DES DÉCOUVERTES DANS LE TRIANGLE DE PASCAL

Gregor BERG

0.- Remarques préliminaires

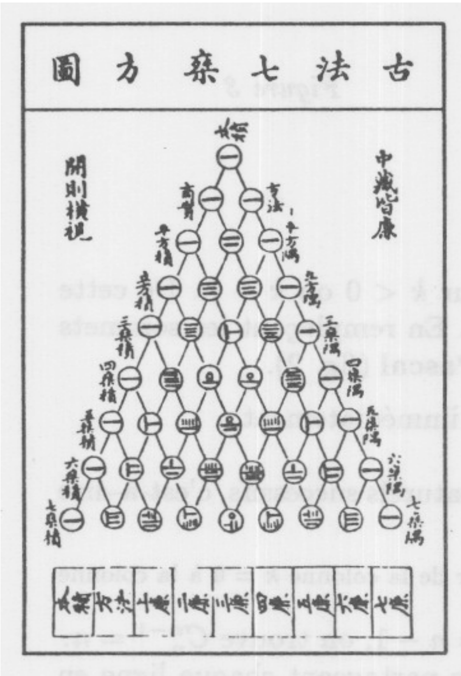


Figure 0

Le "triangle arithmétique" a été étudié par Blaise Pascal dans un traité, publié en 1665 à titre posthume, c'est pourquoi il porte le nom de "triangle de Pascal". Il était pourtant connu depuis longtemps, par exemple en Chine au 11e siècle (voir fig. 0, page de l'œuvre "Le miroir de jade des quatre éléments", publié par le mathématicien chinois Zhu Shi Jie en 1303).

Dans cet article on donne une méthode générale pour introduire le triangle et découvrir de nombreuses propriétés. On terminera en présentant un algorithme rapide pour calculer de très grands coefficients binomiaux (on pourra consulter à ce sujet les deux articles suivants: Berg G. "Entdeckungen am Pascaldreieck" in DdM 4 (1986) pp. 264-283 et Berg G. "Exakte Berechnung von Binomialkoeffizienten" , in DdM 2 (1988) pp. 115-127).

1.- Définitions et propriétés simples

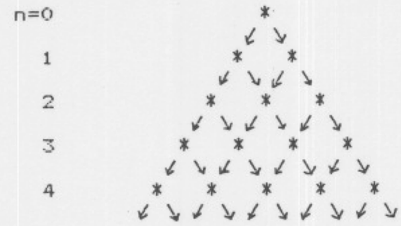
Considérons un système de rues à sens unique reliant des lieux. Du point de vue mathématique, ce système représente un graphe orienté. Les lieux sont les sommets ou nœuds, les rues sont les arêtes. Le graphe peut être continué indéfiniment vers le bas. Les sommets seront repérés par leurs coordonnées *(n, k),* les lignes sont numérotées de 0 à *n* . . . et les colonnes de 0 à *k* . . . (voir fig. 1).

Cherchons maintenant **le nombre de chemins différents** qui relient (0, 0) à (*n*, *k*). Désignons ce nombre par le symbole C_n^k. Pour les sommets du bord du graphe (c'est-à-dire pour $k = 0$ ou pour $k = n$) il n'y a qu'un chemin, par conséquent $C_n^0 = C_n^n = 1$. Pour $1 \le k \le n - 1$, nous pouvons remarquer qu'on doit passer par un des sommets ($n - 1$, $k - 1$) ou ($n - 1$, k) pour atteindre le sommet (*n*, *k*). (Appelons de tels sommets par lesquels on doit passer, **points de contrôle**.)

On obtient ainsi la formule de récurrence :

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

Nous poserons par définition $C_0^0 = 1$ et $C_n^k = 0$ pour $k < 0$ ou $k > n$. De cette façon la formule est juste pour tout $n > 0$ et tout *k*. En remplaçant les sommets par les nombres C_n^k nous obtenons **le triangle de Pascal** (fig. 2).



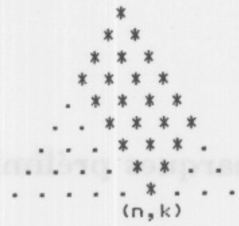


Figure 1 *Figure 2* *Figure 3*

Quelques caractéristiques du triangle sautent à l'œil immédiatement :
– Le bord du triangle n'est formé que de nombres 1. , .
– La première colonne (k = 1) est formée des entiers naturels successifs, c'est-à-dire que $C_n^1 = n$.
Explication : En chacun des n points du bord, on peut passer de la colonne k =0 à la colonne k = 1 pour atteindre le sommet (n, l).
– De la même façon, pour la colonne symétrique $k = n - 1$, on trouve $C_n^{n-1} = n$.
– Le schéma paraît symétrique par rapport à un axe partageant chaque ligne en deux.
Cela est évident : puisque le système des rues possède cette symétrie, il en est de même du système des nombres. Nous en déduisons le :

Théorème 1 :
Pour tout (n, k) *on a* $C_n^k = C_n^{n-k}$.
En Particulier $C_n^0 = C_n^n$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

2.- Un programme de calcul

On cherche un algorithme qui calcule C_n^k pour n et k donnés. Comme la récurrence utilise pour le calcul de C_n^k les deux nombres immédiatement supérieurs – dans le tableau –, il faut calculer tous les nombres qui se trouvent dans le parallélogramme de sommets (0,0), (k, k), (n, k), (n - k, 0) (fig. 3).

De façon élégante, on utilise une procédure récurrente qui contient la formule et les conditions initiales. Cette procédure s'appelle elle-même et parcourt le tableau jusqu'au bord pour obtenir des valeurs concrètes puis calcule à partir de ces valeurs, le coefficient cherché.

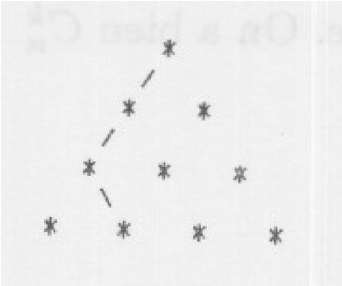
```
PROGRAM PASCAL;
VAR N,K:INTEGER;

FUNCTION C(I,J:INTEGER):INTEGER;
       BEGIN
          IF J>I THEM C:= 0 ELSE
            IF (I=J) OR (J=O) THEN C:=1
                 ELSE C:= C(I-1,J)+C(I-1,J-1)
       END;

BEGIN
       PAGE;
       WRITELN('donner N et K');
       READ(N,K);
       WRITELN('C(',N:2,',',K:2,')=' ,C(N,K):4);
END.
```

Programme (en PASCAL)

3.- Une autre récurrence et la formule explicite



Nous décrivons un chemin qui relie (0,0) à (n, k) d'une façon plus précise en notant à chaque ligne si l'on continue à droite (d) ou à gauche (g) selon la direction du mouvement (fig.4). Par exemple (d, d, g) signifie : "Deux fois à droite puis une fois à gauche en partant de (0,0)". On obtient ainsi le sommet (3,1).

Figure 4

Chaque chemin aboutissant au sommet (n, k) est décrit de façon unique par un n-uplet dans lequel la lettre *"g"* apparaît k fois et la lettre *"d"* $(n - k)$ fois.

Comparons les deux nombres C_{n-1}^{k-1} et C_n^k ($k \geq 1$), c'est-à-dire demandons-nous comment varie le nombre de chemins quand on fait un pas de plus vers la gauche. Pour cela imaginons un $(n - 1)$-uplet contenant $(k - 1)$ fois la lettre *"g"*. Il nous faut maintenant amplifier ce $(n - 1)$-uplet en un n-uplet en introduisant un *"g"* supplémentaire. Cela est possible de n façons : avant le premier élément, entre deux éléments quelconques ($n - 2$ façons) ou après le dernier. On obtient n fois plus de chemins mais ces chemins ne sont pas tous différents. Dans un n-uplet contenant k fois la lettre *"g"*, chaque *"g"* peut être considéré comme la lettre ajoutée. On a donc compté k fois le même chemin par la construction précédente. Finalement :

Théorème 2 :
Dans le triangle de Pascal on a la récurrence suivante sur le nombre de chemins :

$$C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$$

En appliquant cette récurrence k fois, on trouve une formule explicite pour C_n^k :

$C_n^k = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ avec . $k! = k(k-1)...1$.

En multipliant haut et bas par $(n - k)!$ il vient :

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, relation également valable pour $k = 0$ ou $k = n$ si on pose $0! = 1$.

D'où le :

Théorème 3 :
Les nombres du triangle de Pascal sont donnés par les formules explicites:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

4.- Le théorème du binôme

On se propose d'écrire sous la forme d'une somme le binôme $(a + b)^n$. Quand on effectue le produit, en raison de la distributivité, on est amené à choisir l'un des termes a ou b dans chacun des n facteurs $(a + b)$ et ce de toutes les façons possibles.

On a ainsi une analogie avec le triangle : à un produit de n facteurs où apparaît k fois le facteur b et $(n - k)$ fois le facteur a correspond un chemin dans le triangle où l'on se décide k fois pour la gauche et $(n - k)$ fois pour la droite. On a bien C_n^k produits égaux, k pouvant prendre toutes les valeurs de 0 à n.

Théorème 4 :
Pour a et b réels, n naturel, on a la formule du binôme :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

C'est à cause de ce théorème que les nombres apparaissant dans le triangle s'appellent "coefficients binomiaux". On écrit indifféremment C_n^k ou $\binom{n}{k}$, forme que l'on va utiliser maintenant.

5.- Quelques sommes dans le triangle

Étudions les sommes de termes pris de diverses manières.

1) Somme des termes d'une ligne :

```
   1    = 1
  1+1   = 2
 1+2+1  = 4
1+3+3+1 = 8
   . . . .
```

On trouve 2^n pour la ligne n.

2) Somme alternée des termes d'une ligne :

```
   1-1    = 0
  1-2+1   = 0
 1-3+3-1  = 0
1-4+6-4+1 = 0
   . . . .
```

On trouve toujours 0 pour $n > 0$.

3) Somme des termes d'une colonne (k fixe) jusqu'à la ligne n.

$k = 3$

```
1              = 1
1+4            = 5
1+4+10         = 15
1+4+10+20      = 35
1+4+10+20+35   = 70
```

On obtient l'élément $\binom{n+1}{k+1}$

4) Somme des m termes d'une colonne affectés des facteurs décroissant m, $m-1$, . . . , 1.

$k = 2$

```
1                          = 1
2.1 + 1.3                  = 5
3.1 + 2.3 + 1.6            = 15
4.1 + 3.3 + 2.6 + 1.10     = 35
```

On obtient l'élément $\binom{n+2}{k+2}$ avec $m = n - k + 1$.

5) Somme des carrés des nombres de la ligne n :

```
1.1                     = 1
1.1 + 1.1               = 2
1.1+ 2.2 + 1.1          = 6
1.1+ 3.3 + 3.3 + 1.1    = 20
```

On obtient l'élément $\binom{2n}{n}$.

6) On effectue la somme, non pas d'une ligne ou d'une colonne, mais en oblique. En commençant par un 1 du bord gauche, on prend à chaque fois le 2e terme à droite dans la ligne immédiatement au-dessus :

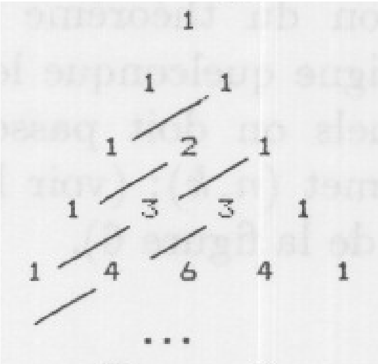


Figure 5

On obtient les termes successifs f_i de la suite de Fibonacci, termes définis par la récurrence $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_n + f_{n-1}$ pour $n \geq 0$. Plus précisément :

$$f_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots$$

La démonstration se fait aisément par récurrence :

- Pour $n = 0$ et $n = 1$ on obtient bien 1.
- On prouve ensuite que la somme vérifie la formule de récurrence de Fibonacci.

$$\begin{array}{r} \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots \\ + \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{3} + \cdots \\ \hline = \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{3} + \cdots \end{array}$$

Le signe d'égalité est justifié par la récurrence du théorème 1.

La démonstration des exemples 1 et 2 est simple : on pose a =1 et $b = 1$ (resp. -1) dans la formule du binôme.

Pour les démonstrations des autres exemples, on se sert d'une méthode expliquée au paragraphe suivant. Mais notons tout d'abord le :

Théorème 5 :

Dans le triangle de Pascal on a les formules sommatoires :

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$$

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\sum_{i=k}^{n} (n-i+1) \binom{i}{k} = \binom{n+2}{k+2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

Pour les nombres de Fibonacci on a :

$$f_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots$$

6.- La convolution de Vandermonde

On obtient une généralisation du théorème 1 quand on cherche dans une ligne quelconque les points de contrôle par lesquels on doit passer si l'on veut atteindre le sommet *(n, k);* (voir la barrière de % dans la ligne *r* de la figure 6).

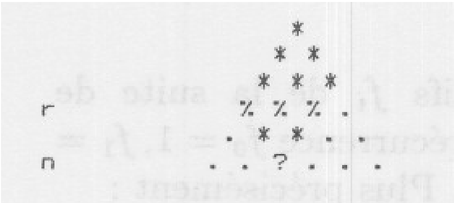


Figure 6

Pour obtenir $\binom{n}{k}$ on calcule d'abord le nombre de chemins qui passent par le point de contrôle (r, i), ombre qui est précisément $\binom{n-r}{k-i}$. Par conséquent $\binom{n}{k}$ est la somme de tous les produits $\binom{r}{i}\bullet\binom{n-r}{k-i}$, d'où en posant $r + t = n$:

Théorème 6 :

Pour les coefficients binomiaux on a la "convolution de Vandermonde" :

$$\binom{r+t}{k} = \sum_{i+j=k} \binom{r}{i}\binom{t}{j}$$

La formule conduit à un schéma très simple pour calculer de nouveaux coefficients. On utilise pour cela une analogie avec la multiplication des nombres réels. On remarque que les coefficients qui interviennent sont ceux qui apparaissent dans l'équation $(1 + x)^{r+t} = (1+ x)^r\ (1 +x)^t$ quand on développe les deux membres. Le coefficient de x^k dans le membre de gauche est $\binom{r+t}{k}$ tandis que dans le membre de droite il est obtenu en faisant la somme de tous les produits qui contiennent les facteur x^i et x^j avec $i+j = k$. C'est exactement ce que l'on fait en multipliant deux nombres à la différence près qu'on n'a pas de retenues puisque x est indéterminé.

Exemple :

3^e ligne • 4^e ligne

7^e ligne

```
(1 3 3 1) • (1 4 6 4 1)
           1 3  3  1
              4 12 12  4
                 6 18 18  6
                    4 12 12 4
                       1  3 3 1
           1 7 21 35 35 21 7 1
```

7.- Le triangle de Pascal modulo 2

Cherchons maintenant des propriétés de divisibilité des coefficients binomiaux. Commençons par le diviseur 2. Pour avoir une vue d'ensemble, on considère le triangle modulo 2 (fig. 7) dans lequel on n'a marqué que les restes non-nuls. On remarque une structure de triangles imbriqués, les uns à l'endroit séparés par des triangles de zéros qui sont à l'envers. De plus :

Théorème 7 :

Tous les nombres des lignes $2m – 1$ *sont impairs.*

La démonstration peut se faire par récurrence.

D'une manière analogue on obtient les triangles modulo p où p est un nombre premier (fig. 8, 9, 10). Il apparaît alors une structure autosimilaire : à toute échelle, plusieurs triangles égaux composent un triangle semblable.

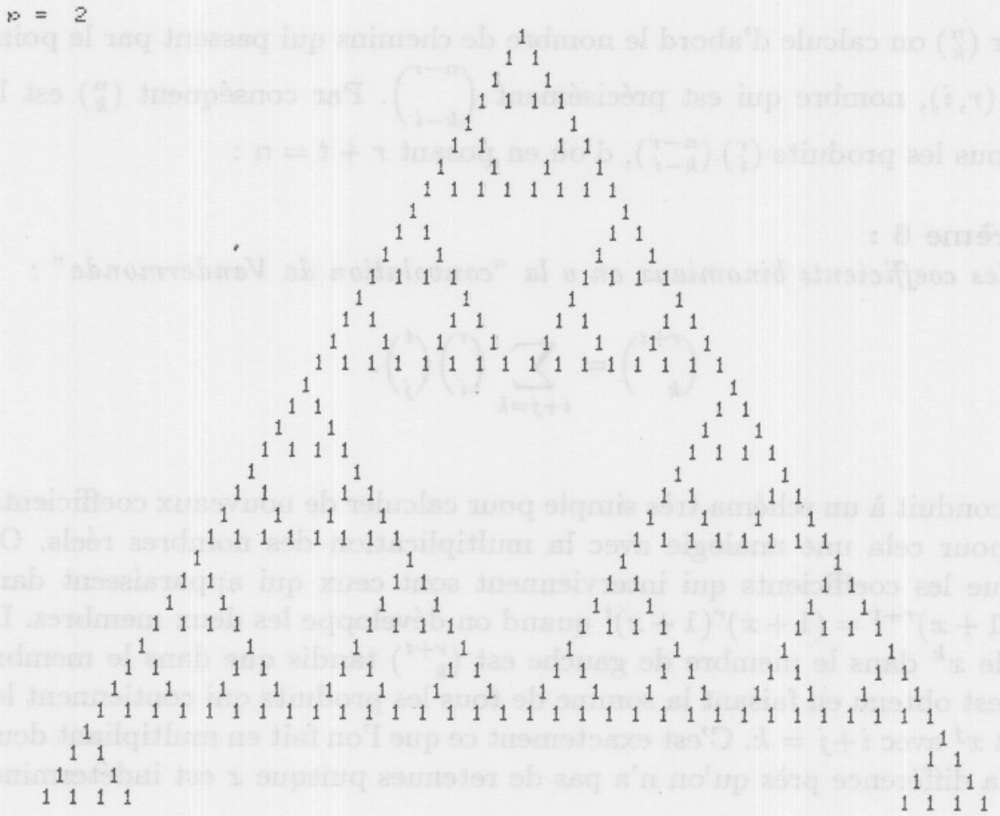


Figure 7

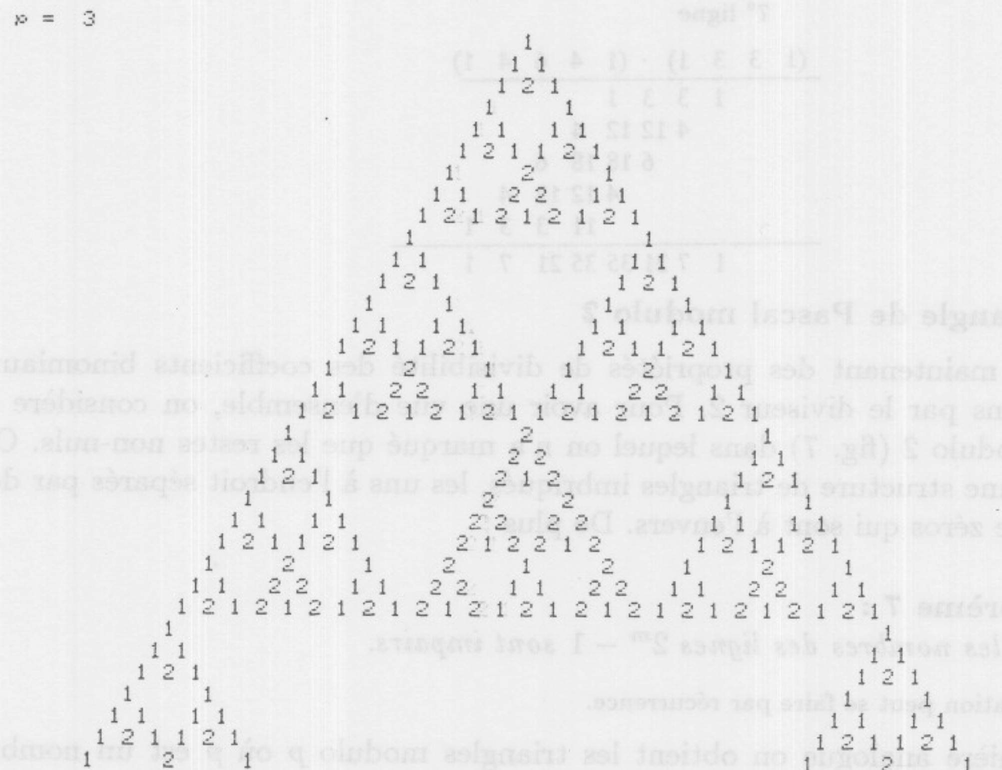


Figure 8

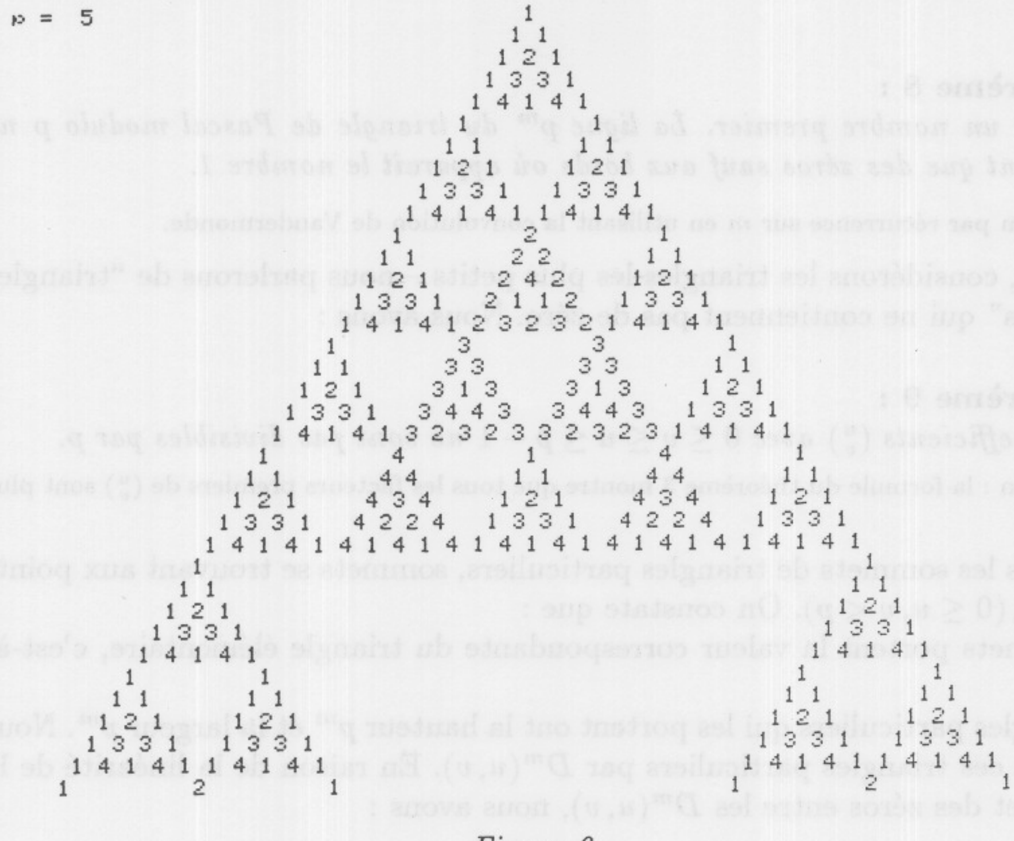


Figure 9

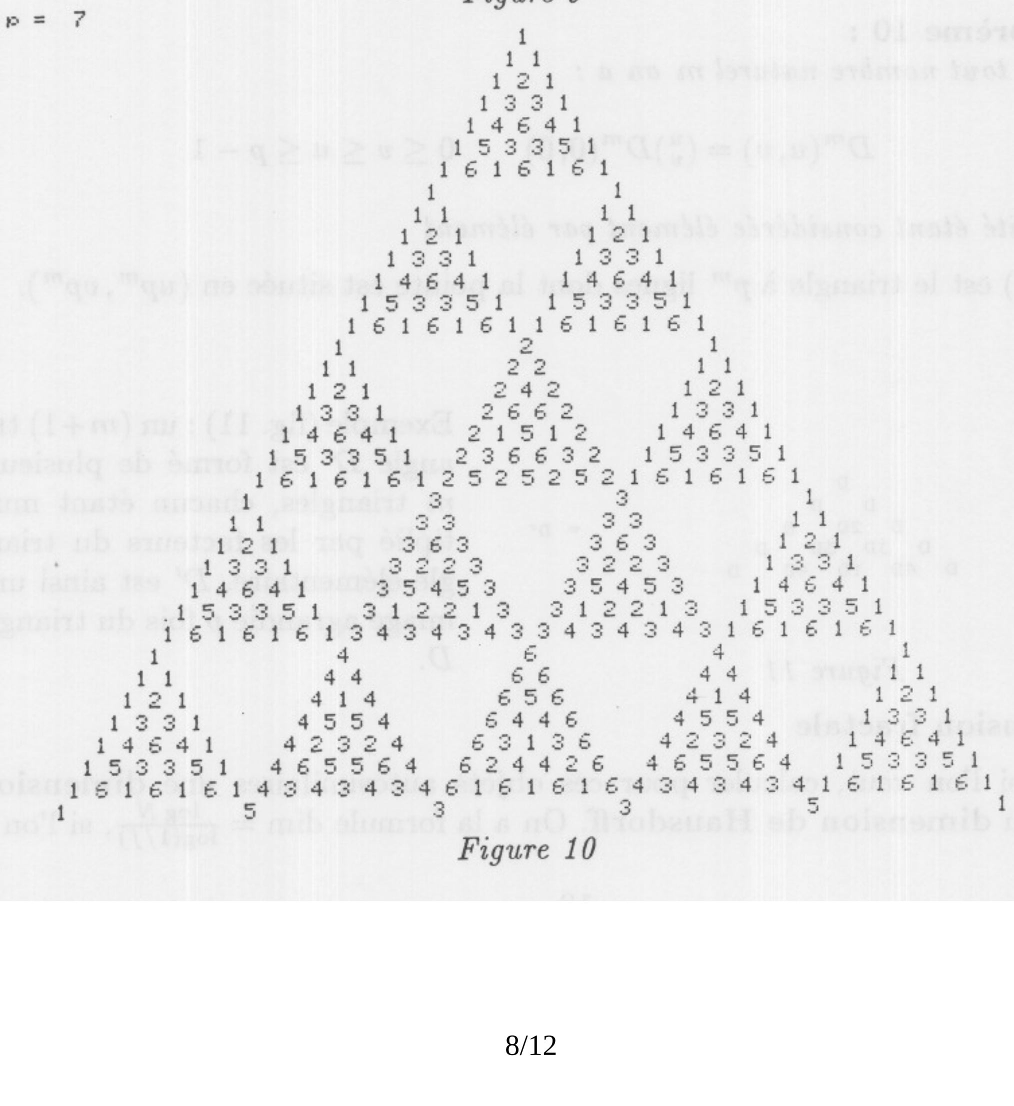


Figure 10

Une propriété générale est qu'il n'y a que des zéros (sauf au bord) dans la ligne p^m.

Théorème 8 :

Soit p un nombre premier. La ligne p^m du triangle de Pascal modulo p ne contient que des zéros sauf aux bords où apparaît le nombre 1.

Démonstration par récurrence sur m en utilisant la convolution de Vandermonde.

Par ailleurs, considérons les triangles les plus petits – nous parlerons de "triangles élémentaires" qui ne contiennent pas de zéro. Nous avons :

Théorème 9 :

Les coefficients $\binom{u}{v}$ *avec* $0 \leq v \leq u \leq p - 1$ *ne sont pas divisibles par p.*

Démonstration : la formule du théorème 3 montre que tous les facteurs premiers de $\binom{u}{v}$ sont plus petits que p.

Considérons les sommets de triangles particuliers, sommets se trouvant aux points (up^m, vp^m), $(0 \leq u, v < p)$. On constate que :

- Ces sommets portent la valeur correspondante du triangle élémentaire, c'est-à-dire $\binom{u}{v}$.
- Les triangles particuliers qui les portent ont la hauteur pm et la largeur pm. Nous désignerons ces triangles particuliers par $D^m(u, v)$. En raison de la linéarité de la récurrence et des zéros entre les $D^m(u, v)$, nous avons :

Théorème 10 :

Pour tout nombre naturel m on a :

$$D^m(u, v) = \binom{u}{v} D^m(0, 0) \qquad 0 \leq v \leq u \leq p-1$$

l'égalité étant considérée élément par élément.

et $D^m(u, v)$ est le triangle à p^m lignes dont la pointe est située en (up^m, vp^m).

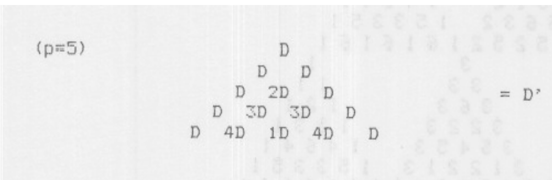


Figure 11

Exemple (fig. 11) : un $(m+ 1)$ triangle D' est formé de plusieurs m triangles, chacun étant multiplié par les facteurs du triangle élémentaire. D' est ainsi une image agrandie p fois du triangle D.

8.- Dimension fractale

On peut, si l'on veut, calculer pour ces objets autosimilaires une dimension fractale ou dimension de Hausdorff. On a la formule dim = $\frac{\log N}{\log(1/f)}$, si l'on a N objets égaux composant un objet semblable dans le rapport de similitude $1/f$.

Ainsi pour un cube dont on divise les arêtes en 3 (f = 1/3) on obtient une division en 3^3 cubes égaux ($N = 3^3$ et dim = 3). Autrement dit $N = (1/f)^{dim}$.

Pour les triangle modulo p on a $N = \frac{p(p+1)}{2}$ et $1/f = p$. Exemple: pour p = 2 on a le fameux triangle de Sierpinski avec dim = log 3/ log 2 = 1,58. . .

9.- Triangle modulo-*p* et représentation en base *p*

On cherche pour un élément de $D^m(u, v)$ de coordonnées (n, k) l'élément correspondant du triangle $D^m(0, 0)$. Soit $n < p^{m+1}$, alors l'élément correspondant a les coordonnées "réduites" $(n - up^m, k - vp^m)$. Nous écrirons n et k en base p :

$$n = u_m\, p^m + u_{m-1}\, p^{m-1} + \ldots + u_0 = u_m\, u_{m-1} \ldots u_0$$
$$k = v_m\, p^m + v_{m-1}\, p^{m-1} + \ldots + v_0 = v_m\, v_{m-1} \ldots v_0$$

avec tous u_i et v_i appartenant à $[[0\ ,\ p-1]]$ et $u^m \neq 0$. Par suite $(n,\ k)$ est un point de $D^m(u,v)$ si et seulement si $u = u_m$ et $(n - up^m\ ,\ k - vp^m)$ est un point du triangle de Pascal, c'est-à-dire si $0 \leq k - vp^m \leq n - up^m$. c'est le cas si v vaut au plus v_m. S'il n'y a pas de tel v, l'élément se trouve dans un "zéro-triangle" entre deux m-triangles.

Exemple :
$n = 15$; $k = 9$; $p = 7$
$15 = 2 \times 7 + 1 = 21_7$
$9 = 1 \times 7 + 2 = 12_7$.
On a $\binom{15}{9} = 0 \bmod 7$ (voir fig. 10), l'élément ne se trouve dans aucun des trois 1-triangles qui sont coupés par la ligne numéro 15. Les coordonnées réduites sont en effet (1,2), point qui se trouve en dehors du triangle.

Nous allons faire m réductions pour obtenir une relation surprenante entre les coefficients binomiaux et la représentation en base p.

1er pas : on calcule les coordonnées réduites de $(n,\ k)$:

$$(n_1,\ k_1) := (n - u_m p^m,\ k - v_m p^m) = (u_{m-1}\, u_{m-2} \ldots u_0\ ,\ v_{m-}1\, v_{m-2} \ldots v_0)$$

Si $k_l > n_1$ alors $\binom{n}{k} = 0 \bmod p$. Et d'après le théorème 10 on a :

$$\binom{n}{k} = \binom{u_m}{v_m}\binom{n_1}{k_1} \bmod p.$$

2ème pas: analogue avec $(n_1,\ k_1)$.

Et on recommence ainsi m fois. On obtient un résultat déjà publié par E. Lucas en 1878 dans l'American Journal of Mathematics.

Théorème 11 :

Soit p un nombre premier, n et k des naturels représentés en base p par
$n = u_m \ldots u_0$ et $k = v_m \ldots v_0$; on a $\binom{n}{k} = \binom{u_m}{v_m}\binom{n_1}{k_1}$ *mod p.*

Corolaire : $\binom{n}{k}$ est divisible par p si et seulement si il existe un indice i tel que $u_i < v_i$.

Démonstration : *(~f)* n'est pas divisible par *p* si 0 :::; *Vi* :::; ui :::; *p* - 1 (d'après le théorème 9).
Exemple: $n = 53$; $k = 29$; $p = 5$
$53 = 2 \times 25 + 0 \times 5 + 3 = 203_5$
$29 = 1 \times 25 + 0 \times 5 + 4 = 104_5$. Comme $4 > 3$ on a $u_0 > v_0$ et $\binom{53}{29} = 0 \bmod 5$.

Autre question: combien d'éléments non nuls y-a-t-il dans la n-ième ligne du triangle ?

Solution : on compte les possibilités de choisir k dans $\binom{n}{k}$ de façon que pour chaque i on ait $v_i \leq u_i$. Pour chaque u_i il y a $u_i + 1$ nombres v_i. En faisant la multiplication il vient :

Théorème 12 :

Le nombre des coefficients binomiaux non divisibles par p est égal au produit

$$\prod_{i=0}^{m}(u_i + 1) \quad \text{si} \quad n = (u_m\, u_{m-1} \ldots u_0)_p$$

En particulier le nombre de coefficients impairs dans la ligne n est égal à $2^{\mathcal{L}(n)}$ où $\mathcal{L}(n)$ est le nombre de chiffres 1 dans la représentation binaire de n.

10.- Un algorithme très rapide:

Présentons rapidement un autre résultat concernant la divisibilité des coefficients binomiaux en liaison avec la décomposition en base *p* (voir Berg).

Théorème 13 :

L'exposant $e_p\left(\binom{n}{k}\right)$ de p dans la décomposition du coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est égal au nombre de retenues dans la soustraction n – k effectuée en base p.

Exemple: *p* = 5 ; *n* = 53 ; *k* = 29

$$\begin{array}{c} n = 203_5 \\ \underline{\;k = 104_5\;} \\ 11 \\ n - k = 44_5 = 24 \end{array}$$

on a deux retenues donc *r* = 2 et par conséquent $\binom{53}{29} = \cdots 5^2 \cdots$

On en déduit un algorithme très rapide pour calculer $\binom{n}{k}$ (voir Goetgheluck) :

1) Disposer d'un tableau de nombres premiers assez grand (par exemple à l'aide du crible d'Ératosthène).

2) Calculer *r*(*p*) pour chaque *p* du tableau en faisant la soustraction correspondante.

3) Calculer le produit $\prod_{p \le n} p^{r(p)}$ avec un algorithme de calcul pour nombres longs.

```
 2^5     3     5     7  11^2    13    17    19    23    29
31^2    41  43^2    53    67    71    73    79   101   103
 107   109   113   131   139   151   163   181   211   227
 229   233   239   241   257   263   269   271   277   281
 283   307   311   313   317   331   359   367   373   379
 383   389   397   449   457   461   463   467   479   487
 491   599   601   607   613   617   619   631   641   643
 647   653   659   661   907   911   919   929   937   941
 947   953   967   971   977   983   991  1801  1811  1823
1831  1847  1861  1867  1871  1873  1877  1879  1889  1901
1907  1913  1931  1933  1949  1951  1973  1979  1987

        02 6539042228 6739754567 8739142905 9037770671 0497933867
1762715016 2624186404 3006427262 3109379981 1114838947 1423851218
0213307670 4410111705 5854597216 6236025545 9765816845 8846529706
5190633412 1969386919 8016381732 0092691041 7305158133 0112395062
7234620291 4323346405 1949756982 3185013368 3758620960
```

Voici le résultat d'une application de cet algorithme à $\binom{1991}{1791}$. D'abord la décomposition en facteurs premiers, puis la valeur exacte avec 281 chiffres (le calcul prend moins de 5 secondes sur le processeur 8088).

11.- Conclusions pédagogiques

Lors des explorations du triangle on tombe sur de nombreuses propriétés et relations qui peuvent être mises en valeur de plusieurs façons dans l'enseignement.

1) Le triangle de Pascal offre des possibilités de travail à tous les niveaux scolaires. Dès la 6ème on peut traiter le problème des chemins sur le graphe et introduire la notion de récurrence (naturellement sans coordonnées, par exemple de la façon suivante: "Le nombre de chemins aboutissant à un carrefour est la somme des deux nombres voisins immédiatement au-dessus"). Et on laisse les élèves

découvrir une série de propriétés. On peut en expliquer quelques-unes par simple contemplation. D'autres seront seulement relevées sans qu'on puisse les prouver à ce niveau. Par exemple, on peut expliquer la relation entre le triangle et la formule du binôme, si l'on traite cette formule. Les démonstrations qui utilisent la récurrence ne sont faisables que plus tard (en Allemagne en 11ème année scolaire). C'est pourquoi la formule explicite ne peut être traitée que par des élèves plus avancés. Mais quelques formules sommatoires peuvent être expliquées plus tôt de manière combinatoire. Le problème des chemins est un des moyens pour que les élèves fassent connaissance avec les méthodes combinatoires. Par exemple l'algorithme utilisant la formule de récurrence est court et simple mais il est lent et utilise beaucoup de mémoire.

Quand on parle de divisibilité on peut introduire le triangle modulo-p de façon naturelle pour en faire découvrir des propriétés par les élèves. Ils s'exercent sur les calculs de congruences dans la construction de ces triangles. En outre l'apparition de l'aspect esthétique ajoute à leur motivation. Les liens entre le triangle *modulo-p* et la représentation en base *p* ne peuvent être traités que par des élèves plus âgés.

2) On met en valeur beaucoup d'idées fondamentales qui peuvent être expliquées à différents niveaux scolaires selon le degré de difficulté correspondant. Rappelons la spirale de Bruner. A côté d'activités centrales et caractéristiques comme calculer, ordonner, concrétiser, formaliser, démontrer, il faut noter, en raison de l'influence croissante de l'ordinateur sur l'enseignement des mathématiques, l'importance de la notion de généralisation qui est mise en œuvre dans la récurrence. Celle-ci joue un rôle crucial dans la génération du triangle et dans la démonstration de ses propriétés.

3) On apprend quelques stratégies spécifiques à différents domaines: calcul de congruence, raisonnement par récurrence, combinatoire, représentation en base *p*, décomposition en facteurs premiers. . .

4) L'ordinateur est un outil qui donne des illustrations variées facilitant les découvertes. On peut montrer de façon exemplaire aux élèves ce qu'est la genèse des mathématiques dans le sens d'une mathématique expérimentale qui a gagné en importance avec l'utilisation des ordinateurs.

5) La résolution d'un problème apporte d'autres questions et motive pour réappliquer les techniques apprises à d'autres problèmes. Qu'obtient-on en appliquant le problème des chemins à un autre graphe, par exemple à celui des chemins du Roi sur un échiquier ? Quels triangles obtient-on si la congruence ne se fait pas selon un nombre premier ? . . .

12.- Bibliographie.

BERG G.- *Exakte Berechnung von Binomialkoeffizienten*.- ln DdM 2, 1988, pp. 115-127.

BERG G.- *Entdeckungen am Pascaldreieck*.- ln DdM 4, 1986, pp. 264- 283.

GLAISHER J.W.L.- *On the residue of a binomial theorem coefficient with respect to prime modulus*.- in Quart. J. Math. 30, 1899, pp. 150-156.

GOETGHELUCK P.- *Computing binomial coefficients*.- ln Am. Math. Monthly 94, 1987, pp. 360-365.

WOLFRAM ST.- *Geometry of binomial coefficients*.- ln Am. Math. Monthly 91, 1984, pp. 566-571.

LUCAS E.- *Théorie des fonctions numériques simplement périodiques*.- ln Amer. J. Math. 1, 1878, pp. 184-240, 289-321).