4^e semblait pouvoir amener à des erreurs sur la numération de position. Ainsi la réponse 1,00010 avait été donnée à plusieurs reprises comme résultat de l'opération

9 + 1,00001

(en ajoutant 9 au dernier chiffre du deuxième terme).



Opérer sur des développements décimaux illimités se situe à un niveau cognitif élevé pour des élèves de 3^e (R. Thom considère les réels comme une barrière à peu près infranchissable par un grand nombre d'individus - cf. [36]). Dans le cas de rationnels, une caractéristique visuellement apparente est la périodicité de leur développement.

Pour l'addition de deux tels développements, il y aura équilibre vis à vis de cette caractéristique si les périodes ont même longueur et déséquilibre si les périodes sont de longueurs différentes (peut-être l'hésitation est-elle de mise si le nombre de chiffres de l'une des périodes est multiple du nombre de chiffres de l'autre – je n'ai pas essayé). L'emploi de la numération de position par un élève risque alors de correspondre au schéma ci-dessus (où le niveau cognitif est abusivement porté par un axe – cf. chap. 3). Pour réaliser l'expérience, le questionnaire pose en modalité B la question de l'addition à 2,258258258... de 0,001783783783... et de 1,797979... successivement. Cette question est précédée et suivie de questions qui permettent de constater le fait a priori évident que "normalement" les élèves de fin de 3^{e} manipulent correctement la numération de position. Dans la modalité C, l'essai extrême est tenté qui consiste à donner le résultat de l'addition de 0,000783783783... et 2,252525..., en demandant d'établir ce résultat.

L'examen des trois modalités du questionnaire, reproduites ci-dessous, peut illustrer les quelques indications qui viennent d'être données.

7.2. Les trois modalités présentées aux élèves

La première page, commune aux trois modalités, demandait quelques renseignements généraux éventuellement utilisables à titre de précisions supplémentaires sur l'analyse, et comportait les consignes de réponses. Elle est reproduite à la page suivante, et est suivie du questionnaire proprement dit, les trois modalités se suivent, chacune prise dans l'ordre de sa pagination. Chaque question est ici précédée d'une indication des modalités concernées, séparées par le signe = s'il n'y a pas de différence de l'une à l'autre modalité, et par le signe ≠ sinon.

(modalités A, B et C, page 1)

QUESTIONNAIRE - ENQUETE

Vos réponses nous serviront uniquement à mieux comprendre certains processus de raisonnement. Votre classe a été choisie parce que nous la pensons représentative d'une catégorie d'élèves.

Effectuez tous vos calculs sur les présentes feuilles, sans utiliser de brouillon auxiliaire, car vos essais nous intéressent autant que vos résultats.

L'Institut de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

RENSEIGNEMENTS PERSONNELS :

Etablissement : ....

Classe : ....

Nom : .... Prénom : ....

Date de naissance : ....

Profession des parents : ....

Profession envisagée par vous : ....

Chacune des questions qui vont vous être posées est suivie de :

difficulté ☐ (de 0 à 5) intérêt ☐ (de 0 à 5)

Quand vous aurez répondu, ou essayé de répondre à la question, vous lui attribuerez deux notes de 0 à 5 (0, 1, 2, 3, 4 ou 5) :

* Pour la difficulté, la note 0 correspondra à une question que vous aurez trouvée très facile, la note 5 à une question très difficile.

* De même, vous mettrez 0 pour une question qui vous paraît sans intérêt et vous irez jusqu'à 5 pour une question qui vous paraît très intéressante.

A = C

Question 1 :

Quelques calculs rapides.

Mettre les résultats dans les cases.

Essais

1) $6 \times 1{,}0001$ =

2) $(78 - 6) - (-2 + 18 - 7)$ =

3) $1234{,}56 - 65{,}4321$ =

4) $3{,}14 \times (0{,}3)^2$ =

5) $a \times b - 2 \times b \times c$ pour $\begin{cases} a = -3 \\ b = 4 \\ c = 1 \end{cases}$ =

6) $(a + b) \times (b + c)$ pour $\begin{cases} a = 4 \\ b = -3 \\ c = -1 \end{cases}$ =

7) $a \times (b + c) + b \times c - b \times (a + c) + c \times a$

pour $\begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases}$ =

8) $(a + b) \times (c - b + a) - a \times b \times c$

pour $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$ =

Votre appréciation (moyenne, car il y a plusieurs calculs) sur la question 1 :

difficulté (de 0 à 5) ☐ intérêt (de 0 à 5) ☐

Remarques éventuelles :

A = B

Question 2 : Placements.

1) Recopier en les rangeant du plus petit au plus grand les nombres décimaux de l'ensemble :

- 0,321
- 0,0213
- 1,023
- 1,203
- 0,231
- 0,0132
- 0,1230

2) Cette fois, pour les décimaux suivants, placer 1 dans la case située sous le plus petit, puis 2 dans la case du suivant, et ainsi de suite jusqu'à 7 dans la case du plus grand.

1,004	0,1010	0,004	1,0101	0,0007	0,0038	0,00369

3) Parmi les produits de deux nombres suivants :

a) 0,62 b) 0,93 c) 1,72 d) 2,31 e) 3,47

- lequel est le plus proche de 4 ?

Réponse : c'est X

- lequel est le plus proche de 2 ?

Réponse : c'est X

Votre appréciation sur l'ensemble de la question 2 :

difficulté (de 0 à 5)

intérêt (de 0 à 5)

Remarques éventuelles :

A

<u>Question 3</u> : Plus grand nombre d'un ensemble fini de nombres.

Dans la suite, on désigne par $\text{Sup}\{a_1 ; a_2 ; \dots ; a_n\}$ le plus grand des nombres de l'ensemble $\{a_1 ; a_2 ; \dots ; a_n\}$.

Exemples : $\text{Sup}\{-1 ; 2\} = 2$, $\text{Sup}\{3 ; 6 ; -5\} = 6$.

1) Déterminer les valeurs :

$\text{Sup}\{0 ; 2 ; 8\} = \boxed{}$

$\text{Sup}\{-2 ; 1\} = \boxed{}$

$\text{Sup}\{1{,}07 ; 1{,}040 ; 1{,}009\} = \boxed{}$

2) Calculer la valeur de :

$y = \text{Sup}\{2x - 1 ; 2x + 1 ; -x\} + \text{Sup}\{1 - 2x ; -x\}$

a) pour $x = 0$

Réponse : $\boxed{y =}$

b) pour $x = -1$

Réponse : $\boxed{}$

c) pour $x = +1$

Réponse : $\boxed{}$

Votre appréciation sur l'ensemble de la question 3 :

difficulté $\boxed{}$ (de 0 à 5)

intérêt $\boxed{}$ (de 0 à 5)

Remarques éventuelles :

A

Question 4 : Exercice sur le Sup.

On pose $z = \text{Sup}\{x - 1 ; -x - 1 ; 2x - 3\}$.

Trouver toutes les valeurs de x

a) pour lesquelles $z = 0$

Réponses :

b) pour lesquelles $z = 1$

Réponses :

c) pour lesquelles $z = -3$

Réponses :

Votre appréciation sur l'ensemble de la question 4 :

difficulté (de 0 à 5)

intérêt (de 0 à 5)

Remarques éventuelles :

(modalité A, page 6)

A ≠ B ≠ C

Question 5 : Peut-on trouver des entiers relatifs a et b tels que $(a\sqrt{3} + b\sqrt{2})$ soit l'inverse (autrement dit le symétrique pour la multiplication) de $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$?

Réponse : $\boxed{}$

Votre appréciation sur la question 5 :

difficulté (de 0 à 5) $\boxed{}$ intérêt (de 0 à 5) $\boxed{}$

Remarques éventuelles :

A

Question 6 : Expliquer brièvement (au besoin par des exemples) comment on effectue les opérations suivantes, les opérations sur les entiers naturels étant supposées connues :

1) Additionner deux entiers relatifs (de même signe, de signes différents).

2) Multiplier deux entiers relatifs.

3) Additionner deux nombres à virgule (nombres décimaux).

4) Multiplier deux nombres à virgule.

Votre appréciation sur la question 6 :

difficulté (de 0 à 5) $\boxed{}$ intérêt (de 0 à 5) $\boxed{}$

Remarques éventuelles :

A = B

Question 2 : Placements.

1) Recopier en les rangeant du plus petit au plus grand les nombres décimaux de l'ensemble :

.0,321 .0,0213 .1,023 .1,203 .0,231 .0,0132 .0,1230

2) Cette fois, pour les décimaux suivants, placer 1 dans la case située sous le plus petit, puis 2 dans la case du suivant, et ainsi de suite jusqu'à 7 dans la case du plus grand.

1,004	0,1010	0,004	1,0101	0,0007	0,0038	0,00369
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

3) Parmi les produits de deux nombres suivants :

a) 0,62 b) 0,93 c) 1,72 d) 2,31 e) 3,47

- lequel est le plus proche de 4 ?
  Réponse : c'est ☐ x

- lequel est le plus proche de 2 ?
  Réponse : c'est ☐ x

Votre appréciation sur l'ensemble de la question 2 :

difficulté ☐ (de 0 à 5)

intérêt ☐ (de 0 à 5)

Remarques éventuelles :

(modalité B, page 3)

$A \neq B \neq C$

Question 3 : Prouver que $(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ est l'inverse de $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

Votre appréciation sur la question 3 :

difficulté (de 0 à 5) ☐ intérêt (de 0 à 5) ☐

Remarques éventuelles :

$B \neq C$

Question 4 : Effectuer $\frac{1}{10} + \frac{1}{15}$, en mettant le résultat sous forme de fraction irréductible.

Votre appréciation sur la question 4 :

difficulté (de 0 à 5) ☐ intérêt (de 0 à 5) ☐

Remarques éventuelles :

B $\neq$ C

Question 5 : Mettre en facteur $(a^2 + 2b^2)$ dans l'expression :

$$A = a^3 - a^2b + 2ab^2 - 2b^3$$

et prouver que A est nul si et seulement si a = b.

Votre appréciation sur la question 5 :

difficulté (de 0 à 5) ☐

intérêt (de 0 à 5) ☐

Remarques éventuelles :

B $\neq$ C

Question 6 : Effectuer la somme des développements décimaux illimités périodiques suivants :

1) (2,258 258 258 ...) + (0,001 783 783 783 ...)

Réponse : ☐

2) (2,258 258 258 ...) + (1,79 79 79 ...)

Réponse : ☐

Votre appréciation sur la question 6 :

difficulté (de 0 à 5) ☐

intérêt (de 0 à 5) ☐

Remarques éventuelles :

B = C

<u>Question A</u> : A tout couple (a,b), d'entiers naturels, on associe le couple dont :

le premier terme est le minimum de a et de b
le deuxième terme est l'écart entre a et b.

Exemples : a) à (3,8), on associe (3,5), puisque 3 est le minimum de 3 et de 8, et 5 est l'écart entre 3 et 8 (5 = 8 - 3).

b) à (3,3), on associe (3,0) : le minimum est 3 et l'écart 0.

On écrira : $(3,8) \longrightarrow (3,5)$
$(3,3) \longrightarrow (3,0)$

De même : $(8,3) \longrightarrow (3,5)$

1) Compléter : $(7,77) \longrightarrow (\ldots,\ldots)$
$(27,27) \longrightarrow (\ldots,\ldots)$
$(27,26) \longrightarrow (\ldots,\ldots)$

2) Partant d'un couple quelconque d'entiers naturels, on le transforme comme ci-dessus, puis on transforme à son tour le couple obtenu, et ainsi de suite (à chaque étape, on transforme le couple précédemment obtenu). A quoi aboutira cette suite de transformations d'un couple ? (Vous pouvez faire des essais avec des couples que vous choisirez.)

Votre appréciation sur la question A :

difficulté (de 0 à 5) ☐

intérêt (de 0 à 5) ☐

Remarques éventuelles :

B = C

<u>Question A</u> : A tout couple (a,b), d'entiers naturels, on associe le couple dont :

le premier terme est le minimum de a et de b

le deuxième terme est l'écart entre a et b.

Exemples : a) à (3,8), on associe (3,5), puisque 3 est le minimum de 3 et de 8, et 5 est l'écart entre 3 et 8 (5 = 8 − 3).

b) à (3,3), on associe (3,0) : le minimum est 3 et l'écart 0.

On écrira : $(3,8) \longrightarrow (3,5)$

$(3,3) \longrightarrow (3,0)$

De même : $(8,3) \longrightarrow (3,5)$

1) Compléter : $(7,77) \longrightarrow (\ldots,\ldots)$

$(27,27) \longrightarrow (\ldots,\ldots)$

$(27,26) \longrightarrow (\ldots,\ldots)$

2) Partant d'un couple quelconque d'entiers naturels, on le transforme comme ci-dessus, puis on transforme à son tour le couple obtenu, et ainsi de suite (à chaque étape, on transforme le couple précédemment obtenu). A quoi aboutira cette suite de transformations d'un couple ? (Vous pouvez faire des essais avec des couples que vous choisirez.)

Votre appréciation sur la question A :

difficulté (de 0 à 5) ☐ intérêt (de 0 à 5) ☐

Remarques éventuelles :

A = C

Question 1 :

Quelques calculs rapides.

Mettre les résultats dans les cases.

Essais

1) $6 \times 1{,}0001$ =

2) $(78 - 6) - (-2 + 18 - 7)$ =

3) $1234{,}56 - 65{,}4321$ =

4) $3{,}14 \times (0{,}3)^2$ =

5) $a \times b - 2 \times b \times c$ pour $\begin{cases} a = -3 \\ b = 4 \\ c = 1 \end{cases}$ =

6) $(a + b) \times (b + c)$ pour $\begin{cases} a = 4 \\ b = -3 \\ c = -1 \end{cases}$ =

7) $a \times (b + c) + b \times c - b \times (a + c) + c \times a$ pour $\begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases}$ =

8) $(a + b) \times (c - b + a) - a \times b \times c$ pour $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$ =

Votre appréciation (moyenne, car il y a plusieurs calculs) sur la question 1 :

difficulté (de 0 à 5)

intérêt (de 0 à 5)

Remarques éventuelles :

B ≠ C

Question 2 : Prouver que l'inverse de 6 est la somme des inverses de 10 et de 15.

Votre appréciation sur la question 2 :

difficulté (de 0 à 5) ☐ intérêt (de 0 à 5) ☐

Remarques éventuelles :

A ≠ B ≠ C

Question 3 : Déterminer les deux entiers relatifs a et b tels que $(a\sqrt{3} + b\sqrt{2})$ soit l'inverse de $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

Réponse : ☐

Votre appréciation sur la question 3 :

difficulté (de 0 à 5) ☐ intérêt (de 0 à 5) ☐

Remarques éventuelles :

B $\neq$ C

<u>Question 4</u> : Prouver que les deux développements décimaux illimités périodiques :

(0,000 783 783 783 ...)

et (2,25 25 25 ...)

ont pour somme : (2,253 309 036 309 036 309 036 ...).

Votre appréciation sur la question 4 :

difficulté (de 0 à 5) ☐ intérêt (de 0 à 5) ☐

Remarques éventuelles :

B $\neq$ C

<u>Question 5</u> : Mettre en facteur (a − b) dans l'expression :

$$A = a^3 - a^2b + 2ab^2 - 2b^3$$

et prouver que A est nul si et seulement si a = b.

Votre appréciation sur la question 5 :

difficulté (de 0 à 5) ☐ intérêt (de 0 à 5) ☐

Remarques éventuelles :

Tableau général d'organisation du questionnaire

	Question 1								Mod. A q.2 Mod. B				Mod. A q.3						Mod. A q.4			M.A q.5 / M.B q.3 / M.C q.3	Mod. A q.6				M.B q.4 / M.C q.2	M.B q.5 / M.C q.5	M.B q.6 / M.C q.4		question A			
	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3a	3b	1a	1b	1c	2a	2b	2c	a	b	c		1	2	3	4			1	2	1a	1b	1c	alg.
Modalité A	///	///	///	///	///	///	///	///	///	///	///	///	///	///	///	///	///	///	///	///	///	///	///	///	///	///								
Modalité B									///	///	///	///										///					///	///	///	///	///	///	///	///
Modalité C	///	///	///	///	///	///	///	///														///					///	///		///	///	///	///	///

Les impressions que ce tableau peut fournir doivent être, le cas échéant, corrigées par les remarques suivantes :

1° Le tableau déséquilibre en fait les questions en leur attribuant à toutes la même importance visuelle. Ainsi certains items ne sont que des vérifications immédiates tandis que d'autres correspondent à un temps de réflexion et de travail relativement long. Le codage (voir § 7.3) devra, du moins au traitement, tenir compte de cette remarque.

2° Il n'y a pas nécessairement identité des questions portées sur les cases d'une même colonne. Ainsi la question qui apparaît comme commune aux trois modalités, lorsque l'on regarde le tableau, est en réalité posée sous des formes différentes. Nous reviendrons sur ce fait lors de l'examen du codage, au cours des analyses des résultats.

7.3. Première analyse : l'enregistrement des réussites.

La passation du questionnaire a eu lieu en mai-juin 1974, auprès d'une dizaine de classes représentant au total 212 élèves (Modalité A : 70 élèves, mod. B : 70 et mod. C : 72). Le début du chapitre 4 comporte les indications sur le déroulement de nos enquêtes. Nous n'y reviendrons pas pour ce cas particulier, hormis pour signaler que le fait de leur demander leur avis sur les questions posées semble avoir été apprécié de façon positive par l'ensemble des élèves.

L'analyse présentée ici ne distingue dans les réponses que les comportements de réussite, ceux de non-réussite, abusivement baptisés "échecs" dans la suite, et ceux de non-réponse-à-question-non-posée. Rappelons qu'il s'agissait d'une analyse d'essai, comme nous l'avons indiqué au § 4.9. Elle comporte cependant de nombreux éléments intéressants, notamment le fait d'illustrer concrètement le chapitre 4. Cependant, une telle analyse demande à être complétée. On trouvera dans la thèse de 3^{e} cycle de A. Bensaber ([2]) les résultats bruts (i.e. sans interprétation) de l'analyse d'un tableau reconstitué issu des données de cette enquête. Pour notre part, nous examinerons (§ 7.4) l'analyse d'un enregistrement des réponses susceptible de préciser certains des phénomènes en jeu. De plus, cette deuxième analyse comporte les coordonnées individuelles, qui ne figurent pas dans l'analyse d'essai.

Le tableau ci-dessous présente les items retenus pour cet enregistrement des réussites. Chacun d'eux donne lieu aux trois "comportements de réponse" :

R réussite

E "échec"

N non-réponse-parce-que-question-non-posée.

question 1						A q.2 B q.2				A q.3				A q.4			A q.5 B q.3 C q.3		Bq.4 C q.2		B q.5 C q.5			B q.6 C q.4			question A				
12	13	14	15	17	18	21	22	231	232	31	32A	32B	32C	4A	4B	4C	5														
						21	22	231	232									B3	B4		B51		C52	B61	B62		A11	A13	A21	A22	A23
12	13	14	15	17	18												5			C2		C51	C52			C4	A11	A13	A21	A22	A23

Ainsi, le sigle 32AE, par exemple, désignera l'"échec" à la question 32A.

En comparant ce tableau avec celui d'organisation du questionnaire, on voit que les modalités y sont plus équilibrées :

Modalité A ... 18 questions analysées,

modalité B ... 15 questions analysées,

modalité C ... 16 questions analysées.

Ceci tient à ce que des questions "composées" du questionnaire ont donné lieu à plusieurs "questions analysées" ; par exemple : l'algorithme donne lieu à trois questions analysées.

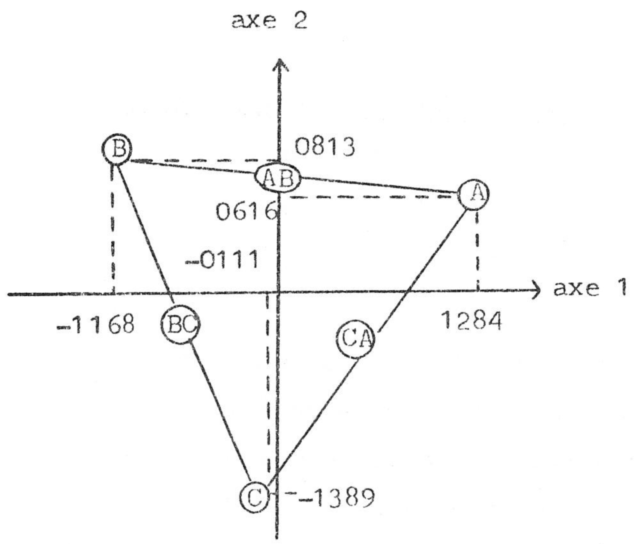
D'autre part, les modalités sont dissociées au maximum dans ce tableau : à une exception près (A q.5 et C q.3), seules des questions tout à fait identiques y figurent dans la même colonne ; et A q.5 ne diffère de C q.3 que par la détermination de l'objectif ("Trouver..." dans un cas, "Existe-t-il..." dans l'autre). Par suite, les déviations que nous pourrons observer dans le plan de modalités (voir chapitre 4) ne seront attribuables, sauf pour A q.5 et C q.3, qu'à la place des questions dans le questionnaire et non à leur formulation (contrairement à l'analyse qui suit (p. 145) cette analyse d'essai).

Autrement dit, les déviations seront imputables ici uniquement à des phénomènes généraux privilégiant dans un questionnaire certains endroits au détriment d'autres, ou à des phénomènes d'auto-apprentissage particuliers à ce questionnaire (induction mutuelle des questions).

Pour permettre une critique fine éventuelle et organiser la possibilité de confrontation avec des travaux ultérieurs qui seraient analogues, l'annexe 3 (p. 166) comporte les résultats numériques de la présente analyse. Nous allons maintenant examiner ces résultats.

7.3.1. Le plan factoriel 1-2

Conformément à l'étude du chapitre 4, le plan factoriel 1-2 est le plan des modalités. Ici, l'axe 1 oppose les modalités A et B et l'axe 2 oppose la modalité C aux modalités A et B. Les réponses sont placées comme l'indique la figure, qui représente le triangle des modalités apparent sur les "non-réponse-à-question-non-posée". Les coordonnées de chaque modalité sont indiquées sur la figure, et les coordonnées des comportements communs à deux modalités, représentés sur les côtés du triangle, ont été indiquées en dessous de la figure. L'origine des axes n'est pas une position de réponse, car il n'y avait pas (voir tableau ci-dessus) de "question analysée" commune aux trois modalités.



Réponses : plan des modalités

BC (-0632, -0303)

CA (0576, -0400)

AB (0057, 0715)

(les coordonnées sont celles qui figurent dans l'annexe 3).

Les positions des réponses communes à deux des trois modalités sont d'une manière générale conformes à ce schéma de principe, ce qui indique que les populations correspondant aux trois modalités sont bien homogènes. Les quelques exceptions concernant les réponses suivantes (nous donnons d'abord les cas les moins concluants).

a) Réponses CA déviées

- La réussite à la question 5 (5R) sur l'inverse de $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ est attirée par la modalité C, mais comme elle n'est obtenue que par 5 élèves, il serait présomptueux d'affirmer que la formulation qui ne soulève pas de doute (modalité C) est plus favorable que celle qui est interrogative (modalité A).

- La question 17 (calcul de $a \times (b + c) + b \times c - b \times (a + c) + c \times a$, pour $a = 2$, $b = -2$ et $c = 0$) donne lieu à

17R (84 élèves, coordonnées : 0497 et -0514) attirée par C,

17E (58 élèves, coordonnées : 0691 et -0234) attirée par A.

Cette question 17 est répartie entre A et C selon le tableau :

	R	E	
A	38	32	70
C	46	26	72
	84	58	142

Le χ^2_1 ne permet pas de rejeter l'indépendance, et nous ne pouvons donc pas conclure avec certitude que la réflexion sur la question d'algorithme a constitué un échauffement bénéfique à la modalité C.

Pour les autres réponses, on n'observe pas de déviation notable ; en résumé, on peut dire que, pour les réponses CA, il n'apparaît pas de phénomène remarquable vis à vis des modalités.

b) Réponses AB déviées

- La question 22 (attribution de numéros d'ordre aux nombres d'une famille de décimaux) est la seule qui donne lieu à des déviations importantes :

22R (87 élèves, coordonnées : -0107 et 0726) est attirée par B,

22E (53 élèves, coordonnées : 0329 et 0696) est attirée par A.

La distribution de 22 est :

	R	E	
A	38	32	70
B	49	21	70
	87	53	140

On obtient $\chi^2_1 \simeq 4{,}1$, significatif au seuil .05. Cette question se trouvant au début de la modalité B, alors qu'elle est consécutive à la page de calculs dans la modalité A, on peut penser à un effet de fatigue ("danse" des nombres) en modalité A. Et en effet, des passages en revue successifs des nombres proposés (nécessaires si l'on ne recopie pas la liste) exigent probablement une attention favorisée par la fraîcheur d'esprit.

- Des attractions très minimes de 231 et 232 (approche de 2 par un produit) : 231R vers A et au contraire 232R vers B, trop faibles pour être en elles-même significatives, peuvent appuyer l'observation précédente ; car 231 ne demande qu'une bonne appréciation des ordres de grandeur, tandis que 232 exige un examen plus détaillé.

c) Réponses BC déviées

C'est sur BC que s'observent les déviations les plus nettes, mais portant sur des réponses relativement "rares".

- La question introductive de l'algorithme : A11 ne donne lieu qu'à 7 échecs. Mais un seul d'entre eux se produit en modalité C contre 6 en B. Il s'agit de la dernière question en modalité B, alors que la page "algorithme" est la première en modalité C.

- En revanche la réussite à C52 ($a = b = 0 \Leftrightarrow a^3 - a^2b + 2ab^2 - 2b^3 = 0$) est attirée par B. Il s'agit de la dernière question de C. Le comportement C52R n'est le fait que de 10 élèves. Et cette question donne lieu à beaucoup d'abandons : 45 en modalité B et 50 en modalité C. On pourraît donc dire qu'un phénomène de relâchement joue plus en fin de questionnaire sur cette question difficile (au vu des résultats).

- Enfin la réussite A23R (13 élèves) est attirée par la modalité C : il s'agit de la conclusion sur le point d'arrivée de l'algorithme. Cet aboutissement de l'algorithme avait donné lieu à trois "questions analysées" : correction des essais effectués, nature et nombre de ces essais, type de conclusion. Comme aucun élève n'a vu que l'algorithme aboutit à (0, pgcd(a,b)), ce qui est compté ici comme réussite est l'obtention de (0,n) avec la remarque que n dépend du choix du couple (a,b) initial.

En définitive, cet examen du plan factoriel 1-2 ne met pas en évidence de phénomène d'auto-apprentissage en cours de questionnaire, mais apporte des précisions intéressantes sur les phénomènes "d'échauffement-relâchement". Nous signalons ces phénomènes dans [19] (§ 2.1., § 3.2.4. et § 6 : plan 1-2) : dans l'enquête en question il apparaissait que des confusions se produisent par prédilection en début de questionnaire (ainsi : répondre à une question comportant le mot "bijection" comme s'il s'agissait d'"application"). Ici, nous observons aussi le cas contraire : certaines questions sont privilégiées (du point de vue des réussites) du fait de se trouver en début de questionnaire. Si l'on dissocie les aspects cognitif et opératoire (ce qu'envisagera la suite de l'analyse), l'interprétation est claire :

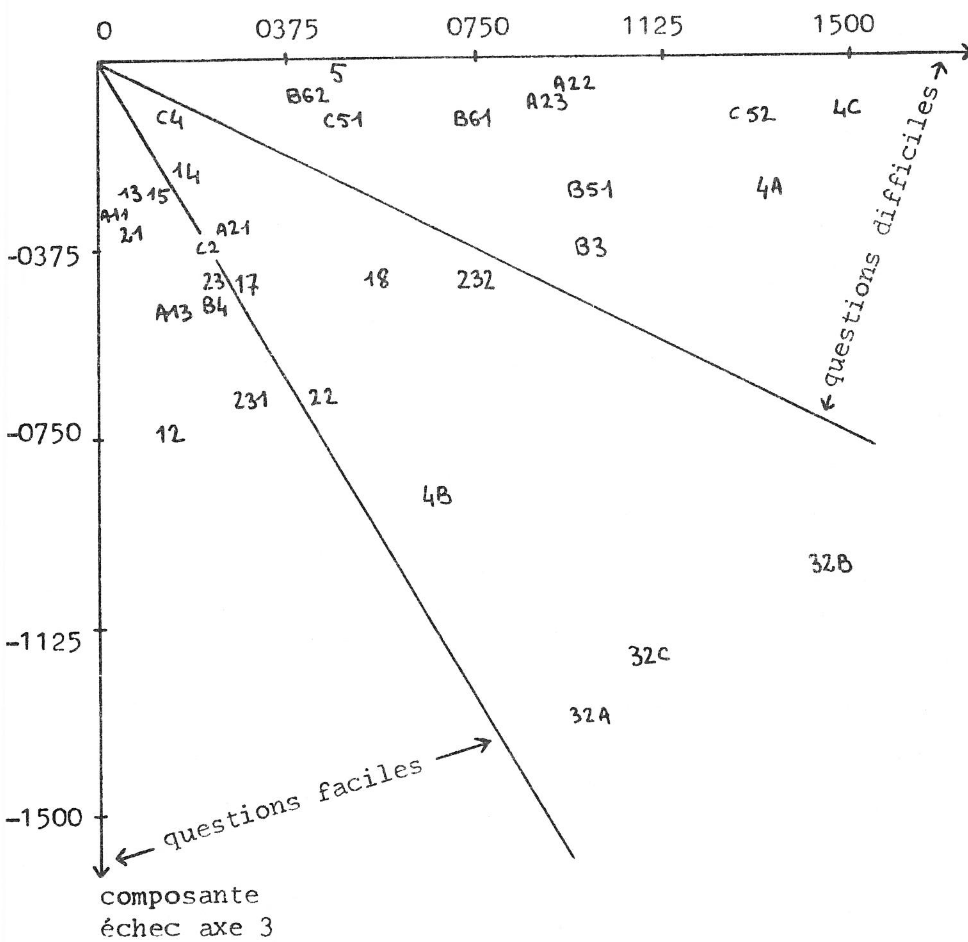
Sur un questionnaire suffisamment délimité (*), il y a au cours du temps de passation une amélioration cognitive et au contraire un léger affaiblissement opératoire des individus interrogés.

Remarque : L'existence de cas de perturbations cognitives locales comme celle signalée en [19] (§ 2.1.) ne me paraît pas mettre en cause cette interprétation, pourvu que l'on accepte que l'augmentation des connaissances fasse éventuellement passer les individus par des périodes d'instabilité. L'analyse de l'axe réussite-échec ([19], § 6) montre bien ce fait dans l'enquête en question, en plaçant les "erreurs diverses" au-dessus (du point de vue de la réussite d'ensemble) du comportement nommé "gauche-droite".

7.3.2. L'axe réussite-échec

L'interprétation de l'axe 3 ne soulève aucune difficulté : il s'agit de l'axe réussite-échec d'ensemble. Car toutes les réussites ont une coordonnée positive selon cet axe, et tous les échecs une coordonnée négative.

Sur l'axe 3, chaque question analysée donne lieu à deux coordonnées : celle qui correspond à la réussite et celle qui correspond à l'échec. On peut en déduire une représentation plane des questions en attribuant, à chaque question, pour abscisse la coordonnée de sa réussite selon l'axe 3, et pour ordonnée la coordonnée de son échec selon l'axe 3. Nous obtenons le diagramme de la page suivante.



Dans ce diagramme, nous avons partagé en trois le quadrant où sont situées les questions. En n'attribuant ici aux mots "faciles" et "difficiles" qu'une acception liée au résultat d'ensemble à ce questionnaire, nous sommes conduit à attribuer les noms de "secteurs des questions faciles" et "secteur des questions difficiles" aux deux secteurs angulaires adjacents aux axes. Un exemple suffit comme justification : la question 12 (calcul de (78 - 6) - (-2 + 18 - 7))donne lieu à 120 réussites et seulement 22 échecs. Les coordonnées selon l'axe 3 sont : 0136 pour 12R et -0720 pour 12E. Il s'agit bien d'une question pour laquelle seul l'échec est significatif vis à vis du comportement d'ensemble au questionnaire. Autrement dit, réussir à cette question ne veut pas dire grand chose, tandis qu'échouer est "mauvais signe". A une telle "question facile" s'opposent très nettement des "questions difficiles", comme 4C.

Mais il se trouve un certain nombre de questions placées dans le secteur angulaire central. Celles qui sont proches de l'origine sont en quelque sorte neutres vis à vis du résultat d'ensemble ; au contraire celles qui sont éloignées de l'origine sont très discriminantes, l'échec et la réussite à ces questions étant respectivement associés à l'échec et à la réussite d'ensemble. C'est-à-dire que la seule considération des réponses à ces questions fournit pour chaque individu une présomption sur la réussite d'ensemble.

Nous abordons donc avec cette analyse une étude-clé pour la notion de difficulté, ce qui impose un examen détaillé. Cet examen est fait ci-dessous en suivant l'ordre des questions.

a) Question 1 (calculs)

Les items 1 et 6 n'ont pas été pris en compte dans l'analyse pour des raisons de nombre de colonne et d'équilibre entre modalités. L'analyse suivante les prendra en compte, mais on peut affirmer ici qu'ils se seraient placés dans les "questions faciles" comme par exemple l'item 2.

Ce qui est surtout frappant est la "neutralité" de l'item 4 ($3,14 \times (0,3)^2$). On pourrait, en exagérant à peine, dire que le résultat à cet item n'a pas plus de signification vis à vis du résultat d'ensemble qu'une épreuve par tirage au sort. Cet item a donné lieu à 81 réussites et 61 échecs ; l'épreuve aléatoire qui aurait presque pu lui être substituée eût été le tirage par chaque élève d'une boule dans une urne contenant 4 boules blanches (réussite) et 3 boules noires (échec). Or il n'est pas possible ici que le résultat soit le produit du hasard. Nous avons vu, déjà sur les questionnaires d'essai et dans l'enquête multiniveaux, que l'erreur prépondérante réside dans l'élévation au carré de (0,3), avec obtention de 0,9 au lieu de 0,09. Cette attraction due au plongement (cf. chap. 3) crée ici un phénomène de divergence locale dans la population interrogée. Ce qu'il est possible de dire, c'est que le placement, correct ou non, de la virgule décimale résulte, dans la population interrogée, d'influences fragiles et momentanées.

L'interprétation est un peu plus délicate pour les items comportant des variables, car on s'aperçoit à la correction que les élèves ont recours à des intermédiaires d'écriture différents. Mais il y a toujours un problème de choix qui se pose sur l'opération arithmétique à effectuer, addition ou soustraction. La symétrie de l'item 5 ne laisse guère subsister (dans les réponses observées) que cette possibilité d'erreur, conduisant à (-4) au lieu de (-20), et cet item est, de ce fait, placé à proximité de l'item 4 dans le diagramme ci-dessus. Pour l'item 7 et surtout l'item 8 (échecs analogues, mais réussite plus significative pour 8), la situation diffère par la présence d'autres possibilités d'erreur : arrêt de lecture à la verticale de "pour", donc calcul correspondant à une partie seulement des expressions données, erreurs de priorités opératoires, confusions dues à la simultanéïté de données mémorisées dès que certains intermédiaires d'écriture sont "sautés".

Or la suite du questionnaire présente des questions où l'une ou l'autre de ces erreurs aura un effet négatif pour l'obtention des résultats corrects. On comprend alors le caractère relativement discriminant des items qui viennent d'être envisagés.

b) <u>Question 2 (placements) des modalités A et B</u>

On est immédiatement frappé par les positions relatives de l'item 1 (rangement des nombres placés dans une patate) et de l'item 2 (rangement de nombres par numérotation de cases). Or, par rapport au questionnaire précédent (voir chap. 6) les deux familles de nombres avaient été "équilibrées". La différence qui subsiste néanmoins montre que c'est bien la procédure de résolution qui intervient dans cet écart. On peut donc considérer comme établie la différence entre un algorithme linéaire et un algorithme à boucles (voir chap. 3), qui correspondent aux procédures respectives intervenant dans les deux rangements.

La différence de position entre les items 3.1 et 3.2 est également intéressante. Rappelons que la réponse à 231 se suffit de la considération des ordres de grandeur, tandis qu'un calcul supplémentaire est nécessaire en 232 pour départager deux résultats voisins. Cette apparition d'un branchement strict sur l'algorithme crée une difficulté, qui n'est peut-être pas complètement mise en évidence aux résultats, du fait qu'une bonne considération des ordres de grandeur donnait une chance sur deux de répondre correctement. La présence, malgré cela, d'un écart notable entre les deux items 231 et 232 est probante, et confirme l'étude effectuée sur le questionnaire multiniveaux (voir chapitre 6, p. 106).

c) <u>Modalité A, question 3 (Sup)</u>

L'item 1 (vérification de compréhension) est tellement facile (un seul échec) qu'il ne figure pas sur le diagramme : son ordonnée est trop grande en valeur absolue. On est alors d'autant plus frappé par la place des items suivants (32A, 32B et 32C). Ce sont les items les plus discriminants du questionnaire. Quelques unes des remarques faites ci-dessus à propos de l'item 18 sont valables ici ; en effet, les procédures de résolution sont très proches. Mais il y a de plus ici un <u>défaut d'intégration</u> dans le cas de l'échec.

La question : "A-t-on le droit d'additionner deux Sup ?" a été effectivement posée à plusieurs reprises par des élèves lors de la passation, ce qui montre qu'elle en a préoccupé un assez grand nombre. Je dois reconnaître que j'ai été surpris par l'ampleur de ce phénomène, auquel la distance entre l'item 18 et le groupe 32A, B et C est probablement imputable.

Quelle interprétation en proposer alors, puisqu'il y a peu de différence cognitive et de procédure entre l'item 18 et ce groupe ? Il me paraît clair que ce qui est en cause est la différence de statut du Sup entre les items de vérification et les items suivants. Au départ, le Sup a un statut d'opération : à une famille (finie) de nombres, on associe la plus grande valeur ; ensuite, il s'agit brusquement de donner à la valeur d'un Sup un statut de nombre. S'agit-il d'un obstacle épistémologique ? Il semblerait qu'une ligne de partage nette s'établisse alors dans la population entre les élèves qui ont pu s'adapter à ce changement de statut et ceux qui soit ont refusé ce nouveau statut (en prenant par exemple la plus grande valeur prise par toutes les quantités données, au lieu d'additionner deux Sup) soit ont éprouvé une telle difficulté à accepter le nouveau statut qu'ils ont commis d'autres erreurs (cas particulier de détournement d'attention ?). L'expérience qui s'impose pour vérifier le bien-fondé de cette interprétation consiste à intercaler, entre les items de vérification et les items proposant l'addition de deux Sup avec présence d'une variable, un exemple de mise en place du statut de nombre et un item de vérification. Le modèle de présentation serait le suivant :

"Le Sup d'une famille finie de nombres est lui aussi un nombre ; on peut donc effectuer des opérations sur des Sup.
Exemple : $\text{Sup}\{-1 ; 2\} \times \text{Sup}\{3 ; 6 ; -5\} = 2 \times 6 = 12$.
Question : Calculer $\text{Sup}\{0 ; 2 ; 8\} + \text{Sup}\{-2 ; 1\}$ ".

Je suis convaincu que la mise en place d'une telle séquence de micro-apprentissage rendrait les items suivants proches d'items comme 17 ou 18.
A vérifier...

d) Modalité A, question 4 (Sup, suite et fin)

Dans la question 4, où la notion de Sup cohabite avec celle d'équation, le statut du Sup n'est plus en cause. Et l'on voit que la position sur le diagramme des items 4A, 4B et 4C diffère nettement de celle du groupe précédemment examiné ; 4A et 4C sont des items difficiles et 4B est un item discriminant (mais moins que ceux de la question 3).

Cette différence entre 4B d'une part, et 4A et 4C d'autre part permet d'apprécier le rôle d'un branchement dans la résolution (ce qui rejoint donc l'étude faite en b ci-dessus).

Excluons la résolution graphique, qui n'a été envisagée par aucun élève. Résoudre l'équation

$$\mathrm{Sup}\{x - 1 \ ; \ -x - 1 \ ; \ 2x - 3\} = a \quad (a : \text{paramètre réel})$$

revient alors :

1° à résoudre chacune des équations $x - 1 = a$, $-x - 1 = a$ et $2x - 3 = a$,

2° à tester chacune des solutions ainsi obtenues en la reportant dans les deux autres termes.
Par exemple, pour $a = 0$, les valeurs $x = 1$ et $x = -1$ conviennent, mais la valeur $x = \frac{3}{2}$ est à rejeter.

Certes, cette question déborde des automatismes qui sont notre objet d'étude. Mais on aurait tendance à dire que c'est à cause de la première étape de la résolution. Apercevoir une étude d'équation "derrière" l'énoncé proposé est, semble-t-il, l'élément proprement heuristique, la fin de la résolution étant ensuite affaire d'automatisme. Et la découverte des équations à résoudre implique que l'on possède toutes les instructions conduisant au déroulement de cet automatisme.

Cependant, les résultats ne sont pas ceux que l'on pourrait attendre à la suite de ces considérations. Ils mettent en évidence que le principal obstacle ne réside pas dans la découverte, mais dans le fait d'appliquer, après la découverte, l'algorithme complet de résolution. En effet l'item 4B :

"Résoudre $\mathrm{Sup}\{x - 1 \ ; \ -x - 1 \ ; \ 2x - 3\} = 1$"

est construit pour que les solutions de $x - 1 = 1$, $-x - 1 = 1$ et $2x - 3 = 1$, c'est-à-dire $x = 2$ et $x = -2$, soient toutes acceptables. La réussite à cet item ne demande que l'obtention de l'élément heuristique. Et l'item apparaît comme discriminant. Au contraire, nous avons vu dans le cas où $a = 0$ (item 4A) qu'il est nécessaire de mener à terme l'algorithme, en passant par le branchement, pour décider du maintien ou du rejet d'une solution. Il en est de même pour l'item 4C. Le diagramme de la page 137, montre la netteté de la différence, aux résultats, entre l'item 4B et les items 4A et 4C.

Nous nous trouvons ici encore devant un cas où l'obstacle a priori le moins important (ici le branchement) est celui contre lequel butent le plus d'individus, alors que l'obstacle a priori le plus important (ici l'élément heuristique) est mieux franchi. Doit-on, comme pour $3{,}14 \times (0{,}16)^2$ (chap. 6, p. 106) parler de détournement d'attention ?

e) Modalité A, question 5, et modalités B et C, question 3 (inverse de $\sqrt{3} + \sqrt{2}$)

Quel que soit son énoncé, la question apparaît dans le secteur des questions difficiles, ce qui est normal si l'on se réfère à des résultats antérieurs (cf. [29]). En donnant le résultat $(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ et en demandant simplement de le prouver, on s'attendait à rendre la question plus facile. Le diagramme fait apparaître que c'est clairement le cas puisque B3E est nettement plus significatif que 5E. Mais, curieusement, B3R est aussi plus significatif que 5R. La seule interprétation possible est que l'énoncé (5) qui demande une recherche parmi les nombres de la forme $(a\sqrt{3} + b\sqrt{2})$, avec a et b entiers, déroute un certain nombre d'élèves qui pourtant étaient capables d'opérer avec la notion d'inverse. Comme la présence de deux inconnues est peut-être en cause, un essai à tenter serait de proposer cette recherche parmi les nombres de la forme

$\sqrt{3} + x\sqrt{2}$, avec x entier (ou x réel).

Le contexte de la résolution serait alors plus familier aux élèves.

f) Modalité B, question 4 et Modalité C, question 2 $(\frac{1}{10} + \frac{1}{15})$.

Peu d'écart entre les deux questions, qui apparaissent toutes deux dans le secteur "facile". La compensation s'établit entre le fait que dans C2, le résultat est donné, et doit simplement être prouvé, et le fait que dans B4, il n'y a pas besoin de "traduire" le mot "inverse" avant d'effectuer.

g) Modalités B et C, question 5 (mise en facteur)

Dans l'expression

$A = a^3 - a^2b + 2ab^2 - b^3$,

il apparaît plus difficile de mettre en facteur $(a^2 + 2b^2)$ (item B51) que $(a - b)$ (item 51). C'était attendu puisque le premier cas demande de "sauter" un terme. Ici l'analyse des correspondances est très utile, puisque le résultat brut semblait infirmer cette prévision (14 réussites pour B51, et seulement 11 réussites pour C51).

Mais l'abandon en modalité C (relâchement en fin de questionnaire - c'était la dernière question) a joué un rôle dans ce résultat brut, et l'analyse rétablit la situation grâce au croisement avec les autres réponses.

Quoi qu'il en soit, nous sommes ici dans le "secteur difficile", et la dépendance de C52 avec la mise en facteurs situe cet item à un niveau de difficulté supérieur aux précédents.

h) <u>Modalité B, question 6 et Modalité C, question 4</u> (développements décimaux illimités)

Pour aucun des trois items l'échec n'est <u>significatif</u> ; ceci est un indice de difficulté. Remarquons la décroissance de signification des réussites : B61 (le plus significatif), B62 et enfin C4 (non significatif). Pour C4, où le résultat est donné, il s'agit d'un phénomène a priori évident (toutefois l'indication ne rend <u>pas</u> la question facile : 24 réussites pour 48 échecs). Mais la place de B62 par rapport à B61 est moins évidente. La perturbation due au déséquilibre des périodes est à rapprocher de l'effet de plongement observé en (a) ci-dessus, à propos de $3,14 \times (0,3)^2$. Mais ici, les effectifs sont faibles, et il convient donc de regarder le détail des réponses avant d'avancer que la perturbation conduit à donner une grande importance sur la réponse aux impondérables. Et ce détail est le suivant :

6 élèves réussissent à la fois à B61 et B62,
2 élèves réussissent à B61 et échouent à B62,
1 élève réussit à B62 après avoir échoué à B61.

Dans ce dernier cas, il s'agit d'une erreur de calcul en B61. Ces résultats n'autorisent évidemment pas à conclure, et il faudra revenir sur la question en observant précisément les erreurs qui portent sur la <u>position</u> des chiffres (voir l'analyse suivante, p. 145).

i) <u>Algorithme (modalités B et C)</u>

La question introductive donne lieu à deux items analysés qui sont situés parmi les questions faciles. C'était attendu. L'algorithme proprement dit avait donné lieu à la prise en compte de trois aspects :

A21 - correction d'exécution (si essai d'au moins un couple)

A22 - nombre de couples essayés et attribution du numéro conventionnel 9 en cas d'utilisation de variables

A23 - conclusion.

Par inadvertance, A22 a été incorporé à l'analyse avec prise en compte du 9 pour A22R. L'effectif infime (4 élèves) de A22R et la place de A22 dans le diagramme s'expliquent alors aisément. En dehors de cette remarque anecdotique, il est intéressant de remarquer le décalage de A21 par rapport à A11 et A13, qui rend bien compte de l'effet du déroulement de la procédure : l'échec est au niveau de l'échec le moins significatif (A11E) tandis que la signification de la réussite s'accroît ; en définitive A21 occupe une position intermédiaire entre les questions neutres et les questions discriminantes.

Conclusion de l'analyse des items selon l'axe réussite-échec

Une vue d'ensemble sur l'analyse de détail qui vient d'être effectuée ne peut manquer de rendre évidents d'une part l'apport que constitue le recours à une deuxième dimension par rapport à un placement des items sur une simple échelle de difficultés, d'autre part l'architecture qui organise ce placement et qui justifie une bonne partie des éléments présentés au chapitre 3. Quelques compléments seront apportés par la seconde analyse du même questionnaire présentée plus loin.

7.4. Deuxième analyse : enregistrement de comportements de réponse

Il s'agit d'analyser les mêmes réponses que précédemment, mais en distinguant d'autres comportements que la réussite seule. Ce sont donc les regroupements de réponses qui diffèrent, pour un certain nombre de questions, d'une analyse à l'autre. Les trois modalités se dissociant nettement dans l'enregistrement des réussites qui vient d'être analysé, il était possible de prendre un petit risque de perte de qualité en ne séparant pas autant les questions. Par exemple, on a amalgamé les questions sur l'inverse de $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$, comme si elles n'avaient constitué qu'une question identique pour les trois modalités ; ceci suppose bien entendu que les comportements de réponse puissent être comparés malgré des différences d'énoncé (dans le cas précis, il s'agit d'une trivialité, puisque seuls réussite et échec ont été pris en compte dans la présente analyse). Ces regroupements rendaient alors possible la prise en compte de résultats autres que les seules réussites, sans que le nombre de colonnes (réponses) du tableau des données soit trop élevé. L'élimination, pour cette seconde analyse, de questions ne donnant pas lieu à des réponses suffisamment diversifiées (exemple : questions de contrôle sur le Sup) a également contribué à l'obtention d'un tableau de données raisonnable : 91 colonnes en définitive. Pour éviter des confusions avec l'analyse précédente, les items retenus sont ici désignés par un sigle de trois lettres et les désignations des réponses s'obtiennent en faisant précéder d'une lettre le sigle de l'item correspondant.

Voici le tableau d'organisation :

	question 1 : Calculs								Aq.2 Bq.2 Placements				Aq.3 et 4 : Sup			Aq.5 Bq.3 Cq.3	A question verbale		Bq.4 Cq.2	Bq.5 Cq.5		Bq.6 Cq.4		Question A.			
	simples				avec variables				ranger		approcher		addition		équat	$\sqrt{3}+\sqrt{2}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$	mise en fact.	A=0	addition dével. dév		contrôle		exéc	conclusion
Mod A	CUN	CDE	CTR	CQU	CCI	CSI	CSE	CHU	ORU	ORD	PRU	PRD	SUV	SUW	SUZ	INV	VBE	VBD									
Mod B									ORU	ORD	PRU	PRD				INV			FRA	FAC	NUL	ADI	ADJ	COU	COD	ALG	CON
Mod C	CUN	CDE	CTR	CQU	CCI	CSI	CSE	CHU											FRA	FAC	NUL		ADJ	COU	COD	ALG	CON
sigles des réponses analysées	R A N	R A N	R A N	R V A N	R C A N	R C A N	R C A N	R C A N	R A N	R A N	R A N	R P A N	R V A N	R U A N	R A N	R A	R A N	R A N	R A N	R A N	R İ A N	R A N	R O A N	R A N	R A N	R A N	B Z A N

Significations

R : réussite
A : autres types de réponse
N : question non posée
V : erreur de virgule
C : erreur de calcul
P : presque (0,62 × 3,47)
U : pas d'addition effectuée
İ : implication (a±b)=>(A=0)
O : erreur de position
B : obtension de (0,n) avec n = n(a,b)
Z : obtension d'un zéro (mais pas de n = n(a;b))

Exemple : VCQU désigne le fait d'obtenir 2,826 à la question "calculs", item quatre. L'annexe 3 (p. 166) présente les résultats chiffrés de cette analyse que j'ai effectuée selon le programme ANACO 1 (n'ayant pas à placer d'éléments en variables supplémentaires, je n'avais pas besoin de recourir au programme TABET , employé pour la première analyse, avec informations sur les élèves placées en variables supplémentaires).

7.4.1. Le plan des modalités

Malgré le léger risque dû au regroupement de questions, le plan 1-2 est tout à fait satisfaisant comme plan des modalités. Les coordonnées des individus (qui faisaient défaut dans l'analyse précédente) sont situées dans les intervalles indiqués ci-dessous. Les valeurs numériques, issues de l'analyse machine, ont un intérêt relatif : comparer les distances intra-modalité et inter-modalités.