LDAR

LABORATOIRE DE DIDACTIQUE
ANDRÉ REVUZ

INSPÉ Institut national supérieur
du **professorat** et de l'**éducation**
Université de Strasbourg

ETM7

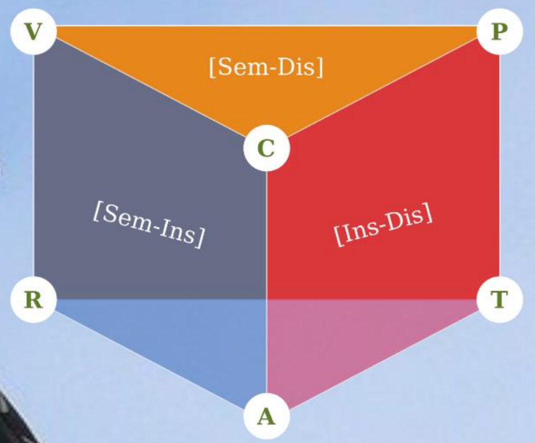
Etude sur le Travail Mathématique
Study on Mathematical Work
Estudio sobre el Trabajo Matemático

Du 27 juin au 2 juillet 2022

Strasbourg, France

ACTES ETM7 **ACTAS ETM7** **PROCEEDINGS ETM7**

2ème édition augmentée



Éditeurs

Charlotte Derouet & Assia Nechache
(Coordinatrices)
Philippe R. Richard
Laurent Vivier
Inés Mª Gómez-Chacón
Alain Kuzniak
Michela Maschietto
Elizabeth Montoya Delgadillo

etm7.sciencesconf.org

CY ADVANCED STUDIES
IREM STRASBOURG
lisec UR 2310
Université Paris Cité

Avec le support de l'Association pour la Diffusion et le Développement de la Recherche sur les Espaces de Travail Mathématique

INSPÉ Institut national supérieur du professorat et de l'éducation
Université de Strasbourg

ETM7

LDAR LABORATOIRE DE DIDACTIQUE ANDRÉ REVUZ

Septième Symposium d'Étude sur le Travail Mathématique
27 juin - 2 juillet 2022, Strasbourg (France)

ACTES / ACTAS / PROCEEDINGS

Septième Symposium d'Étude sur le Travail Mathématique

Séptimo Simposio de Estudio sobre el Trabajo Matemático

Seventh Symposium of Study on Mathematical Work

Strasbourg

Du 27 juin au 2 juillet 2022
Del 27 de junio al 2 de julio de 2022
From June 27 to July 2, 2022

Editeurs
Charlotte Derouet & Assia Nechache (Coordinatrices)
Philippe R. Richard
Laurent Vivier
Inés Mª Gómez-Chacón
Alain Kuzniak
Michela Maschietto
Elizabeth Montoya Delgadillo

IREM de Strasbourg
7 rue René Descartes
67024 Strasbourg Cedex
France

ISBN : 978-2-911446-37-5

Derouet, C., Nechache, A., Richard, P. R., Vivier, L., Gómez-Chacón, I. M., Kuzniak, A., Maschietto, M., & Montoya Delgadillo, E. (2024). *Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique* (2ème édition). IREM de Strasbourg.

Citer un article :
Auteur, I. (2024). Titre. Dans C. Derouet, A. Nechache, P.R. Richard, L. Vivier, I.M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto & E. Montoya Delgadillo, *Actes du septième symposium d'Étude sur le Travail Mathématique* (2ème édition, pp. xx-yy). IREM de Strasbourg.

INTRODUCTION

La septième édition du Symposium sur l'étude du travail mathématique (ETM7) a eu lieu en France, à l'INSPÉ de l'Université de Strasbourg du 27 juin au 2 juillet 2022 (reporté d'une année du fait de la pandémie Covid-19). Il a été organisé conjointement par deux laboratoires : le Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) et le Laboratoire Interuniversitaire de Sciences de l'Éducation et de la Communication (LISEC).

Ce symposium a été soutenu par l'Association pour le Développement et la Diffusion de la Recherche sur les Espaces de Travail Mathématiques (ADRETM). Il a également bénéficié du soutien financier du LDAR, du LISEC, de l'IREM de Strasbourg, de l'UFR de mathématiques de l'Université Paris Cité et de Cergy Paris Université.

Les symposiums ETM visent à créer des espaces pour comprendre le travail mathématique et promouvoir le rôle de la recherche dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Ils sont organisés sous forme de groupes de travail thématiques à partir des communications proposées par les participants. La formule symposium favorise des échanges riches entre les participants et contribue fortement au développement d'une communauté de chercheurs aux intérêts communs.

Cette septième édition du symposium ETM a réuni, pendant 6 jours, une vaste communauté de chercheurs (soit 71) de différents pays : Canada, Chili, Chypre, Espagne, France, Grèce, Israël, Italie, Mexique, Pérou. Comme les précédents, le symposium a été trilingue (anglais, espagnol, français). Les plénières, les communications, orales et affichées, ont été présentées dans une de ces trois langues, accompagnées d'un diaporama dans une des deux autres langues.

L'organisation du symposium a pour objectif de favoriser la présence et les échanges entre les participants. En raison de la situation pandémique de 2020, le comité scientifique et d'organisation a décidé d'inclure dans le symposium, et de manière exceptionnelle, une modalité hybride pour les plénières et une modalité asynchrone pour deux groupes thématiques.

Cette modalité hybride est motivée par le fait que les participants « habitués » des symposiums de l'ETM7 n'ont pas pu se déplacer en France, et ceci pour des raisons financières dues aux conséquences de la pandémie de covid 19. Pour ce faire, un pôle

universitaire à distance pour d'autres fuseaux horaires (ex. Valparaíso, Lima, México, Montréal) a été mis en place. Cela a contribué efficacement aux activités scientifiques proposées au sein du symposium.

La rencontre a été organisée autour de quatre thèmes dans lesquels les contributions ont été réparties:

- Thème 1 : Perspectives et approches théoriques sur le travail mathématique ;
- Thème 2 : Étude des signes, des outils et du discours dans le travail mathématique mathématique ;
- Thème 3 : Genèse et développement du travail mathématique : rôle de l'enseignant du formateur, du collectif et des interactions ;
- Thème 4 : Le rôle des tâches dans le travail mathématique.

À la fin du symposium, une synthèse prenant en compte à la fois les travaux à distance et en présentiel, a été présentée par les responsables de chaque thème. Cette synthèse, qui s'est déroulée lors d'une séance plénière, a fait état des communications et réflexion au sein du groupe de travail, à l'instar des précédents symposiums tenus à Chypre, Paris, Montréal, Madrid, Florina et Valparaiso.

Le colloque comprenait plusieurs activités plénières, à commencer par la conférence inaugurale intitulée « Espaces de travail mathématiques : comment obtenir (toutes) les informations en recherchant (tous) les points de vue » présentée par le Pr Ferdinando Arzarello, chercheur émérite de l'Université de Turin. De plus, il y a eu deux ateliers qui ont permis de se familiariser avec la théorie des ETM autour des sujets suivants:

- Atelier 1 : Technologies – Jorge Gaona et Soledad López;
- Atelier 2 : Géométrie des Ellipses – Alejandro Cabrera, Elizabeth Montoya et Jaime Huincahue.

Les symposiums ETM réunissent à chaque édition des chercheurs de différentes parties du monde qui participent à une communauté scientifique autour de l'étude du travail mathématique et, aussi, de la théorie des Espaces de travail mathématique, en soulignant dans son organisation l'aménagement d'un espace de coopération scientifique qui favorise le dialogue avec les autres théories, la recherche en didactique des mathématiques et le soutien aux jeunes chercheurs.

Le symposium comprenait deux visites culturelles : la visite guidée de la ville de Strasbourg en bateau mouche et la découverte d'un lieu atypique chargé d'histoire, la cave à vin des Hospices de Strasbourg.

Pour terminer, nous adressons quelques mots de gratitude à toutes les personnes qui ont participé de loin ou de près au bon déroulement de cet évènement. Ainsi, nous tenons à remercier le directeur de l'INSPÉ de l'académie de Strasbourg d'avoir accueilli chaleureusement le symposium, mais aussi le personnel administratif de l'INSPÉ de Strasbourg pour leur réactivité, leur aide, leur écoute en toute circonstance.

Cette septième édition a été l'occasion pour les collègues et amis de François Pluvinage, qui nous a quitté en mars 2020, de lui rendre un hommage, certains à distance, pour son engagement dans la recherche en didactique des mathématiques aux niveaux national et international, notamment à l'IREM de Strasbourg et au CINVESTAV de Mexico. À cette occasion, nous remercions l'IREM d'avoir permis de rendre cet hommage au sein de sa structure.

L'ETM8 est programmé en octobre 2024 à Castro Urdiales, en Cantabrie (Espagne).

Assia Nechache & Charlotte Derouet

Les participants du symposium de l'ETM7 en présentiel à Strasbourg

Les participants du symposium de l'ETM7 à distance

***Hommage à François Pluvinage et à la pensée vagabonde et active d'un chercheur et homme rare* (Kuzniak & Rauscher, 2020)**

[Hommage à François Pluvinage]

Il restera de toi ce que tu as donné.
Au lieu de le garder dans des coffres rouillés.

Il restera de toi de ton jardin secret,
Une fleur oubliée qui ne s'est pas fanée.
Ce que tu as donné, en d'autres fleurira.
Celui qui perd sa vie, un jour la trouvera.

Il restera de toi ce que tu as offert
Entre les bras ouverts un matin au soleil.

Il restera de toi ce que tu as perdu
Que tu as attendu plus loin que les réveils,
Ce que tu as souffert, en d'autres revivra.
Celui qui perd sa vie, un jour la trouvera.

Il restera de toi une larme tombée,
Un sourire germé sur les yeux de ton cœur.

Il restera de toi ce que tu as semé
Que tu as partagé aux mendiants du bonheur.
Ce que tu as semé, en d'autres germera.
Celui qui perd sa vie, un jour la trouvera.

Par Simone Weil

François Pluvinage à Montréal lors du symposium ETM3

Hommage à Pepe Carrillo (Nuria Climent Rodriguez)

En mars 2021, Pepe Carrillo nous a quittés. Plus de deux ans se sont écoulés et son souvenir et sa présence sont encore très présents dans de nombreux domaines et événements de l'enseignement des mathématiques au niveau international. Pepe Carrillo était passionné par la recherche sur l'enseignement des mathématiques, convaincu de son pouvoir de transformation de la réalité éducative et de la société, qu'il a poursuivie principalement par le biais de la formation des enseignants. Son implication dans cette formation remonte à sa propre expérience en tant qu'enseignant du secondaire pendant plus de 20 ans, où il a commencé à s'intéresser à l'amélioration de sa propre formation et de celle de ses collègues. La résolution de problèmes a été son premier sujet de recherche et ce qu'il a appris à ce sujet, il l'a transmis aux enseignants dans le cadre d'activités de formation continue.

Son implication dans la formation continue, et plus tard dans la formation initiale des enseignants, lui a donné la conviction que les enseignants devaient être mieux formés afin d'améliorer l'apprentissage des mathématiques en classe. D'où son intérêt pour le développement professionnel des enseignants dans le domaine de l'enseignement des mathématiques et des connaissances professionnelles. Son intérêt a été un puissant moteur pour la recherche et, en même temps, pour les interventions éducatives. Pepe Carrillo pensait et agissait "en grand", c'est-à-dire en recherchant des idées et des actions non routinières susceptibles d'apporter une amélioration substantielle à l'objet d'étude. Il aimait résoudre des problèmes réels, y compris dans le cadre d'un projet personnel.

Désireux de changer et d'en savoir plus pour étayer ses idées, il a encouragé les échanges avec des chercheurs en dehors de son groupe de travail naturel, tant au niveau national qu'international. C'est ainsi qu'il a collaboré avec Alain Kuzniak et le groupe ETM. Le modèle de l'espace de travail mathématique a permis d'analyser la classe de mathématiques afin d'explorer l'influence de la vision et des connaissances de l'enseignant. Depuis sa première participation au congrès de l'ETM à San Lorenzo del Escorial (Espagne) en 2014, il n'a jamais manqué une réunion de l'ETM. L'étude des interactions entre l'ETM et le MTSK dans la recherche sur l'enseignement des mathématiques a été configurée comme une ligne du programme de recherche de l'équipe MTSK.

Tout cela a été rendu possible grâce à un équilibre exceptionnel entre humilité, charisme et leadership, sensibilité et rigueur. La vivacité du souvenir de Pepe est probablement renforcée par sa gentillesse, sa chaleur, son souci de l'environnement et son ouverture d'esprit. C'est peut-être pour cela que les images mentales que chacun d'entre nous peut avoir de lui ont en commun son sourire.

INTRODUCCIÓN

La 7ª edición del Simposio sobre el Estudio del Trabajo Matemático (ETM7) tuvo lugar en Francia, en el INSPÉ de la Universidad de Estrasburgo, del 27 de junio al 2 de julio de 2022 (aplazado un año debido a la pandemia de Covid-19). Fue organizado conjuntamente por dos laboratorios: el Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) y el Laboratoire Interuniversitaire de Sciences de l'Éducation et de la Communication (LISEC).

Esta reunión contó con el apoyo de la Association pour le Développement et la Diffusion de la Recherche sur les Espaces de Travail Mathématiques (ADRETM). También contó con el apoyo del LDAR, el LISEC, el IREM de Estrasburgo, la UFR de mathématiques de l'Université Paris Cité y la Cergy Paris Université.

Los simposios del ETM pretenden crear espacios para comprender el trabajo matemático y promover el papel de la investigación en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Se organizan en forma de grupos de trabajo temáticos basados en ponencias propuestas por los participantes. El formato de simposio propicia ricos intercambios entre los participantes y contribuye en gran medida al desarrollo de una comunidad de investigadores con intereses comunes.

Esta séptima edición del simposio ETM reunió, durante 6 días, a una amplia comunidad de investigadores (71) procedentes de distintos países: Canadá, Chile, Chipre, España, Francia, Grecia, Italia, Israel, México y Perú. Al igual que sus predecesores, el simposio fue trilingüe (inglés, español y francés). Las sesiones plenarias y las presentaciones orales y de pósters se pronunciaron oralmente en uno de estos tres idiomas, acompañadas de un documento de apoyo en uno de los otros dos idiomas.

El simposio se organiza para animar a los participantes a asistir e intercambiar puntos de vista. En vista de la situación pandémica en 2020, el Comité Científic y Organizador ha decidido incluir una modalidad híbrida para las sesiones plenarias y una modalidad asíncrona para dos grupos temáticos.

El motivo de la modalidad híbrida es que los participantes "habituales" en los simposios del ETM7 no han podido viajar a Francia por motivos económicos debido a las consecuencias de la pandemia de covid 19. Así pues, se creó un centro universitario a distancia para otras zonas horarias (por ejemplo, Valparaíso, Lima, México, Montreal). Esto contribuyó eficazmente a las actividades científicas propuestas en el simposio.

La reunión se organizó en torno a cuatro temas en los que se dividieron las contribuciones:

- Tema 1: Perspectivas y enfoques teóricos del trabajo matemático;
- Tema 2: Estudio de los signos, las herramientas y el discurso en el trabajo matemático;
- Tema 3: Génesis y desarrollo del trabajo matemático: el papel del profesor, del formador, del grupo y de las interacciones;
- Tema 4: El papel de las tareas en el trabajo matemático.

Al final del simposio, los responsables de cada tema presentaron un resumen que tenía en cuenta tanto el trabajo a distancia como el presencial. Esta síntesis, que tuvo lugar durante una sesión plenaria, da cuenta de las comunicaciones y debates en el seno del grupo de trabajo, al igual que los simposios anteriores celebrados en Chipre, París, Montreal, Madrid, Florina y Valparaíso.

El simposio incluyó varias actividades plenarias, empezando por la conferencia inaugural titulada "Espacios de trabajo matemáticos: cómo obtener (toda) la información buscando (todos) los puntos de vista", presentada por el Prof. Ferdinando Arzarello, investigador emérito de la Universidad de Turín. Además, se organizaron dos talleres para familiarizar a los participantes con la teoría de los ETM, sobre los temas siguientes:

- Taller 1: El papel de la tecnología en una tarea diseñada en un sistema de evaluación en línea y el cambio de domino (parte 1) – Jorge Gaona y Soledad López;
- Taller 2: El papel de la tecnología en una tarea diseñada en un sistema de evaluación en línea y el cambio de domino (parte 2) – Alejandro Cabrera, Elizabeth Montoya y Jaime Huincahue.

Los simposios ETM reúnen a investigadores de distintas partes del mundo que participan en una comunidad científica centrada en el estudio del trabajo matemático y la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático. La organización de los simposios hace hincapié en la creación de un espacio de cooperación científica que fomente el diálogo con otras teorías, la investigación en didáctica de las matemáticas y el apoyo a los jóvenes investigadores.

El simposio incluyó dos visitas culturales. La primera consistió en una visita guiada a la ciudad de Estrasburgo en hidroavión. La segunda fue una visita a un lugar insólito cargado de historia, la bodega de los Hospices de Estrasburgo.

Por último, nos gustaría dedicar unas palabras de agradecimiento a todos los que han participado, directa o indirectamente, en el éxito de este acto. Queremos dar las gracias al director del INSPÉ de Estrasburgo por su calurosa acogida del simposio, así como al personal administrativo del INSPÉ de Estrasburgo por su receptividad, ayuda y atención en todas las circunstancias.

Esta séptima edición fue una oportunidad para que colegas y amigos de François Pluvinage, fallecido en marzo de 2020, le rindieran homenaje, algunos desde la distancia, por su compromiso con la investigación en didáctica de las matemáticas a nivel nacional e internacional, particularmente en el IREM de Estrasburgo y en el CINVESTAV de México. Aprovechamos la ocasión para agradecer al IREM el haber hecho posible la celebración de este homenaje dentro de su estructura.

La ETM8 está prevista para octubre de 2024 en Castro Urdiales, Cantabria (España).

Assia Nechache & Charlotte Derouet

Los participantes del simposio ETM7 de Estrasburgo

Los Participantes del simposio ETM7 a distancia

Homenaje a François Pluvinage y al pensamiento errante y activo de un investigador y hombre raro (Kuzniak & Rauscher, 2020)

Homenaje a François Pluvinage

Lo que queda de ti ....

Lo que queda de ti es lo que diste.
En lugar de guardarlo en cofres oxidados
.
Lo que quedará de ti es tu jardín secreto,
Una flor olvidada que no se ha marchitado.
Lo que has dado florecerá en otros.
Quien pierde su vida, un día la encontrará.

Lo que quedará de ti es lo que ofreciste
Entre los brazos abiertos en una mañana soleada.
Lo que quedará de ti es lo que perdiste
Lo que esperaste más allá del despertador,
Lo que sufriste, en otros volverá a vivir.
Quien pierde la vida, un día la encontrará.

Una lágrima caída quedará de ti,
Una sonrisa brotada en los ojos de tu corazón.
Quedará de ti lo que sembraste
Que compartiste con los mendigos de felicidad.
Lo que sembraste brotará en otros.
Quien pierde su vida, un día la encontrará.

Por Simone Weil

François Pluvinage en Montreal durante el simposio ETM3

Homenaje a Pepe Carrillo (Nuria Climent Rodriguez)

En marzo de 2021 nos dejó Pepe Carrillo. Han pasado ya, pues, más de dos años y su recuerdo y presencia siguen muy vivos en muchos ámbitos y eventos en Educación Matemática a nivel internacional.

Pepe Carrillo era un apasionado de la investigación en Educación Matemática, convencido de su poder transformador de la realidad educativa y la sociedad, lo que perseguía fundamentalmente desde la formación del profesorado. Su implicación en dicha formación se remontaba a su propia experiencia como profesor de Secundaria, durante más de 20 años, donde despertó su inquietud por mejorar su propia formación y la de sus compañeros. La resolución de problemas fue su primer foco de investigación y lo que aprendía sobre ello lo transfería al profesorado en actividades de formación continua.

De implicarse en la formación continua, y posteriormente en la formación inicial de profesores, llegó el convencimiento de la necesidad de formar mejor al profesorado para poder mejorar el aprendizaje matemático en las aulas. De aquí su interés en el desarrollo profesional del profesorado para la enseñanza de las matemáticas y su conocimiento profesional. Su interés era un potente motor de investigaciones y a la vez de intervenciones educativas. Pepe Carrillo pensaba y actuaba "a lo grande", entendido como perseguir ideas y acciones no rutinarias, que supongan una mejora sustancial del objeto de estudio. Le gustaba la resolución de auténticos problemas, también como proyecto personal.

En su afán de cambio y de saber más para que este fuera fundamentado, propiciaba el intercambio con investigadores externos a su grupo natural de trabajo, tanto a nivel nacional como internacional. Así se produjo la colaboración con Alain Kuzniak y el grupo del ETM. El modelo del Espacio de Trabajo Matemático permitía analizar la clase de matemáticas para poder explorar la influencia en esta de la visión y el conocimiento del profesor. Desde la primera participación en el congreso del ETM, en San Lorenzo del Escorial (España), en 2014, no faltó a ninguna cita de este evento. El estudio de las interacciones entre ETM y MTSK en la investigación en Educación Matemática se configuró como una línea en la agenda de investigación del equipo MTSK.

Y todo lo anterior fue posible por un excepcional equilibrio entre humildad, carisma y liderazgo; sensibilidad y rigor. Lo vivo del recuerdo de Pepe probablemente esté reforzado por su amabilidad, cariño en el trato, cuidado de su entorno y apertura. Quizás por eso las imágenes mentales que cada uno podamos tener de él compartan su sonrisa.

TABLE DES MATIÈRES / ÍNDICE / TABLE OF CONTENTS

CO-PRÉSIDENTS / CO-PRESIDENTES / CO-CHAIRS

Comité scientifique / comité científico / scientific committee:

Philippe R. RICHARD & Laurent VIVIER

Comité d'organisation / comité de organización / organizing committee:

Charlotte DEROUET & Assia NECHACHE

COMITÉ SCIENTIFIQUE / COMITÉ CIENTÍFICO / SCIENTIFIC COMMITTEE

Philippe R. RICHARD, Université de Montréal, Canada – Co-Président du Comité Scientifique

Laurent VIVIER, Université Paris Cité, France – Co-Président du Comité Scientifique

Alain KUZNIAK, Université Paris Cité, France – Resp.Thème 1

Michela MASCHIETTO, Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia, Italia – Resp. Thème 2

Inés Mª GÓMEZ-CHACÓN, Universidad Complutense de Madrid, España – Resp. Thème 3

Elizabeth MONTOYA DELGADILLO, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile – Resp.Thème 4

Charlotte DEROUET, Université de Strasbourg, France– Co-Présidente du Comité d'Organisation

Assia NECHACHE, CY Cergy Paris Université, France – Co-Présidente du Comité d'Organisation

Ivy KIDRON, בית הספר הגבוה לטכנולוגיה בירושלים – Institut de technologie de Jérusalem, Israël

Patrick GIBEL, Université de Bordeaux, France

Iliada ELIA, Πανεπιστήμιο Κύπρου – University of Cyprus, Chypre

Jesús FLORES SALAZAR, Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú

Rosa Elvira PÁEZ MURILLO, Universidad Autónoma de la Ciudad de México, Mexique

Luis RADFORD, Université Laurentienne, Canada

Hans-Stefan SILLER, Julius-Maximilians-Universität Würzburg, Allemagne

COMITÉ D'ORGANISATION / COMITÉ DE ORGANIZACIÓN / ORGANIZING COMMITTEE

Laboratoire de Didactique André Revuz	INSPÉ de l'Académie de Strasbourg, Université de Strasbourg
Assia NECHACHE (Co-Présidente) Philippe HOPPENOT Elann LESNES-CUISINIEZ	Charlotte DEROUET (Co-Présidente) Richard CABASSUT Camille DOUKHAN Catherine THOMAS

AVEC LA CONTRIBUTION DE / CON LA CONTRIBUCIÓN DE / WITH THE CONTRIBUTION OF

Jaime A. HUINCAHUE ARCOS, Universidad Católica Del Maule, Chile

Romina MENARES ESPINOZA, Universidad de Valparaíso, Chile – Co-resp. du pôle universitaire à distance

Pedro VIDAL-SZABÓ, Universidad de Valparaíso, Chile – Co-resp. du pôle universitaire à distance

ESPACES DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE : COMMENT OBTENIR PLUS D'INFORMATIONS EN RECHERCHANT PLUS DE POINTS DE VUE

Ferdinando Arzarello

Dipartimento di Matematica, Università di Torino

L'article utilise et compare deux cadres théoriques, l'Espace de Travail Mathématique et le Faisceau Sémiotique, dans l'interprétation du même épisode didactique, centré sur l'apprentissage de la covariation des quantités du premier et second ordre dans une classe de lycée italien. Les deux types d'analyse, comparés selon ce qu'on appelle l'effet Yoneda, permettent d'appréhender des aspects nouveaux de l'activité examinée, que les deux cadres seules ne peuvent révéler. Enfin, la nature de cette méthode de comparaison est discutée, en la distinguant du cadre plus connu de mise en réseau des théories.

INTRODUCTION

Le leitmotiv de cet article porte sur les liens entre le cadre du groupe sur l'Espace de Travail Mathématique (Th ETM) tel qu'il apparaît dans le volume par Kuzniak et al. (2022) et mes propres recherches. Il est basé sur cette observation contenue dans le volume : « différents paradigmes peuvent exister et coexister. Identifier ces paradigmes et leurs interactions nous aide à comprendre et à orienter le travail mathématique » (p. 64). Plus précisément, je me suis inspiré du dessin de la figure 1, qui illustre d'une manière plaisante deux pensées importantes et profondes sur lesquelles réfléchir, la première est immédiate et la seconde est plus implicite :

(i) ce que l'on voit n'est pas toujours vu comme un autre le voit ;

(ii) en réfléchissant sur ce que « l'autre » dit voir, de nouvelles manières de voir apparaissent auxquelles on n'avait pas pensé auparavant.

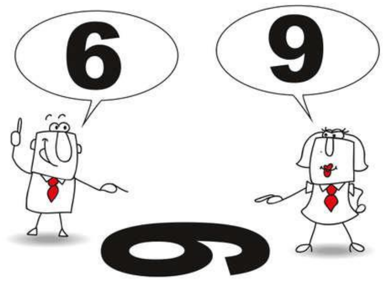


Figure 1 : Points de vue ([1])

Ces aspects sont bien représentés par les réflexions de F. Jullien, linguiste et sinologue français, et de B. Mazur, mathématicien américain. Les deux écrivent respectivement: « il ne s'agit pas de philosophie comparée, de mise en parallèle de différentes conceptions, mais d'un dialogue philosophique où chaque pensée, rencontrant l'autre,

[1] Image tirée de: https://stock.adobe.com/it/search?k=different%20point%20of%20view

interroge son propre impensé » (Jullien, 2006, p. 8), et « [pour comprendre ce qu'est un objet] il faut comprendre le réseau de relations qu'il entretient avec tous les autres objets qui le concernent » (Mazur, 2007, p. 225 ; ma traduction). À la suite de Mazur, j'appellerai cette manière de voir "l'effet Yoneda" (du nom du célèbre résultat découvert par le mathématicien japonais).

L'effet Yoneda, très proche des idées de Kuzniak mentionnées ci-dessus, affirme que pour comprendre l'objet mystérieux X il faut se mettre à la place d'un autre objet Y, que l'on connaît bien, et se demander « À quoi ressemble X du point de vue de Y? » pour réfléchir sur les aspects nouveaux que prend X à partir de cette nouvelle perspective, et continuer ainsi jusqu'à ce que X ait été analysé du point de vue d'un certain nombre d'objets Y : beaucoup d'informations sur X sont ainsi générées.

Si *parva licet componere magnis* (i.e s'il est permis de comparer le petit au grand), je vais essayer de le faire à la fois en proposant une analyse d’une situation didactique selon les paradigmes de mon cadre théorique, c'est-à-dire la Théorie du Faisceau Sémiotique (Th FS), que je détaillerai brièvement ci-dessous, et en la croisant avec les résultats d'une analyse avec la ThETM. Le but est de favoriser des interprétations nouvelles par la communauté de ces "chercheurs exigeants et curieux" souhaités dans la conclusion de Kuzniak et al. (2022, p. 275).

J'espère vraiment que cette méta-réflexion puisse par conséquent déclencher des intéressantes recherches en collaboration et soutenir des formes inattendues de compréhension dans la ligne de pensée de F. Jullien et de B. Mazur, étonnamment similaire au commentaire suivant de L. Radford sur la mise en réseau des différentes théories: « Les chercheurs deviennent dotés avec de nouvelles possibilités d'examiner leurs théories d'origine et de voir le familier à travers de nouvelles positions qui rendent le familier inconnu et donc ouvert à l'examen, à la critique et au changement » (Radford, 2014, p. 284).

En tant que chercheur curieux, je suivrai la suggestion de Kuzniak et considérerai quelques éléments de deux cadres théoriques, la ThETM et la ThFS, comme des lentilles différentes pour analyser les mêmes phénomènes éducatifs dans un cadre de mise en réseau des différentes théories, acquérant ainsi la possibilité d'examiner ces éléments avec un œil critique et favorable à un changement de perspectives, comme suggéré par Radford.

Dans la suite de l'article, j'expliquerai brièvement la Théorie du Faisceaux Sémiotique (ThFS) et sa lentille spécifique d’observation, la Timeline, que j'utiliserai pour lire les données. Ensuite, compte tenu de la plus grande connaissance du cadre de la ThETM par les lecteurs de ce numéro des actes, je vais simplement énumérer les éléments de ThETM que j'utiliserai dans l'analyse afin de les comparer avec celles du cadre de la ThFS.

Je présenterai brièvement le phénomène didactique considéré dans mes analyses, c'est-à-dire la covariation entre grandeurs, et je me référerai à un exemple concret dans la salle de classe pour élaborer la comparaison entre les deux points de vue.

CADRES THEORIQUES

Le Faisceau Sémiotique (Arzarello, 2006)

Il est un bon outil pour saisir les interactions au sein des activités, productions et interactions sémiotiques dans la classe de mathématiques. Il surgit comme

> un système de signes [...] qui est produit par un ou plusieurs sujets en interaction et qui évolue dans le temps. Typiquement, un faisceau sémiotique est constitué des signes produits par un élève ou par un groupe d'élèves en résolvant un problème et/ou en discutant d'une question mathématique. Il est possible que l'enseignant participe lui aussi à cette production, et ainsi le faisceau sémiotique peut également inclure les signes produits par l'enseignant. (Arzarello et al., 2009, p. 100).

En particulier, les signes peuvent être produits avec les artefacts utilisés lors des interactions, des anciennes règles et compas aux dispositifs technologiques plus sophistiqués, et ces artefacts sont inclus dans l'environnement d'apprentissage. Typiquement, le faisceau sémiotique englobe les activités et productions perceptivo-motrices des élèves et des enseignants : du langage (énoncés, textes écrits, etc.) et des modes d'expression extra-linguistiques (gestes et regards) à différents types d'inscriptions (dessins, croquis, graphiques, etc.), c'est-à-dire l'ensemble des ressources sémiotiques produites ou agies pour penser et communiquer dans l'environnement de la classe

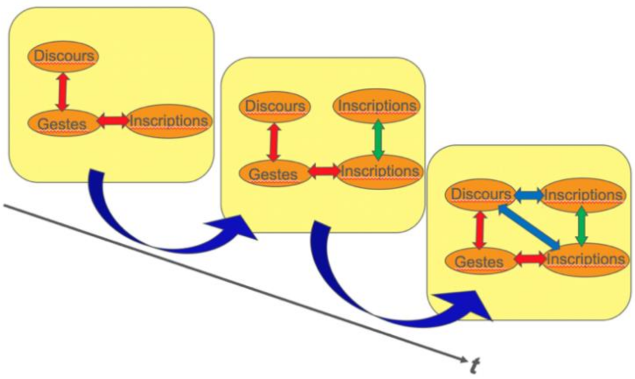


Figure 2 : Le faisceau sémiotique : ses composantes et son évolution temporelle

Le FS, constitué à la fois d'un ensemble de composantes sémiotiques et de leurs relations mutuelles, est une structure dynamique qui évolue dans le temps (figure 2) en raison des activités sémiotiques des sujets, et permet de décrire ces activités sémiotiques multimodales de manière holistique. Ainsi, le FS considère les ressources sémiotiques en tant qu'outil d'analyse unificateur. De plus, la dynamique du FS peut être analysée de deux manières différentes et complémentaires: une analyse synchronique, qui considère les relations entre différentes ressources sémiotiques simultanément à un moment précis dans le temps; une analyse diachronique, centrée sur l'évolution des signes et de leurs relations dans le temps. «Ensemble, l'analyse synchronique et diachronique permet de mettre en évidence les rôles que jouent les différents types de signes (gestes, paroles, inscriptions) dans les processus cognitifs des élèves» (Arzarello et al., 2009, p. 101). Le FS permet de décrire l'imbrication des différentes activités sémiotiques multimodales dans la salle de classe.

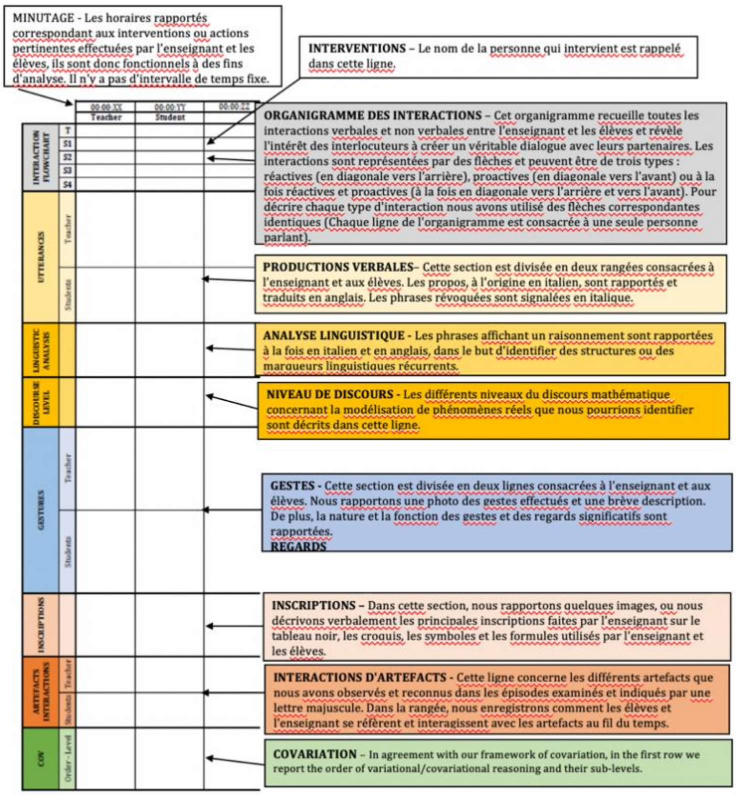


Figure 3 : La structure de la Timeline

La structure de la Timeline est obtenue avec l'utilisation d'un outil élaboré en collaboration avec Sara Bagossi (Arzarello et al., 2010 ; Bagossi, 2022, p. 55 et suiv.), qui contient une analyse précise de toutes les composantes du FS et des interactions synchroniques et diachroniques relatives (fig. 3) : il découle de la nécessité de décrire en détail les situations didactiques et l'imbrication dense des relations entre les variables présentes dans la classe. Il est un outil de microanalyse qui donne une vue sur les différents registres sémiotiques du faisceau sémiotique : productions verbales, corporelles et inscriptions (des formules aux graphiques). Le Timeline permet de représenter le flux dynamique des différents épisodes sous une forme condensée et d'en souligner toutes les différentes composantes du FS.

Espace de Travail Mathématique (Kuzniak et al., 2022)

Pour ce cadre théorique (Kuzniak et al., 2022) je me limiterai à mentionner les trois constructions que j'utiliserai spécifiquement en comparaison avec le travail effectué avec la Timeline. Évidemment je prends pour acquis la connaissance de la théorie globale et souligne juste que la comparaison se limitera à la composante [Sem-Ins] du cadre global de l'ETM (fig. 4), avec une référence particulière au duo outil-instrument. Ce choix est motivé à la fois par manque d'espace mais également pour donner un début précis et limité à ce type de comparaison, qui je l'espère, se poursuivra à l'avenir. Ce n'est donc pas le fait que la comparaison ne peut pas se faire avec les autres composantes de la ThETM.

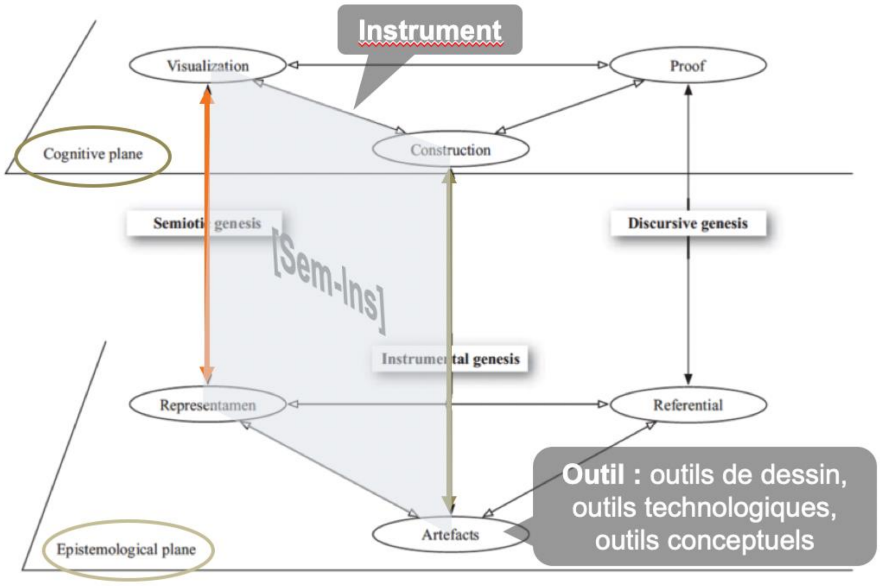


Figure 4 : Diversité des Travaux Mathématiques associés à divers ETM (Kuzniak et al., 2022)

Ici est la liste des composantes de la ThETM que j'utiliserai pour comparer les deux théories :

(i) L'ETM *personnel* et le *travail personnel* reflètent la réalité du travail des individus qui effectuent une tâche avec leurs propres connaissances et capacités cognitives.

(ii) L'ETM *idoine* « se réfère à un état intermédiaire de transmission et de médiation des connaissances où il existe une tension entre les attentes de l'enseignant et la redéfinition de la tâche et des problèmes afin de permettre au travail personnel des élèves de progresser, […et] afin de s'adapter au mieux au projet éducatif et à la réalité des apprenants. » (Kuzniak et al., p. 63)

(iii) L'ETM *de référence* « correspond au travail normalement attendu par les établissements et les organismes chargés de l'enseignement des mathématiques ». (Kuzniak et al., p. 63)

Après avoir défini les deux cadres théoriques que j'utiliserai, je vais maintenant introduire brièvement le phénomène didactique examiné ; je passerai ensuite aux deux commentaires conséquents, qui concernent un épisode d'interaction entre les élèves et l'enseignant dans lequel quelques outils des deux cadres théoriques sont vus en action.

LA COVARIATION SOUS DEUX LENTILLES THEORIQUES

La notion de covariation du premier et du second ordre

Le raisonnement covariationnel est une forme essentielle de raisonnement lorsqu'il s'agit de tâches de modélisation mathématique (Thompson et Carlson, 2017), en particulier avec des situations impliquant le mouvement et la dynamique (Carlson et al., 2002).

Avec Sara Bagossi, j'ai introduit la distinction entre covariation du premier et second ordre. Dans la covariation du premier ordre (COV 1) on imagine comment les valeurs de deux quantités varient simultanément : il est le type de phénomène examiné et décrit en profondeur par Carlson & Thompson (2002) comme covariation tout court.

Dans la covariation du second ordre (COV 2) on peut envisager une relation supplémentaire dans une famille de relations invariantes entre deux ou plusieurs quantités variables, où cette famille est caractérisée mathématiquement par la présence d’un ou plusieurs paramètres (Arzarello 2019 ; Bagossi, 2022).

Pour exemple, dans l'expérience bien connue de Galilée sur le mouvement d'une boule roulant sur un plan incliné (fig. 4), la durée et la distance covarient selon une loi quadratique entre la distance parcourue par la boule et le temps, découverte par Galilée lui-même : il y a une COV 1. Mais les valeurs numériques entre distances et temps, bien que toujours exprimées par une loi quadratique, changent aussi en fonction de l'angle d'inclinaison du plan de roulement.

En fait, il y a une nouvelle relation dans la famille de relations entre les deux quantités variables (temps et distance). Cette relation est caractérisée par la présence d’un paramètre, l’angle d’inclination du plan incliné (Arzarello 2019; Bagossi, 2022). Il s’agit d’une COV 2.

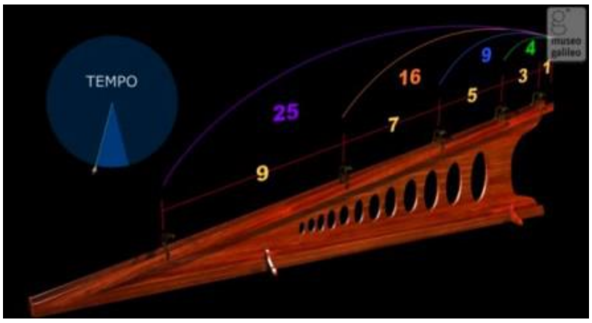


Figure 5. L'expérience de Galilée (Museo Galileo, Firenze[2])

L'utilisation didactique d'artefacts appropriés peut soutenir les processus de raisonnement covariationnel des élèves. Cet aspect a été discuté dans les travaux d’Arzarello (2017, 2019), et ceux de Bagossi & Arzarello (2023), dans lesquels la notion de covariation instrumentée a été introduite.

Dans le cadre d'une approche didactique de la modélisation de ce phénomène, se pose la question de recherche suivante : « Comment les outils peuvent-ils aider à guider les élèves dans l’identification des relations invariantes et dans les représentations des deux ordres de covariation entre les quantités impliquées dans l’expérience ? »

Contexte de la recherche

Une expérience d’enseignement connexe a été menée dans une classe de 10^{e} année dans un lycée à vocation scientifique de la province de Turin (année scolaire 2019-2020). Le but didactique était de développer la loi du mouvement d’une boule roulant

[2] https://catalogo.museogalileo.it/multimedia/PianoInclinatoBis.html

le long d’un plan incliné pour :

(a) obtenir la formule décrivant le mouvement de la boule;

(b) explorer la relation entre l’angle d’inclinaison du plan et le graphique distance-temps.

Les élèves devaient résoudre deux tâches successives, favorisant l’apprentissage des deux ordres de covariation. L’enseignant a animé une discussion mathématique axée sur les deux ordres.

Dans la tâche 1, les élèves, répartis en petits groupes de travail. Ils ont visionné sur leur ordinateur une vidéo reproduisant l'expérience de Galilée du mouvement d'une boule le long d'un plan incliné (Figure 5). Après le visionnage de la vidéo, les élèves ont été invités à élaborer quelques observations sur le mouvement de la boule.

Dans la tâche 2, les élèves devaient explorer une applet GeoGebra montrant à gauche la boule courant le long d'un plan incliné, avec l'angle d'inclinaison du plan surligné en vert, et à droite un tableau de valeurs numériques, qui affiche dans deux colonnes différentes les valeurs de temps et de distance parcourues par la boule (Figure 6). En particulier, les intervalles de temps sont égaux à une seconde. Il était possible de changer l'inclinaison du plan en déplaçant le point bleu à l'extrémité de celui-ci. En réinitialisant la simulation et en la faisant recommencer, différentes valeurs de temps et de distance sont fournies par le logiciel. Ainsi, les élèves ont la possibilité d'explorer comment ces valeurs changent lorsque l'inclinaison du plan varie.

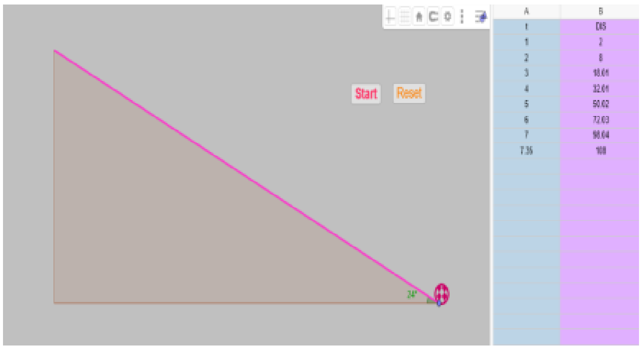


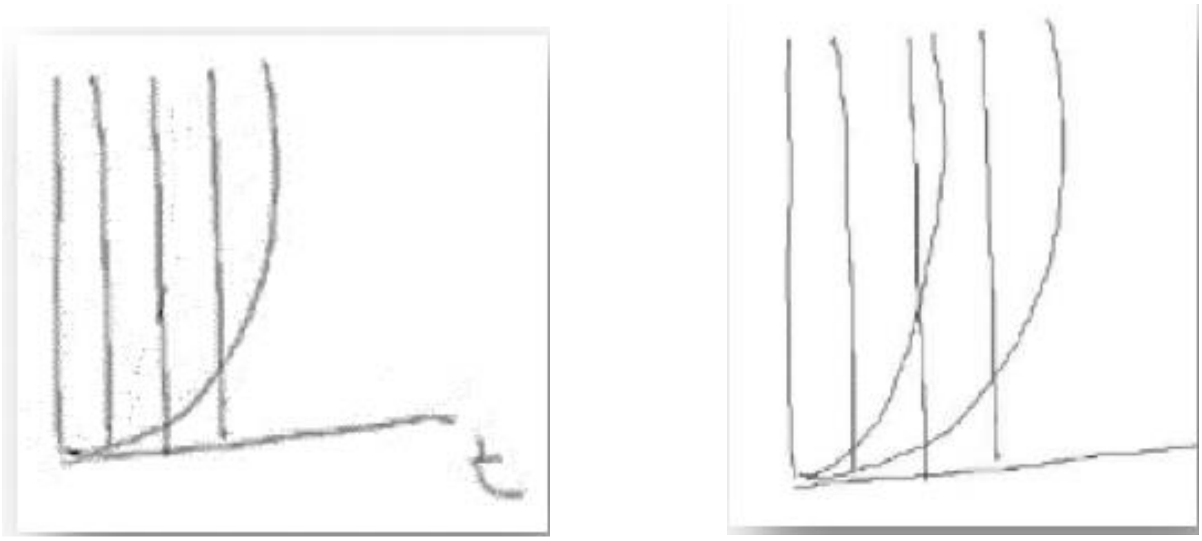
Figure 6: La tâche 2 avec l’applet GeoGebra

Dans la section suivante, un épisode de la discussion en classe, qui a eu lieu après que les élèves aient résolu les deux tâches, est transcrit en français. Il fait référence à une élève, Valeria (nom inventé), qui a résolu la tâche et à l'enseignante elle-même.

1	Valeria	Par conséquent, nous avons remarqué que les différences finies premières du temps étaient toujours de 1 seconde, à l’exception de la dernière, tandis qu’en une seconde, les différences finies premières de la distance augmentaient de plus en plus : nous avons donc remarqué qu’il y avait une accélération.
2	Enseignant	Ok, en une seconde, il a parcouru plus de distance et il y a donc eu une accélération. Et puis vous avez remarqué que les différences finies secondes de la distance…

3	Valeria	Ils étaient constants et les différences troisièmes étaient égaux à 0.
4	Enseignant	Les secondes étaient constantes et les troisièmes, toujours de distance, étaient nulles.
5	Valeria	Ensuite, nous avons pensé que le graphe pouvait être de second degré puisque les différences finies secondes sont constantes et aussi parce que nous savions que la formule de l'accélération est s/t^2.
6	Enseignant	Et vous avez supposé que le graphique pourrait être...
7	Valeria	Une courbe qui auparavant avait une inclinaison presque horizontale puis devenait toujours plus verticale.
8	Enseignant	Pourriez-vous le dessiner?
9	Valeria	Nous avons divisé l'axe horizontal qui était celui du temps en différentes sections représentant une seconde, puis nous avons remarqué qu'en une seconde, l'inclinaison était toujours plus verticale. [Elle dessine le graphique sur le tableau blanc interactif : fig. 7a]
10	Enseignant	Ok, parce qu'en une seconde, il couvrait toujours plus de distance. Et si l'angle change, que se passe-t-il selon vous ?
11	Valeria	Si l'angle change, la montée est plus rapide.
12	Enseignant	Et si vous deviez faire un autre graphique en changeant l'angle ?
13	Valeria	[Elle dessine une autre courbe, plus inclinée : fig. 7b]

Tableau 1 : Épisode de la discussion en classe



7a. **7b.**

Figure 7 : Les deux croquis de Valeria (lignes 9 et 13)

Les 13 moments de l'épisode sont maintenant analysés en deux blocs avec les outils des deux cadres théoriques, respectivement la Timeline et les trois composantes du ETM indiqué ci-dessus : voir les infographies relatives aux deux cadres théoriques dans l'Annexe.

DISCUSSION

Je vais d'abord illustrer les trois composantes du cadre des ETM (personnel, idoine, de référence) considérées dans l'épisode didactique analysé ci-dessus (voir les figures 8, 9, 11, 12, 13 dans l'Annexe). Ceux-ci montrent comment l'enseignant a conçu les tâches prenant appuie sur des outils idoines afin que les élèves puissent saisir le COV1 et surtout le COV 2 au sein d'un ETM de référence : il était basé sur ce qu'ils avaient fait et faisaient en mathématiques et en physique (deux disciplines enseignées par le même professeur). Il s'agit d'un ETM de référence à laquelle la classe est familiarisée tant par contrat didactique que par le type de sujets proposés (impliquant à la fois les mathématiques et la physique). Le type de tâches assignées et la méthodologie suivie (problème ouvert à résoudre avec un travail de groupe à l'aide d'outils technologiques idoines, suivie par une discussion mathématique ultérieure guidée par l'enseignant) ont justement pour but de faire progresser le travail personnel des élèves vers la compréhension des deux types de covariation. En ce sens, les tâches données peuvent être considérées comme un ETM idoine pour la classe. En particulier, l'enseignant intervient systématiquement avec des questions idoines et le 'revoicing' pour réguler la progression du travail des élèves. Pour sa part, Valeria utilise de manière productive certains aspects algébriques, analytiques et graphiques des fonctions. Elle utilise également les différences finies pour saisir ce qui est nouveau et qui commence à apparaître sous une forme de plus en plus définie dans les formules qui modélisent le phénomène physique étudié. Ces aspects caractérisent les espaces personnels de l'enseignant et de l'élève : ils permettent l'évolution des processus d'instrumentation des artefacts (vidéos, applet de geogebra) de deux côtés opposés mais concurrents vers les deux ordres de covariation.

Le Timeline, quant à elle (voir les figures 7 et 10 dans l'Annexe), rend palpables les nombreuses productions sémiotiques et les interactions entre l'enseignant et les élèves qui ont lieu compte tenu d'une analyse temporelle très fine. Par exemple, dans les trois minutes considérées, il y a 7 gestes significatifs de l'enseignant (4 gestes d'écriture et un de pointage dans les 50 premières secondes ; ensuite 2 gestes métaphoriques, l'un à fonction d'interaction, l'autre à fonction narrative) et 8 de Valeria (3 au début et 5 dans la deuxième partie : 3 métaphoriques et 2 pour l'écriture à la dernière minute). C'est d'abord l'enseignant qui produit le plus, sollicitant l'intervention de l'élève, puis c'est l'élève, en réponse à l'enseignant, tandis que l'interaction verbale est régulièrement marquée dans le temps. En croisant ces éléments de l'analyse avec les composants de la Timeline et de l'Espace de Travail personnel présentés ci-dessus, on obtient une image plus complète de la progression de la résolution de Valeria vers une compréhension complète de la covariation. À cet égard, l'Espace de Travail personnel de Valeria et celui de l'enseignant sont en parfaite harmonie. En effet, ces deux ETM personnels font référence à des phénomènes liés à une granularité temporelle fine.

La situation est différente lorsque l'on compare les éléments d'analyse de la Timeline avec les composants de l'ETM idoine et de référence. Ici, les deux analyses divergent structurellement pour deux raisons importantes, comme je le montrerai ci-dessous. D'une part, l'échelle de temps n'est pas cohérente : il y a deux échelles de granulation différentes ; d'autre part, l'analyse conceptuelle est également différente.

Pour le temps, alors que la Timeline fournit essentiellement une micro-analyse des phénomènes éducatifs, les composants ETM idoine et de référence fournissent une image macro de ces phénomènes. La micro-analyse des interactions enseignant-élève permet d'accéder à des détails fins sur l'apprentissage et la cognition dans les salles de classe, tant des enseignants que de leurs élèves. Au contraire, avec les composants macro de l'ETM illustrés ci-dessus, nous pouvons aller au-delà des résultats du processus micro-analytique et nous concentrer plus spécifiquement sur les situations et les préoccupations sociales (par exemple, l'entrelacement avec les aspects institutionnels où se déroule l'activité didactique), en élaborant ainsi un processus de macro-analyse. Évidemment, les deux analyses micro et macro ne sont pas contradictoires mais même complémentaires : la situation est similaire à celle décrite par B. Jaworski et D. Potari dans leur article (2009) dans lequel ils ‘comblent le fossé entre le macro- et le micro’. Dans notre cas également, les composants ETM permettent "de considérer le rôle du cadre social plus large dans lequel se situe l'enseignement en classe" (Jaworski & Potari, p. 219).

En se référant à la discussion sur la ligne de pensée de F. Jullien et B. Mazur évoqué au début sur l’effet Yoneda, l'utilisation des deux cadres théoriques révèle des nouvelles façons de voir la situation didactique examiné.

D'un côté, tout phénomène didactique - quel qu'il soit - doit toujours être pris pour ce qu'il est, c'est-à-dire le résultat d'actions, de croyances ou de comportements individuels ; ce point de vue présente une ressemblance frappante avec ce que M. Weber appelait « l’individualisme méthodologique » (Weber, 1968, chapt. 1). La Timeline peut être un outil adapté pour capturer précisément cet aspect.

D'un autre côté, la recherche doit clarifier comment ces comportements individuels produisent le phénomène macroscopique que l'on cherche à expliquer. Pour cet aspect, les catégories de l'ETM sont particulièrement idoines.

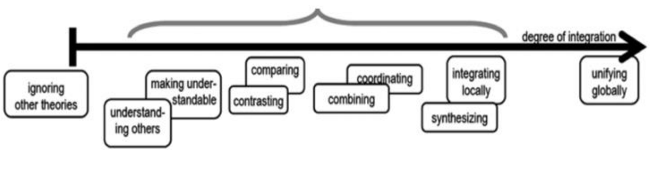
Ainsi s'esquisse une double analyse au niveau micro et macro non seulement au regard du grain des temps, comme on l'a vu plus haut, mais aussi en référence aux catégories conceptuelles d'analyse propres aux deux cadres.

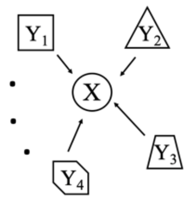
Fondamentalement, ces pratiques de mise en réseau des deux cadres théoriques sont activées selon deux principaux profils dichotomiques : il y a ceux qui ont un profil ‘ascendant’ car ils partent de données ou de phénomènes empiriques et visent à une compréhension plus profonde de ces données ou phénomènes. À l'opposé, il y a des pratiques à profil ‘descendant’ qui partent de considérations théoriques et visent un progrès théorique (Saada-Robert, 1989 ; Arzarello et al., 2008).

CONCLUSION

Les commentaires ci-dessus peuvent suggérer une méta-réflexion intéressante sur les conséquences des différentes approches du travail mathématique selon l'effet Yoneda, appliqué aux cadres ETM et FS pour étudier la covariation, ou bien à d'autres cadres théoriques encore pour étudier d'autres phénomènes didactiques.

Cette approche présente certaines similitudes, mais aussi quelques différences, avec le cadre de mise en réseau des théories (Networking of Theories, NW : Prediger & Bikner-Ahsbahs, 2014). Les deux approches aident « à produire des connaissances sur quoi, comment et pourquoi les choses se passent dans […] l'enseignement des mathématiques » (Prediger & Bikner-Ahsbahs, 2014, p.6 ; italiques dans l'original). Par conséquent, la façon dont l'information est décrite avec l'effet Yoneda pourrait être justifiée par les mêmes raisons avancées pour le cadre du NW concernant la diversité des théories dans l'enseignement des mathématiques, à savoir (Bikner-Ahsbahs et Prediger, 2014) : (i) leur évolution indépendante dans différentes régions du monde et différentes circonstances culturelles ; (ii) la complexité du sujet de recherche lui-même ; (iii) les différentes manières de connaître dans le domaine de l'enseignement des mathématiques qui se situent dans différents paradigmes et, par conséquent, produisent différents types de visions théoriques ; (iv) la diversité non seulement comme indicateur du caractère dynamique du domaine, mais aussi comme résultat de la dynamique des théories elles-mêmes.





8a. **8b.**

Figure 8 : Les deux perspectives : Networking (Prediger & Bikner- Ahsbahs, 2014) et Yoneda

Mais l'approche avec l'effet Yoneda souligne avant tout la diversité entre les voies possibles pour décrire les phénomènes didactiques. Précisément, avec l'effet Yoneda, on cherche le dévoilement de l'inconnu sans prétentions à combiner les théories entre elles, mais en garantissant la spécificité et l'indépendance conceptuelle des cadres utilisées. En dehors d'un cadre d'unification croissante, les figures 8a, 8b représentent les deux approches : dans un cas, il y a une succession linéaire de théories à différents niveaux d'intégration, tandis que dans l'autre, il y a des points de vue différents, qui le restent et ne doivent pas nécessairement être intégrés. En principe, la 'méthode Yoneda' ne suppose pas de compatibilité entre les cadres utilisés, même si dans notre exemple cela semble exister. En fait, l'analyse où l'on examine, avec le cadre ETM, les effets macroscopiques produits par la composition ou l'agrégation des comportements individuels détectés avec la Timeline ne présent pas d'incompatibilités évidentes avec celui-ci. En effet, les micro effets détectés avec la

Timeline eux-mêmes ont, pour ainsi dire, un caractère 'purement additif'. Mais en général cela n'arrive pas forcément tout le temps.

Reflétant à cette diversité de méthode au niveau méta, deux différents schèmes sont possibles : un unificateur (fig. 8a) dans l'approche du NW, l'autre qui ne prétend pas forcément d'unifier mais se content de dévoiler un objet en le regardant de différents points de vue (fig. 8b). C'est ce que j'ai essayé de faire et c'est précisément cela qui est pour moi la contribution la plus significative et productive que, en tant que créateur du FS, j'ai reçu de la rencontre avec la théorie des ETM. Pour cela, j'espère que cette méthode pourra produire encore plus de fruits, toujours au nom de l'effet Yoneda, comme un moyen de communication entre les théories culturelles et par cela établissant des relations entre les approches où les agents d'une théorie culturelle peuvent apprendre de l'autre et vice-versa.

REMERCIEMENT

Sara Bagossi a largement contribué à la préparation de ce travail. Je la remercie sincèrement.

REFERENCES

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 9*(Extraordinario 1), 267–299.

Arzarello, F., Bosch, M., Lenfant, A., & Prediger, S. (2008). Different theoretical perspectives in research from teaching problems to research problems. In D. Pitta-Pantazi, G. Phillipou, et al. (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 5). Cyprus: ERME. 1618–1627.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2). 97–109. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9163-z

Arzarello, F. (2017). Analyse des processus d'apprentissage en mathématiques avec des outils sémiotiques : la covariation instrumentée, [Analysis of the learning processes in mathematics with semiotic tools: instrumented covariation], *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2017*, 6–25.

Arzarello, F. (2019). La covariación instrumentada: Un fenómeno de mediación semiótica y epistemológica [Instrumented covariation: a phenomenon of semiotic and epistemological mediation]. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 18*, 11–29.

Arzarello, F., Bazzini, L., Politano, L., & Sabena, C. (2010). *Multimodal processes in teaching and learning mathematics: A case study in primary school*. In G. Pérez

Bustamante, K. Phusavat, F. Ferreira (Eds.) *Proceedings of the IASK International Conference* (pp. 286-292). Siviglia: IASK.

Bagossi, S. (2022). *Second-order covariation: an analysis of students' reasonings and teacher's interventions when modelling real phenomena*. Ph.D. thesis, University of Modena and Reggio Emilia in agreement with the University of Ferrara and the University of Parma.

Bagossi, S., & Arzarello, F. (2022). Instrumented covariation under two theoretical lenses. *Actes du septième Colloque de l'ETM*.

Carlson, M. P., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*, 352–378.

Jaworski, B., & Potari, D. (2009). Bridging the macro- and micro-divide: using an activity theory model to capture sociocultural complexity in mathematics teaching and its development. *Educational Studies in Mathematics* (2009) 72. 219–236. DOI 10.1007/s10649-009-9190-4

Jullien, F. (2006). *Si parler va sans dire. Du logos et d'autres ressources*. Paris : Edition du Seuil.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. In *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives* (Vol. 16, pp. 9-24).

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. R. (Eds.). (2022). *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (1st ed., Mathematics Education in the Digital Era, Vol. 18). Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8.

Kuzniak, A., Tanguai, D, & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM: the international journal on mathematics education. 48*(6), 721-737.

Mazur, B. (2008). When is One Thing Equal to Some Other Thing? In: *Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy*. Ed. by Bonnie Gold, B., & Simons, R.A. (Ed.s). Mathematical Association of America, 2008, pp. 221–242. ISBN: 978-0-88385-567-6. DOI: 10.5948/ UPO9781614445050.015.

McNeill, D. (1992). *Hand and mind: What gestures reveal about thought*. University of Chicago press.

Prediger, S., & Bikner-Ahsbahs, A. (2014). Introduction to networking: Networking strategies and their background In A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger (Hrsg.). *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education. Advances in Mathematics Education* (pp. 103–122). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9_8

Radford, L. (2014). Theories and Their Networking: A Heideggerian Commentary. In A. Bikner-Ahsbahs and S. Prediger (eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education. Advances in Mathematics Education*. New York: Springer.

Saada-Robert, M. (1989). La microgenèse de la représentation d'un problème, [Microgenesis of the representation of a problem]. *Psychologie française, 34*(2-3), 193–206.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 421–456.

Weber, Max, 1968. *Economy and Society*, Guenther Roth and Claus Wittich (eds.), Berkeley: University of California Press.

Annexe: infographies de l'analyse avec les deux cadres théoriques

Bloc 1 (lignes 1-6)

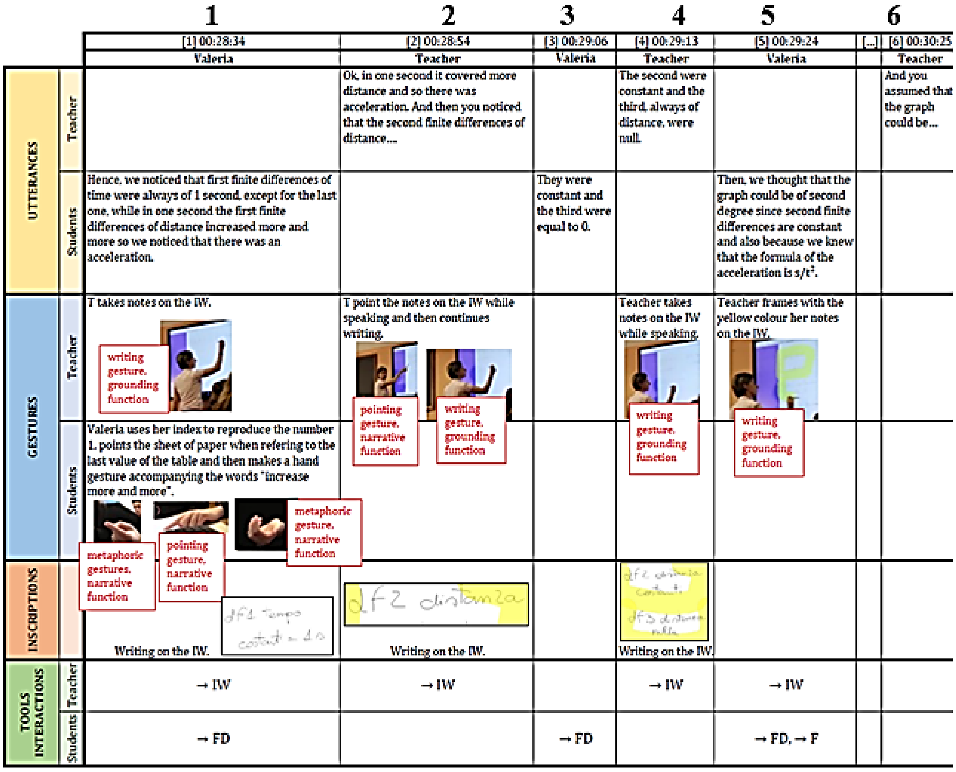


Figure 9 : Analyse avec la Timeline

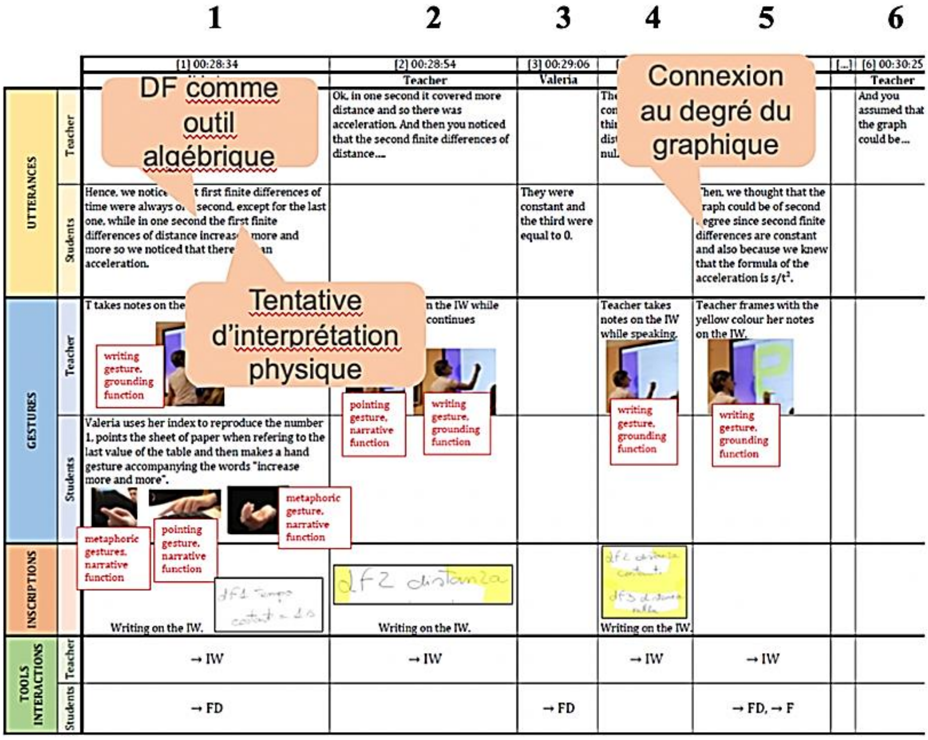


Figure 10 : Analyse avec le ETM personnel (étudiant)

Dans l’ETM personnel l’instrumentation de COV 1 est soutenu par les Différences Finies (DF).

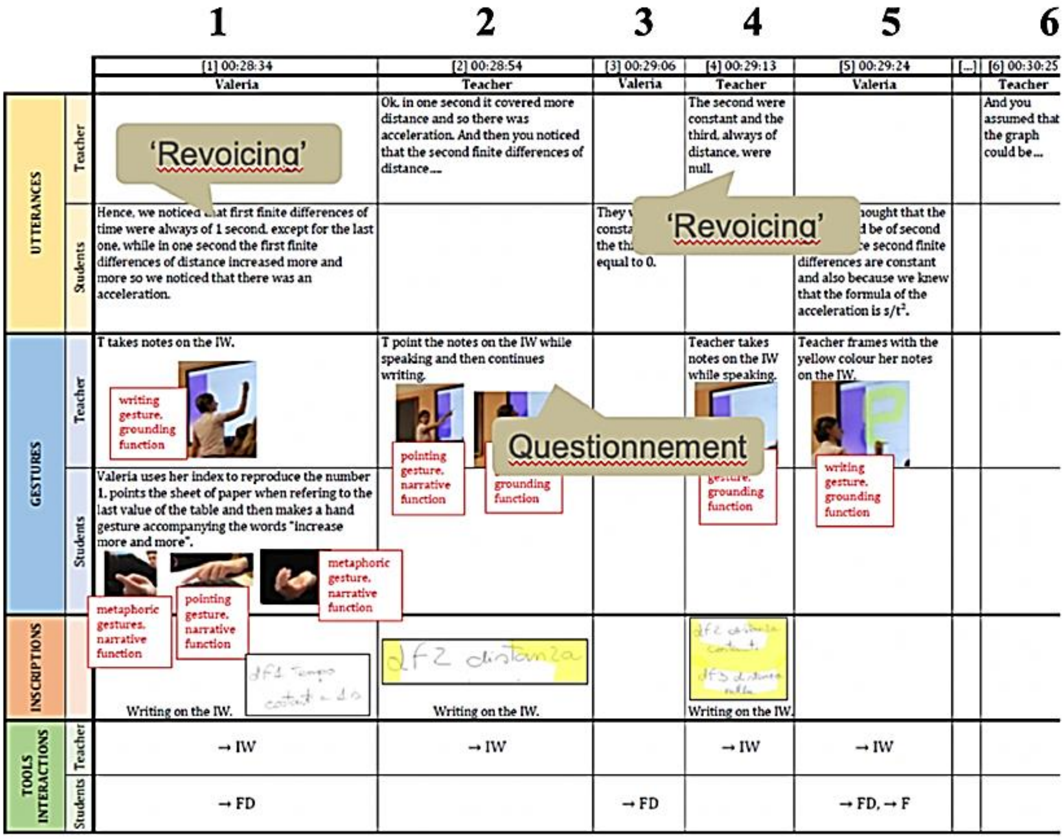


Figure 11 : Analyse avec le ETM personnel (enseignant):
L’ETM personnel de l’enseignant contribue à valoriser et à faire progresser le TM de l’élève.

Bloc 2 (lignes 7-13)

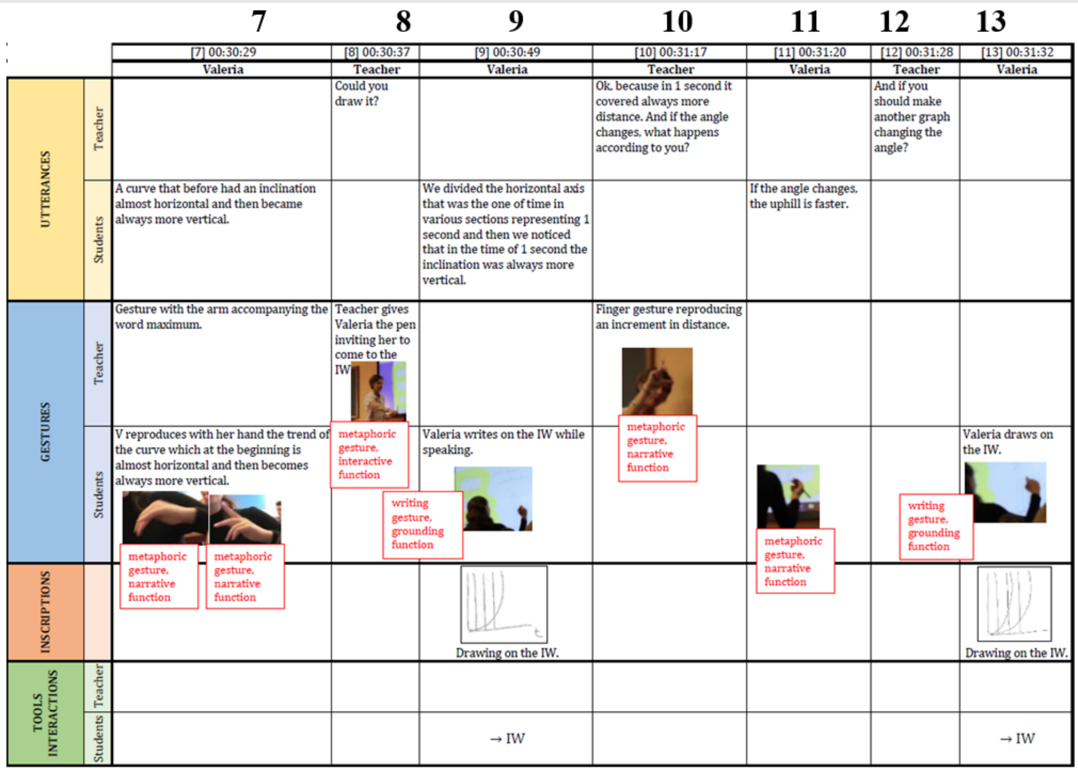


Figure 12 : Analyse avec le Timeline

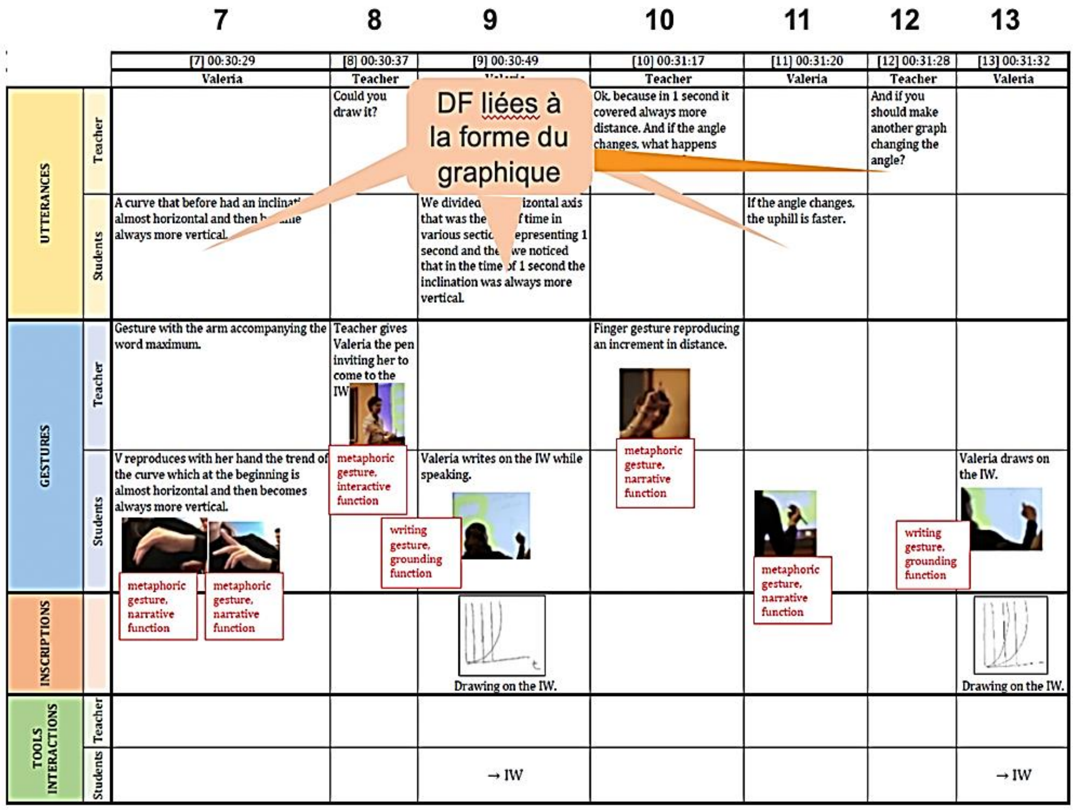


Figure 13 : Analyse avec le ETM personnel (étudiant)

Dans l'ETM personnel, l'instrumentation de COV 1 est soutenue par les Différences Finies (DF).

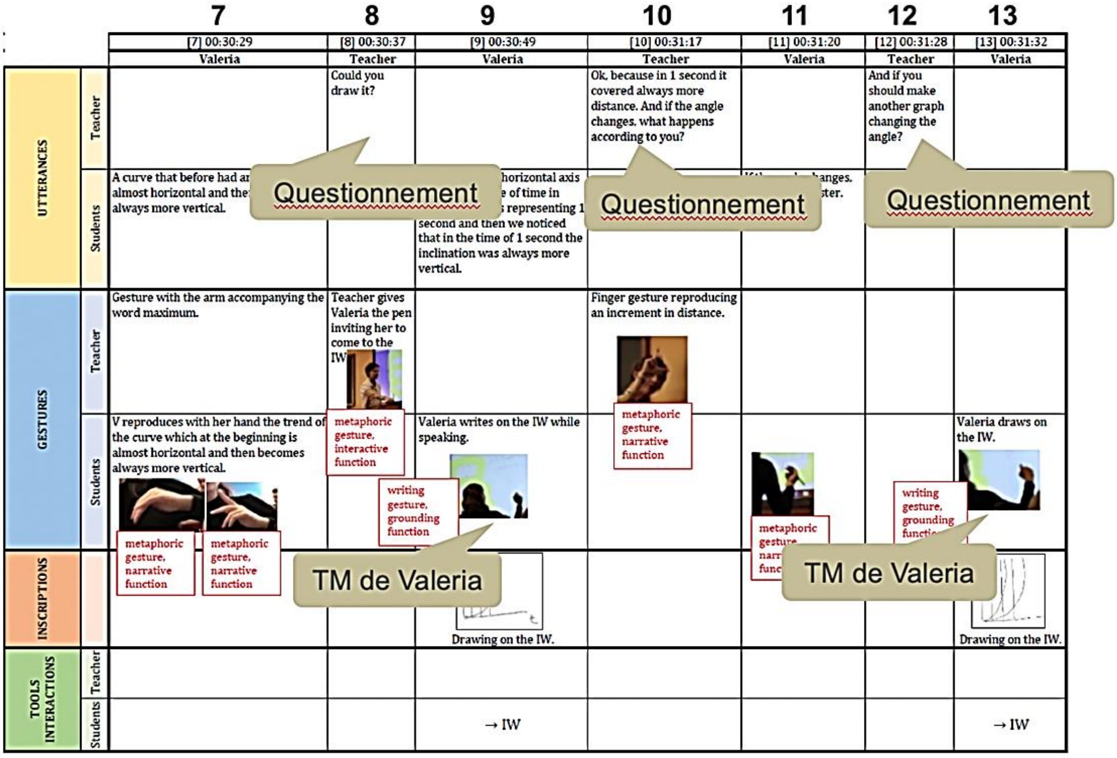


Figure 14 : Analyse avec le ETM personnel (enseignant)

L'ETM personnel de l'enseignant contribue à valoriser et à faire progresser le TM de l'élève.

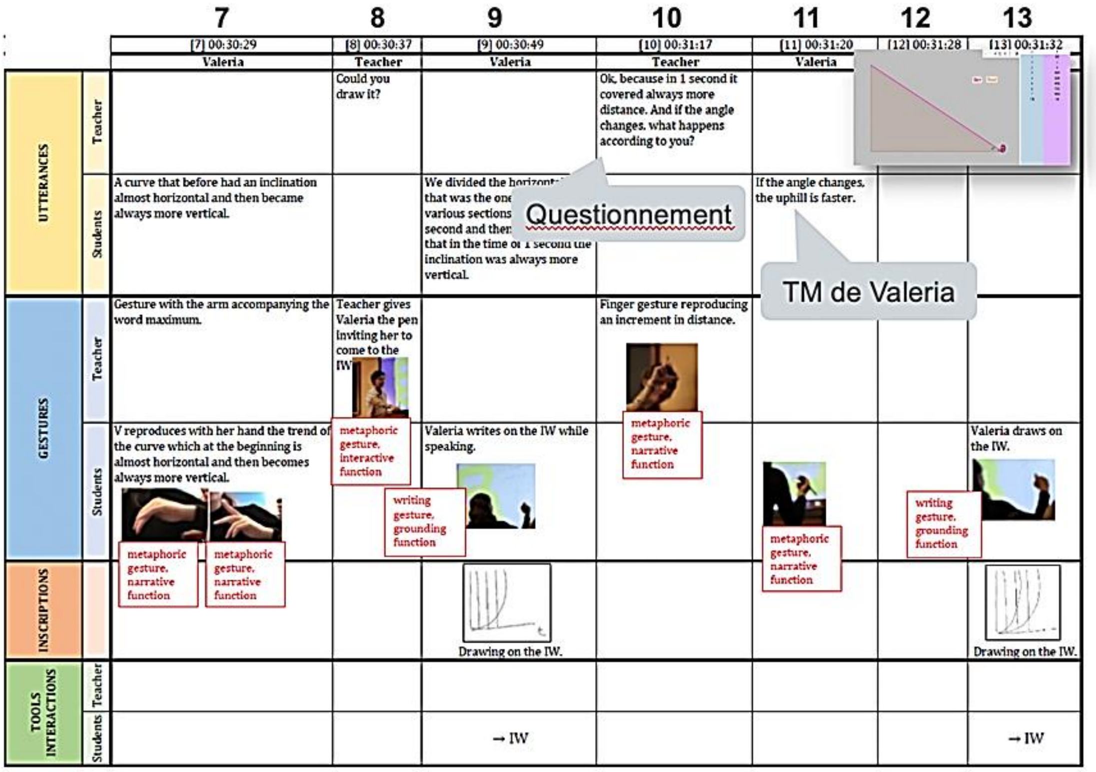


Figure 15 : Analyse avec le ETM idoine (enseignant et étudiant)

ETM idoine : dépendance à l'angle d'inclinasion pour approcher COV2

TALLER 1: EL PAPEL DE LA TECNOLOGÍA EN UNA TAREA DISEÑADA EN UN SISTEMA DE EVALUACIÓN EN LÍNEA Y EL CAMBIO DE DOMINIO

Jorge Gaona[1], Silvia Soledad López[2], Jesús Victoria Flores Salazar[3] y Jorge Vivas[3]

[1]Universidad de Playa Ancha, Chile; [2]Universidad Viña del Mar, Chile y [3]Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.

Red RIITMA

Este taller tiene como objetivo explorar el rol de la tecnología en el trabajo matemático personal, cuando se trabaja en una tarea diseñada en un sistema de evaluación en línea o CAA (Computer Aidead Assessment Sistem, por sus siglas en inglés) (Moodle - Wiris), y se involucran cambios de dominios en el álgebra y en la geometría, entre otros. Se presentan dos tareas sobre los números complejos, y se propone resolverlas utilizando diferentes CAS (GeoGebra, Symbolab, Wolfram Alpha, Photomath, entre otros). Son precisados argumentos utilizando artefactos (simbólicos y software) con posturas teóricas y sus posibles consecuencias en la construcción de un trabajo matemático coherente y completo.

INTRODUCCIÓN

El taller pretende potenciar el análisis didáctico a partir de la experiencia del trabajo personal de los participantes. Se trata de resolver dos tareas dirigidas para dos niveles, secundaria y superior. Nos focalizamos en la discusión sobre el rol de la tecnología en el aprendizaje de los números complejos, y las relaciones entre los dominios matemáticos involucrados que se activan en su resolución.

En el taller, se propone en una **primera parte**, una discusión sobre los artefactos digitales, particularmente con la idea de máquinas matemáticas (Salazar et al., 2022) que se definen desde una perspectiva instrumental en la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak et al., 2022) para enseñar o aprender nociones matemáticas, y que a priori, no es claro el dominio fuente o dominio de resolución. Por otro lado, se podrá discutir sobre la pertinencia, riesgos y dificultades cuando se usan tareas mediadas por dos clases de artefactos específicos y la relación entre ellos: los sistemas de cálculo simbólico (CAS, por sus siglas en inglés) y los sistemas de evaluaciones asistidas por computador o en línea (CAA, por sus siglas en inglés) que, a su vez, utilizan un sistema CAS para la validación de respuestas. La literatura es basta en este aspecto, desde sus inicios con las "salidas" de respuestas de calculadoras científicas (Lagrange, 2000); hasta lo que hoy conocemos con los entornos interactivos (Gaona et al., 2022, Richard et al., 2019).

En una **segunda parte**, se propone a los participantes trabajar con dos tareas sobre los números complejos. **La tarea 1**, se pide escribir el número complejo marcado en rojo de la ecuación $z^3=2$ (Figura 1 a la izquierda) o $z^3=-2$ (Figura 1 al medio). Los valores 2 o -2 a los cuales la ecuación es asignada, al igual que el punto marcado en rojo son definidos por un algoritmo de manera aleatoria. La raíz marcada aparece en el plano a condición de que la parte imaginaria sea distinta de cero, por lo que nunca estará en el eje real. **La tarea 2**, se pide escribir el número complejo marcado en rojo de la ecuación $z^n=a$, dónde n puede tomar el valor 3 o 4 (Figura 1 a la derecha) y puede tomar un valor entero entre -9 y 9, incluyendo los extremos y excluyendo el cero.

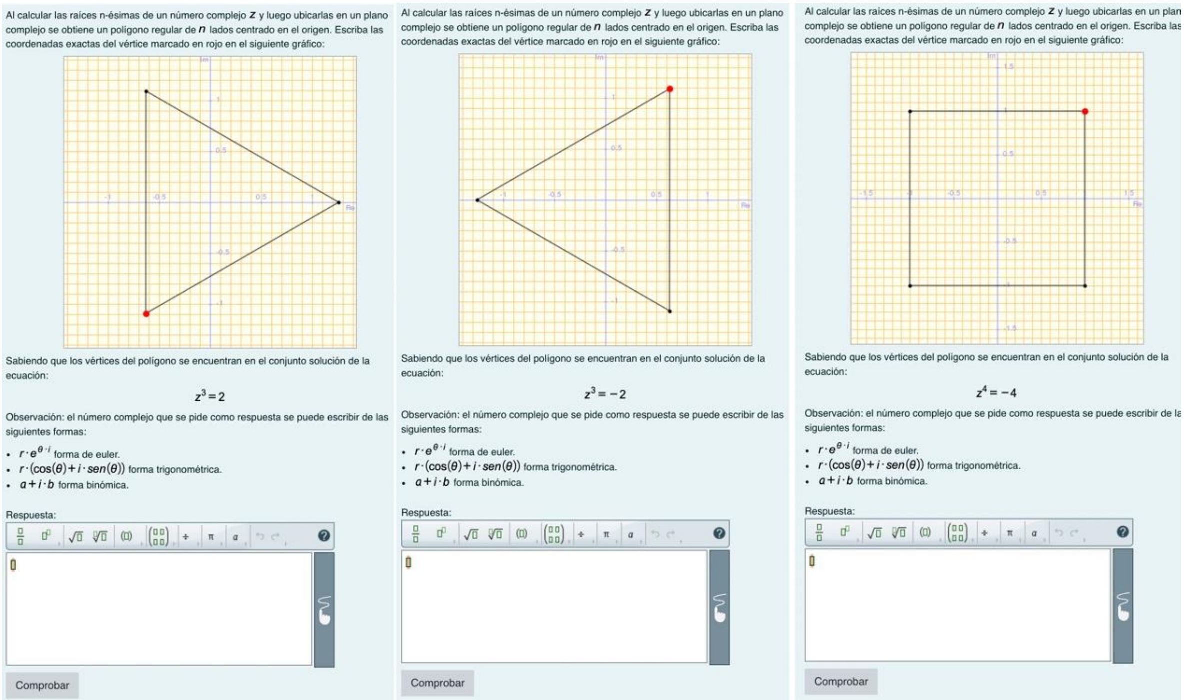


Figura 1: Tareas propuestas en Moodle/Wiris

La tecnología cumple dos roles, el primero es validar las respuestas de los estudiantes y entregar un feedback en la plataforma. El segundo, es en el proceso de solución de las tareas, puesto que a los estudiantes se les propone explorar las respuestas que entregan distintos sistemas de cálculo simbólico (ver figura 2), poniendo especial atención a la inteligencia histórica y a la validez epistemológica relativa de cada máquina matemática o artefacto digital utilizado (Flores Salazar et al., 2022). Para la discusión se espera contar con las respuestas (y vivencia) de los propios participantes a este taller, como así también, de la producción de dos grupos de estudiantes de Chile, conformado por: G1 20 profesores en formación inicial, y el G2 por 15 profesores en formación continua.

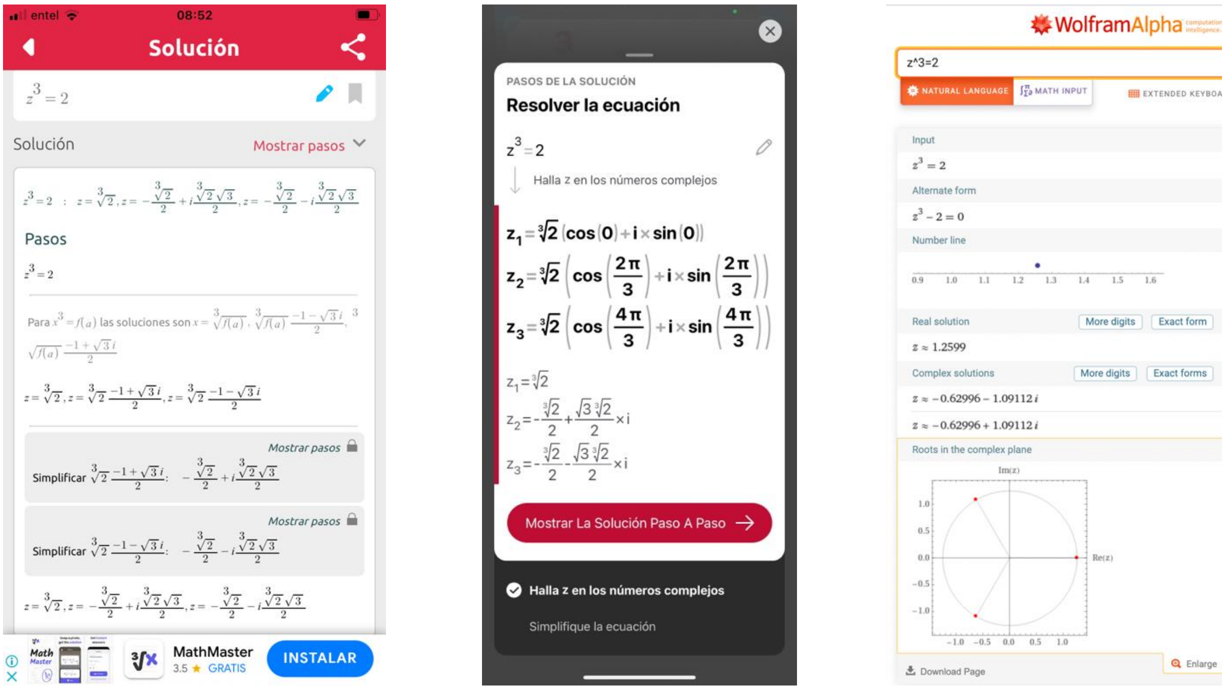


Figura 2: Respuestas de diferentes artefactos a la misma tarea.

METODOLOGÍA DEL TALLER

FASE 1: Presentación y resolución de las tareas por equipo

FASE 2: Discusión por equipo, respecto al abordaje de la tarea en relación a los dominios matemáticos involucrados.

FASE 3: Puesta en marcha de algunas conclusiones y aproximaciones comunes, frente a los cambios de dominio y el rol de la tecnología en el trabajo matemático caracterizado en cada equipo.

Como se ha señalado, el taller cuenta con dos problemas centrales con evidencias de producciones de estudiantes de Chile y con producciones que serán recogidas por los propios participantes.

CONCLUSIÓN

Este taller permite discutir temas cruciales, el papel de artefactos digitales en el trabajo matemático, como así también, del rol crucial de los cambios de dominios en una tarea. Con ello, la reflexión de los asistentes de comprender posibles bloqueos de los estudiantes, para generar oportunidades en la construcción del objeto matemático, y robustecer el trabajo matemático del estudiante.

REFERENCIAS

Flores Salazar, J. V., Gaona, J., & Richard, P. R. (2022). Mathematical Work in the Digital Age. Variety of Tools and the Role of Geneses. Dans A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo & P. R. Richard (Éds.), *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Space*s (pp. 165-209). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_8

Gaona, J., López, S., & Montoya-Delgadillo, E. (2022). Prospective mathematics teachers learning complex numbers using technology. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1–30. https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2133021

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. R. (Eds.). (2022). *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (1st ed., Mathematics Education in the Digital Era, Vol. 18). Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8.

Lagrange, J.B. (2000). L'integration d'instruments informatiques dans l'enseignement: une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics, 43*(1):1–30.

Richard, P. R., Venant, F., & Gagnon, M. (2019). Issues and Challenges in Instrumental Proof. In G. Hanna, D. A. Reid, & M. de Villiers (Eds.), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching* (pp. 139-172). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1_7

TALLER 2: EL PAPEL DE LA TECNOLOGIA EN TAREAS CON MODELACION MATEMÁTICA Y EN EL CAMBIO DE DOMINIO

Jorge Gaona, Jaime Huincahue, Soledad López, Elizabeth Montoya Delgadillo, Pedro Vidal Szabó, Alejandro Cabrera-Baquedano

Red RIITMA - Chile

Este taller explora el papel que juega la tecnología en el trabajo matemático en la modelación matemática y en el cambio de dominio. Se identifican conocimientos necesarios de las matemáticas, pero también herramientas utilizadas para el trabajo matemático con nociones que involucran cambios de dominio en el álgebra y en la geometría, entre otros. Se precisan argumentos utilizados según las perspectivas de modelación matemática y los artefactos en juego con posturas teóricas y sus posibles consecuencias en la construcción de un trabajo matemático coherente y completo.

INTRODUCCIÓN

En el contexto del seminario ETM organizado por la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático (RIITMA-Chile), se han discutido varios aspectos teóricos y prácticos del modelo ETM, en especial, existe interés por caracterizar las relaciones entre los dominios de la matemática que se activan con ciertas tareas en el trabajo matemático donde están involucradas herramientas tecnológicas durante el proceso de resolución, y cuando hay tareas de modelación.

El taller pretende potenciar el análisis didáctico, a partir de la experiencia de trabajo matemático de los participantes, el cual involucra la resolución de dos tareas dirigida al nivel medio y superior, diversificando las perspectivas epistemológicas y cognitivas. Esto permitirá discutir la importancia y el rol de la tecnología en disciplinas y dominios involucrados en la resolución de tareas.

En el taller, se propone en una **primera parte**, una discusión que trae, desde un punto de vista teórico, los artefactos digitales (Flores, Gaona y Richard, 2022) que se definen desde una perspectiva instrumental en la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011) para enseñar o aprender nociones matemáticas, y que a priori, no es claro el *dominio fuente* o *dominio de resolución*. Por otro lado, se podrá discutir sobre la pertinencia, riesgos y dificultades cuando se usan tareas mediadas por dos clases de artefactos específicos y la relación entre ellos: los sistemas de cálculo simbólico (CAS, por sus siglas en inglés) y los sistemas de evaluaciones asistidas por computador o en línea (CAA, por sus siglas en inglés) que, a su vez, utilizan un sistema CAS para la validación de respuestas. La literatura es basta en este aspecto, desde sus inicios con las "salidas" de respuestas de calculadoras científicas (Lagrange, 2000); hasta lo que hoy conocemos con los entornos interactivos (Richard et al., 2019).

En una **segunda parte**, se posiciona la discusión en las perspectivas de modelación matemática en el contexto de la enseñanza. Al respecto, se discutirán diferentes perspectivas de modelación matemática (Cosmes, 2020; Blomhoj, 2009) para la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Nos parece relevante identificar objetivos de propuestas de investigación, como así también, los intereses asociados a los modelos subyacentes. Para esta parte, se cuenta en particular con el trabajo de Lagrange, Huincahe y Psycharis (Kuzniak, Montoya, Richard, 2022) sobre la modelización en educación con la teoría de los *Espacios de Trabajo Matemático*.

En lo que sigue, se presentarán los dos problemas, en el cual se pueden identificar el rol de la tecnología y tareas que cambian de dominio o bien, son intrínsecas en la modelación matemática en un contexto interdisciplinar (astronomía).

Problema 1. *Cambios de dominio*

La tarea dada es obtener una de las soluciones de la ecuación z3 = 2, y la cual está marcado en un punto de color rojo (figura 1, izquierda).

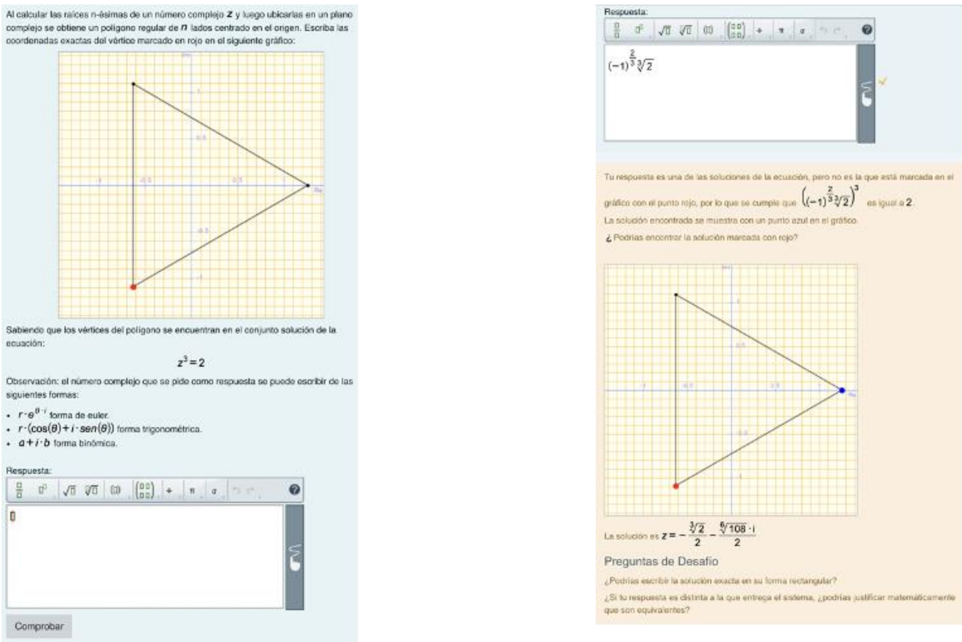


Figura 1: Tarea propuesta y ventanas de interfaces para escribir la solución.

La tecnología cumple dos roles, el primero es validar las respuestas de los estudiantes y entregar un feedback. El segundo, es que son artefactos propuestos para explorar las soluciones que entregan distintos sistemas de cálculo simbólico, poniendo especial atención a la inteligencia histórica y a la validez epistemológica relativa de cada artefacto digital utilizado (Flores et al., 2022). Para la discusión se espera contar con las respuestas (y vivencia) de los propios participantes a este taller, como así también, de la producción de dos grupos de estudiantes de Chile, conformado por: G1 20 profesores en formación inicial, y el G2 por 15 profesores en formación continua

Problema 2. *Modelar un eclipse*

En los últimos años en Chile se han podido observar varios eclipses (solares y lunares) gracias a la configuración geográfica del país, como así también, por características del cielo en cuanto a la población y luminosidad, entre otros factores. La connotación de estos es alta en la población, y una oportunidad para modelar estos fenómenos en un contexto de enseñanza interdisciplinar.

La tarea dada es modelar el eclipse solar, y para ello, se cuenta con un simulador. Cabe señalar, que esta tarea ha sido adaptada del trabajo de Los participantes podrán observar una serie de imágenes (figura 3) y simular el fenómeno en el programa utilizado para posteriormente tratarlo matemáticamente.

El 14 de diciembre del 2020 a las 13h01 fue un eclipse total en la ciudad de Temuco. Ubica en la página la ciudad donde tu estabas ese día. https://stellarium.org P1: ¿Cuándo se produce un eclipse total?	

Figura 2 : La tarea del eclipse. Fuente adaptación de Vergara y Valenzuela (2021)

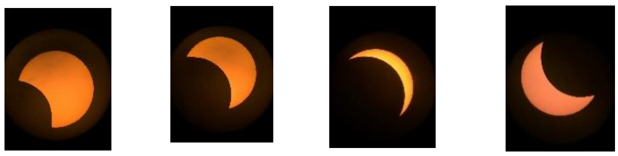


Figura 3: Imágenes de eclipse solar. Fuente Caerols, H., Asenjo, F. (2019)

El problema tiene una riqueza intrínseca por ser un fenómeno "real" y con apertura para trabajarlo de manera interdisciplinar. La modelación matemática (MM) juega un rol relevante en este problema, donde se pone de manifiesto la perspectiva de modelación y hasta donde se quiere profundizar o robustecer en un trabajo matemático. Para la discusión se espera contar con las respuestas (y vivencia) de los propios participantes a este taller, como así también, de la producción de 1 grupo (G1) de 15 profesores en formación inicial

METODOLOGÍA DEL TALLER

FASE 1: Presentación y resolución de las tareas por equipo

FASE 2: Discusión por equipo, respecto al abordaje de la tarea en relación a los dominios matemáticos involucrados.

FASE 3: Puesta en marcha de algunas conclusiones y aproximaciones comunes, frente a los cambios de dominio, la perspectiva de modelación matemática y el rol de la tecnología en el trabajo matemático caracterizado en cada equipo.

Como se ha señalado, el taller cuenta con dos problemas centrales con evidencias de producciones de estudiantes de Chile y con producciones que serán recogidas por los propios participantes. Se estima que los dos problemas pueden ser trabajados en dos momentos de un taller.

CONCLUSIÓN

En este taller permite discutir temas cruciales como el papel de artefactos digitales en el trabajo matemático como así también, del rol crucial de la tarea que permite la modelación matemática en un contexto interdisciplinar. Con ello, la reflexión de los asistentes de comprender posibles bloqueos de los estudiantes como así también, de oportunidades para la construcción del trabajo matemático en coherencia con la perspectiva de modelación y de los modelos que se quieren hacer emerger.

REFERENCIAS

Blomhoj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling. In M. Blomhoj y S. Carreira (Eds.), *Mathematical applications and modeling in the teaching and learning of mathematics*. Proceedings from Topic Studio Group 21 (pp. 1-19). Monterrey, México

Caerols, H., Asenjo, F. (2019). *Estimating the Moon to Earth radius ratio with a smartphone, a telescope and an eclipse.* [Artículo de conferencia].

Cosmes Aragón, S.E. y Montoya Delgadillo, E. (2020). Understanding links between mathematics and engineering trhough mathematical modelling- The case of training civil engineers in a course of structural analysis. In F. Leung, G.A. Stillman, G. Kaiser & K.L. Wong (Eds.), *Mathematical Modelling in East and West*. Cham: Springer.

Flores Salazar, J. V., Gaona, J., & Richard, P. R. (2022). Mathematical Work in the Digital Age. Variety of Tools and the Role of Geneses. Dans A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo & P. R. Richard (Éds.), *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Space*s (pp. 165-209). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_8

Gaona, J. (2020). Panorama sobre los sistemas de evaluación automática en línea en matemáticas. *Revista Paradigma*, *16*,53-81.

Kuzniak, A. (2011). El espacio de trabajo Matemáticas y sus génesis. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9-24.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. R. (Eds.). (2022). *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (1st ed., Mathematics Education in the Digital Era, Vol. 18). Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8.

Lagrange, J.B. (2000). L'integration d'instruments informatiques dans l'enseignement : une approche par les techniques. Educational Studies in Mathematics, 43(1):1–30. Richard, P., Venant, F., y Gagnon, M. (2019). *Issues and Challenges in Instrumental Proof.* Springer International Publishing, Cham.

Vergara, N, Valenzuela, (2021). *Enseñanza de círculo y circunferencia en estudiantes de octavo básico, desde la observación de un eclipse solar.* Trabajo Final para optar al título de Profesor de Matemáticas. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

THEME 1 : PERSPECTIVES ET APPROCHES THÉORIQUES SUR LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE

Alain Kuzniak (France) & Ivy Kidron (Israël)

Depuis ETM3, le thème 1 s'intéresse aux aspects théoriques et méthodologiques du travail mathématique liés à la définition, à la construction et à la mise en œuvre de connaissance mathématique. Originellement centré sur l'approfondissement des perspectives propres à la théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM), depuis ETM5, ce thème prend explicitement en compte le travail mathématique dans son ensemble. De ce fait, il est également ouvert à d'autres approches théoriques.

SUJET DES CONTRIBUTIONS

Lors d'ETM7, dix communications ont été retenues à laquelle il faut ajouter un poster. Voici la liste des communications retenues avec l'ordre et la date de leur présentation.

Date	Présenté par	Titre
Mardi 28 juin matin: Thème contrôle et apprentissage, travail mathématique:	Macarena Flores	1. La notion de contrôle et Networking de théories M. Flores
	Assia Nechache	2. La notion de contrôle dans la théorie des ETM A. Kuzniak & A. Nechache
	Fabrice Vandebrouck	3. Bifurcation génétique dans les ETM personnels F. Vandebrouck
	Assia Nechache	4. L'ETM de référence au début de l'apprentissage des probabilités A. Nechache & B. Parzysz
Mardi 28 juin, après-midi	Table ronde autour des perspectives de recherches sur le travail mathématique	
Mercredi 29 juin matin Thème: Paradigmes et référentiels, networking	Ivy Kidron	5. ETM Paradigms as viewed in AiC analysis of construction of knowledge I. Kidron
	Eloi Danguy	6. À la recherche d'un référentiel Sébastien Cyr, Éloï Danguy-Pichette et Philippe R. Richard
	Christine Choquet	7. Le travail mathématique à l'aune du cadre de l'apprentissage par problématisation : travail mathématique et processus de problématisation chez les élèves
	Sylvie Grau	8. Conception de situations et conditions pour la construction de nécessités dans le cadre de l'apprentissage par problèmatisation

		C. Choquet, S. Grau, M. Hersant, J-M. Legrand, N. Zebiche
Mercredi 29 juin, après-midi: Plage commune de 2h30…:	Ivy/Alain	Discussion autour de la question du networking et des contrôles
	Luis Radford	9. On the influence of constructivism and the theory of didactical situations on the theory of objectification L. Radford
Jeudi 30 juin: Fin des présentations	Jorge Soto	10. Promenades aléatoires dans le prisme simplicial de l'ETM probabiliste J. Soto-Andrade, Daniela Díaz-Rojas, Amaranta Valdés-Zorrilla
	Stéphanie Sampson	11. Le cadre des ETM et la conceptualisation S. Sampson, D. Tanguay et L. Saldanha
Synthèse Thème 1.		
14h30-16h Discussion Thème 1 et thème 2		La question des apprentissage et des référentiels.

La question des contrôles a fait l'objet de discussions suscitées par trois communications. Dans sa présentation, Macarena Flores utilise la théorie des ETM et la théorie de l'Activité en Didactique des Mathématiques (TAeDM) pour à la fois analyser la notion de contrôle et rendre cette notion opérationnelle. Pour cela, elle développe plus particulièrement l'étude des activités de contrôles.

L'approche d'Alain Kuzniak et d'Assia Nechache a pour but d'explorer la nature et le rôle des contrôles sur le travail mathématique. Une méthodologie pour l'analyse des contrôles est proposée qui s'appuie sur les trois critères qui aident à caractériser le travail mathématique dans la théorie des ETM : conformité des processus de résolution à un paradigme mathématique, complétude de la circulation du travail dans l'Espace de Travail Mathématique et enfin exactitude (correctness) des résultats obtenus.

Fabrice Vandebrouck propose une analyse fine des cas où une perte de contrôle sur le travail mathématique développé se traduit par des déformations du travail mathématique attendu. Ces déformations résultent d'un parasitage de la dimension discursive du travail par la dimension sémiotique. La notion de contrôle utilisée réfère à Galperin et à la description des opérations dans ce cadre : planification, orientation et contrôles.

Des discussions qui ont suivi ces communications, il résulte que les contrôles doivent s'intégrer plus largement dans une vision globale de l'activité et du travail mathématique. Ils trouvent notamment une place dans la constitution du travail idoine qui se réalise en classe.

Les paradigmes ont également été évoqués lors de cette rencontre, il s'agit là d'une notion essentielle de la théorie des ETM. Ivy Kidron a placé sa réflexion sur les paradigmes dans le cadre plus large du dialogue entre théories. Pour cela elle s'interroge sur la manière dont la notion de paradigmes utilisée dans les ETM peut intervenir dans les analyses de construction de connaissances mathématiques faite avec la théorie AiC . Selon elle, la discussion en termes de paradigmes permet de mieux comprendre les constructions qui peuvent s'expliquer en terme d'interactions entre paradigmes.

Les paradigmes ont également permis d'aborder la question du référentiel théorique et plus généralement de l'ETM de référence. Assia Nechache et Bernard Parzysz étudient cet ETM de référence au début de l'apprentissage des probabilités en France. Dans ce cas et pour le caractériser, ils ont particulièrement analysé le rôle des artefacts et des signes ; le rôle de l'expérimentation et de la modélisation dans le travail de référence. Ils ont noté un certain manque de cohérence dans les documents ressources qui définissent la référence.

La question de la définition du référentiel a fait l'objet d'une étude systématique présentée par Eloi Danguy. Sa quête du référentiel se base sur les programmes d'étude au Québec, sur l'étude de traditions en éducation et sur des résultats de recherche en éducation. Il s'est particulièrement intéressé au rôle du raisonnement dans l'articulation des éléments constitutifs du savoir dans leurs rapports aux connaissances, aux conceptions et aux obstacles à travers l'idée de problème.

Christine Choquet et Sylvie Grau ont présenté une approche dont le but est précisément de comprendre comment s'élaborent les connaissances du sujet : le CAP ou Cadre de l'Apprentissage par Problématisation. Elles ont détaillé un ensemble de recherches effectuées au sein de leur équipe (CREN à Nantes). Le cadre théorique offre une perspective didactique en grande partie issue des recherches initialement conduites en biologie. Plusieurs notions ont une parenté avec la didactique des mathématique et en particulier avec la théorie des ETM comme la place des problèmes dans l'apprentissage. Cependant, elles insistent notamment sur l'importance de l'explication et des nécessités à travers un jeu sur des registres particuliers.

S'intéressant à l'articulation des différentes théories, Luis Radford a proposé une analyse de l'influence du constructivisme et de la TDS sur la théorie d'objectification. Cette influence est réelle bien que non visible notamment sur les notions de savoir et de sujet individuel. Pour rendre compte de cette continuité des idées sources dans la nouvelle théorie, Radford utilise la notion d'influence chez Hegel.

Jorge Soto revient à l'essence du travail mathématique qui est de s'attaquer à la réalisation de tâches mathématiques. Il tente de préciser l'idée de circulation du travail. Plutôt que de voir la circulation du travail comme une trajectoire empruntant des chemins bien balisés entre les différents plans du diagramme des ETM, il propose de considérer un chemin plus aléatoire et plus inventif zigzagant entre les différentes genèses en fonction des questions et des idées.

Enfin, Stéphanie Sampson a présenté un poster qui décrit son cadre théorique pour un projet de thèse portant sur la cohérence conceptuelle en trigonométrie. Le cadre théorique ambitieux qu'elle met en place s'interroge sur la contribution possible des Espaces de Travail Mathématique (ETM) pour encadrer un tel travail de recherche. Elle convoque également d'autres cadres théoriques portant sur la conceptualisation d'une notion mathématique.

THEME 1: THEORETICAL PERSPECTIVES AND APPROACHES TO MATHEMATICAL WORK

Alain Kuzniak (France) & Ivy Kidron (Israël)

Since ETM3, theme 1 focuses on the theoretical and methodological aspects of mathematical work related to the definition, construction and implementation of mathematical knowledge. Originally focused on deepening the perspectives specific to the theory of Mathematical Working Spaces (MWS or ETM in French), since ETM5, this theme explicitly takes into account the different aspects of mathematical work. As a result, it is also open to other theoretical approaches.

SUBJECT OF CONTRIBUTIONS

During ETM7, ten papers were selected to which a poster is added. Here is the list of selected papers with the order and date of their presentation.

Date	Presented by	Title
Tuesday 28 June morning : Theme : control and learning, mathematical work :	Macarena Flores	1. The notion of control and Networking theories M. Flores
	Assia Nechache	2. The notion of control in the ETM theory A. Kuzniak & A. Nechache
	Fabrice Vandebrouck	3. Genetic bifurcation in the personals ETM F. Vandebrouck
	Assia Nechache	4. The ETM of reference at the beginning of the learning of probability A. Nechache & B. Parzysz
Tuesday 28 June afternoon :	Round table on research perspectives on mathematical work	
Wednesday 29 June morning : Theme : Paradigms and referentials networking	Ivy Kidron	5. ETM Paradigms as viewed in AiC analysis of construction of knowledge I. Kidron
	Eloi Danguy	6. Looking for a referential Sébastien Cyr, Éloï Danguy-Pichette and Philippe R. Richard
	Christine Choquet	7. Mathematical work in the light of the framework of learning by means of problematization: Mathematical work and problematization process in students

	Sylvie Grau	8. Conception of situations and conditions for the construction of necessities in the framework of Learning by means of problematization C. Choquet, S. Grau, M. Hersant, J-M Legrand, N. Zebiche
Wednesday 29 June afternoon: "Plage commune" de 2h30… :	Ivy/Alain	Discussion around the issue of networking and controls
	Luis Radford	9. On the influence of constructivism and the theory of didactical situations on the theory of objectification L. Radford
Thursday 30 June The last presentations	Jorge Soto	10. Random walks through the simplicial prism of probabilistic ETM J. Soto-Andrade, Daniela Díaz-Rojas , Amaranta Valdés-Zorrilla
	Stéphanie Sampson	11. The ETM framework and conceptualization S. Sampson, D. Tanguay and L. Saldanha
Synthesis of Theme 1.		
14h30-16h Discussion Theme 1 and theme 2		The question of learning and referentials.

The issue of controls was discussed in three submissions.

In her presentation, Macarena Flores uses the theory of MWSs and the theory of « Activité en Didactique des Mathématiques » (TAeDM) to both analyze the notion of control and make this notion operational. To this end, she develops more particularly the study of activities of control.

Alain Kuzniak and Assia Nechache's approach aims to explore the nature and role of controls on mathematical work. A methodology for the analysis of controls is proposed that is based on the three criteria that help characterize the mathematical work in the theory of MWS: conformity of resolution processes to a mathematical paradigm, completeness of the circulation of the work in the "Espace de Travail Mathématique" and finally, correctness of the results obtained.

Fabrice Vandebrouck offers a fine grained analysis of cases where a loss of control over the mathematical work which has been developed results in distortions of the expected mathematical work. These distortions result from a parasitization of the discursive dimension of mathematical work by the semiotic dimension. The notion of control used refers to Galperin and to the description of operations in this context: planning, orientation and controls.

From the discussions that followed these communications, it results that controls must be integrated more broadly into a global vision of activity and mathematical work. In particular, they find a place in the constitution of the " idoine" work that is carried out in class.

Paradigms were also discussed during this meeting, this is an essential notion of the theory of MWS. Ivy Kidron placed her reflection on paradigms in the broader framework of dialogue between theories. For this she wonders how the notion of paradigms used in the MWS can intervene in the analyses of construction of mathematical knowledge made with the theory of AiC. According to her, the discussion in terms of paradigms allows us to better understand the constructions of knowledge that can be explained in terms of interactions between paradigms.

The paradigms also made it possible to address the question of the theoretical "référentiel" and more generally of the reference MWS. Assia Nechache and Bernard Parzysz study this reference MWS at the beginning of the learning of probabilities in France. In this case and to characterize it, they particularly analyzed the role of artifacts and signs; the role of experimentation and modelling in the mathematical work of reference. They noted a certain lack of consistency in the resource documents that define the reference.

The question of the definition of the "référentiel" was the subject of a systematic study presented by Eloi Danguy. His quest of the "référentiel" is based on the curricula in Quebec, on the study of traditions in education and on the results of research in education. He was particularly interested in the role of reasoning in articulating the constituent elements of knowledge in their relationship to knowledge, conceptions and obstacles through the idea of problem.

Christine Choquet and Sylvie Grau presented an approach which aims precisely to understand how knowledge of the subject is developed: the Framework of Learning by Problematization (le Cadre de l'Apprentissage par Problématisation: CAP). They detailed a set of research carried out within their team (CREN in Nantes). The theoretical framework offers a didactic perspective largely derived from the research initially conducted in biology. Several notions are related to the didactics of mathematics and in particular to the theory of MWS as the place of problems in learning. However, they insist in particular on the importance of explanation and necessities through a game on particular registers.

Interested in the articulation of different theories, Luis Radford proposed an analysis of the influence of constructivism and TDS theory on the theory of objectification. This influence is real although not visible, especially on the notions of knowledge and individual subject. To account for this continuity of source ideas in the new theory, Radford uses Hegel's notion of influence.

Jorge Soto returns to the essence of mathematical work, which is to tackle the completion of mathematical tasks. He attempts to clarify the idea of circulation of mathematical work. Rather than seeing the circulation of mathematical work as a trajectory taking well-marked paths between the different planes of the ETM diagram, he proposes to consider a more random and inventive path zigzagging between the different geneses according to questions and ideas.

Finally, Stéphanie Sampson presented a poster that describes her theoretical framework for a thesis project on conceptual coherence in trigonometry. The ambitious theoretical framework she puts in place questions the possible contribution of Mathematical Working Spaces (ETM) to frame such research work. She turns also to other theoretical frameworks on the conceptualization of a mathematical notion.

LA NOTION DE CONTROLE ET NETWORKING DE THEORIES

Macarena Flores González

Université de Paris, Univ. Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-75013 Paris, France

Cette proposition a pour but d'analyser un Networking entre la théorie de l'Activité en Didactique des Mathématiques [TADM] et la théorie des Espaces de Travail Mathématique [ETM]. En utilisant une pratique de Networking d'intégration locale entre les deux théories (Prediger & Bikner-Ahsbahs, 2014), nous introduisons le « contrôle » comme une notion essentielle pour comprendre le phénomène de la transition lycée-université. Cette recherche se focalise particulièrement dans le domaine de l'analyse et l'étude des suites récurrentes $u_{n+1}=f(u_n)$ *dans le contexte français.*

INTRODUCTION

Ce travail fait suite à une dernière communication dans ce symposium (Flores González, 2019) au sein du thème *rôle et usage des tâches dans le travail mathématique*. Dans le travail précédent, on analysait la résolution d'une tâche dans le domaine de la géométrie en classe avec l'intervention de l'enseignant à l'aide d'une articulation entre la Théorie de l'Activité en Didactique des Mathématiques (TADM) et la Théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM). Cette fois, nous proposons d'aborder cette articulation théorique plus en détail, à la lumière d'une méthodologie de Networking avec une *intégration locale* et en nous centrant sur la notion de contrôle. Nous faisons l'hypothèse que la méthodologie employée nous permettra d'analyser cette notion qui joue un rôle prépondérant dans le phénomène de la transition lycée-université.

Des recherches liées à cette transition (Bloch, 2000 ; Praslon, 2000) montrent un manque de cohérence dans les productions mathématiques des étudiants en première année de l'université dans le domaine de l'Analyse. Cela rend compte d'un manque de contrôle. Que peut-on dire de son enseignement pour y remédier ? Comment faire pour que les élèves puissent le développer ?

Suite aux analyses de programmes d'enseignement qui interviennent à la transition, d'exercices donnés aux élèves et aux étudiants, et de leurs traces écrites lors de la résolution de ces exercices, nous avons identifié l'activité de contrôle comme une problématique clé de la transition lycée-université au sujet de suites $u_{n+1}=f(u_n)$ (Flores González, 2021). Dans ce travail de recherche, nous avons été confrontés aux aspects méthodologies et théoriques relatifs à l'étude du contrôle, raison pour laquelle dans cette communication nous cherchons à cibler des exemples où les élèves ont effectivement fait fonctionner l'activité de contrôle.

Ici, nous présenterons d'abord un bref historique de la littérature sur la question du contrôle en didactique qui nous permettra de comprendre les enjeux de son étude. Cela sera suivi d'une présentation de la méthodologie de *networking* choisie, où nous exposerons les éléments théoriques retenus qui nous aident à étudier l'activité de contrôle. Nous continuerons par l'analyse des exemples de productions d'élèves dans l'étude de suites $u_{n+1}=f(u_n)$, et nous finirons en donnant quelques conclusions sur notre découpage pour l'étude du contrôle à partir des deux théories choisies. A cette occasion, nous pointerons quelques éléments de discussion pour la vigilance épistémologique du networking effectué.

L'ACTIVITÉ DE CONTROLE EN DIDACTIQUE

Le contrôle est une composante de l'activité mathématique. Il a été repéré initialement dans différents cas de figure : ciblée comme nécessaire pour la résolution de problèmes (Schoenfeld, 1985) ; pour le déroulement des situations a-didactiques avec l'identification des contrôles *sémantiques* et *syntaxiques* (Brousseau, 1986) ; elle a surtout été identifiée comme partie essentielle de l'activité langagière (représentations symboliques) dans les composantes de schèmes selon la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990). S'appuyant sur ce dernier travail, N. Balachef et C. Margolinas introduisent la notion de contrôle dans le cadre du modèle de connaissances Ck¢ (Balacheff et Margolinas, 2005). Ils traitent le contrôle comme une structure qui caractérise une conception de telle sorte à ce qu'elle « *assure la non contradiction et contient au moins sous la forme d'oracles les outils de décision sur la légitimité de l'emploi d'un opérateur ou sur l'état résolu ou non d'un problème* » (Ibid., p.6). Cependant, les auteurs affirment que leur étude peut entrainer des difficultés d'ordre méthodologique et théorique. En effet, le contrôle est souvent implicite et la distinction entre opérateur et contrôle n'est pas toujours déterminée.

En ce qui concerne le domaine mathématique de l'Analyse au niveau de la transition lycée-université, L. Trouche signale que les calculatrices permettent d'avoir un contrôle des représentations graphiques qui devrait promouvoir aussi des contrôles théoriques et le contrôle sur des schèmes d'utilisation de la calculatrice. Il définit le contrôle comme la prise en compte de toutes les informations immédiatement disponibles, que ce soit de la calculatrice, mais aussi d'autres sources, pour chercher une cohérence mathématique entre elles (Guin et Trouche, 1999). Plus tard, Alcock et Simpson (2005) se réfèrent aux étudiants « non visualisateurs »[1] comme ceux qui ont un manque de contrôle sémiotique. Pour ces étudiants, les connaissances mathématiques acquises seraient moins utiles et difficile d'accès lors de la résolution de problèmes mathématiques non-standard. Par ailleurs, Ghedamsi (2008) mobilise la notion de contrôle en faisant référence aux connaissances qui permettent de valider un résultat ou une conjecture. Elle précise ainsi qu'un contrôle mixte entre l'intuitif et le formel est possible à la transition lycée-université en introduisant un milieu adapté. Ultérieurement, toujours dans le domaine de l'Analyse, Arzarello et Sabena (2011) identifient deux types de contrôle impliqués dans les tâches de preuve et d'argumentation : les contrôles sémiotique et théorique. Le contrôle sémiotique fait référence à la sélection et le traitement des ressources sémiotiques, tandis que le contrôle théorique correspond à la sélection d'une théorie mathématique organisée en propriétés, algorithmes et conceptions que les élèves mobilisent.

Ces travaux montrent que l'analyse de l'activité de contrôle est source d'intérêt dans le domaine de l'Analyse au moment de la transition lycée-université. D'ailleurs, on peut distinguer différents contrôles : sémantiques, syntaxiques, instrumentaux, théoriques, sémiotiques. Ces recherches peuvent identifier le manque de contrôle chez les élèves. Certaines montrent aussi que ces contrôles peuvent être imbriqués. Toutefois, l'implicite du contrôle reste un problème à résoudre. Nous cherchons à aborder cet implicite à travers un *networking* de théories, ce que nous développerons dans la section suivante.

NETWORKING DE THÉORIES TADM et ETM

Le Networking de théories vise *à créer un dialogue et à établir des relations entre des parties d'approches théoriques tout en respectant l'identité des différentes approches* (Prediger & Bikner-Ahsbahs, 2014, p.118). Alors que l'on cherche à établir ces relations entre les théories, deux profils de pratiques de networking peuvent se présenter : une descendante, axée sur une attention théorique qui cherche à faire avancer les théories ; et une ascendante, qui permet de mieux comprendre un phénomène empirique donné. Cette recherche se situe surtout dans le deuxième profil ayant pour but de mieux comprendre le contrôle qu'exercent les élèves en fin de lycée dans l'étude de suites $u_{n+1}= f(u_n)$. Par ailleurs et selon les différents degrés de Networking envisagés[2], nous réalisons une *intégration locale symétrique,* car elle permet d'analyser l'élaboration de la notion de contrôle à la frontière des deux théories de façon à pouvoir l'intégrer dans les deux approches. Bien que les stratégies de Networking soient souvent présentées le long d'une droite (figure 1), il ne faudrait pas les penser en termes hiérarchiques comme si le travail d'intégration ou celui d'unification seraient plus performants. En effet, les premiers degrés peuvent permettre l'analyse des connexions et une analyse profonde de chaque théorie.

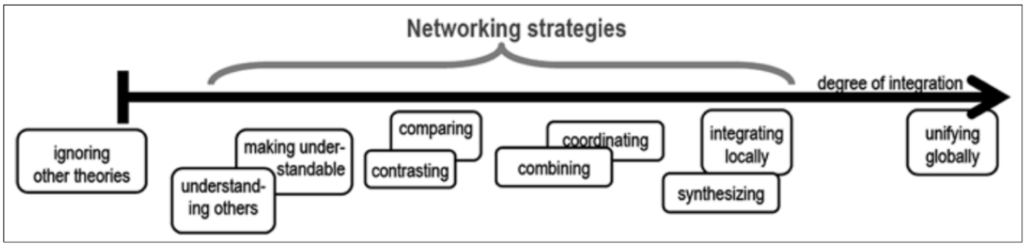


Figure 1 : Stratégies et degrés de *Networking* (Prediger et al., 2008)

Complémentarité des cadres et notion de contrôle

D'une part, la TADM s'intéresse à une meilleure compréhension des apprentissages des élèves dans la classe, en ayant le focus sur l'analyse de l'activité mathématique. Cette analyse se fait tout d'abord à travers celle de la tâche qui est proposée, et des sous-activités mathématiques (avec les adaptations de connaissances impliquées) nécessaires à mettre en fonctionnement pour résoudre la tâche. Ces sous-activités sont de reconnaissance, de traitement, d'organisation et de contrôle.

Dans ce travail, nous nous focalisons dans les sous-activités de contrôle entendues comme celles qui sont *développées lors de la réalisation de tâches complexes, lorsque* *les élèves sont capables de reconnaître que leur raisonnement est cohérent avec plusieurs points de contrôle* (Flores González, Vandebrouck et Vivier, 2020, p.3). Cela implique aussi que le déroulement de l'action soit en accord avec ce que l'on veut effectivement mettre en fonctionnement et à une production en accord au but qui a été fixé par la tâche en question (Rogalski, 2015).

D'autre part, la théorie des ETM considère que le travail mathématique est avant tout une activité humaine (Kuzniak et al., 2016). L'étude de cette activité peut se faire par le biais des dimensions sémiotique, instrumentale et discursive, impliquées dans la mise en œuvre de tout travail mathématique. Ainsi, en analysant de manière successive les actions produites par un sujet lors de la résolution des tâches, la théorie permet de caractériser le travail mathématique. Cette caractérisation peut être enrichie grâce à la prise en compte des différents paradigmes du travail selon le domaine mathématique à étudier. Dans notre cas, nous utilisons les paradigmes de l'analyse en nous focalisant dans l'analyse arithmético-géométrique [A1], analyse calculatoire [A2] (Montoya Delgadillo et Vivier, 2016).

En mettant en place une *intégration locale symétrique* (présentée plus haut), et en prenant en compte l'activité de contrôle définie dans le cadre de la TADM et les dimensions qui caractérisent le travail mathématique dans le cadre des ETM, trois activités de contrôle peuvent être dégagées :

Contrôle sémiotique: Cohérence établie dans l'utilisation de différentes représentations sémiotiques de l'objet. Ici, la représentation graphique d'une suite croissante doit être cohérente avec la représentation d'un tableau de valeurs numériques de cette suite.

Contrôle discursif: Utilisation des définitions mathématiques, méthodes de preuve ou théorèmes qui permettent d'établir une cohérence dans l'étude de l'objet mathématique en question. Dans le cas des suites récurrentes, la mobilisation du théorème de la limite monotone peut permettre de contrôler la convergence de la suite.

Contrôle instrumental: Utilisation d'outils ou de logiciels pour vérifier le travail produit. Dans le cas de suites, l'utilisation d'un algorithme ou de termes de la suite peut se faire, par exemple, grâce à l'utilisation de la calculatrice. Le contrôle instrumental peut impliquer la mise en fonctionnement des contrôles sémiotiques et discursifs.

Comme dans l'étude du travail mathématique, les trois types d'activités de contrôle peuvent interagir entre-elles, voire être imbriqués à certains moments (voir figure 2).

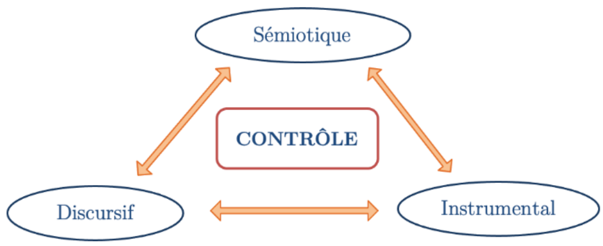


Figure 2: Schéma de trois types de contrôle (Flores González, 2021, p. 116)

Ces trois types de contrôles sont en lien avec les contrôles présentés dans la partie II. Quant au sujet des paradigmes, ces contrôles peuvent aussi être encouragés à l'aide d'une dialectique entre les paradigmes de l'Analyse : [A1] peut jouer un rôle clé dans le contrôle du travail mathématique car une dialectique avec [A2] ou [A3] pourrait permettre de réduire les erreurs dans la résolution d'une tâche (Montoya Delgadillo et Vivier, 2016).

Étant donné que le contrôle est souvent implicite, nous nous intéressons aux moyens de le rendre plus explicite à travers les trois types de contrôle décrits et à la dialectique entre paradigmes. Ainsi, identifier le contrôle de cette façon nous permet d'analyser cette activité chez l'élève en amont, en repérant les « occasions »[3] de contrôle, les contrôles « explicites »[4], et les contrôles « non mathématiques »[5] donnés par la tâche en question ; et en aval à la résolution de la tâche. Par ailleurs, ces contrôles nous permettent aussi de trouver des indicateurs pour construire des situations qui promeuvent une cohérence dans la résolution de la tâche.

Ce networking s'inscrit en cohérence avec l'étude des aspects épistémologiques et cognitifs des processus d'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques, essentiels en didactique et auxquels les théories ETM et TADM s'intéressent.

Le contrôle à la transition lycée-université : les suites récurrentes

La notion de suites récurrentes est emblématique de la transition lycée-université en France, pourtant, leur étude par les élèves peut devenir particulièrement problématique. À ce sujet, Praslon (2000) signale à l'époque :

> Le simple fait d'avoir à mêler « fonction » et « suite » au sein d'une argumentation sans amalgamer l'étude de l'une, très familière à l'étudiant au sortir du lycée, et celle de l'autre, qui l'est beaucoup moins, représente une difficulté d'un genre nouveau » (Ibid., p. 214).

Par ailleurs, certaines représentations graphiques (celle en escargot par exemple) peuvent aussi être difficiles à interpréter par les élèves (Weigand, 1991). En effet, les différentes connaissances à mobiliser pour leur étude peuvent se prêter à des confusions, raison pour laquelle les suites $u_{n+1}=f(u_n)$ sont un sujet nécessitant davantage le développement de différents types de contrôle pour que le travail mathématique produit soit cohérent. De ce fait, pour étudier le contrôle à la transition lycée-université dans l'enseignement actuel des suites $u_{n+1}=f(u_n)$, nous avons effectué des analyses à trois niveaux différents (du niveau plus général vers un niveau plus précis) cherchant à caractériser l'ETM de référence et l'ETM attendu :

Niveau 1 - ETM de référence (programmes) : Nous avons analysé les programmes de la fin de lycée (classe de TS) et de licence en mathématiques de début de l'université. Ici, si on a pu voir que le contrôle instrumental est une activité prévue dans la classe de TS, rien n'est explicité dans la classe de l'université. Les éléments du contrôle discursif quant à l'étude d'une suite récurrente sont les mêmes. Dans ce cas, le théorème de la limite monotone est essentiel pour déterminer la convergence de la suite.

Niveau 2 - ETM de référence (exercices de manuels) : Ici nous avons étudié 51 exercices proposés dans trois manuels de TS et 3 exercices des feuilles TD de l'université. Les résultats des analyses de manuels montrent que le contrôle non mathématique est fortement encouragé dans les énoncés par rapport aux contrôles sémiotiques et instrumentaux (voir Figure 3), et que la dialectique de paradigmes [A1]-[A2], bien que présente, n'est pas mise en avant (voir Figure 4). Notons qu'à partir des résultats, nous pouvons voir qu'il existe une certaine corrélation entre le changement de paradigme et les occasions de contrôle, ou contrôle explicite.

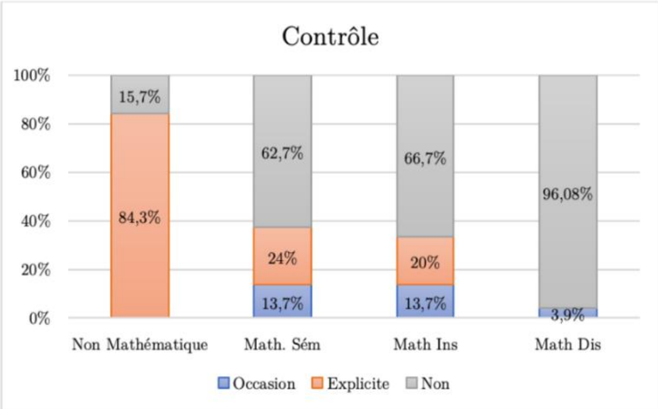


Figure 3 : Résultats d'analyse de contrôles dans les exercices des manuels de TS

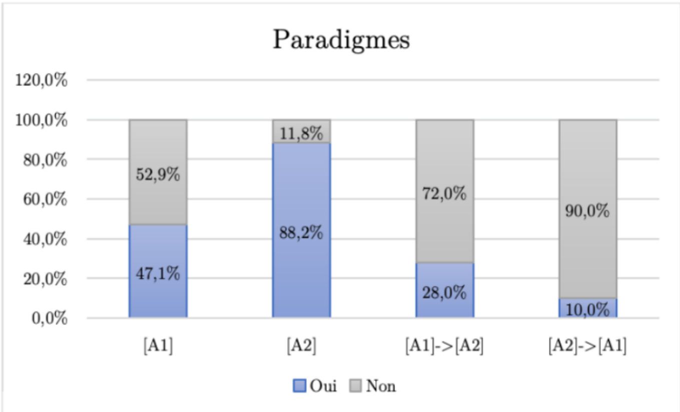


Figure 4 : Résultats d'analyse de paradigmes dans les exercices des manuels de TS

En ce qui concerne l'analyse des feuilles TD, nous avons observé que le contrôle non mathématique est présent dans tous les exercices d'une part, les occasions de contrôle mathématique ou contrôle explicite (que ce soient sémiotique, instrumental ou discursif) ne sont pas présents d'autre part. Enfin, le seul paradigme travaillé au début de l'université est celui du [A2].

Niveau 3 - ETM attendu (exercices d'évaluation) : Ce dernier niveau d'analyse nous a permis de caractériser la succession[6] de sous-activités et des actions du travail mathématique attendus par chaque institution à partir de l'analyse d'exercices d'évaluation. Ainsi, en fin de lycée, nous identifions que les contrôles non mathématiques sont présents : il existe des occasions pour développer des contrôles instrumentaux et sémiotiques (possibilité d'utiliser la calculatrice), et la dialectique

[A1]-[A2] n'est pas présente. Au niveau de l'université, seuls les contrôles non mathématiques sont considérés, et l'absence de contrôles sémiotiques et instrumentaux est remarquée.

Construction d'une situation visant l'activité de contrôle

Alors que le manque de cohérence mathématique dans les réponses des étudiants est constaté, les résultats précédents montrent que l'activité de contrôle, telle que nous l'avons identifiée, n'est pas une activité bien articulée pour étudier les suites récurrentes, que ce soit par les dimensions ou les paradigmes du travail mathématique. Cela nous a conduit à construire une situation dans le but de favoriser des occasions de contrôle instrumental et sémiotique, à travers une dialectique des paradigme [A1]-[A2]. Cela consistait à :

1º) Faire une étude de la suite $u_{n+1}=1/(2-u_n)$ avec u_0 dans [0,1] en commençant par la formulation de conjectures des propriétés de la suite grâce à leur visualisation à partir des différentes représentations données par la calculatrice, en mettant l'accent sur la table de valeurs de leurs termes. Ici, il s'agit surtout d'un travail dans le paradigme [A1] et de la mise en fonctionnement d'un contrôle sémiotique et instrumental.

2º) Prouver les propriétés qui ont été conjecturées. Ici, les élèves devaient mettre en fonctionnement un contrôle discursif au sein du paradigme de l'analyse [A2], tout en assurant une cohérence avec les représentations sémiotiques produites grâce à la calculatrice dans la partie précédente (contrôle sémiotique et instrumental).

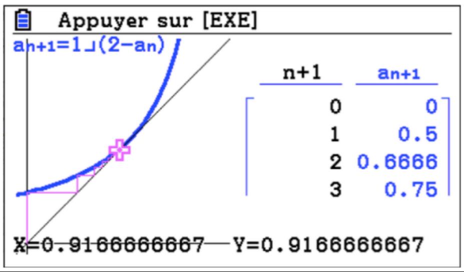
1º) [A1] et contrôle instrumental – sémiotique	**2º) [A2] et contrôle discursif**
Conjecturer une variation croissante de la suite, sa convergence et sa limite 1, en utilisant la calculatrice. Voici un exemple de représentations données par la calculatrice CASIO Graph : 	1. Montrer que la suite est bornée (par récurrence). 2. Étudier le sens de variation de la suite sachant que la conjecture est une suite croissante (en étudiant le signe de u_{n+1} - u_n par exemple). 3. Montrer que la suite converge en mobilisant le théorème de la limite monotone.

Table 1 : Résumé de la situation construite.

Deux exemples de mise en fonctionnement de contrôles

Nous avons effectué une expérimentation dans une classe de TS de 30 élèves. Les élèves devaient résoudre la situation proposée de façon individuelle. Il en résulte que presque la moitié des élèves montre un manque de reconnaissance de la suite récurrente (ils la traitent comme $u_{n+1}=f(n)$). Parmi ceux qui reconnaissent la bonne suite, certains ne comprennent pas le travail dialectique entre [A1]-[A2], et peu d'élèves mettent en fonctionnement des activités de contrôle (cette expérimentation est analysée en détail dans Flores González, Vandebrouck et Vivier, 2022). Nous nous intéressons à deux cas dont les élèves ont mis en fonctionnement un contrôle mathématique.

Dans le premier cas, il s'agit de quatre élèves (G1-1.4, G1-1.15, G1-1.16, G1-2.8) qui mettent en fonctionnement un contrôle sémiotique et instrumental, mais pas un contrôle discursif. Cela veut dire qu'au moment de conjecturer les propriétés de la suite, ils réussissent à identifier sa croissance et sa limite, mais au moment de prouver les conjectures ils ne mobilisent pas les connaissances mathématiques qui permettent de justifier ces propriétés. Dans la table 2 ci-dessous nous montrons l'exemple de l'élève G1-1.15 :

Attendu : Conjectures des propriétés en [A1]		**Description**
la suite semble croissante, on remarque graçe à la calculatrice que la suite converge vers 1 mais ne l'atteint pas	Comment avez-vous utilisé la calculatrice ? en allant dans le ~~prest~~ fonction suite	L'élève, en utilisant la calculatrice avec la fonction suite, obtient les bons termes de la suite demandés, et cela lui permet de reconnaitre la variation de la suite et conjecturer sa croissance et sa limite. **Contrôle sémiotique et instrumental**
Attendu : Preuve des propriétés en [A2]		**Description**
pour tout $n \in$ ~~N~~ $\mathbb{N}$ ~~apport on remarque~~ $U_n \in [0;1]$ car la suite converge vers 1 mais ne l'atteint pas donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [0;1]$	Pourrait-on utiliser la calculatric Si oui, comment ? oui avec la fonction table	Malgré le fait que l'élève mobilise un contrôle sémiotique et instrumental, il ne reconnait ni la preuve par récurrence, ni une méthode de preuve valable pour démontrer la croissance, ni le théorème de la limite monotone. Cela le fait produire un travail au sein du paradigme [A1] sans effectuer une dialectique entre paradigmes. De plus, la notion d'infini potentiel intervient à ce moment-là. **Absence de contrôle discursif**
le sens de variation de la suite (U_n) est ~~p~~ croissant	Pourrait-on utiliser la calculatric Si oui, comment ? oui avec le tableau	
d'après la calculatrice on voit que la suite converge vers 1 mais ne l'atteint pas	Pourrait-on utiliser la calculatric Si oui, comment ? oui avec le tableau	

Table 2 : Production de l'élève G1-1.15. Contrôle sémiotique et instrumental

Le deuxième cas correspond à un seul élève (G1-1.8) : il met en fonctionnement les trois types de contrôle sémiotique, instrumental et discursif, en faisant les conjectures qui lui permettent de développer un contrôle discursif, aboutissant à un affinement de sa conjecture quant à la limite de la suite. Ci-dessous, dans la table 3 nous montrons une partie de la production de l'élève G1-1.8 :

Attendu : Conjectures des propriétés de la suite en [A1]	Description
$\alpha \neq 1$ et $\alpha = 0,5$ la suite semble croissante et converge vers 0,9 **Comment avez-vous utilisé la calculatrice ?** À l'aide de la table de valeur	Cet élève, en obtenant le tableau des termes de la suite, conjecture la croissance de la suite. L'activité qu'il développe lui permet de conjecturer la limite comme étant 0,9. **Contrôle sémiotique et instrumental**
Attendu : Preuve des propriétés de la suite dans [A2]	**Description**
$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose : $0 \leq u_n \leq 1$ Initialisation : pour $n=0$ $0 \leq u_0 \leq 1$ $u_0 = 0,5$ P_0 est vraie Hérédité : pour $n \in \mathbb{N}$ fixé on suppose P_n vraie HR : $0 \leq u_n \leq 1$ On veut prouver que $u_{n+1} \in [0;1]$ $\forall$ tout $n \geq 1$ $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ $0 - u_n \leq 2 - u_n \leq 1 - u_n$ P_n est héréditaire P_0 $\frac{1}{-u_n} \geq \frac{1}{2-u_n} \geq \frac{1}{1-u_n}$ est vraie P_n est héréditaire d'après le principe de raisonnement par récurrence P_n est vraie $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2-u_n} - u_n = \frac{1}{2-u_n} - \frac{u_n(2-u_n)}{2-u_n}$ $= \frac{1-2u_n+u_n^2}{2-u_n}$ $\frac{u_n^2-2u_n+1}{2-u_n} > 0$ $u_n / \{2\}$ $u_n < 2$ La suite est croissante $a>0$ sur $[0;1]$ La suite est croissante et est majorée par 1 elle converge La suite tend vers 1 et non pas vers 0,9 mais elle est croissante et elle converge	L'élève mène son raisonnement correct en mettant en fonctionnement les reconnaissances des méthodes valables pour la preuve des conjectures effectués dans le paradigme [A1]. Cela montre que cet élève comprenne la dialectique [A1]-[A2]. La mise en fonctionnement du contrôle discursif lui permet d'expliquer à la fin de son travail, que la suite converge vers 1 et non vers 0,9 comme il l'avait affirmé dans sa conjecture dans [A1]. **Contrôle discursif.**

Table 3 : Production de l'élève G1-1.8. Contrôle sémiotique, instrumental et discursif

CONCLUSION

Dans cette communication, nous avons abordé la problématique de l'implicite du contrôle à la transition lycée-université au sujet de suites récurrentes, à travers un *Networking* de théories. Pour l'expliciter, nous avons identifié différents types de contrôle : les contrôles sémiotiques, instrumentaux et discursifs (identifiés comme mathématiques), et les contrôles non mathématiques.

Lors de l'expérimentation, bien que la dialectique entre les paradigmes [A1]-[A2] peut être comprise par certains élèves, nous avons observé que le contrôle discursif n'est pas toujours mis en fonctionnement. Cela pourrait être dû au fait que le contrôle discursif serait d'une nature différente des contrôle sémiotique et instrumental. Nous soutenons qu'une étude plus approfondie de ce dernier type de contrôle est nécessaire et pourrait contribuer davantage à la *sensibilité épistémologique* (Kidron, 2016) des deux théories. En effet, la TADM nous permet de reconnaitre que la notion de contrôle doit être approfondie, et les ETM nous permet d'identifier, à travers ces trois dimensions, des éléments épistémologiques clés à mettre en fonctionnement pour produire un travail mathématique contrôlé. Par ailleurs, l'activation des dimensions dans l'ETM passe aussi par la mise en fonctionnement de sous-activités de reconnaissance sémiotique, instrumental et discursive.

Ainsi, les différents types du contrôle décrits nous ont aidé à rendre cette notion opérationnelle, nous permettant d'aborder leur étude pour la construction de situations ou de tâches qui mettent en avant l'activité de contrôle. Enfin, il importe de remarquer qu'un travail d'explicitation du contrôle au-delà du plan théorique, serait nécessaire et essentiel pour développer l'autonomie dans l'exercice du contrôle du point de vue de l'apprentissage mais aussi de l'enseignement.

NOTES

1. Étudiants utilisant majoritairement la représentation algébrique et n'utilisant pas les représentations visuelles des notions.

2. Prediger & Bikner-Ahsbahs (2014) distinguent quatre degrés de Networking : comprendre et rendre compréhensible les théories choisies (1) ; comparer et contraster les théories pour les faire développer (2) ; combiner et coordonner pour approfondir la compréhension d'un phénomène (3) ; et synthèse et intégration locale des théories (4).

3. Occasions de contrôle : Le contrôle n'est pas explicite, mais l'énoncé de la tâche favorise un contrôle sémiotique, instrumental et/ou discursif.

4. Contrôle explicite : L'énoncé de la tâche stimule l'établissement de cohérences mathématiques à travers la demande de différents registres de représentation, l'utilisation de la calculatrice avec certaines fonctions, ou des méthodes explicits pour prouver des propriétés de la suite.

5. Contrôles non mathématiques : il s'agit des informations des propriétés de la suite, donnés dans l'énoncé et qui peuvent permettre une conclusion en correspondance au but visé, mais qui n'entraine ni la mobilisation des connaissances mathématiques, ni d'un contrôle discursif. Par exemple, les informations sur la borne inférieure, la croissance de la suite, ou l'explicitation de la convergence de la suite peuvent apparaitre dans l'énoncé.

6. Les succession de sous-activités et des actions du travail mathématique sont développés dans le travail de thèse (Flores González, 2021).

REFERENCES

Alcock, L., & Simpson, A. (2005). Converge of Sequences and Series 2: Interactions Between Nonvisual Reasoning and the Learner's Beliefs about their own Role. *Educational Studies in Mathematics, 58*, 77–100.

Arzarello, F., & Sabena, C. (2011). Semiotic and theoretic control in argumentation and proof activities. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2), 189–206.

Balacheff, N., & Margolinas, C. (2005). Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In C. Margolinas & A. Mercier (Éds.), *XIIº école d'été de didactique des mathématiques* (pp.1–32). La Pensée Sauvage éditions.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33–115.

Bloch, I. (2000). *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université : Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*. Thèse de doctorat. Université de Bordeaux.

Flores González, M. (2019). L'activité et le travail mathématique dans une tâche géométrique. *Actes du Sixième Symposium sur le Travail Mathématique ETM6*, 533–543.

Flores González, M. (2021). *Activité et travail mathématique à la transition lycée-université en Analyse : le cas de suites* $u_{n+1}=f(u_n)$. Thèse de doctorat. Université de Paris.

Flores González, M., Vandebrouck, F., & Vivier, L. (2020). L'apprentissage du calculus dans une tâche classique de la transition lycée-université. *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz (LDAR) nº 23*. IREM de Paris.

Flores González, M., Vandebrouck, F. & Vivier, L. (2022). A classic recursive sequence calculus task at the secondary-tertiary level in France. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 53*(5), 1092–1112.

Ghedamsi, I. (2008). *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université : Articuler contrôles pragmatique et formel dans des situations à dimension a-didactique.* Thèse de Doctorat. Université de Bordeaux 2 & Université de Tunis.

Guin, D., & Trouche, L. (1999). The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments: The Case of Calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3*, 195–227.

Kidron, I. (2016). Epistemology and networking theories. *Educational Studies in Mathematics, 91*(2), 149–163.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in Schooling: An Intro- duction. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 48*(6), 721–737.

Montoya Delgadillo, E. M., & Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM*, *48*(6), 739–754.

Praslon, F. (2000). *Continuités et ruptures dans la transition terminale S/DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement.* Université Paris 7 - Denis Diderot.

Prediger, S., & Bikner-Ahsbahs, A. (2014). Introduction to Networking: Networking Strategies and Their Background. In *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 117–125). Springer International Publishing.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM*, *40*, 165–178.

Rogalski, J. (2015). *Didactique et cognition. De Vygotsky à Dehaene... ? Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz (LDAR) nº 13*. IREM de Paris.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problme Solving.* Orlando: Academic Press.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 10 (2-3),* 133-170.

Weigand, H.-G. (1991). Iteration sequences and their representations. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(5), 411–437.

CONTRÔLES ET TRAVAIL MATHÉMATIQUE

Alain Kuzniak* et Assia Nechache**

*Université de Paris Cité et LDAR

**CY Cergy Paris Université et LDAR

L'objet de cette contribution est d'explorer la nature et le rôle des contrôles sur le travail mathématique dans le cadre de la théorie des ETM. Pour identifier et analyser les contrôles mis en œuvre pour assurer le travail mathématique, nous exposons les observables que nous avons considérés en relation avec les caractéristiques du travail mathématique : la conformité du processus au paradigme en jeu, les types de contrôles, l'exactitude des résultats du point de vue mathématique, la responsabilité des contrôles (étudiant ou l'enseignant, ou responsabilité partagé). Nous détaillons également notre typologie des outils de contrôle du travail mathématique (sémiotique, technologique et théorique). Tous ces points sont ensuite utilisés pour identifier et décrire les contrôles mis en œuvre par des étudiants qui réalisent une tâche probabiliste complexe.

Mots clés : *Travail Mathématique et contrôles, Outils de contrôle, Processus et résultat, Tâche probabiliste.*

INTRODUCTION

Nos études sur la résolution de problèmes géométriques par des étudiants-enseignants du primaire français nous ont permis d'identifier des formes erronées, mais très fréquentes, du travail géométrique réalisé par ces étudiants (Kuzniak et Nechache 2019, 2021). Le travail mathématique des étudiants répond à certaines attentes institutionnelles sans être mathématiquement correct faute de supervision et de contrôles sur leurs manières d'effectuer leur travail.

À partir de ce constat, nous avons souhaité explorer la nature et le rôle des contrôles sur le travail mathématique. La prise en compte des contrôles dans l'enseignement des mathématiques n'est pas nouvelle. Elle prend sa source dans les réflexions menées par Polya (1985) sur la résolution des problèmes mathématiques et plus tard par Schoenfeld dans son approche pédagogique des mathématiques basée sur le *problem solving*.

Plus récemment et, en lien avec des théories didactiques, Balacheff (2017) et Arzarello et Sabena (2011) ont approfondi cette question et permis d'avancer sur la nature des contrôles. En relation avec ces différentes approches, nous décrivons la nature et la fonction des contrôles en adoptant la perspective des ETM. En nous appuyant sur des productions d'étudiants, nous présentons les différents types de contrôles qui peuvent être mobilisés lors de résolution d'une tâche probabiliste.

NATURE ET FONCTION DES CONTROLES SUR LE TRAVAIL MATHEMATIQUE

Une approche analogique des contrôles dans la théorie des ETM

Pour rendre compte de ce que peut être la notion de contrôle dans la théorie des ETM, nous utilisons l'approche de cette notion dans la théorie mathématique connue sous le nom de « Théorie des contrôles ». L'intérêt de cette théorie est de considérer les contrôles à travers la réalisation par des systèmes, généralement mécaniques, de trajectoires déterminées. Par exemple, en 2022, le télescope James Webb a été mis sur une orbite héliocentrique, proche de celle de la terre, et plus précisément au point de Lagrange L2, du système Soleil-Terre, situé à 1,5 million de kilomètres de la Terre, du côté opposé au Soleil. La trajectoire calculée pour atteindre ce point est très complexe et sa réalisation effective nécessite un certain nombre d'ajustements pour être obtenue et maintenue : il s'agit de *contrôles externes* indispensables pour atteindre le point visé. Ils ont été anticipés par les concepteurs et ils doivent pouvoir être exécutés en temps voulu en fonction du chemin parcouru par le satellite. Par ailleurs, le point de Lagrange L2 est instable, autrement dit sa position relative entre la Terre et le Soleil varie avec le temps mais de manière imprévisible : il est donc important que le télescope puisse estimer ces variations et activer ses moteurs pour retrouver sa position autour de L2. Dans ce cas, il s'agit de *contrôles internes* pilotés directement par le satellite lui-même, même s'il reste prudent d'assurer un contrôle externe.

La théorie mathématique des contrôles met ainsi l'accent sur deux points qui nous semblent important : l'idée de système et l'idée de trajectoire. Une trajectoire peut être contrôlée directement par un système ou bien à distance par des contrôles externes. Il n'est naturellement pas notre propos d'appliquer sans adaptation cette conception à la résolution de problèmes par des élèves dans un système scolaire et sous la supervision d'un professeur. Ces contrôles sont naturellement plus complexes et moins déterministes que ceux exercées par un système mécanique même très sophistiqué. Cependant, de cette analogie, nous retenons l'idée que la résolution d'une tâche mathématique peut être vue comme la réalisation une trajectoire d'actions planifiées pour atteindre un résultat. Dans le cas d'une étude du travail mathématique de l'élève confronté seul au problème, il est possible, grâce à une analyse de ses productions, d'en savoir plus sur la gestion de ses actions et en particulier d'observer la présence ou l'absence de contrôles internes sur des moments clés de son travail. Lorsque la tâche est mise en œuvre par l'enseignant dans la classe, l'analyse porte sur les contrôles effectués dans la situation didactique associée. Dans ce cas, deux types de contrôles doivent être pris en compte. Certains sont à la charge du professeur et sont utiles pour réguler les actions des élèves. D'autres engagent davantage les élèves et peuvent survenir lors d'une situation de validation organisée par le professeur. Cette fois, les élèves sont conduits à déclencher et organiser en commun les contrôles en fonction de leur propre compréhension de la tâche.

Sur la nature des contrôles

En relation avec une approche de l'enseignement basée sur le *problem solving*, Schoenfeld (1985) définit les contrôles comme des décisions globales concernant la sélection et la mise en œuvre de ressources et de stratégies. Leur réalisation implique des activités telles que : la planification, la surveillance, l'évaluation, la prise de décision et les actes méta-cognitifs conscients. L'intérêt de cette approche est de relier contrôles et décisions. De ce fait, les contrôles seront observables lors de prises de décision par les élèves. Cette vision sera étendue au rôle du professeur dans la théorie de double approche (Robert, 2008) avec une activité de contrôle spécifique du travail du professeur. Dans ce cas, c'est plus l'activité de contrôle que la notion de contrôle elle-même qui est mise en avant. Notre contribution porte plus précisément sur l'identification des contrôles.

En se basant sur leur propre théorie didactique, Balacheff (2017) et Arzarello et Sabena (2011) ont articulé les contrôles et les contenus mathématiques visés. Dans le cadre de la théorie cK¢, Balacheff introduit un système de contrôle qu'il place au cœur d'une approche maîtrisée du raisonnement mathématique. Ce système est constitué d'outils sémiotiques mais aussi des actions individuelles et des classes de problèmes à résoudre. Pour Arzarello et Sabena (2011), les contrôles rendent compte du fait que les élèves prennent certaines décisions concernant la sélection et l'utilisation de ressources qui peuvent être sémiotiques ou théoriques. Plus précisément, un contrôle est sémiotique:

> [...] when the decisions concern mainly the selection and implementation of semiotic resources, mainly when the decisions concern activities featured by the treatment of signs, according to a wide Peircean interpretation of what a sign is. (Arzarello et Sabena, 2011, p. 191).

Un contrôle est théorique:

> […] when the decisions concern mainly the selection and implementation of a more or less explicit theory or parts of it and is accomplished through a more- or less-organized cluster of properties, algorithms, and possibly conceptions that students activate to elaborate an argument or a proof (Ibidem).

Les contrôles sémiotiques portent sur le choix des représentations sémiotiques pour résoudre la tâche, tandis que les contrôles théoriques renvoient à l'idée de preuve et au choix d'arguments. Les auteurs notent que la distinction entre ces deux types de contrôles est faite pour des besoins d'analyse mais que souvent ces types de contrôles sont entremêlés dans les actions concrètes des élèves qui résolvent une tâche. Dans le cadre de la théorie des Espaces de Travail Mathématique, Kuzniak et Nechache (2021) introduisent des contrôles : sémiotique, technologique ou théorique. Nous retrouvons les deux types de contrôles définis par Arzarello et Sabana mais ceux-ci sont maintenant englobés dans un jeu d'interactions qui peuvent être décrit grâce à la circulation du travail dans un ETM. Chacun d'eux dépend du type d'outils du plan épistémologique utilisé (representamen, artefact, référentiel théorique) mais aussi de la genèse (sémiotique, instrumentale, discursive) mobilisée (Kuzniak et al. 2016). De manière précise et pour aider à leur identification dans les analyses, nous caractérisons ces trois types de contrôles de la manière suivante :

- Un *contrôle sémiotique* est relatif à la sélection et à l'usage d'un outil sémiotique basé sur l'usage des signes et des *representamen.* Il permet de s'assurer de l'adéquation du choix de ces signes mais aussi de leur bonne interprétation. Ce type de contrôle peut être utilisé lors d'un traitement de ces signes à l'intérieur d'un registre. Il sert aussi à assurer la flexibilité entre registres de représentation lors des changements de registres. Associé à la genèse sémiotique, il oriente et valide le processus de la visualisation.
- Un *contrôle technologique* renvoie à la décision prise pour sélectionner un ou plusieurs outils technologiques (artefacts matériels ou digitaux, algorithmes). Ce type de contrôle est mobilisé pour s'assurer du bon usage de ces outils comme instrument technologique. Associé à la genèse instrumentale, il oriente et valide le processus de la construction.
- Un *contrôle théorique* renvoie à la prise de décision portant sur le choix des outils théoriques (théorèmes et propriété du référentiel théorique) et les formes de raisonnement considérés comme valides dans le paradigme retenu dans l'ETM de référence. Associé à la genèse sémiotique, il oriente et valide le processus du discours démonstratif de la preuve.

Ces trois types de contrôles fonctionnent conjointement pour valider les interactions entre les différentes genèses de l'espace de travail. De ce fait, ils assurent également la flexibilité entre les différentes composantes épistémologique et les processus cognitifs de l'ETM.

Sur la fonction des contrôles dans le travail mathématique

Pour avancer sur une caractérisation fonctionnelle des contrôles, nous détaillons l'impact des contrôles sur le travail mathématique s.

Contrôle du travail mathématique : conformité et exactitude (correctness)

Dans la théorie des ETM, Kuzniak et Nechache (2021) utilisent trois critères pour décrire et caractériser le travail mathématique : la conformité, l'exactitude (correctness) des résultats, la complétude du travail.

Le travail mathématique est dit *conforme*, lorsque les processus utilisés pour réaliser les tâches mathématiques sont conformes aux règles des paradigmes de travail privilégiés dans l'ETM. Les paradigmes sont une notion clé dans la théorie des ETM dont l'objectif est de caractériser précisément le travail mathématique qui émerge dans un contexte éducatif donné.

Lorsque les résultats obtenus sont exacts selon le point de vue mathématique retenu, le travail est dit *correct*.

Enfin, le travail mathématique est qualifié de *complet* lorsque sa circulation est assurée entre toutes les genèses et composantes de l'ETM.

Les critères de conformité du processus et « correctness » du résultat du travail sont donc définis selon le ou les paradigme(s) en jeu. Du point de vue des contrôles, cela conduit alors à questionner la validité du processus et la viabilité du résultat du travail mathématique. La circulation du travail est déterminée par l'observation des plans verticaux et des genèses privilégiées. Elle permet de reconnaître le type de contrôle utilisé.

Contrôles sur le discours de preuve

Une des particularités du travail mathématique est sans doute l'importance accordée à la preuve. Dans leur article (Richard, Venant et Gagnon, 2019) ont introduit trois formes de preuve qu'ils ont mis en relation avec chacun des plans verticaux de l'ETM. Il s'agit des preuves mécaniques associées au plan [Sem-Ins], des preuves algorithmiques [Ins-Dis] et des preuves graphico-discursives [Sem-Dis]. Chacune de ces preuves privilégie une genèse et un certain type de contrôle axé, suivant les cas, sur la visualisation, la construction ou bien la démonstration. Pour Balacheff (2017), les contrôles sont étroitement liés à l'apprentissage de la preuve vue comme une pratique discursive. Dans la théorie des ETM, la pratique discursive de preuve est fondée sur la genèse discursive mais pas seulement puisque la forte interdépendance des genèses de l'ETM conduit à prendre en compte les genèses sémiotique et instrumentale dans la pratique discursive. Par ailleurs, Kuzniak et Nechache (2019) insistent sur le fait que « *tous les discours ne renvoient pas à la preuve et ne doivent pas nécessairement être liés à la genèse discursive (de la preuve)* ». De son côté, Balacheff souligne que la pratique discursive de la preuve se construit par une série d'ajustements et d'adaptations qui reposent sur divers types de contrôles associés à des signes et des référents. Il insiste sur la nécessité à bien distinguer preuve et contrôle dans le contexte de la résolution de problèmes. Les contrôles renvoient à la question de la prise de décision. Cette dernière reste dépendante de l'objectif visé (répondre au problème donné), de ce que le sujet (celui qui prend la décision) a comme informations et de ce qu'il sait (en lien avec ses connaissances mathématiques) et de ce qu'il sait faire (côté du savoir-faire).

Identifier et décrire les contrôles sur le travail mathématique

Comme nous l'avons souligné, l'identification des contrôles, surtout lorsqu'ils sont internes, s'avère difficile. Il nous semble cependant d'avancer sur cette question en caractérisant le travail mathématique grâce aux critères que nous venons d'énoncer à savoir la conformité, la complétude et la correction du travail. Ces critères constituent autant d'observables qu'il est possible d'identifier et de décrire à partir des actions des sujets en train d'exécuter une tâche mathématique.

Le contrôle de la conformité des processus mis en œuvre dans les différentes facettes du travail mathématique autour de l'exploration et de la preuve. Cette conformité est relative aux paradigmes.

En référence à la circulation du travail, il s'agit d'identifier les outils de contrôle (sémiotique, technologique ou théorique) associés à chacune des genèses utilisées pour exercer le travail.

Le contrôle de l'exactitude des résultats obtenus. Il dépend de la genèse mobilisée pour assurer la validité des résultats attendus d'un point de vue mathématique.

Deux autres points complémentaires seront intéressants à observer pour rendre de l'environnement et de la portée réelle des contrôles.

Quels sont les individus en charge et responsables du contrôle (professeur, élève, groupe, etc.).

Pourquoi un contrôle a-t-il été utilisé (ajustement, rupture, réorientation) ? Et ce contrôle a-t-il permis d'atteindre l'objectif visé par la trajectoire des actions.

Ces différents points supportent la méthodologie que nous utilisons pour reconnaître et décrire les contrôles mis en œuvre par des sujets lorsqu'ils résolvent des tâches mathématiques.

Étude d'un exemple en probabilité

Nous avons proposé la tâche intitulée « le segment et son milieu » à vingt-sept étudiants stagiaires en formation initiale pour l'obtention de leur Master en enseignement des mathématiques. En tant que professeurs stagiaires, ils doivent suivre des cours pendant la moitié de la semaine à l'université et enseigner dans un lycée pendant l'autre moitié de la semaine. Tous ces étudiants ont au moins un diplôme universitaire de premier cycle (3 ans) en mathématiques et ont réussi un concours national pour devenir professeur de mathématiques dans un lycée. Cette tâche provient des ressources officielles françaises, qui donnent quelques conseils pour sa gestion par les enseignants dans une classe. Nous avons résumé en annexe le travail attendu dans le cadre de la résolution de cette tâche décrit dans la ressource officielle en mettant l'accent sur la nature du travail mathématique attendu.

> Sur un segment S, deux points A et B sont pris au hasard. On considère le résultat suivant : "La longueur du segment [AB] est strictement supérieure à la moitié de la longueur du segment S". Quelle est la probabilité de cet événement?

Dans la suite, on propose d'analyser les contrôles mobilisés par quelques étudiants. Il s'agit pour nous d'illustrer notre méthodologie d'analyse des contrôles dans la théorie des ETM.

Mise en œuvre de la tâche dans la classe

Nous avons demandé aux étudiants de réaliser la tâche individuellement avec l'interdiction d'échanger entre pair et avec l'enseignant. Ils devaient répondre sur une feuille ramassée à la fin du temps imparti. De ce fait, l'étudiant est seul en charge du contrôle du travail mathématique qu'il a produit. Dans notre analyse, nous considérerons uniquement les trois critères : le type de contrôle (sémiotique, technologique ou théorique), la validité des résultats attendus qui sont ou non corrects d'un point de vue mathématique ; la conformité des processus en relation avec un paradigme.

Analyse des contrôles du travail mathématique mis en œuvre par les étudiants

L'analyse des contrôles du travail mathématique passe par la description et la caractérisation du travail mathématique des étudiants. Cette description prend appui sur la méthodologie à trois étapes inspirées de la CTA (Cognitive Task Analysis) que nous avons développée (Kuzniak et Nechache, 2021). Pour mener identifier les contrôles utilisés par des étudiants, nous nous appuyons sur les points explicités dans la partie précédente.

Etudiant 1 (Production T11)

L'étudiant représente la situation aléatoire à l'aide d'un segment de longueur *s* (Figure 1.a)**.** Ce segment est un signe interprété en relation avec le référentiel théorique. L'étudiant a placé deux points A et B, d'abscisses *a* et *b*, au hasard sur le segment et il leur associe deux variables aléatoires de loi continue X (pour la position de A) et Y (pour la position de B). Il nomme D l'événement : « La longueur du segment [AB] est strictement supérieure à la moitié de la longueur du segment S » (Figure 1.b).

Les données du problème sont décrites dans le plan [Sem-Dis] et le travail de preuve se développe dans ce plan. Pour calculer la probabilité de l'événement D, notée P(D), il utilise un registre de représentation symbolique et introduit l'usage de la valeur absolue (Figure 1.c). Il appuie son raisonnement sur des propriétés du référentiel théorique : *la somme de la probabilité d'un événement et la probabilité de son événement contraire est égale à 1.* Les traitements sémiotiques sont légitimés par des propriétés probabilistes (Figure 1.d), mais il confond la probabilité conditionnelle (sachant que) avec une intersection (et) dans l'écriture $P(X>Y$ et $X<s/2+Y)$. De ce fait, son résultat final n'est pas exact. Plus loin, il utilise un dessin pour exprimer la valeur de la probabilité de $P\ (X<1/2+Y/\ X>Y)$. Le contrôle sémiotique qu'il utilise est basé sur la visualisation sans appui sur le référentiel théorique (Figure 1.e).

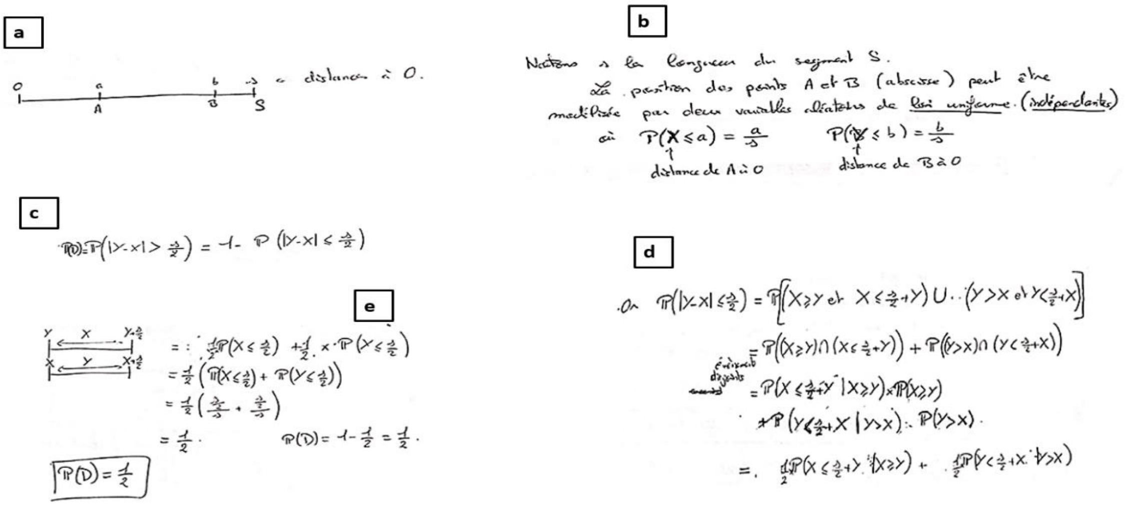


Figure 1 : Production de l'étudiant 1

Son travail est globalement conforme au paradigme P3 avec un raisonnement qui privilégie la genèse discursive en étroite relation avec la genèse sémiotique. Les traitements sémiotiques mis en œuvre sont toujours encadrés par des contrôles théoriques en relation avec les éléments du référentiel théorique probabiliste (loi uniforme, variables aléatoires). Ainsi, si son résultat final n'est pas correct, ce n'est pas faute de contrôles. Le problème vient d'une erreur « logique » classique en probabilité avec le délicat passage du langage ordinaire ou langage symbolique et ensembliste.

Étudiant 2. (Production S22)

De manière implicite, cet étudiant commence par interpréter à l'aide du référentiel théorique des probabilités la position des deux points A et B sur le segment S. Pour cela, il considère implicitement que la longueur S est égale à 1, et il choisit deux variables aléatoires *X* et *Y* (Figure 2.a) qui suivent la loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 1] (Référentiel théorique du domaine des probabilités). Par la suite, il décide de représenter géométriquement, en relation avec la notion de l'aire, l'univers de l'expérience aléatoire (qui est [0; 1] x [0 ; 1]). Ce qui conduit à un changement de d'ETM, en passant de celui des probabilités vers celui de grandeurs et mesures. Cette représentation est un carré d'aire un qui va être utilisé par la suite pour résoudre la tâche (Figure 2.b). Comme l'étudiant 1, il interprète l'événement *D* dans un registre symbolique utilisant la valeur absolue (et ses propriétés). Il utilise la propriété : *la somme de la probabilité d'un événement et la probabilité de son évènement contraire est égale à 1*, et termine par une inéquation (Figure 2.c). L'inéquation est résolue graphiquement en considérant implicitement les deux cas : si X > Y alors Y < X−1/2 et Si X ≤ Y alors Y >X+1/2. Il trace les droites d'équation respectivement Y = X+1/2 et Y = X -1/2. Il hachure la partie correspondante à la réalisation de l'événement D et affirme sans justifier que l'aire de cette partie est égale à 1/4 et en déduit sans justifier une nouvelle fois que cette valeur de l'aire correspond à la probabilité de l'événement D (Figure 2.d).

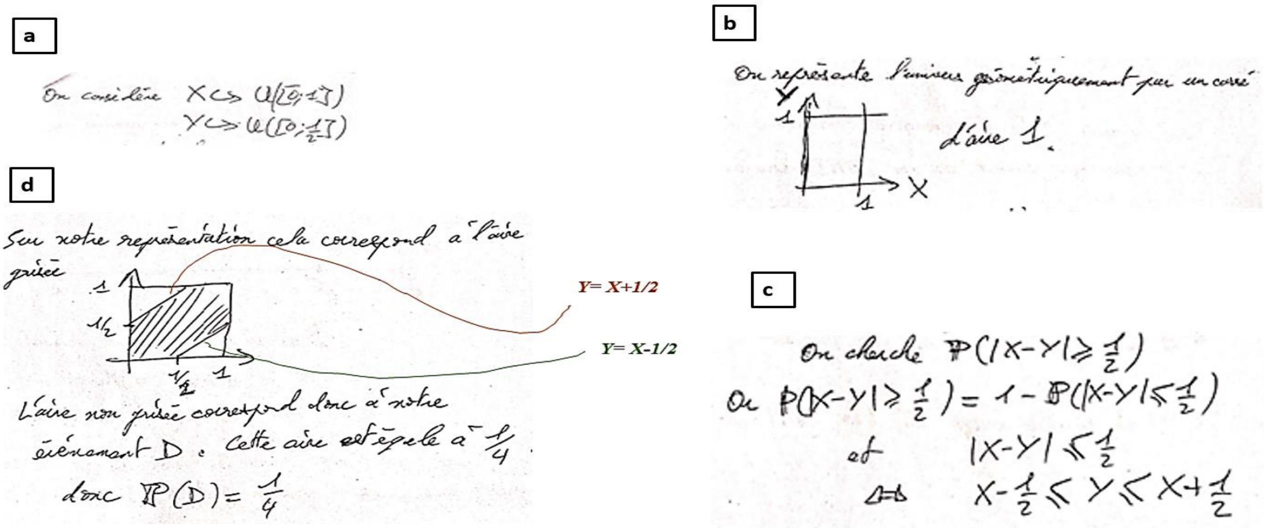


Figure 2 : Production de l'étudiant 2

Déclenché par des éléments du référentiel, son travail se déroule ensuite dans le plan [Sem-Ins] avec l'emploi de plusieurs registres sémiotiques : géométrique (le carré), algébrique (l'inéquation), graphique (représentation graphique de droites). Dans ce processus, le carré est utilisé comme un artefact symbolique pour produire un résultat (ici la probabilité de l'événement D). Ainsi, le carré est mobilisé dans ce travail comme à la fois comme un signe (outil sémiotique) et un artefact (outil technologique), ce changement de statut du carré est facilité par la flexibilité dans les changements de registres dont a fait preuve l'étudiant tout au long de la résolution de la tâche. Cette flexibilité dans les changements de registre est permise grâce au contrôle sémiotique mis en œuvre par l'étudiant et ceci en relation avec le référentiel théorique. De plus, ces changements de registres provoquent alors un jeu entre les genèses sémiotique et instrumentale en relation avec le référentiel théorique. On peut considérer que son travail est complet car il circule entre les trois genèses de l'ETM. Le processus du travail mis en œuvre est ici conforme aux règles du paradigme P2, le résultat obtenu (¼) est exact du point de vue mathématique. Cependant pour que son travail soit considéré comme tout à fait conforme au paradigme P2, il faudrait que le discours de preuve soit plus explicite.

Etudiant 3. (Production T10).

L'étudiant représente la situation aléatoire à l'aide d'un segment de longueur donnée S, en plaçant quelques points. L'événement *D* est interprété en termes de longueur (AB > S/2) (Figure 3.a). Il écrit ensuite la longueur AB comme la différence des abscisses des points A et B (en supposant implicitement que l'abscisse de B est supérieure à celle de A). Cela lui permet d'exprimer la probabilité de l'événement D sous la forme P(2AB < 2) et puis $P(2x_B - 2x_A < s)$ (Figure 3.b). A partir de là, l'étudiant s'engage dans un travail de preuve dans le plan [Sem-Ins] grâce à une simulation informatique sur un tableur (artefact matériel) avec la fonction ALEA (). Cela implique alors un changement d'ETM, en passant de celui des probabilités à celui de l'algorithmique. Cette simulation reproduit le processus décrit pour sélectionner les deux points sans appui théorique. Il s'agit de ce que Varenne (2014) appelle une modélisation algorithmique sans recours à la théorie (Figure 3.c). Il fait le choix de faire une simulation de 1074 tirage de deux points A et B, ceci afin comme il le souligne « *d'approcher le résultat par la loi des grands nombres* » (référentiel théorique du domaine des probabilités). Il souligne que l'appui sur la touche « F9 » suffit pour observer une valeur de la probabilité de l'évènement D (Figure 3.d).

Cet étudiant traduit la situation aléatoire en des systèmes de signes (la longueur AB, le segment S, P (AB>S/2)) lui permettant par la suite de traiter la tâche. Il effectue ensuite un changement de registre, celui du tableur et certaines de ces fonctions, afin de réaliser une simulation de la situation aléatoire. La simulation est alors exécutée à l'intérieur de ce registre mais elle est contrôlée à l'aide des éléments du référentiel théorique (la loi des grands nombres est évoquée pour déterminer la taille de l'échantillon). Le processus du travail mis en œuvre ici est conforme au paradigme P1, et le résultat du travail est obtenu de manière empirique est valable du point de vue mathématique (l’étudiant reste prudent en soulignant qu’il a « conjecturé » la valeur de probabilité de l’événement D.

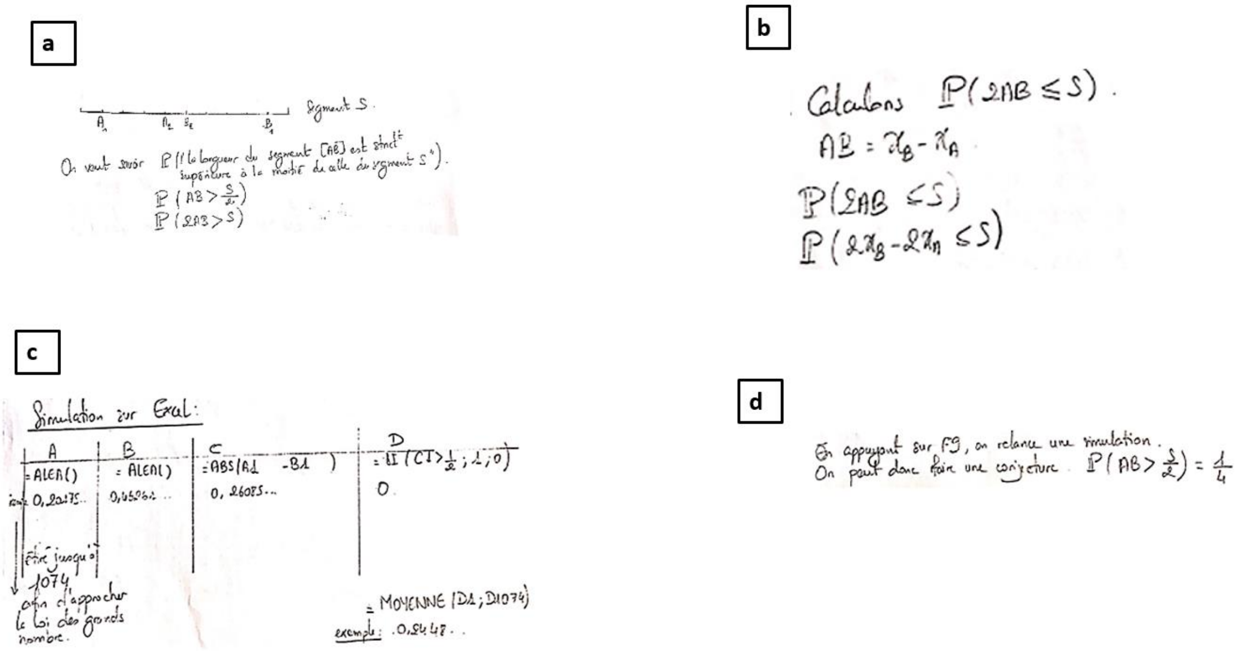


Figure 3 : Production de l’étudiant 3

Synthèse de nos résultats

L’analyse des productions des étudiants a permis de mettre en évidence le fait que la résolution de la tâche commence par une identification et une interprétation des signes, i.e par l’activation de la genèse sémiotique. Elle se poursuit par un traitement de ces signes interprétés et organisés en arguments de manière cohérente. Cette organisation et cette mise en relation sont appuyées et justifiées à l’aide d’outils théorique du référentiel théorique qui structurent une argumentation et un éventuel discours de preuve. En termes de contrôles internes exercés par les étudiants, on détermine si le processus est valable car conforme à un paradigme donné et si le résultat du travail mathématique est valide car exact d’un point de vue mathématique.

Ainsi dans la production 1, l’étudiant se place dans une perspective de construction d’une preuve par démonstration. Il place son travail dans le paradigme P3 et privilégie la genèse discursive de la preuve. Le blocage qu’il rencontre le conduit à changer de paradigme et à aboutir à un résultat faux. En revanche, l’étudiant 2 prend élabore un travail bâti sur changement d’ETM (de celui des probabilités à celui des grandeurs et mesures) et qui mobilise toutes les genèses de l’ETM. Son processus travail est conforme au paradigme P2 et le résultat mathématiquement obtenu est valide.

Dans cette étude, les étudiants s’inscrivent bien dans une pratique discursive de la preuve qui résulte de leur statut d’étudiant en mathématiques. Ils portent une attention particulière aux signes mathématiques utilisés et aux propriétés utilisées. Au cours de la réalisation de la tâche, on constate que les contrôles sont bien activés dans le processus du travail, et un usage des différents outils de contrôle pour guider leur travail.

CONCLUSION

Dans la théorie des ETM, trois attributs permettent d'étudier le travail mathématique : ces buts, ces processus et ces résultats. La notion de contrôle est introduite pour rendre compte de la manière dont les élèves ou les professeurs s'assurent de la qualité du travail engagé tant au niveau des processus que des résultats. En fonction de leur impact sur le travail mathématique, nous avons pu distinguer différents contrôles. Certains sont globaux et portent sur le choix du paradigme qui va orienter le travail. Dans ce cas, les contrôles assurent que les processus du travail engagé sont conformes et que le travail est valable. D'autres contrôles sont locaux et permettent de valider pas à pas le travail effectué ; il s'agit des contrôles sémiotiques, technologique et théorique. Chacun d'eux se rapporte à une genèse spécifique de l'ETM. D'un point de vue externe, il est également important d'étudier l'efficacité et l'importance des contrôles opérés.

L'analyse du travail en termes de contrôles aide à comprendre le travail mathématique en identifiant et décrivant les choix des élèves et des professeurs au cours de la réalisation de la tâche. Elle offre ainsi l'occasion de comprendre la logique des différentes actions mathématiques. Nous pensons que l'identification et le repérage des différents points de contrôle par les professeurs peuvent être un préalable nécessaire qui aidera ensuite les élèves à exercer leur *vigilance* sur la conformité des processus mis en œuvre et sur la validité des résultats obtenus. Cette vigilance des élèves sur leur travail doit devenir, à terme, indépendante du regard de l'enseignant.

REFERENCES

Arzarello, F., & Sabena, C. (2011). Semiotic and theoretic control in argumentation and proof activities. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2/3), 189–206.

Balacheff, N. (2017). Contrôle, preuve et démonstration. Trois régimes de la validation. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, Grenoble : La pensée sauvage.

Kuzniak, A., Nechache, A., & Drouhard, J.P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM Mathematics Education. 48*(6), 861-874. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0773-0.

Kuzniak, A., & Nechache, A. (2019). Sur quelques caractéristiques de la genèse discursive dans les Espaces de Travail Mathématique. In L. Vivier et al. (Eds). (2019). *Actes du Sixième Symposium sur le Travail Mathématique*. Valparaíso, Chili 149-162.

Kuzniak, A., & Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of Mathematical Working Spaces. *Educational Studies in Mathematics, 70* (2) 127-142.

Polya, G. (1985). *Comment poser et résoudre un problème*. Jacques Gabay.

Richard, P. R., Venant, F., & Gagnon, M. (2019). Issues and Challenges in Instrumental Proof. In G. Hanna, D. A. Reid, & M. de Villiers (Eds.), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching* (pp. 139-172). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1_7

Robert., A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp.59-68). Toulouse: Octarès,

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* San Diego: Academic Press.

Varenne, F. (2014). Épistémologie des modèles et des simulations : tour d'horizon et tendances. In J-M. Lévy (Éd.), *Les modèles, possibilités et limites : Jusqu'où va le réel ?* (pp. 13-46). Paris: Editions Matériologiques.

BIFURCATION GENETIQUE DANS LES ETM PERSONNELS

Fabrice Vandebrouck

Université Paris Cité, LDAR, 75013 PARIS, France

Dans cette communication, nous analysons le travail d'étudiants de master MEEF dans une production en temps limité où il s'agit essentiellement de prouver la convergence d'une suite récurrente de niveau terminale. L'analyse fait apparaître diverses distorsions du travail mathématique attendu, du parasitage de la dimension discursive du travail par la dimension sémiotique et jusqu'à ce que nous avons relevé de nombreuses fois et que nous avons qualifié de bifurcation génétique.

L'espace de travail mathématique personnel permet une certaine modélisation du travail de l'élève ou de l'étudiant (Kuzniak et Tanguay, 2016). Quelques travaux (Derouet, 2016 ; Florès et al., 2020 ; Florès, 2021) commencent à articuler l'approche en termes de (sous) activités mathématiques (ou activités) avec la théorie des Espaces de Travail Mathématiques (ETM). Ces rapprochements entre la théorie de l'activité en didactique des mathématiques (Vandebrouck et Robert 2017, Vandebrouck 2018) et la théorie des ETM amènent à envisager d'une part des sous-activités mathématiques qui relèvent de chacune des trois dimensions de l'ETM : sémiotiques, instrumentales, discursives mais aussi des genèses qui embarquent des sous activités mathématiques de reconnaissance, d'organisation et de contrôle. C'est dans la continuité de ces travaux que nous nous situons. On s'intéresse au travail d'étudiants de master MEEF, dans le cadre d'une production autonome en temps limité, sur un exercice du niveau de la classe de terminale sur les suites définies par récurrences (Figure 1).

ACTIVITÉS ET TRAVAIL MATHÉMATIQUE

La TADM (théorie de l'activité en didactique des mathématiques) est une théorie d'analyse du processus enseignement-apprentissage en classe des mathématiques, à la fois dans ses dimensions collective et individuelle mais aussi selon des dimensions complémentaires : cognitive - liée aux connaissances mathématiques en jeu dans une séance - et médiative – liée aux interactions et à la communication entre les acteurs pendant des déroulements de classe.

On distingue des évolutions dans la théorie de l'activité originelle, depuis les apports de Vygotsky sur la médiation de l'objet de l'activité d'un sujet par les outils, la distinction chez Léontiev entre l'activité proprement dite, les actions externalisées et les opérations qui sont des actions internalisées (psychiques), et enfin les développements récents d'Engeström sur l'activité comme système. En particulier chez Léontiev, on a un dédoublement de la théorie entre d'une part la notion d'activité comme étant un processus collectif dépendant des interactions et de la communication, les sujets partageant le même motif de l'activité mais répondant à des actions et des buts qui peuvent être différents, et d'autre part l'évolution plus cognitive développée dans l'école française en ergonomie cognitive et en didactique professionnelle. De sorte qu'on va bien distinguer d'une part l'Activité[3] (de nature collective, avec un A), définie par un triplet {sujet, objet, outils} plongé dans un collectif (avec des règles et une « division du travail » le cas échéant) et un contexte institutionnel et social « spatio-temporel », et d'autre part l'activité individuelle du sujet avec ses dimensions cognitive et médiative (communication et interactions avec le contexte). Selon Rogalski (2008)

> L'activité est un processus qui se développe dans une temporalité donnée, intégrant des facteurs psychiques (...), des opérations d'interaction avec les objets dont la transformation ou la conservation est visée par l'action, et des processus d'interaction avec d'autres humains (p. 26).

L'analyse de la tâche est au cœur de l'analyse de l'activité et de l'analyse du travail mathématique personnel (ETM personnel). Selon la psychologie cognitive, la tâche est définie comme ce que l'élève doit faire, son but à réaliser dans des conditions données. On distingue la tâche prescrite, la tâche redéfinie, la tâche réalisée par l'élève. L'activité est déterminée par l'élève lui-même mais aussi par la situation, c'est-à-dire la tâche et le contexte de la tâche – contexte spatial, l'environnement de travail, ses ressources et ses contraintes sociales et institutionnelles – contexte temporel, le scénario global. L'activité dépasse cependant le seul travail mathématique. Deux élèves peuvent développer le même travail – au niveau des actions - mais entre l'élève qui ne répond qu'à la tâche (versant productif de l'activité) et l'élève dont le motif est la recherche des aspects génériques lui permettant d'augmenter ses connaissances pour des tâches ultérieures de même type (aspect constructif de l'activité), il y a une réelle différence. Comprendre l'activité de l'élève nécessite donc une méthodologie d'analyse de la tâche prescrite pour inférer l'activité attendue, une observation des actions/interactions de l'élève pour inférer les activités possibles a minima et a maxima (la ZAP, « zone des activités possibles »), et en toute rigueur, une phase d'entretien avec l'élève pendant ou après la réalisation de la tâche, pour accéder à ses représentations personnelles de la tâche prescrite et donc à l'activité effective développée. Bronckart (2010) explicite cette même méthodologie pour le cas de l'analyse de l'activité du travailleur en situation.

> Pour l'ergonomie, l'activité des travailleurs, c'est leur faire et leur vécu de ce faire, qui s'appréhende à la fois par des démarches d'observation et de mesure des comportements, et par des démarches visant à ce que les opérateurs verbalisent leurs propres représentations des situations de travail ainsi que les multiples aspects de leur agir vécu (p. 73).

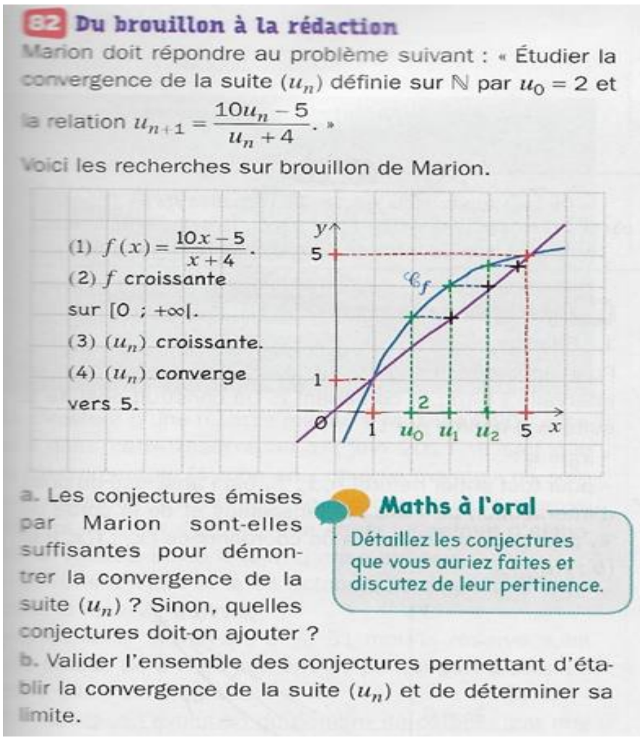
Les activités mathématiques de l'élève sont des segments cognitifs de son activité individuelle. Ce sont des mises en fonctionnement de connaissances mathématiques

[3] Noter que c'est encore dans des sens différents que l'on rencontre « activité » dans « l'activité de la classe », qui relève plutôt d'un système complexe composé des sous-systèmes Activité(s) de(s) (l') élèves / Activité du professeur dont les motifs sont bien différents ; ou bien encore « l'activité donnée aux élèves » qui cette fois relève de la tâche prescrite.

(Robert, 2008). Elles dépendant directement des choix de tâches faits par l'enseignant (tâches prescrites) mais aussi du déroulement de la classe (forme de travail des élèves, toutes les interactions dans la classe…), du scénario global (ce qu'on a appelé plus haut le contexte temporel) et de l'environnement de travail (contexte spatial, contraintes sociales et institutionnelles…). Les activités mathématiques relèvent de différents cadres (Douady, 1986), de différents registres (Duval, 1995) et sont plus ou moins de « haut niveau » en fonction de la complexité de la tâche et notamment des adaptations de connaissances que suppose la résolution de la tâche compte tenu du contexte. Elles sont un accès à la fois aux connaissances disponibles ou mobilisables de l'élève, mais aussi aux processus de développement (conceptualisation) qui se jouent pendant la réalisation de la tâche prescrite à l'élève. En effet, les résultats classiques de didactique des mathématiques nous permettent d'émettre des hypothèses sur le développement des connaissances en termes d'activités mathématiques : l'importance des activités autonomes, des changements de cadres, des conversions entre registres, les dialectiques outil-objet, ancien-nouveau, contextualisé-décontextualisé, le rôle des tâches complexes, des rétroactions, des milieux a-didactiques etc etc. En lien avec ces hypothèses, le relief (Robert, 2008) recouvre en TADM une triple analyse croisée épistémologique, curriculaire et didactique des notions mathématiques en jeu dans la tâche, visant à baliser dans un contexte donné des activités mathématiques souhaitables et possibles sur les contenus en jeu (en tenant compte du temps long et de la conceptualisation).
Dans Robert et Vandebrouck (2014) certaines catégories de sous-activités mathématiques ont été introduites : reconnaissances mathématiques, organisations des raisonnements, traitements internes. Par exemple les visualisations de représentations (graphiques, algébriques…) embarquent des reconnaissances mathématiques, *a fortiori* si elles sont non iconiques. Ici nous allons mobiliser des catégories plus générales qui remontent à Galperine (1966) : les fonctions d'orientation, d'exécution et de contrôle des actions et des opérations. Ces fonctions ne sont pas indépendantes des sous-activités mathématiques mais elles donnent un point de vue complémentaire. Les actions (ou opérations) de contrôle, déclenchées en aval de l'exécution, mettent en jeu des sous activités mathématiques de reconnaissances. Les actions d'orientation, en amont des exécutions, mettent en jeu des activités de reconnaissance et d'organisation des raisonnements. Les actions d'exécution mettent en jeu les trois catégories des sous activités. Le papier n'étant pas sur la discussion théorique entre le niveau des actions, des opérations et sous-activité mathématiques, nous choisissons de parler simplement d'orientation, d'exécution, de contrôle du travail – en un sens similaire à « activités de contrôle » (Florès, 2021). Orientation, exécution, contrôles du travail nécessitent, à des degrés plus ou moins élevés, des reconnaissances mathématiques (et aussi des connaissances non mathématiques). Ainsi les reconnaissances sont au cœur de la complexité des activités mathématiques même si elles sont mises en jeu différemment dans l'orientation, l'exécution, le contrôle du travail.

Notre objectif dans cette communication est de croiser les fonctions de Galperine, les sous-activités mathématiques et les dimensions des ETM, pour répertorier des lacunes du travail des étudiants, notamment le travail qui n'est pas correct bien que cohérent et complet (Nechache et Gomez-Chacon, 2022). En illustrant par des copies d'étudiants du master MEEF sur la tâche d'évaluation en temps limité, très souvent mal réussie, on peut repérer et analyser ces différentes distorsions du travail, qui vont notamment jusqu'à ce que nous avons défini en terme de bifurcation génétique. Cependant, comme notre méthodologie est incomplète dans l'analyse de ces données (pas d'observation de déroulement ni d'interaction avec les étudiants pour mieux comprendre leur activité), les résultats restent assez limités du point de vue de l'activité mathématique effective et de son développement.

LA TÂCHE PROPOSÉE AUX ÉTUDIANTS


82 Du brouillon à la rédaction

Marion doit répondre au problème suivant : « Étudier la convergence de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et la relation $u_{n+1} = \dfrac{10u_n - 5}{u_n + 4}$. »

Voici les recherches sur brouillon de Marion.

(1) $f(x) = \dfrac{10x-5}{x+4}$.

(2) f croissante sur $[0\ ;+\infty[$.

(3) (u_n) croissante.

(4) (u_n) converge vers 5.

a. Les conjectures émises par Marion sont-elles suffisantes pour démontrer la convergence de la suite (u_n) ? Sinon, quelles conjectures doit-on ajouter ?

b. Valider l'ensemble des conjectures permettant d'établir la convergence de la suite (u_n) et de déterminer sa limite.

Maths à l'oral

Détaillez les conjectures que vous auriez faites et discutez de leur pertinence.

Figure 1 : Enoncé de terminale proposé aux étudiants de MEEF

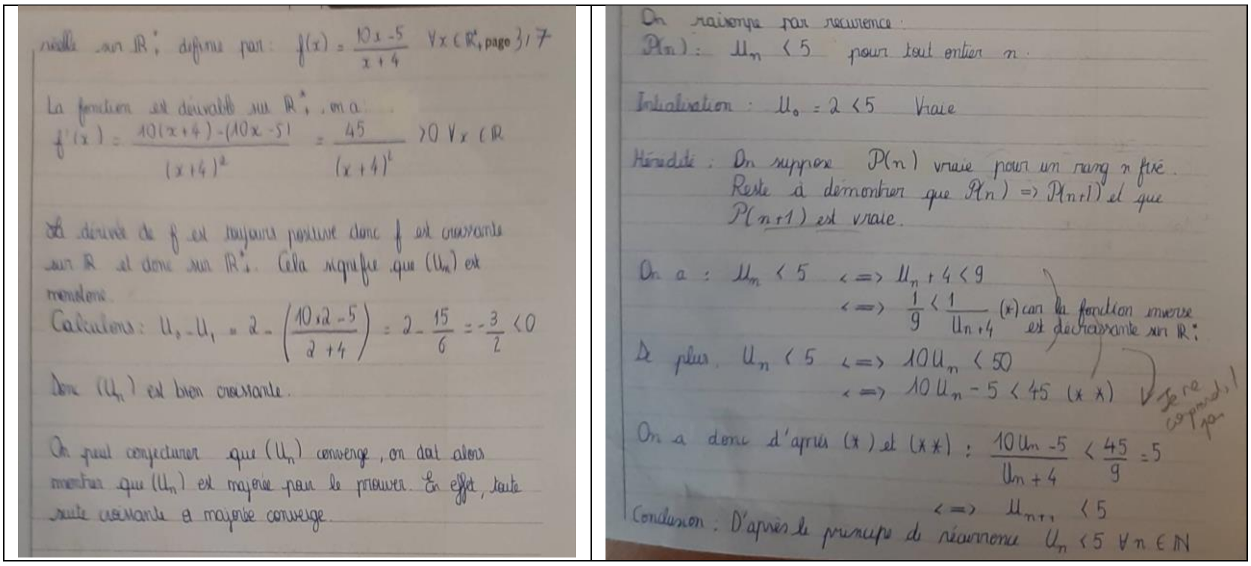
La tâche concerne la preuve de la convergence d'une suite récurrente définie par *U*n+1=*f*(*U*n). C'est une tâche qui reste assez présente en terminale dans la spécialité mathématique du lycée. Florès (2021) a très bien mis en évidence l'importance des suites récurrentes dans les problèmes anciens ou contemporains dans le champ des mathématiques. Les activités mathématiques attendues dans l'exécution de la preuve doivent relèvent à la fois du cadre des suites numériques et du cadre des fonctions numériques, dans une conceptualisation « croisée » des deux types de notions. Les élèves de terminale amalgament beaucoup ces notions et il en est de même pour certains étudiants de MEEF (Rousse, 2018). Les activités relevant d'un « sous-cadre » des suites arithmétiques et géométriques ne sont par exemple jamais développées sous le point de vue des suites récurrentes *U*n+1=*f*(*U*n) avec *f* particulière. Cette amorce pourrait servir de réinvestissement et de support à la théorie générale qui commence à être abordée en terminale, mais ce n'est jamais traité sous cet angle dans les manuels. Les activités mathématiques attendues relèvent aussi fortement des conversions de représentations entre les registres formels, algébriques et graphiques, ce qui participe de la difficulté (complexité de la tâche). En terme de sous activités, il y a beaucoup de reconnaissances en jeu pour prouver la convergence de suites récurrentes et sans balisage, beaucoup d'organisation attendue de la part des élèves en terminale : reconnaître la fonction numérique en jeu si elle n'est pas explicitée, organiser son étude sur un intervalle stable à identifier s'il n'est pas donné, déduire des propriétés de la suite directement ou à partir de propriétés de la fonction, reconnaître parfois la nécessité de raisonnements par récurrence…

Dans la consigne donnée aux étudiants de MEEF, on demande de prouver que la suite converge vers 5. L'énoncé tel qu'il est proposé à des élèves de terminale (figure 1) est volontairement fourni aux étudiants. Cela procure des occasions de contrôle (Florès, 2021) qui permettent de rendre les contrôles explicites dans l'activité des étudiants. Cela favorise également l'orientation et l'entrée des étudiants dans l'exécution de la tâche (la preuve mathématique de la convergence de la suite vers 5). Les étudiants de MEEF ont toutes les connaissances anciennes nécessaires, supposées disponibles, pour répondre à la question mathématique posée. Les étapes de la preuve sont : (1) l'intervalle [1,5] est un intervalle stable de la fonction ; (2) la fonction y est croissante donc la suite est monotone ; (3) $U_2 > U_1$ donc la suite est croissante ; (4) la suite est bornée donc elle est convergente vers une limite l ; (5) enfin par résolution de l'équation $f(l)=l$ et élimination d'une des deux solutions, la valeur de l est 5. En termes de sous activités mathématiques attendues, il y a tout à la fois des sous activités d'organisation (définition des différentes étapes à suivre), de reconnaissance (des étapes à suivre, des méthodes et théorèmes à utiliser…) et de traitement interne. Le travail attendu relève principalement de la dimension discursive. Le paradigme est A2, celui de l'analyse calculatoire, emblématique à la fin du lycée et en master MEEF.

ORIENTATION ET CONTRÔLE DU TRAVAIL, DEUX EXEMPLES

Dans le travail cohérent et complet, il est souvent attendu que les étudiants orientent leur travail (et leur preuve) par des arguments sémiotiques et/ou instrumentaux. Ceux-ci assurent une certaine circulation du travail, avec également des possibilités de contrôles selon ces mêmes deux dimensions – bien que les orientations et les contrôles purement théoriques soient possibles chez les experts notamment mais alors le travail reste confiné sur la seule dimension discursive. La tâche proposée aux étudiants facilite l'orientation et le contrôle sémiotiques, grâce à l'accès à la représentation graphique de la suite et de la fonction (voir figure 1). Les étudiants peuvent également sur-interpréter les conjectures de Marion ce qu'on ne considère pas comme mettant en jeu la dimension sémiotique. Par contre, les étudiants ne disposent pas d'outils de construction. On dira que le travail est semi-complet dans la mesure où il y a une circulation entre la dimension sémiotique, notamment pour l'orientation et le contrôle, et la dimension discursive (l'exécution de la preuve). Les deux premiers exemples illustrent respectivement les orientations et les contrôles sémiotiques, mais

qui parasitent l'exécution de la preuve selon la dimension discursive du travail.
On voit clairement dans la figure 2 cette orientation sémiotique permise par la figure donnée aux étudiants dans l'énoncé. L'étudiant travaille selon le bon paradigme et essentiellement selon la dimension discursive, ce qui est attendu. Il a correctement justifié que la suite est croissante et doit montrer qu'elle est majorée pour justifier qu'elle converge, toujours pas des arguments théoriques. Il reconnaît la nécessité d'un raisonnement par récurrence et développe un schème associé (intégrant des règles d'actions et des invariants opératoires). Il propose notamment en premier lieu une hypothèse de récurrence P(n) : Un < 5. Comme on ne sait pas si les conjectures de l'élève Marion de l'énoncé sont vraies ou fausses, rien ne permet à ce moment-là de proposer 5 comme majorant, si ce n'est la représentation graphique de la suite fournie. L'élève aurait pu rechercher les points fixes de *f* par exemple. On a donc une orientation de la preuve, a maxima par une visualisation graphique, a minima par un effet de contrat avec les conjectures de Marion et sans sous-activités mathématiques. C'est une interaction avec l'élève qui permettrait de mieux comprendre l'activité.


réelle sur $\mathbb{R}_+^*$ définie par : $f(x) = \frac{10x-5}{x+4}$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ page 3/7

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on a
$f'(x) = \frac{10(x+4)-(10x-5)}{(x+4)^2} = \frac{45}{(x+4)^2} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

La dérivée de f est toujours positive donc f est croissante sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{R}_+^*$. Cela signifie que (U_n) est monotone.
Calculons : $U_0 - U_1 = 2 - \left(\frac{10\times 2-5}{2+4}\right) = 2 - \frac{15}{6} = -\frac{3}{2} < 0$

Donc (U_n) est bien croissante.

On peut conjecturer que (U_n) converge, on doit alors montrer que (U_n) est majorée pour le prouver. En effet, toute suite croissante et majorée converge.

On raisonne par recurrence :
$P(n)$: $U_n < 5$ pour tout entier n.

Initialisation : $U_0 = 2 < 5$ Vraie

Hérédité : On suppose $P(n)$ vraie pour un rang n fixé.
Reste à démontrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ et que $P(n+1)$ est vraie.

On a : $U_n < 5 \iff U_n + 4 < 9$
$\iff \frac{1}{9} < \frac{1}{U_n+4}$ (*) car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}$;
De plus, $U_n < 5 \iff 10U_n < 50$
$\iff 10U_n - 5 < 45$ (**)

Je ne comprends pas

On a donc d'après (*) et (**) : $\frac{10U_n-5}{U_n+4} < \frac{45}{9} = 5$
$\iff U_{n+1} < 5$

Conclusion : D'après le principe de récurrence $U_n < 5$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Figure 2 : Première production d'étudiant

Malheureusement, cette orientation semble devenir un pilotage, c'est-à-dire un contrôle pro-actif qui est une distorsion du travail. On peut penser que l'étudiant est convaincu que la majoration qu'il a proposée est valide, et que son calcul devient faux pour se conformer à la visualisation. Il n'y a pas de contrôle discursif du traitement des inégalités, faute peut-être de non disponibilité des règles algébriques nécessaires. On a un ainsi parasitage de la dimension discursive du travail par sa dimension sémiotique. Le travail n'est pas correct, bien qu'il y ait une circulation et qu'il est semi-complet. Le contrôle du travail devient superflu étant donné que le travail a été orienté par un contrôle pro-actif (pilotage).

Dans cette deuxième production (figure 3), la situation est différente. La visualisation n'intervient pas dans l'orientation mais dans le contrôle. En effet le travail est a priori uniquement orienté selon des arguments discursifs du référentiel théorique. Le schème d'étude de la suite définie par récurrence intègre des théorèmes en actes faux, notamment « si *f* est croissante, la suite est croissante » et très certainement « la limite de la suite est donnée par la limite en +∞ de la fonction *f* ». Malheureusement cette limite de la fonction ne coïncide pas avec la visualisation graphique (reconnaissance) de la valeur 5 comme limite de la suite. On pourrait dire qu'il y a une tension dans l'activité de l'élève, entre les dimensions sémiotiques et discursives de son travail. On peut penser qu'il y a cette fois un contrôle par la visualisation du graphique. A nouveau, il y a donc un parasitage de la dimension discursive du travail par la dimension sémiotique. Le travail se situe toujours dans le bon paradigme. Il y a une circulation du travail (travail semi complet) mais le travail est non correct. L'étudiant va réorienter sa preuve à la suite de son contrôle (comme pour juguler la tension). Il propose de considérer la suite (*V*n) définie par ½ (*U*n) car 5 est la moitié de 10. Il fait des erreurs de calculs et de raisonnements successives sans les identifier, comme dans la première production, de sorte que son exécution, même fausse, permet de conclure que la limite de la suite (*U*n) est bien 5. A nouveau le contrôle final est superflu puisqu'il s'est substitué à l'orientation à un moment de l'exécution de la preuve.

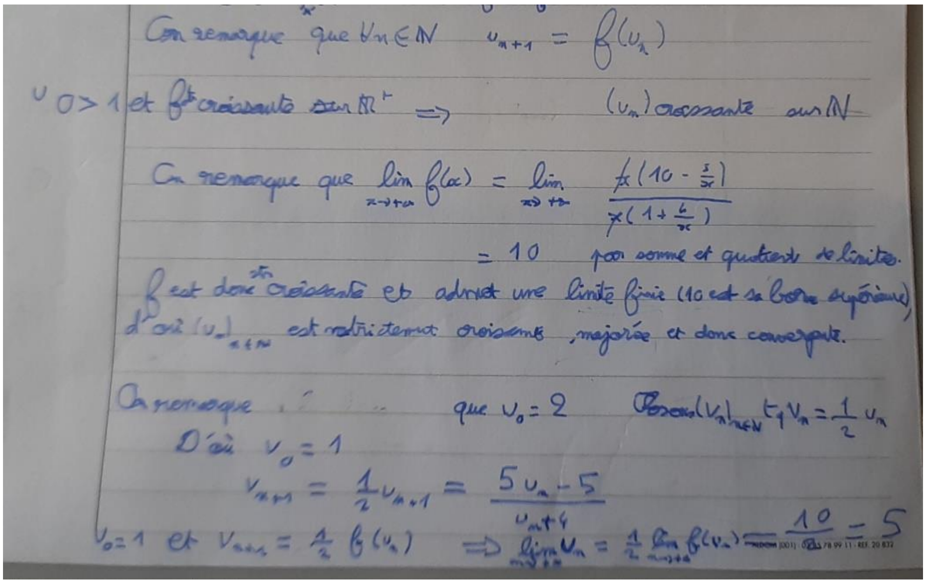


Figure 3 : Deuxième production d'un étudiant

Dans les deux productions, on a une circulation du sémiotique vers le discursive, soit pour l'orientation, soit pour le contrôle. Mais *in fine,* dans les deux cas, la dimension sémiotique du travail vient parasiter la dimension discursive et la piloter pour que l'argumentation développée soit conforme à ce qui est visualisé. On ne peut sans doute pas encore parler de bifurcation génétique dans ces cas, dans la mesure où l'étudiant développe bien une argumentation (genèse discursive). Par exemple, le premier étudiant s'appuie peut-être sur un théorème en acte faux, qui fait partie de son référentiel théorique. Pour lui la preuve est sans doute correcte, orientée et peut-être même contrôlée, en retour, par la dimension sémiotique de son travail. Il en est de même du deuxième qui pense surement que son raisonnement est correct. C'est sans doute un contrôle discursif, qui ne s'exerce dans aucun des deux cas, qui permettrait de contrôler l'argumentation. Ce manque de contrôle discursif semble être une lacune spécifique dans le travail des étudiants.

LA BIFURCATION GÉNÉTIQUE : QUAND L’ARGUMENTATION A DISPARU

Dans ce nouvel exemple (figure 4), l’exécution de la preuve est surement à nouveau orientée par la visualisation : l’élève visualise (a maxima) sur la représentation graphique que la suite est convergente vers 5. Il y a une argumentation tout à fait partielle : la seule vérification que *f*(5)=5. Et l’élève conclut directement que la suite converge vers 5 sans montrer, ni qu’elle converge, ni que 5 est le seul point fixe de *f*. A nouveau, la dimension discursive est parasitée par la dimension sémiotique du travail mais sans visualisation, le travail de preuve ne pourrait pas se développer du tout. On ne peut donc pas considérer qu’il y a une genèse discursive mais plutôt ce qu’on va appeler une bifurcation génétique du pôle *representamen* vers la preuve. L’étudiant travail bien dans le bon paradigme. Il y a bien une certaine circulation du travail, le travail est semi-complet mais il n’est pas correct.

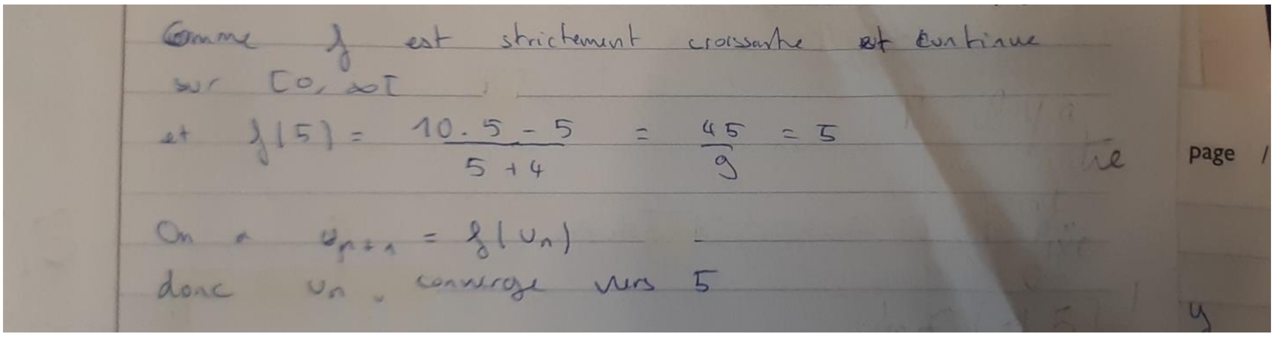
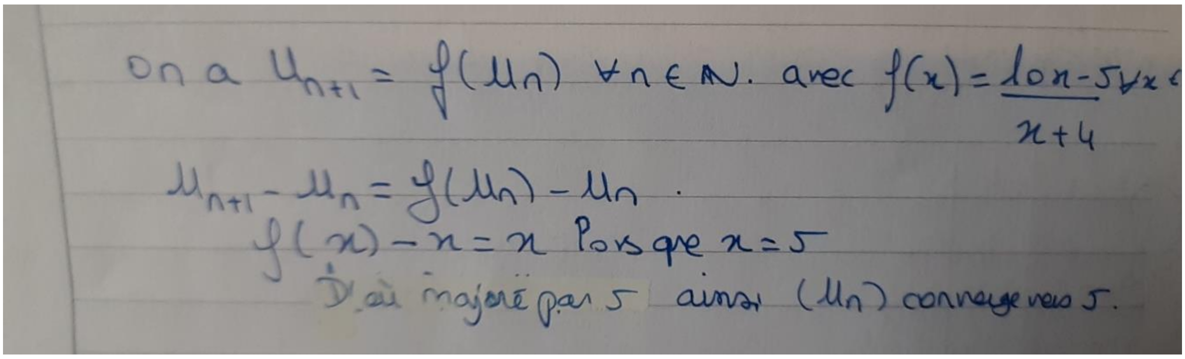


Figure 4 : Troisième production d’étudiant

Dans le quatrième exemple (figure 5), le travail semble toujours orienté par la visualisation à partir de la représentation graphique. L’argumentation associée est réduite à un amalgame entre une tentative de recherche des solutions de *f*(*x*)-*x*=0 et des solutions de *f*(*x*)=*x*. Ce qui pilote le travail, c’est le fait qu’on doit écrire *x*=5 dans cette argumentation. L’étudiant a également visualisé le caractère majorant de 5 mais ne le relit pas à des éléments théoriques comme par exemple Un < 5 ou le théorème sur les suites croissantes majorée. Ce qui pilote le travail, c’est uniquement la visualisation afin de conclure que la suite converge vers 5. A nouveau, le travail est clairement dans le bon paradigme. Il y a bien une circulation puisque la visualisation est manifestement mobilisée (travail semi-complet). Cependant trop peu de choses sont mobilisées du référentiel théorique pour qu’on puisse identifier une genèse discursive. Tout se passe comme si la visualisation seule permet d’établir le résultat de la preuve : « (Un) converge vers 5 ». Dans l’espace de travail mathématique personnel de l’étudiant, la genèse sémiotique est en quelque sorte au service de la visualisation et de l’argumentation simultanément, ce qu’on propose à nouveau de qualifier à nouveau de bifurcation génétique du pôle *representamen* jusqu’au pôle « preuve ».



On a $U_{n+1} = f(U_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$. avec $f(x) = \frac{10x-5}{x+4}$

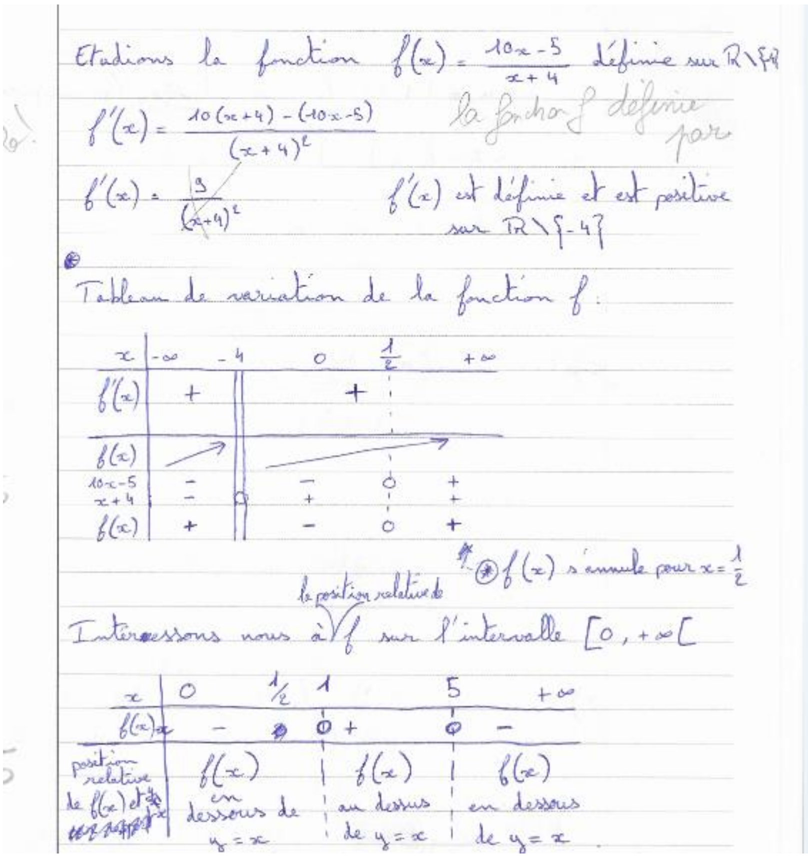
$U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n$.

$f(x) - x = x$ Lorsque $x = 5$

D'où majoré par 5 ainsi (U_n) converge vers 5.

Figure 5 : Quatrième production d'étudiant

Dans la cinquième production (figure 6), la bifurcation génétique est moins grossière, plus locale. Elle concerne à nouveau une visualisation qui pilote directement la preuve, mais uniquement localement, pour compenser le manque d'argumentation discursive locale s'appuyant sur des connaissances du référentiel théorique : plus précisément le fait que *f* soit croissante est correctement justifié ; le tableau de variation est correct. Mais le tableau de signe de *f*(*x*)-*x* et l'argumentation du fait que *f*(*x*)-*x* est positif sur l'intervalle [1,5] proviennent directement de la visualisation et s'insèrent subrepticement, au bon moment, dans l'argumentation. On reconnaît sans doute à nouveau, dans cette production, un schème d'action de l'élève pour étudier une suite récurrente. Le travail se place dans le bon paradigme. Une lecture rapide pourrait laisser penser que le travail est correct.



Etudions la fonction $f(x) = \frac{10x-5}{x+4}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-4\}$

$f'(x) = \frac{10(x+4) - (10x-5)}{(x+4)^2}$ ~~la fonction f définie par~~

$f'(x) = \frac{45}{(x+4)^2}$ $f'(x)$ est définie et est positive sur $\mathbb{R}\setminus\{-4\}$

Tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$	-4	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	||	+		
$f(x)$	↗	||	↗		
$10x-5$	−	||	−	0	+
$x+4$	−	0	+		+
$f(x)$	+	||	−	0	+

$f(x)$ s'annule pour $x = \frac{1}{2}$

Intéressons nous à la position relative de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$

x	0		$\frac{1}{2}$	1		5		$+\infty$
$f(x)-x$		−		0	+	0	−	
position relative de $f(x)$ et $y=x$		$f(x)$ en dessous de $y=x$			$f(x)$ au dessus de $y=x$		$f(x)$ en dessous de $y=x$	

Figure 6 : Cinquième production d'un étudiant

Il y a une circulation dans la mesure où l'étudiant visualise sur la représentation graphique fournie la position du graphe de f et de la droite et de la droite y=x. Il s'agit bien d'une activité de visualisation non iconique dans la mesure où l'étudiant sait traduire cette information graphique en signe de $f(x)$-x pour servir son argumentation. Poursuivant notre terminologie, on peut dire qu'il y a localement une bifurcation génétique. La dimension sémiotique du travail n'a pas seulement permis d'orienter le travail mais elle s'est substituée localement à la dimension discursive du travail. En particulier, un contrôle sémiotique est encore superflu à cet endroit de la preuve.

CONCLUSION

On a illustré plusieurs types de productions d'étudiants, sur une même tâche. Dans chaque cas, le travail est dans le paradigme attendu. Il y a une circulation du travail entre les visualisations (des reconnaissances pour les orientations et les contrôles graphiques) et les argumentations (avec des reconnaissances d'arguments théoriques). Le travail selon la dimension sémiotique (visualisation de la représentation graphique fournie) permet d'orienter le travail de preuve. Typiquement formuler la bonne hypothèse de récurrence dans le premier exemple. Il permet aussi parfois de le contrôler. D'ailleurs la tâche a été choisie pour favoriser et rendre explicites l'orientation et le contrôle du travail (en suivant l'idée des occasions de contrôles de Florès, 2021). C'est une caractéristique du travail de l'expert mathématicien, qui sait orienter et contrôler l'exécution de son travail par les dimensions sémiotiques et instrumentales. Cependant chez le mathématicien, il y a aussi une vigilance discursive de sorte que les orientations, contrôles et exécutions rencontrent toutes les trois dimensions du travail.

Ici les étudiants ont des lacunes et manquent de connaissances dans leur référentiel théorique. Ces lacunes ne leur permettent pas totalement d'orienter et de contrôler leur travail selon la dimension discursive, en support des orientations et contrôles sémiotiques. Ils orientent et contrôlent fortement leur travail selon la dimension sémiotique. Le travail se replie même plus ou moins profondément dans sa dimension sémiotique et vient parasiter la dimension discursive. Lorsque la distorsion est poussée à son terme, la dimension sémiotique ne sert plus seulement l'orientation ou le contrôle de la preuve mais elle sert directement l'exécution de la preuve : c'est la bifurcation génétique.

Si on généralise, dans la bifurcation génétique, la finalité des activités mathématiques reste la preuve mais les connaissances mises en fonctionnement pour celle-ci ne relèvent pas du référentiel théorique. Les activités concernent seulement la visualisation des représentations (de l'ordre des sous activités de reconnaissances) ou bien de constructions avec les artefacts (de l'ordre des traitements avec les artefacts matériels ou symboliques) et elles se substituent aux activités de preuve attendues. C'est ainsi un détournement du travail par rapport à ce qui est attendu dans l'espace de travail de référence. Dans l'espace de référence de l'élève, les visualisations et les constructions participent, en fonction de leur finalité, des activités d'orientation et de contrôle du travail selon la dimension discursive. Quand il y a bifurcation génétique, il n’y a plus de travail selon la dimension discursive. La finalité de l’activité reste la preuve mais cette preuve est uniquement le fruit de visualisations et de constructions. Le phénomène de bifurcation génétique est en fait renforcé – si ce n’est provoqué - par la tâche telle qu’elle est proposée ici aux étudiants du master MEEF. En effet, les élèves peuvent visualiser sur l’énoncé de terminale un certain nombre de propriétés de la fonction et de la suite. Ils ne sont en outre pas en capacité de savoir ce qui relève du référentiel théorique – acquis, ou à prouver – et ce sur quoi ils peuvent effectivement s’appuyer par visualisation. D’où ce phénomène de bifurcation. On peut se demander s’il ne peut pas en être de même, pour les élèves de terminale, si on promeut trop le travail à partir de représentations ou de constructions par les artefacts. Plus que l’orientation et le contrôle attendu, le travail par la visualisation ou la construction ne risque-t-il pas parfois de se substituer au travail argumentatif ?

REFERENCES

Bronckart, J-P. (2010). *Une introduction aux théories de l’action*. Carnets de sciences de l’éducation, 3ième édition revue et corrigée. Université de Genève.

Derouet, C. (2016). *La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse en terminale S*. Thèse de l’Université Paris Diderot.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2) 5–31.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne: Peter Lang.

Flores González, M. (2021). *Activité et travail mathématique à la transition lycée-université en Analyse : le cas de suites Un+1=f(Un).* (Thèse). Université de Paris.

Flores González, M., Vandebrouck, F., & Vivier, L. (2020). L’apprentissage du calculus dans une tâche classique de la transition lycée-université. *Cahier du LDAR numéro 23*, Juin 2020, IREM de Paris.

Galperine, P. (1966). Essai sur la formation par étapes des actions et des concepts. In A. Leontiev, A. Luria et A. Smirnov (Ed.), *Recherches psychologiques en URSS* (pp. 114–132). Editions du progress.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM, 48*(6), 721–737. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x

Nechache A., & Gomez Chacon I. (2022). Methodological aspects in the theory of mathematical working spaces. In Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. & Richard, P. (Eds.). *Mathematical Work in an Educational Context. The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*. Springer.

Robert, A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. Dans F. Vandebrouck (dir.), *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 59-68). Toulouse: Octarès Editions.

Rogalski, J. (2008). Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. Dans F. Vandebrouck (dir.), *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 23-30). Toulouse : Octarès Editions

Robert, A. & Vandebrouck, F. (2014). Proximités en acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(2/3), 239-285.

Rousse, S. (2018). *Discret et continu au lycée, enjeux de ces notions à travers l'étude de l'enseignement de l'analyse et des probabilités*. Thèse de l'Université Paris Diderot

Vandebrouck F., Robert A. (2017). Activités mathématiques des élèves avec des technologies, *Recherche en Didactique des Mathématiques, 37*(2-3), 333-382.

Vandebrouck F. (2018). Activity Theory in French Didactic Research. In: Kaiser G., Forgasz H., Graven M., Kuzniak A., Simmt E., Xu B. (Eds) *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education*. (pp 679-698) ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

A LA RECHERCHE DE L'ETM DE RÉFÉRENCE AU DÉBUT DE L'APPRENTISSAGE DES PROBABILITÉS EN FRANCE

Assia NECHACHE* et Bernard PARZYSZ**

* CY Cergy Paris Université et LDAR

** Université d'Orléans et LDAR

Cet article s'intéresse à l'Espace de Travail Mathématique probabiliste de référence à l'articulation du collège et du lycée en France. En nous appuyant sur diverses ressources et leur déclinaison dans les manuels, nous avons fait plusieurs constatations. Tout d'abord, les deux approches du concept de probabilité sont prises en compte, pose ipso facto l'importante question de l'articulation entre le domaine probabiliste et celui de la statistique ; en particulier, le recours à la simulation mériterait davantage d'attention, en ce qu'il a tendance à oblitérer la distinction entre les deux domaines. Ensuite, les notions introduites à ce niveau ne sont, ni organisées, ni hiérarchisées, ce qui, là aussi, brouille leur statut mathématique. Un autre aspect est l'intervention d'artefacts variés, avec des rôles divers, dans la résolution de problèmes.

INTRODUCTION

En France, après s'être longtemps cantonné au niveau du lycée, l'enseignement des probabilités débute maintenant dès la classe de 5^{e} (élèves de 11-12 ans) et se poursuit dès lors tout au long de la scolarité secondaire. L'accent est mis sur la sensibilisation des élèves à l'aléatoire et aux nouveaux types de raisonnements qui lui sont associés. Dans le cadre d'un travail de recherche portant sur l'étude du travail de validation dans le domaine probabiliste des classes de 3^{e} et de 2de, nous avons analysé le programme d'enseignement du domaine des probabilités ainsi que les documents ressources élaborés par les concepteurs de ce programme. Nous avons alors constaté que les énoncés de théorèmes, de propriétés et de définitions probabilistes sont introduits dans le référentiel théorique de l'Espace de Travail Mathématique Probabiliste (noté ETMP) de référence sans aucune hiérarchisation ni structuration. Nous avons également constaté que la résolution d'une tâche probabiliste donnée nécessite des allers-retours entre le domaine des probabilités et celui de la statistique, en particulier lorsqu'il s'agit d'utiliser la simulation en relation avec la modélisation pour réaliser cette tâche. Il s'agit donc au premier chef de clarifier les relations et les frontières entre ces deux domaines, afin de saisir le sens du travail probabiliste qui en résulte. Suite à ces deux constats nous avons été amenés à questionner la manière de caractériser le travail probabiliste de l'ETMP de référence au niveau des classes de 3^{e} et de 2de. Par ailleurs, l'une des spécificités de l'enseignement des probabilités à ces niveaux de classe est l'accent mis sur l'usage des divers types de diagrammes : arbre des possibles, arbre pondéré, tableau à double entrée, diagramme ensembliste, etc. (**Q1**) Quel est le statut de ces diagrammes dans l'ETMP de référence ? Ont-ils un rôle de signes, d'artefacts ou d'outils théoriques permettant de construire une preuve (Parzysz, 1993) ? De même, l'enseignement du domaine des probabilités à ce niveau sollicite l'expérimentation et l'utilisation à bon escient d'artefacts tels que l'ordinateur, la calculatrice et les logiciels. (**Q2**) Quel est le rôle de ces artefacts dans l'ETMP de référence ? Comment interviennent-ils dans l'accès aux concepts probabilistes ? Dans cette contribution, nous nous centrons sur l'ETMP de référence au niveau des classes de 3^{e} et de 2de. Nous commençons par réaliser une étude selon trois approches du domaine des probabilités : historique-épistémologique, institutionnelle-organisationnelle et cognitive. L'objectif est alors de mettre en évidence les éléments caractéristiques de l'ETMP dans chacun des deux niveaux de classe. Par la suite, nous analysons deux ETMP potentiels proposés dans des manuels scolaires autour d'exemples de tâches considérées comme emblématiques. Il s'agit alors d'identifier les processus que les élèves de ces niveaux sont potentiellement capables de mettre en œuvre pour produire correctement le travail mathématique attendu.

DÉCRIRE ET CARACTÉRISER L'ETMP DE RÉFÉRENCE

Un Espace de Travail Mathématique probabiliste (ETMP) est une structure abstraite organisée de manière à générer le travail permettant à des individus d'effectuer des tâches probabilistes. Dans le cas de l'enseignement secondaire, ces individus sont des élèves qui sont plus ou moins expérimentés dans le domaine des probabilités. De façon générale, le travail de référence, en relation avec l'ETMP de référence, est normalement déterminé par des personnes ou des organisations en charge de l'institution scolaire. Dans la théorie des ETM, le travail mathématique de référence correspond au travail normalement attendu par les institutions et organisations en charge de l'enseignement des mathématiques. L'ETM de référence est donc fonction, d'une part d'un ensemble de critères mathématiques, et d'autre part, de la noosphère (au sens de Chevallard). L'objectif de l'ETM de référence est de mettre en évidence le travail mathématique (ici probabiliste) attendu, à un niveau de classe donné (ici, la jonction collège-lycée en France), par les institutions et organismes d'enseignement. Pour le décrire de manière précise, nous nous appuyons bien sûr sur les différents éléments de la théorie des ETM (les composantes des plans épistémologique et cognitif, les genèses du travail). Or, selon Kuzniak (2022), la caractérisation de cet ETM nécessite de réaliser une étude approfondie prenant appui sur diverses ressources telles que : les différents travaux de recherche en épistémologie et en didactique, les colloques d'enseignement et de recherche, les manuels scolaires, le programme d'enseignement prévu, des traités écrits par des mathématiciens, la littérature didactique et pédagogique, etc. La description de l'ETMP de référence passe par une étude historico-épistémologique permettant de préciser les composantes du plan épistémologique de l'ETMP en lien avec l'objet mathématique en question (ici la probabilité). Concernant, le plan cognitif de l'ETMP de référence, il s'agit d'étudier les tâches probabilistes, en particulier les tâches emblématiques et leurs mises en œuvre, permettant ainsi de mettre en évidence les processus cognitifs en jeu dans leur réalisation. La caractérisation de l'ETMP de référence s'effectue donc à partir de sa description, mais elle est aussi fondée sur le paradigme probabiliste qui guide le travail. La description et la caractérisation de l'ETM de référence s'opèrent selon trois dimensions : historique-épistémologique, institutionnelle-organisationnelle et cognitive. Ces trois dimensions dépendent à la fois du domaine mathématique auquel appartiennent les objets mathématiques considérés (ici les probabilités), de l'institution au sein de laquelle il se situe et du niveau d'enseignement considéré (ici l'enseignement secondaire français, classes de 3e et de 2de).

Approche épistémologique et historique du domaine des probabilités

Les courants philosophiques de la probabilité

Il existe deux grands courants philosophiques dans les interprétations des fondements des probabilités, définissant ainsi deux approches, subjectiviste et objectiviste. Dans le courant subjectiviste, la probabilité est considérée comme une mesure d'incertitude, relative à chaque sujet et aux convictions de celui-ci. Comme le souligne Maury, la probabilité s'appuie « sur des connaissances globales non explicitement justifiées, ressenties par le sujet comme des évidences et s'exprimant dans l'action immédiate » (Maury, citée par Gaydier 2011, p. 58). Les valeurs de cette probabilité sont issues « d'impressions et de jugements subjectifs » (Gaydier, 2011) et non d'un calcul a priori ou d'une estimation à partir des résultats obtenus lors d'une expérience. Ce courant est le fondement de l'approche bayésienne, dans laquelle le calcul des probabilités est mobilisé pour réduire l'incertitude. Le courant objectiviste se centre sur les situations modélisables par la théorie des probabilités. Dans ce courant, la probabilité d'un évènement est basée sur deux approches distinctes. Dans la première approche, qualifiée d'a priori (ou laplacienne, ou cardinaliste), cette probabilité est le rapport du nombre de « cas » favorables au nombre de « cas » possibles (formule de Laplace), et ceci sous l'hypothèse que la loi de probabilité est équirépartie. Dans la seconde approche, dite a posteriori (ou fréquentiste, ou fréquentielle), la probabilité est empirique et s'obtient en répétant un « grand » nombre de fois une expérience et en calculant la fréquence de réalisation de l'événement considéré. Sous l'hypothèse d'équiprobabilité, ces deux approches sont mises en cohérence par la loi des grands nombres. Ce sont, sans grande surprise, les deux approches objectivistes de la probabilité qui ont été retenues dans les programmes de l'enseignement des probabilités en France au niveau considéré.

Le lien historique entre le domaine des probabilités et la statistique descriptive

Les jeux de hasard sont presque aussi vieux que l'humanité, et ils ont été étudiés assez tôt, avec des motivations diverses. C'est ainsi que Galilée, et avant lui l'auteur du poème De Vetula (XIIIe siècle) se sont intéressés au lancer de trois dés, en s'appuyant sur les fréquences des sommes de points. Ce sont aussi les jeux de hasard qui, au XVIIe siècle, ont conduit Pascal et Fermat à mettre en place les premiers fondements du calcul des probabilités. Le domaine des probabilités a donc été, dès le début, en rapport constant avec la statistique descriptive, conduisant par la suite à institutionnaliser, sur la base d'analogies formelles, la correspondance entre certaines notions des deux domaines (Tableau 1). Ce lien s'avère incontestablement utile pour introduire les premiers concepts probabilistes sur un univers fini à partir des éléments correspondants en statistique. Mais cette correspondance est à double tranchant, car elle risque – notamment lors du recours à la simulation – d'estomper la distinction entre l'observé et le théorique.

STATISTIQUE	PROBABILITÉS
Population	Univers
Individu	Événement élémentaire
Sous-population	Événement
Fréquence	Probabilité
Moyenne arithmétique	Espérance mathématique
Variance …	Variance …

Tableau 1 : Correspondance entre les notions des domaines probabiliste et statistique

Ce lien s'avère incontestablement utile pour introduire les premiers concepts probabilistes sur un univers fini à partir des éléments correspondants en statistique. Mais cette correspondance est à double tranchant, car elle risque – notamment dans le recours à la simulation – d'estomper la distinction entre l'observé et le théorique.

Approche institutionnelle-organisationnelle du domaine des probabilités

Il s'agit ici de mettre en lumière la manière dont l'enseignement du domaine des probabilités est censé être mené aux deux niveaux de classe concernés. Du côté institutionnel, la notion de probabilité est intégrée dans le chapitre appelé « Statistiques et probabilités ». Depuis 2015, la notion de probabilité est introduite dès le cycle 4 d'enseignement (5^e, 4^e, 3^e). Le programme du cycle 4 (BOEN n° 31 du 30 juillet 2020) mentionne l'algèbre des événements et le calcul de probabilités, qui se situent donc sans ambiguïté dans le paradigme P2. Le dernier item stipule de « Faire le lien entre fréquence et probabilité ». Il s'agit effectivement là d'un élément important de l'ETMP de référence, qu'il importe de ne pas négliger, et qu'on peut même élargir de sorte à faire à la fois le lien et la distinction entre la statistique et les probabilités. Ces deux domaines entretiennent, on l'a vu, des rapports étroits, au point que dans la pratique il est parfois difficile de les distinguer l'un de l'autre. Le programme n'apporte malheureusement aucun éclaircissement sur les moyens d'y parvenir. S'agit-il de répéter une expérience aléatoire, ou de la simuler ? Ce point n'est pas anodin, car si lors de la répétition effective d'une expérience aléatoire il est clair que c'est bien d'observation (et donc de statistique) qu'il s'agit, avec la simulation technologique la situation n'est pas si nette puisque la statistique obtenue est établie à partir d'un modèle probabiliste. Un autre aspect du lien entre les deux domaines des probabilités et de la statistique est la loi faible des grands nombres, qui sert de fondement au point de vue fréquentiste sur la probabilité dans l'enseignement secondaire. Les deux domaines interviennent de façon concomitante dans deux types de situations : le tirage d'un individu dans une population donnée, et la simulation d'une expérience aléatoire. Le premier type correspond à des exercices mettant en jeu un caractère statistique dans une population donnée, population dans laquelle on prélève aléatoirement un individu. La probabilité d'obtenir un individu présentant une modalité donnée du caractère est alors égale à la fréquence de cette modalité dans la population (Henry, 1992). Un élément essentiel de cette situation est le tirage aléatoire équiprobable d'un individu, c'est-à-dire l'expérience aléatoire dont l'univers est l'ensemble des individus et dont la loi de probabilité est l'équirépartition. Malheureusement, l'explicitation comme la mise en évidence de cette expérience ne sont pas toujours prises en compte dans l'ETMP idoine, entraînant le risque réel de faire croire que fréquence et probabilité sont une seule et même notion, et il arrive même que l'expérience aléatoire ne soit pas mentionnée. Le second type de situation est la simulation technologique d'une expérience aléatoire, avec fréquemment pour objectif l'estimation de la probabilité d'un événement associé à cette expérience (voir la section Exemple d'étude d'ETMP idoine potentiel). Dans le programme de la classe de 2de (BOEN n° 1 du 22 janvier 2019) le projet est clair, puisque le titre du premier paragraphe est : « Modéliser le hasard, calculer des probabilités ». Il s'agit donc de prendre en charge la démarche de modélisation et de poursuivre l'étude de l'algèbre des événements (donc de se situer, comme en 3^{e}, dans le paradigme P2). Le second paragraphe, intitulé « Échantillonnage », mentionne une approche expérimentale d'une « version vulgarisée de la loi des grands nombres », ainsi que « l'estimation d'une probabilité (…) par une fréquence observée sur un échantillon ». Est également mentionnée la simulation sur Python ou tableur. Cette partie met donc en jeu, non seulement le domaine des probabilités, mais aussi celui de la statistique descriptive et celui de l'algorithmique-programmation. En raison même des artefacts mis en œuvre, on peut penser que, dans les classes, ce dernier domaine sera identifié sans difficulté. Mais en ira-t-il de même pour les deux autres ? L'étude d'un manuel va permettre de s'en rendre compte (voir plus loin). Du côté organisationnel du travail de référence, i.e du point de vue des enseignants et de l'enseignement, plusieurs travaux mettent en évidence les difficultés des enseignants à enseigner le domaine des probabilités. Certaines sont d'ordre épistémologique et dues à la complexité de la notion du hasard ainsi qu'à celle de la dualité des approches de la notion de probabilité (Girard, 2001). D'autres d'ordre didactique pour introduire la notion de probabilité. Selon Maury, ces difficultés sont dues à la représentation qu'ont les enseignants du savoir de référence.

Approche cognitive du domaine des probabilités

Il s'agit ici d'étudier l'aspect cognitif du travail probabiliste de référence. Cela suppose d'identifier les processus cognitifs (visualisation, construction et preuve) de l'ETMP de référence qui sont mobilisés par le sujet (ici un sujet épistémique) pour produire correctement le travail mathématique attendu de lui. Pour cela, il est nécessaire d'étudier les tâches probabilistes et leurs mises en œuvre dans des ETMP idoines (potentiel et effectif) afin d'identifier ces processus. Mais il faut également prendre en compte, les difficultés d'apprentissage des sujets.

LES COMPOSANTES ÉPISTÉMOLOGIQUES DE L'ETMP

Le référentiel théorique

Le référentiel théorique de l'ETMP au niveau 3e contient des énoncés tels que : « la probabilité d'un événement est comprise entre 0 et 1 », « exprimer des probabilités sous diverses formes (décimale, fractionnaire, pourcentage) », « la probabilité d'un événement qui ne peut pas se produire (événement impossible) est égale à 0 », etc. Il est en fait composé d'une liste d'énoncés juxtaposés les uns aux autres, dont on ne connait pas réellement le statut (sont-ils des propriétés, des théorèmes, des définitions ?). Il s'agit donc d'un référentiel ne présentant aucune organisation ni hiérarchisation des éléments le constituant. Cette « inorganisation » peut éventuellement – ici comme ailleurs – induire des difficultés dans le processus d'enseignement et d'apprentissage. Par ailleurs, la probabilité d'un événement est déterminée soit par un traitement calculatoire souvent appuyé sur un arbre ou un tableau, ou par estimation de la fréquence d'apparition de l'événement en question. En classe de 2de, le travail probabiliste de référence s'inscrit dans la continuité de celui de 3e. Le référentiel théorique de l'ETMP de référence contient donc les mêmes éléments qu'en 3e, avec deux nouveaux éléments théoriques : le calcul de la probabilité de la réunion de deux événements et les notions d'intervalle de confiance et de fluctuation. De la même manière qu'en 3e, la probabilité d'un événement A est déterminée, soit par un calcul faisant intervenir la formule de Laplace, soit par une estimation de la fréquence des issues réalisant l'événement A. Cette estimation est réalisée à l'aide de la simulation et en considérant un échantillon de taille donnée. À partir des résultats fournis par la simulation et en utilisant implicitement la loi des grands nombres, la valeur de la probabilité estimée est en général la « fréquence limite » observée de l'événement étudié (estimation ponctuelle). Mais, à la différence de la classe de 3e, l'estimation de la probabilité peut également être effectuée à l'aide de l'intervalle de confiance. On obtient alors un intervalle de valeurs pour la probabilité de l'événement étudié.

Artefacts et signes associés

En classes de 3e et 2de, le calcul probabiliste est basé sur des outils sémiotiques tels que : arbre des possibles ou pondéré, tableau, etc., ainsi que sur des outils technologiques pour la simulation (tableur, algorithme avec Scratch ou Python, etc.). Ces outils permettent de déterminer la probabilité d'un événement, qui sera justifiée à l'aide de la formule de Laplace, de la loi des grands nombres ou de l'intervalle de confiance (uniquement en classe de 2de). Dans les programmes de 3e et de 2de, l'arbre des possibles est considéré comme un outil de raisonnement intéressant pour construire le sens de la modélisation et pour réaliser des calculs de façon fiable, grâce à la correspondance – le plus souvent implicite – entre les théorèmes probabilistes et les règles de fonctionnement de l'arbre. Par ailleurs, c'est à partir de la classe de 3e que les expériences aléatoires simples à deux épreuves sont travaillées à l'aide des arbres pondérés. En classe de 2de, il est question « d'entretenir sans aucun nouveau développement ni aucune complexification ce type de présentation et son mode opératoire » (RESSEC-PROB). La construction des arbres pondérés n'est d'aucune façon justifiée puisque les connaissances relatives aux probabilités conditionnelles ne figurent pas au programme de ces deux classes. Pour déterminer la probabilité d'un événement à l'aide d'un arbre pondéré, il suffit d'utiliser la propriété : « dans un arbre, la probabilité du résultat auquel conduit un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées le long du chemin » (ibid.). A partir de la classe de 2de un nouvel outil sémiotique est introduit pour calculer la probabilité a priori d'un événement : le diagramme de Venn. Ce diagramme fournit une représentation analogique de la probabilité de la réunion et de l'intersection de deux événements.

L'ETMP de référence des classes de 3^{e} et 2de est caractérisé par la présence de divers types de diagrammes. Ces outils sémiotiques contribuent à l'enrichissement, non seulement de la genèse sémiotique, mais également du référentiel théorique à ce niveau de classe. Dès lors, ces outils sémiotiques sont utilisés comme modes de calcul dans le processus du travail et contribuent à l'articulation des deux genèses, sémiotique et discursive, donnant ainsi naissance à un mode de raisonnement particulier qualifiable de « diagrammatique » (Nechache, 2016). Cette articulation place le travail probabiliste de référence dans le plan [Sem-Dis]. De même, l'enseignement du domaine des probabilités sollicite l'expérimentation et l'utilisation à bon escient d'artefacts tels que l'ordinateur, la calculatrice et les logiciels. Ils facilitent la mise en place de la simulation dans le traitement des situations aléatoires, induisant une genèse instrumentale plus riche et la mise en place d'une dialectique entre celle-ci avec la genèse discursive. Dans ce cas, le travail probabiliste de référence est caractérisé par l'usage de l'expérimentation via la simulation informatique et l'usage de l'arbre pondéré. La probabilité d'un événement est alors déterminée, soit par estimation à partir des fréquences d'apparition de cet évènement, soit par un traitement calculatoire appuyé sur un arbre pondéré. De ce fait, l'élaboration du travail de référence circule à travers les différents plans « verticaux » de l'ETMP de référence.

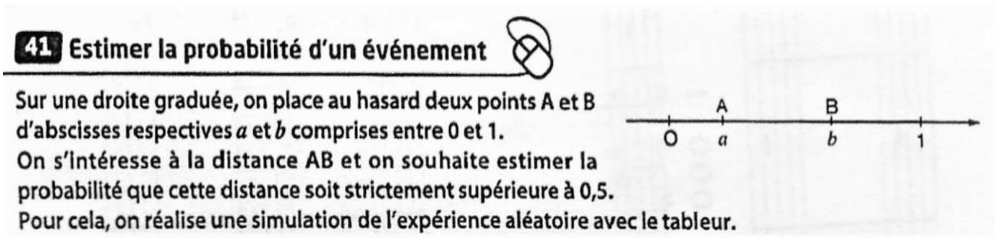
PARADIGMES PROBABILISTES POUR CARACTÉRISER LE TRAVAIL DE RÉFÉRENCE

Dans la théorie des ETM, l'objectif des paradigmes est de caractériser précisément le travail mathématique qui émerge dans un contexte éducatif donné. Une des spécificités de l'enseignement des probabilités est qu'il s'agit, avec la géométrie, du seul domaine où l'on part – en principe tout au moins – de la réalité matérielle pour la modéliser, entraînant ainsi une difficulté d'apprentissage liée à la possible confusion entre réalité et modèle, comparable à celle que l'on rencontre au collège en géométrie. Une autre difficulté se situe au niveau du choix – ou de l'élaboration – d'un modèle adéquat à l'expérience aléatoire étudiée. Or, proposer des situations faisant appel à la modélisation permet de donner du sens aux connaissances enseignées. Ainsi, et toujours comme en géométrie, l'apprentissage des probabilités évolue à travers plusieurs niveaux de modélisation qui caractérisent chacun des paradigmes probabilistes (Nechache et Parzysz, 2019). Des travaux autour de l'enseignement des probabilités en France ont mis en évidence la manière dont chacun des paradigmes probabilistes influence l'ETMP de référence au niveau de l'enseignement secondaire (Henry, 1999 ; Parzysz, 2014). Il en ressort qu'au début de l'apprentissage des probabilités (au niveau collège), l'enseignement des probabilités est basé sur un paradigme probabiliste (P1) qui vise à décrire un protocole expérimental précis et une liste de couples (issue, chance d'apparition) associés à une expérience particulière ; ce paradigme fait appel à l'usage de diagrammes (arbre, tableau à double entrée, diagramme de statistique descriptive). Dès la classe de 3e, c'est un autre paradigme (P2) qui est privilégié. Il s'agit alors d'étudier la notion de probabilité et l'algèbre des événements, notamment à l'aide de notions ensemblistes. Divers outils sont associés à ce paradigme, tels que les techniques de calcul, intégrées aux modèles ou spécifiques aux différents registres de représentation (diagramme de Venn, arbre pondéré, tableau à double entrée, etc.). Y sont également adjoints des outils de statistique descriptive (SD) et de statistique inférentielle (SI). C'est cet ensemble complexe et les démarches cognitives associées que nous nous proposons d'étudier et de préciser sur deux exemples.

EXEMPLE D'ÉTUDE D'ETMP IDOINE POTENTIEL

Etude d'un exemple dans un manuel de 3e

Voici un exemple de tâche proposé dans un manuel de 3e (Figure 1), relatif à l'utilisation d'une simulation pour l'étude d'une expérience aléatoire. Il s'agit tout d'abord de générer deux nombres aléatoires a et b dans [0 ; 1], correspondant aux abscisses des points A et B. Ceci est sémantiquement congru à l'expérience aléatoire décrite, c'est-à-dire au modèle probabiliste consistant à tirer au hasard, deux fois et avec remise, un nombre « réel »[4] de [0 ; 1], le premier tirage fournissant l'abscisse de A et le second celle de B.


41 Estimer la probabilité d'un événement

Sur une droite graduée, on place au hasard deux points A et B d'abscisses respectives *a* et *b* comprises entre 0 et 1.
On s'intéresse à la distance AB et on souhaite estimer la probabilité que cette distance soit strictement supérieure à 0,5.
Pour cela, on réalise une simulation de l'expérience aléatoire avec le tableur.

Figure 1 : Énoncé de la tâche (Transmath 3e, p. 75)

En notant X_A (resp. X_B) la variable aléatoire « résultat du premier (resp. second) tirage », les auteurs du manuel s'intéressent à la probabilité de l'événement « $|X_A - X_B| > 0,5$ ». Mais le passage de l'expérience originale à son implémentation dans le tableur n'est peut-être pas tout à fait clair pour tous les élèves, et il mériterait sans doute d'être explicité. En tout cas, l'implémentation se situe dans un paradigme probabiliste et le résultat obtenu se situe, lui, dans le domaine de la statistique descriptive. Ils font ensuite calculer |b - a| et tester si ce nombre est supérieur à 0,5, ce qui reste toujours du domaine statistique. Il est ensuite demandé de recopier la ligne

[4] En réalité, un décimal calibré généré par la machine ; il s'agit donc d'un univers fini.

d'instructions « afin de répéter 100 fois la simulation de l'expérience aléatoire ». Notons au passage que cette dernière expression mériterait elle aussi, d'être travaillée en classe : en effet, « expérience aléatoire » fait référence aux probabilités tandis que « simulation » ressortit à la statistique. Les 100 résultats obtenus constituent une population statistique dans laquelle on fait calculer la fréquence de succès. L'énoncé demande enfin de « recalculer plusieurs fois la feuille de calcul », puis de « proposer une estimation de la probabilité de l'événement « AB > 0,5 » ». Le recalcul fait considérer les séries de 100 essais comme autant d'échantillons d'une même population, ce qui fait maintenant passer dans la statistique inférentielle (SI). On voit qu'ici l'intérêt de « recalculer plusieurs fois » n'est pas tant l'estimation en elle-même[5] que la fourniture d'un signal indiquant qu'on se situe bien dans le domaine statistique.

Étude d'un exemple dans un manuel de 2^de^

1) Dans ce manuel (Transmath 2^nde^, p. 300), l'approche fréquentiste est présentée à l'aide d'une représentation graphique de la fréquence cumulée f_n d'obtention de la face 5 avec un dé, pour un nombre n de lancers successifs allant de 1 à 2000. Le commentaire associé est le suivant :

> On observe expérimentalement que cette fréquence se stabilise autour d'une valeur p lorsque n devient très grand. Cette valeur p sera appelée « probabilité de l'événement obtenir la face 5.

Cette définition suppose en premier lieu qu'il existe bien une valeur limite p pour la fréquence et laisse entendre qu'on peut la trouver en augmentant le nombre de lancers. Mais, en supposant qu'elle existe, elle est de toute façon inconnue et ne saurait être déterminée expérimentalement. La question de la modélisation de l'expérience aléatoire, c'est-à-dire celle de la détermination d'une loi de probabilité, qui est bel et bien l'enjeu de cette démarche et qui est fondamentale, n'apparaît pas. Plus loin, sous le titre « Calculer des probabilités à l'aide de fréquences », le même manuel (p. 301) donne un exercice résolu donnant un tableau des fréquences des différentes lettres dans un ensemble de textes français comportant au total 100 000 lettres. Puis il indique :

Comme le texte comporte un très grand nombre de lettres, on peut considérer que ces fréquences donnent une bonne approximation des probabilités d'apparition de chacune des lettres dans la langue française.

Il s'agit là, bien évidemment, d'une référence à la loi des grands nombres, et le terme d'approximation est tout à fait approprié. Mais cette phrase est suivie d'une demande : « Déterminer la probabilité de l'événement A « obtenir un A » », avec la solution : **«** La fréquence d'apparition du A est de 8,40 %, ainsi la probabilité de l'événement A est : $P(A) = \frac{8,40}{100} = 0,084$. ». La probabilité est donc purement et simplement identifiée à la

[5] Sur 10 séries, nous avons nous-mêmes obtenu des fréquences allant de 0,20 à 0,30.

fréquence, et la formulation donne ainsi à croire, non seulement qu'il est possible de déterminer expérimentalement la valeur de la probabilité d'une issue, mais aussi que fréquence et probabilité sont une seule et même notion. C'est-à-dire que, ici encore, l'impasse est faite sur la modélisation qui doit nécessairement s'opérer pour passer de la distribution de fréquence à une distribution de probabilité. En outre, le fait de prendre comme distribution de probabilité la distribution de fréquence obtenue semble aller de soi, alors qu'on pourrait tout aussi bien en concevoir d'autres : par exemple, si à l'issue d'un grand nombre de lancers d'un dé on trouve pour les 6 faces des fréquences proche de 1/6, on pourra choisir le modèle équiréparti plutôt que celui des fréquences obtservées. Comme on le voit, cette question du choix du modèle, pourtant cruciale, est ici totalement absente. Il est vrai qu'on trouve, à la fin de l'exercice, le commentaire suivant :

> Ce modèle probabiliste ne permet pas de refléter la réalité, c'est un modèle théorique, idéal. Cette étude a été menée sur un long texte, mais si l'on recommençait l'expérience avec un autre texte, on ne trouverait pas les mêmes fréquences.

Malheureusement, cette utile précision vient bien tard, et si elle aborde la notion de modèle elle ne pose pas la problématique de la modélisation.

2) En ce qui concerne l'échantillonnage, le programme de 2^{de} stipule que « l'objectif est de faire percevoir, sous une forme expérimentale, (…) le principe de l'estimation d'une probabilité par une fréquence observée sur un échantillon », et préconise de le faire à l'aide de la simulation, sur Python ou tableur, d'expériences aléatoires à deux issues. Dans ce cas, la probabilité – donc le modèle – existe bel et bien : c'est tout simplement la valeur numérique qu'on introduit au départ dans le programme pour distinguer les deux issues. Quant à la fréquence, c'est celle qu'on observe à la fin de l'expérimentation. Ainsi posée, la distinction est claire, mais peut-on pour autant considérer qu'elle va sans dire ? On vient de voir ci-dessus que, dans le passage de l'ETMP de référence du programme à l'ETMP idoine potentiel d'un manuel, si tant est qu'elle est perçue la distinction entre le théorique et l'observé est loin d'être clairement explicitée, avec pour conséquence un sérieux risque que les élèves ne la perçoivent pas et ne soient donc pas à même de se repérer dans les allers-retours opérés entre le domaine statistique et le domaine probabiliste. Comme on a pu le voir, au niveau des classes de 3^e et 2^{de}, l'ETMP de référence probabiliste est particulièrement complexe, puisqu'il fait intervenir de façon concomitante, non seulement un paradigme probabiliste stricto sensu (P2), mais aussi – dans le recours à la simulation technologique – la statistique descriptive et l'algorithmique-programmation. En particulier, l'articulation statistique-probabilité, élément important de l'accès aux concepts probabilistes à partir de concepts statistiques analogues, risque alors d'être « brouillée », compromettant de ce fait l'accès aux concepts probabilistes. Cette articulation mérite pourtant d'être particulièrement travaillée à ce niveau, notamment en n'escamotant pas la répétition manuelle d'une expérience aléatoire – jugée chronophage – au profit de sa simulation technologique, et en mettant clairement en évidence le modèle probabiliste qu'on implémente au

départ dans l'ordinateur ou la calculatrice pour réaliser une simulation, qui fournira ensuite des résultats statistiques.

CONCLUSION

Dans le cadre de cette contribution, nous avons étudié l'ETMP de référence des classes de 3e et de 2de, ce qui nous a permis de mettre en évidence ses caractéristiques, dont l'une des principales est le rôle des artefacts et des signes. Les outils sémiotiques sont utilisés, soit comme signes (pour modéliser l'expérience aléatoire), soit comme artefacts (sur lesquels on opère des calculs), soit encore comme outils théoriques (pour justifier et valider les résultats). Une autre caractéristique notable est le fait que le référentiel théorique soit composé d'un simple "empilement" d'énoncés sans statut défini, et sans aucune hiérarchisation ni structuration. Ceci n'est pas sans conséquence sur la construction des ETMP idoines. En effet, tel qu'il est caractérisé le référentiel théorique entraîne un travail mathématique inadéquat dans l'ETMP idoine, voire personnel. Enfin, une dernière caractéristique est le rôle de l'expérimentation et de la modélisation dans le travail de référence. L'accent est mis à bon escient sur le recours à des expérimentations basées sur la simulation utilisant différents artefacts pour traiter les situations aléatoires, ce qui implique une forte sollicitation de la genèse instrumentale et la mise en place d'une dialectique entre celle-ci et la genèse discursive. Mais le recours à la simulation technologique fait naître le risque réel d'un évanouissement de la distinction entre le domaine des probabilités et celui de la statistique (c'est-à-dire entre le théorique et l'observé). En perspective, il s'agit pour nous de continuer cette quête de l'ETMP de référence aux deux niveaux de classe concernés dans cette étude. Cela suppose alors d'étudier d'autres ETMP idoines, tant potentiels qu'effectifs, afin d'accéder aux processus cognitifs envisagés dans l'ETMP de référence.

RÉFÉRENCES

Gaydier, F. (2011). *Simulation informatique d'expériences aléatoires et acquisition de notions de probabilités au lycée*. Thèse de doctorat. Université de Paris 5.

Girard, J. C. (2001). Quelques hypothèses sur les difficultés rencontrées dans l'enseignement des probabilités. In Henry. M. (Ed.), *Autour de la modélisation en probabilités*, pp 189–200.

Henry, M. & Henry, A. (1992) L'enseignement des probabilités dans le programme de première. *Repères-IREM 6*, p. 27-52.

Henry, M. (1999). L'introduction des probabilités au lycée : un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie. *Repères-IREM 36*, 15-34.

Kuzniak, A. (2022). The Theory of Mathematical Working Spaces – Theoretical Characteristics. In Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E., Richard, P. R. Mathematical *Work in Educational Context. The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*. Springer.

Maury, M. (1992). La représentation du savoir chez l'enseignant, source de difficultés dans l'enseignement de certaines connaissances? *TREMA, 1*.

Nechache, A. (2016). *La validation dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire*. Thèse de doctorat de l'université Paris Diderot, Paris, France;

Nechache, A. & Parzysz, B. (2019). Le jeu des paradigmes dans l'ETM probabiliste. In Vivier, L., Montoya Delgadillo, E., Richard, P. R., Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., Maschietto, M. & Tanguay, D. (Eds). (2019). *Actes du Sixième Symposium sur le Travail Mathématique* (ETM6, 13-18 décembre 2018). Valparaíso, Chilli: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, 179-191.

Parzysz, B. (1993) Des statistiques aux probabilités : exploitons les arbres. *Repères-IREM 10*, p. 91-104.

Parzysz, B. (2014) Espaces de travail en simulation d'expérience aléatoire au lycée : une étude de cas. *Relime, 17*(4), 65–82. https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1743

RESCOL-PROB (2008). Ressources pour les classes de collège-Probabilités, mars 2008. http://eduscol.education.fr/

RESSEC-PROB (2009). Ressources pour la classe de seconde-Probabilités et statistiques, juin 2009. http ://eduscol.education.fr/

Manuels scolaires:

Transmath 3e. Edition 2016. Paris : Nathan

Transmath 2nde. Edition 2017. Paris : Nathan

ETM PARADIGMS AS VIEWED IN AiC ANALYSIS OF CONSTRUCTION OF KNOWLEDGE

Ivy Kidron

Jerusalem College of Technology (JCT)

This paper is a beginning of dialogue between ETM and the theory of Abstraction in Context (AiC). The dialogue is possible since both theories combine cognitive and epistemological aspects. Focusing on the notion of paradigms as viewed in ETM, I analyse how do paradigms intervene in AiC analyses.

INTRODUCTION: BEGINNING OF DIALOGUE BETWEEN ETM AND AiC

Kidron et al. (2018) describe different kinds of dialogue between theories. The dialogue between ETM and AiC in this paper has some particular and different characteristics: Focusing on the notion of paradigms as viewed in ETM, I try to investigate the question: How do paradigms intervene in AiC? The notion of paradigms appears explicitly in ETM. In Kuzniak and Vivier (2019), we read that:

In studies conducted within the framework of the theory of MWS, the exact definition of paradigms is important because it allows revealing and understanding the expectations of teachers and educational institutions and also to explore the real distance between this expected work and the work actually carried out by the students.

In ETM, the characteristics of the mathematical domain are used to refine and instantiate the distinction between paradigms. See, for example, Montoya Delgadillo &Vivier (2016). AiC deals with different mathematical domains but the notion of paradigms is not used explicitly as in the case of ETM. In the next section, I describe AiC and its cognitive and epistemological aspects.

ABSTRACTION IN CONTEXT (AIC)

Abstraction in Context (AiC) provides a theoretical and methodological approach for researching, at the micro-level, learning processes in which learners construct deep structural mathematical knowledge. A detailed treatment of the methodology is offered in Dreyfus et al. (2015). AiC defines abstraction as a process of vertically reorganizing previous mathematical constructs *within mathematics and by mathematical means* so as to lead to a construct that is new to the learner. The earlier constructions are used as building blocks. The epistemological aspect of AiC is well expressed in the words *'within mathematics and by mathematical means'* in the reorganization of previous mathematical constructs.

AiC view of abstraction is ground in the works of Davydov (1990) and Freudenthal (1991). Freudenthal ideas led his collaborators to the idea of "vertical mathematization". This idea is explained in Dreyfus et al. (2015, p. 186–187):

Vertical mathematization points to a process that typically consists of the reorganization of previous mathematical constructs within mathematics and by mathematical means by which students construct a new abstract construct. As researchers in mathematics education, we preferred the expression "vertical reorganization" to the expression "Vertical mathematization" to discern between what is intended by the teacher - the mathematization, and what often happens - a reorganization…. In vertical reorganization, previous constructs serve as building blocks in the process of constructing.

For the convenience of the readers, I will report some more details about AiC. The process of abstraction has three stages: the need for a new construct, the emergence of the new construct and the consolidation of this new construct. The second stage, the emergence of the new construct is analyzed by means of three observable epistemic actions: **R**ecognizing, **B**uilding- With and **C**onstructing. Recognizing takes place when the learner recognizes that a specific knowledge construct is relevant to the problem she or he is dealing with. Building-with is an action comprising the combination of recognized knowledge elements, in order to achieve a localized goal, such as the actualization of a strategy, or a justification, or the solution of a problem. Constructing, the central epistemic action of mathematical abstraction, consists of assembling and integrating previous constructs by vertical mathematization to produce a new construct. These three *epistemic actions* relevant to abstraction are actions that pertain to the knowing of the participants and that are observable by participants and researchers (Pontecorvo & Girardet, 1993). AiC is essentially cognitive and focuses on the learner and her epistemic actions.

THE RESEARCH STUDY

A concrete case is described. The activity relates to the construction of a counter intuitive mathematical idea: The construction of the concept of equivalence of infinite sets that includes the idea that two infinite sets A and B for which A is included in B might be equivalent. In this research, I also used Fischbein's theory on intuition. The students were exposed to the example of two segments AB and CD with different lengths but there exists a one-to-one correspondence between the two sets of points such that each of the points contained in AB has one and only one correspondent in CD and vice versa. Different pairs of infinite sets were proposed and the students reasoned by means of analogy with previous cases. Two concentric circles were plotted, and the students were asked: Is the "number" of points in the interior circle equal to the "number" of points in the exterior circle? The same question was asked for two empty spheres. Then, two separate disks were plotted, one big and one small, and the students were asked: Is the "number" of points in the small disk equal to the "number" of points in the big disk? Then, the same question was asked for a big and a small full sphere. In the larger research, 12 pairs of students (8 pairs of high school students in grade 12 and 4 pairs of engineering students in their first year of university) were interviewed during 1.5 - 2 hours. The AiC analysis is conducted for different pairs of students. In this paper, I refer to the AiC analysis for three pairs of students, (Adi and Ely; Aline and Nathalie; Guy and Dany) with different mathematical background, learning at the last year of senior high school. I will refer to a specific part of the activity – the two separate disks (one big and one small) for the first two pairs. I will refer to all the parts of the activity for the third pair, Guy and Dany.

HOW DO PARADIGMS INTERVENE IN AIC?

The paradigms and AiC a priori analysis

The AiC a priori analysis deals first with assumptions about the previous mathematical knowledge of the students, in particular, previous constructs which have been constructed in the past and that may be helpful in the present task. Then, the AiC a priori analysis consists of intended constructs that are required in the given task. Comparing the a priori analysis and the a posteriori analysis, the AiC researchers note that sometimes the students achieve new constructs which were not expected in the AiC a priori analysis. The intended constructs in AiC a priori analysis are connected in an implicit way to the paradigm related to reasoning. Paradigms that relate to intuition and experimentation were taken into consideration while designing the activity. In this specific research study, the activity and the a priori analysis offered by AiC was prepared with a special attention to the background on intuitions and tacit models as offered by Fischbein's work (1987, 2001). In Fischbein (1987), we read a dialogue with a student that refers to the statement that the set of points of two segments of different lengths have the same cardinal: the student asked "if you place the segment AB on the larger segment CD, there are points which are not contained in the common part of the two lines ". Fischbein explained that, while the student admits willingly that points and lines have only a conceptual existence, she continues to think in figural terms. If points had been real, material points, then she would certainly be right: the longer line contains more spots, but points have no material existence. Fischbein's explanation relates to the need for concrete embodiments: a point cannot be considered as zero- dimensional.

> Intuitively, it is impossible to accept that the two segments have the same number of points because "intuitively" means dealing with "practical points" (Fischbein, 1987, p.91).

Considering Fischbein's comments, the activity was conceived in such a way that by means of analogy, the learner might create new concrete embodiments that enable to overcome the naïve intuition.

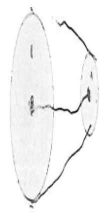
The paradigms and the constructions in AIC a posteriori analysis

Houdement & Kuzniak (1999, 2006) explain the notion of paradigms in Geometry. Their approach is based on the works of Kuhn (1962) and Gonseth (1945-1955). Houdement & Kuzniak (1999) explain how the works by Gonseth provided an essential basis for the search for an epistemology underpinned by paradigms. They mention the idea to analyze the thinking inherent in each paradigm following the three modes: intuition, experience and reasoning. Ideas related to intuition and tacit models are well described in Fischbein (2001) and these ideas accompanied my own work (Kidron, 2011).

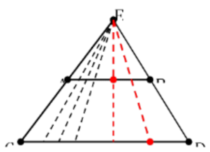
Montoya Delgadillo & Vivier (2016) describe three paradigms in Analysis: *Arithmetic/geometric analysis* (*GA*), with signs being taken into account in a visualization process; *Calculation analysis* (*CA*), calculations without recourse to the identification of objects; *Real analysis* (*RA*), which is characterized by definition and properties which are set theoretically. In the following, we observe how the paradigms and their interactions are expressed in AiC analysis of the learner's process of constructing knowledge. The analysis in terms of paradigms might precede the different constructions or appear in the constructions their selves.

The two modes of thinking, *intuition* and *experience* precede the apparition of the first construction in AiC a posteriori analysis. Avi and Eddy had difficulties to find a one-to-one correspondence between the two disks with their different sizes.

Intuition: putting the little disk of paper on the big disk, Adi and Ely just came back to the intuitions described by Fischbein. The only difference is that, in their case, the comparison was not between lengths of segments but between areas of disks. At that stage, they claimed that the sets are not equivalent since the area of the small disk is smaller than the area of the big disk and if we put the one on the other there will be no correspondence for the remaining points.



Experience: Then, on their own initiative, *they moved from reasoning in the plane to reasoning in the space* (Construction C1) by raising the small disk. Building in the air, they now understood that there should be a one to one correspondence between the two disks of different sizes. We observe here the experimental approach described in Houdement and Kuzniak (1999) in which a physical action is necessary to discover or validate a particular proposal. Contrary to intuition, the experience is not immediate. It took some time for Adi and Ely as well as for Aline and Nathalie, until they raised the two discs. Moreover, experience in the sense of physical action which is necessary to validate a particular proposal also appears for Aline in a previous stage. Aline is not convinced about the intuitive proof of the equivalence of the two segments in Fischbein's example: why? because.. I don't know, I don't know how to explain it, but when it's a line you see that there's more, like there's more physically more room, even though there's no end you can go a millimeter or even less than a millimetre at a time and find another point, obviously there are more points on a longer line, because there's more millimeters.



The important point is that Aline was convinced **only when she took a pen and moved it through the lines concretely** in Fischbein's proof to demonstrate the existence of the one-to-one correspondence. For Aline, in this example, experience is viewed as a physical action. In the following, we will see that experience can be viewed as a mental action, an experimental thought as mentioned by Houdement and Kuzniak.

After constructing C1, the next step was to find the ¨starting point¨ and to *construct the one to one correspondence* (Construction C2). We discern in C2 two different paradigms: *The visualization of the geometric form* of the one-to-one correspondence

(*GA*) and *the calculation of its algebraic form* (*CA*) (Montoya Delgadillo & Vivier).

Geometric form of the one-to-one correspondence: The students realized that the one-to-one correspondence is built by means of a cone. This is another form of experience, a mental form called an *experimental thought* as described in Houdement & Kuzniak: A virtual experience that leads to the « Geometric form of the one-to-one correspondence ».

The calculation of the algebraic form: For example, using the correspondence y = 2x, it is possible to match an even number to each number in the set of the natural numbers. Guy and Dany answered that one can match each point (x, y) in one disk to the corresponding point in the other disk by multiplying it by the ratio of the two radiuses. They called it a formal answer and preferred the "geometrical" construction of the one-to-one correspondence by means of the cone on the "algebraic form".

In this case, the two paradigms appear in the construction itself. C2 consists of the two paradigms. GA with its *visualization of the geometric form* was more dominant in the students' answers. After constructing C2, the students constructed the analogy with Fischbein's example with the two segments with different sizes (Construction C3). The analogy is from the example of segments to the case with the disks. C3 deals with the geometrical form of the one-to-one correspondence and its visualization. The paradigm GA precedes C3.

We noted that, in some cases, due to the persistence of intuitions that coexist with students' logical reasoning, the students were unable to accommodate the definition of equivalence of infinite sets in their beliefs about mathematics requests. The experience phase and the three first constructions were not sufficient. Thus, in addition to the previous constructions, another type of construction process (Construction C4) was necessary: the construction of the link between the concrete existence of the one-to-one correspondence between the two sets (which we can point on it and observe directly) and the more abstract aspect of the equivalence of two infinite sets. The link is from concrete, directly observable aspects of the one-to-one correspondence to the more hidden, abstract ones of the equivalence of the two infinite sets. C4 is the interaction between two paradigms: On one part, the paradigm related to the visualization of the geometric form of the one-to-one correspondence *(GA)* or the paradigm related to the calculation of its algebraic form *(CA)* and, on the other part, the paradigm which is based on the theoretical mathematical reasoning, (*RA*) (*GA, CA*, and *RA* as described in Montoya Delgadillo & Vivier (2016)). We call the latter "the abstract" in contrary to the two first paradigms which we call "the concrete". In the next section, we reflect how the ETM paradigms and their interactions shed light on AiC analysis, especially on the sources of the different AiC constructions and on the specific contribution of these constructions in the process of abstraction.

REFLECTION ON THE ROLE OF PARADIGMS IN AiC ANALYSES

In the previous sections, I described how the paradigms intervene in AiC a priori and a posteriori analyses. We observed first how the paradigms related to intuition and experience were considered from the beginning in the a priori analyses. We then observed how, in certain cases, these paradigms, related to intuition and experience, preceded the AiC constructions or consisted of the first phases of the construction process (this was the case for C1 and C3). In other cases, the paradigms appear in the construction itself. This was the case for C2. C2 consists of the 2 paradigms. GA and CA, as described in Montoya Delgadillo & Vivier (2016). For what concerns the paradigm related to reasoning, we also observed how in another case, the construction (C4) consisted of the interaction between two paradigms: the interaction between the paradigms GA and RA or the interaction between the paradigms CA and RA.

In the following, I reflect first on the role of the paradigms related to intuition and experience and only then I will reflect on the interaction between these paradigms and the paradigm related to reasoning.

The insights offered to AiC analysis by the paradigms related to intuition and experience

AiC offered a micro analysis of the construction of knowledge that was done during the learning experience. Using AiC, I could point on the new constructs and on the constructing process but I could not completely answer questions relating to the sources of the new constructs. The question "Why the learner did a specific construction?" might be a difficult question. It is the discussion on intuitions in terms of Fischbein's work that helps to explain the "why" of some constructions and their crucial role in the entire learning process. Analyzing the mechanisms of intuitive thoughts, helps in the analysis of construction of knowledge to understand the sources and roles of the new constructs.

The need for a new construct is the first stage towards the construction process. Schwarz, Dreyfus & Hershkowitz (2009, p.24) wrote that *without such a need, no process of abstraction will be initiated*.

The need for construction C2 (to *construct the one-to-one correspondence)* is related to the sensorial aspect of this construction: Considering Fischbein's comments on the need for concrete embodiments, the activity was conceived in such a way that by means of analogy, the learner might create new concrete embodiments. The concrete existence of the one-to-one correspondence between the two sets (which we are able to point on it and observe directly) is such a new concrete embodiment. The one-to-one correspondence is perceived, represented and manipulated like any other concrete reality. This need for concrete embodiments is well expressed in the interaction between the paradigms that relate to intuition and experience. Houdement and Kuzniak (1999) highlight the fact that the link between experience and intuition is very strong. They quote Fischbein (1987, p. 88):

Experience has a fundamental role in shaping intuitions, because, in certain circumstances, it shapes stable expectations.

The need for Construction C1 (*moving from reasoning in the plane to reasoning in the space)* is clearer when we observe Fischbein's example (1987, p.138) with the two segments AB and CD with different lengths and the dialogue that follows the learner's question: "if you place the segment AB on the larger segment CD, there are points which are not contained in the common part of the two lines".

Fischbein (1987, p. 139) demonstrates how the reasoning process "remains manipulated from "behind the scenes" by the pictorial analogy". The term "naïve analogy" introduced by Hofstadter and Sander (2013) is used here for this kind of analogy that manipulates the reasoning process from "behind the scenes".

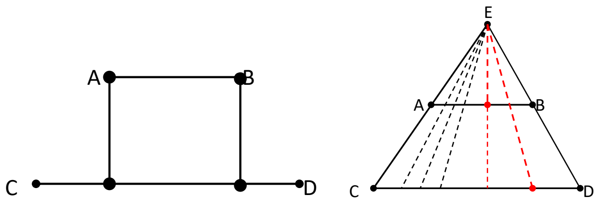


Figure 1: Fischbein's example. Moving from the line to the triangle in the plane

In order to overcome the naïve analogy, the learner needs to move from the line containing the two segments to the triangle in the plane and then construct the one-to-one correspondence (Figure 1).

Similarly, in the case of the two disks the learner needs to move her reasoning from the plane to the space and this is done by means of Construction C1. C1 has a crucial role in overcoming the naïve analogy. It is interesting to note that in both naïve analogies (Fischbein's example and Avi - Eddy first reaction while comparing the disks) the learners with their needs for concrete embodiments reason while reducing one dimension, from plane to line in Fischbein's example and from space to plane in the case of Avi - Eddy in our study. Trying to overcome the naïve analogy the direction is the opposite direction, adding one dimension: moving from reasoning in the plane to reasoning in the space for Avi and Eddy. The crucial role of construction C1 is now clearer. The learner needs to move her reasoning from the plane to the space (in the case of the two disks) in order to overcome the naïve analogy. This is done by means of C1 and it will allow Construction C2 (*constructing the one-to-one correspondence)*. In the case of the two spheres the learner needs to move his reasoning from the space to the next dimension - dimension 4. This was done by the third pair of students, Guy and Dany. For them, construction C1 has a more general character: moving from a specific dimension to the next dimension. In the next subsection, we will analyze the work by Guy and Dany in more details.

The insights offered by the interaction between paradigms GA and RA or CA and RA

I remind the readers that Construction C4 is the construction of the link between the concrete existence of the one-to-one correspondence between the two sets and the more abstract aspect of the equivalence of two infinite sets. The link is from concrete, directly observable aspects of the one-to-one correspondence to the more hidden, abstract ones of the equivalence of the two infinite sets. As already mentioned, this construction was needed to able the students to accommodate the definition of equivalence of infinite sets in their beliefs about mathematics requests.

C4 is the interaction between two paradigms: On one part, the paradigm related to the visualization of the geometric form of the one-to-one correspondence *(GA)* or the paradigm related to the calculation of its algebraic form *(CA)* and, on the other part, the paradigm which is based on the theoretical mathematical reasoning, (*RA*).

In the following, I explain how this interplay intuition, experience / formal reasoning, this interaction between paradigms, is different than our previous observation of intuition, experience that precede AiC constructions. We do not deal here with the concrete/abstract interplay in the sense of the concrete phase of experience that precedes and therefore facilitates the abstract phase. We deal with a different interaction of concrete/abstract in parallel in different situations.

Building the process which enables to use the formal definition may occur in a specific situation. To construct the definition requests, in addition, to find the same abstract essence in several different situations. This is what happened to Guy and Dany, both with a high advanced background in mathematics. After constructing the one-to-one correspondence in the different stages of the activity that included the two disks with different sizes, they were able to use analogical reasoning in other different situations such as in the case of two separate full spheres, one big full sphere and one small full sphere. Guy and Dany constructed quickly the one-to-one correspondence in the different cases of the activity and answered correctly in each case that the two infinite sets are equivalent. They first accommodate the definition in a specific situation. Solving in a specific situation given in the activity, they used, with a lot of confidence, an analogical reasoning for the next situation with one dimension more. They find the same "essence" in all their answers to the different situations proposed in the activity with different "surfaces" but with the same abstract "essence" (surfaces and essence as used by Hofstadter and Sander (2013)). This allows them to construct the definition of the equivalence of infinite sets.

CONCLUDING REMARKS

I analysed the insights offered by ETM view of paradigms to AiC analyses in the research study described in this paper. A beginning of dialogue was possible because the epistemological aspects of the two theories. For ETM, paradigms are important and explicit. The different paradigms for students and professors demonstrate a difference in epistemological posture. Epistemology is therefore underpinned by paradigms. For AiC, the epistemological dimension appears clearly when talking about the epistemic action: Construction. Both theories have also a cognitive aspect in common. AiC focuses on the learner. The learner 's need for a construction is the first phase of the construction process. We observed how a learner's experimental thought might be an AiC construction. The discussion in terms of paradigms allows us to better understand the paths chosen by the learner in the AiC constructions processes. We observed how the paradigms linked to intuition, experience and reasoning and, especially, their interactions intervene in AiC a priori and a posteriori analyses. The paradigms can serve to implement an epistemological vigilance regarding the choices made in the educational system. Allowing paradigms to coexist, they can support different approaches and therefore enrich the understanding of certain mathematical concepts (Kuzniak, 2022). This is exactly what happens in the interaction between paradigms as seen in AiC construction C4 in which the approaches, concrete and abstract develop in parallel in different situations. It is an invitation to deepen the dialectic between paradigms.

REFERENCES

Davydov, V. V. (1990). *Soviet studies in mathematics education: Vol. 2. Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula* (J. Kilpatrick, Ed., & J. Teller, Trans.). Reston, VA, USA: National Council of Teachers of Mathematics. (Original work published in 1972).

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B.B. (2015). The nested epistemic actions model for Abstraction in Context: Theory as methodological tool and methodological tool as theory. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 185–217). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 309–329. Springer.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer.

Gonseth F. (1945-1955) *La géométrie et le problème de l'espace*, Editions du Griffon, Lausanne.

Hofstadter, D. & Sander, E. (2013). *L'analogie Cœur de la pensée*. Paris : Odile Jacob.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1999). Sur un cadre conceptuel inspiré de Gonseth et destiné à étudier l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres, *Educational Studies in Mathematics, 40*.3, 283-312.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, *11*, 175-193. Halshs-00858709 ;

Kidron, I. (2011). Tacit models, treasured intuitions and the discrete-continuous interplay. *Educational Studies in Mathematics 78*(1), 109-126. Springer.

Kidron, I., Bosch, M., Monaghan, J., & Palmér, H. (2018). Theoretical perspectives and approaches in mathematics education research. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger & K. Ruthven (Eds.), *Developing research in mathematics education - twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (pp. 254-268). Oxon, UK: Routledge - New Perspectives on Research in Mathematics Education series, Vol. 1.

Kuhn, T.S. (1962). *The structure of scientific revolutions*, *Translation : La structure des révolutions scientifiques*, 1983, Flammarion, Paris.

Kuzniak, A. (2022). The theory of Mathematical Working Spaces - Theoretical Characteristics. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo & P.R. Richard (Eds). *Mathematical work in educational context* (pp. 3–31). Springer.

Kuzniak, A., & Vivier, L. (2019). An epistemological and philosophical perspective on the question of mathematical work in the Mathematical Working Space theory. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Utrecht University, Utrecht, Netherlands. ffhal-02417420f.

Montoya Delgadillo, E. M., & Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM*, *48*(6), 739 754. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0777-9.

Pontecorvo, C., & Girardet, H. (1993). Arguing and reasoning in understanding historical topics. *Cognition and Instruction 11*, 365-395.

Schwarz, B.B., Dreyfus, T., & Hershkowitz,R. (2009). The nested epistemic actions model for abstraction in context. In B.B. Schwarz, T. Dreyfus & R. Hershkowitz (Eds). *Transformation of knowledge through classroom interaction* (pp. 11–41). London: Routledge.

À LA RECHERCHE D'UN RÉFÉRENTIEL

Sébastien Cyr, Éloï Danguy-Pichette & Philippe R. Richard

Université de Montréal

Notre contribution examine la nature du référentiel pour la réalisation du travail mathématique à l'école avec, en toile de fond, une interrogation sur l'évaluation du travail. Après avoir introduit les éléments situés du savoir, nous menons une quête sur les référentiels qui se dégagent de programmes d'étude, de traditions en éducation et de résultats de recherche, notamment pour la conception de systèmes tutoriel intelligents. Nous soulignons le rôle du raisonnement dans l'articulation des éléments situés du savoir et nous insistons sur la notion de problème dans ses rapports aux connaissances, aux conceptions et aux obstacles. Nous concluons avec l'existence d'un référentiel qui s'esquisse sur les plans épistémologique, institutionnel et didactique, en profitant des acquis de la ThETM, de la TSDM et de la TAD.

INTRODUCTION

Lorsque l'on cherche à évaluer le travail mathématique, on est tout de suite amené à se situer par rapport aux connaissances du domaine. Pour plusieurs enseignants, la chasse au trésor est lancée. Ainsi, au cours de la correction d'épreuves, on procède par comptage de points selon l'avancement de l'élève dans une solution déterminée à l'avance, en constatant un écart par rapport à un système de corrections prédéterminées ou en comparant à un répertoire d'erreurs connues. Pour d'autres c'est plutôt un jugement de beauté que l'on rend : il porte sur la qualité du travail (« bonne communication », « beau raisonnement »), témoignant à la fois de la conformité du travail avec les règles de l'art comme de son originalité par rapport aux réalisations canoniques du travail mathématique dans la classe. Ce sont certes deux approches diamétralement opposées, mais chacune sous-entend une vérification des connaissances impliquées dans les solutions de l'élève. Évidemment, évaluer n'est pas la même chose que mettre des notes. Dans la théorie des situations didactiques, on peut considérer l'évaluation comme une interaction finalisée de l'enseignant (Fig. 1) en réponse à sa planification du didactique à travers les connaissances. Le projet d'évaluer s'amorce dès le choix des situations qui occasionnent, impliquent ou articulent des connaissances pour que l'apprentissage, le travail mathématique et les conceptions de l'élève puissent évoluer. Et surtout, il fonde la prise de décision au cours d'allers et de retours entre ce qui était planifié et ce qui a été réalisé en créant un système de référence qui transcende les conceptions personnelles, mais qui demeure attaché au contrat didactique, à la spécificité des situations et à la nécessité que ces dernières véhiculent dans l'interaction élève-milieu. Comment caractériser ce référentiel pour la réalisation du travail mathématique à l'école? C'est la question que nous voulons traiter ex professo afin d'engager la discussion sur une composante essentielle, mais qui demeure souvent implicite dans la théorie des espaces de travail mathématique. La notion d'évaluation se prolonge naturellement à tout type de reddition de compte qui vise à mieux comprendre le travail mathématique, comme celle qui se négocie dans la recherche en didactique des mathématiques ou dans l'innovation et le développement pédagogiques. Le référentiel apparaît d'emblée en amont et en aval de la relation didactique aussitôt que l'on doit faire le point dans un moment de réflexivité où, quels que soient le critère et le juge, on examine la valeur de ce qui a été produit ou appris.

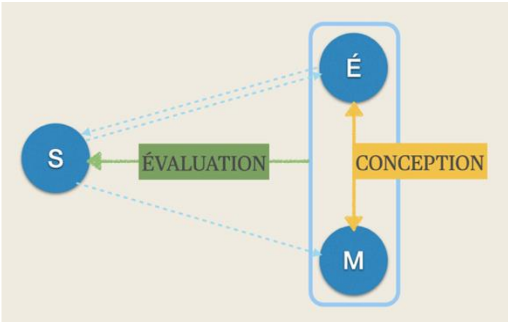


Figure 1 : L'évaluation des conceptions en tant que symptôme de la connaissance dans le schéma de Brousseau (1998).

LES ÉLÉMENTS SITUÉS DU SAVOIR

La littérature classique distingue depuis longtemps les aspects personnels et institutionnels de la connaissance. Pour la théorie des situations didactiques :

Les **connaissances** sont les moyens transmissibles (par imitation, initiation, communication, etc.), mais non nécessairement explicitables, de contrôler une situation, et d'y obtenir un certain résultat conformément à une attente et à une exigence sociale. La connaissance — ou la reconnaissance — n'est pas analysée, mais exigée comme une performance relevant de la responsabilité de l'acteur.

Le **savoir** est le produit culturel d'une institution qui a pour objet de repérer, d'analyser et d'organiser les connaissances afin de faciliter leur communication, leur usage sous forme de connaissance ou de savoir, et la production de nouveaux savoirs. (…) La manipulation sociale des savoirs dans les relations sociales exige des connaissances personnelles de la part de l'acteur, mais le produit de cette activité est une explicitation de certaines connaissances devenues publiques, puis institutionnelles. La référence culturelle et l'analyse de l'usage qui sera fait de ces connaissances les constituent en savoirs culturels. (Brousseau et Centeno, 1991)

S'il faut chercher un référentiel en observant d'abord les moyens transmissibles pour contrôler une situation, de même que la nécessité des relations avec le milieu, il semble naturel de s'intéresser au discours avec ses moyens d'expression de contrôle pour transformer les connaissances. Ces moyens doivent s'étendre aux signes mathématiques et aux artéfacts que permettent le travail mathématique. Mais surtout, il faut s'intéresser aux aspects culturels de la connaissance, ceux qui font en sorte que les conceptions des uns et des autres se retrouvent dans un espace social, sémantique ou théorique commun. Ce point rejoint la perspective de la théorie anthropologique du didactique qui caractérise les groupes d'éléments de savoirs et de pratiques, fondés sur des connaissances scientifiques, qui sont réunis et qui concourent à l'exécution d’une tâche, ce que Chevallard (1999) appelle le **savoir** du bloc technologico-théorique et le **savoir-faire** du bloc practico-technique. La conception serait une sorte d’instanciation du savoir en lien avec un concept ou un processus mathématique qui s’active et se forme au cours de la résolution d’un problème ou l’accomplissement d’une tâche. Bien que cette connaissance produise des réponses adaptées dans une situation, il se peut qu’une conception génère des réponses fausses, qu’elle manque de cohérence en dehors de la situation et qu’elle résiste autant aux contradictions auxquelles elle est confrontée. Dans ce cas, il s’agit d’un obstacle, c’est-à-dire une connaissance qui, malgré ses limites, continue à se manifester obstinément jusqu’au jour où l’on saura la maîtriser et la dépasser. C’est un aspect commun à tous les domaines scientifiques et peut-être même à toutes les matières scolaires. La notion d’obstacle, bien documentée dans la recherche en didactique, s’est développée dans la foulée des travaux de Gaston Bachelard (1938) et de Ferdinand Gonseth (1936). Elle polarise l’idée d’un point de rupture à la frontière de l’établissement d’une connaissance meilleure qui est susceptible d’être engendrée par la résolution d’un nouveau problème. Si les problèmes donnent du sens à la conception (Balacheff & Margolinas, 2005), ils sont ceux qui font évoluer les conceptions à la manière d’occasions d’apprentissage. Le lien étroit et profond, inextricable, entre connaissances, conceptions, problèmes et obstacles signifie qu’aucun ne peut se prévaloir d’être le protagoniste du savoir, notamment à cause d’effets d’implicité, de localité, d’imprévisibilité ou d’inadaptation. En revanche, lorsqu’on les considère comme un tout dans un ensemble dynamique, il s’agit d’éléments situés du savoir que l’on peut référencer pour l’apprentissage et la réalisation du travail mathématique. Il reste à distinguer le projet d’enseigner du projet d’apprendre et de reconnaître les tâches que chaque projet implique au regard de la situation en jeu (ex. situation de découverte, de communication, de preuve ou de modélisation). Une tâche est alors une activité ou une unité de travail que l’on doit effectuer dans le cadre d’un projet plus vaste véhiculé par la situation.

UN RÉFÉRENTIEL POUR LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE À L’ÉCOLE

À l’instar des règles de grammaire à l’école, il arrive souvent que l’enseignement des mathématiques soit synonyme d’apprentissage de règles, de formules ou de leurs applications. Comme pour toute activité culturelle, le travail mathématique se réalise volontiers suivant certains principes, mais c’est surtout la production de connaissances non contradictoires qui le caractérise (Lakatos, 1984), furent-elles localisées dans l’activité du moment. Les connaissances se créent au fur et à mesure de l’apprentissage, leurs domaines de validité s’ajustent suivant la qualité des problèmes que l’on résout et elles créent, en quelque sorte, le référentiel de l’apprenant. Quant à lui, l’enseignant doit amener progressivement ses élèves vers des connaissances qu’on trouve dans le programme de formation, mais celles-ci ont été complètement détachées du référentiel épistémologique qui leur a donné naissance. Selon Chevallard (1991), il lui faut les recontextualiser, repersonnaliser et resyncrétiser pour qu’elles reprennent vie. L’enseignant y parvient en choisissant les bons problèmes, ceux qui vont permettre à l’élève de rencontrer et de franchir les obstacles nécessaires à tout apprentissage des mathématiques, notamment à l'aide de problèmes connexes (Richard, Gagnon & Fortuny, 2018). Si les connaissances, problèmes, les conceptions et les obstacles sont les éléments situés du savoir, comment aborder la quête d'un référentiel en classe de mathématiques? Ce n'est certainement pas en s'inspirant de l'héritage maudit des programmes des années 1980 découpés en objectifs pédagogiques, avec son approche de mesure et d'évaluation par segmentation très prisée à l'époque. Il s'agit d'un vieux rêve de pédagogues qui veulent s'élever au-dessus des contenus disciplinaires ou qui croient encore que les mathématiques s'enseignent ou s'apprennent avec des méthodes générales, similaires par exemple à ce que l'on retrouve en français ou en univers social. Malheureusement, cet héritage est encore visible dans les programmes et les habitudes d'aujourd'hui. Malgré cela, la malédiction se poursuit inlassablement dans ce millénaire naissant sous le couvert de connaissances ciblées, d'apprentissage de fin de cycle ou de progression des apprentissages à la sauce ministérielle (MÉQ, 2016) qui rappellent une structure linéaire prédéterminée ou naturaliste. On pourrait croire que ce type de structure cache une intention de resyncrétiser les connaissances pour l'école. Bien entendu, les taxonomies ascendantes qui poursuivent les travaux de Benjamin Bloom (1954) proposent des classifications de niveaux d'acquisition des compétences en organisant de l'information de façon hiérarchique. Toutefois, il s'agit d'un travail en amont qui se destine à aider l'enseignant dans sa réflexion pédagogique et non pas un système méthodologique pour contraindre ou évaluer l'apprentissage. D'ailleurs, à la même époque, Jérôme Bruner (1960) introduit l'idée de pédagogie spiralaire. Selon lui, les programmes d'études devraient se développer en spirale pour que l'élève construise ou consolide régulièrement ses connaissances sur ses acquis. Ce principe s'est propagé conjointement dans le monde de l'enseignement qui trouva dans l'image de la spirale (ou de l'hélice) une façon convenable d'exprimer ce qu'on pressent : apprendre est un processus continu qui suppose une reprise constante de ce qui est déjà acquis en même temps qu'une complexification progressive. Dans les dictionnaires courants (Antitode, Petit Robert), la progression est « un mouvement, un accroissement ou développement par degrés, régulier et continu ». La représentation des connaissances à travers une progression linéaire ou hiérarchisée des apprentissages demeure inadéquate pour exprimer le fait que l'on apprend par petites touches dans un dialogue permanent entre une situation et un processus de résolution convergent, et que les conceptions s'enrichissent selon la qualité des problèmes et des obstacles franchis.

Pour l'établissement d'un référentiel, on pourrait au contraire s'inspirer d'initiatives plus conséquentes avec l'enseignement des mathématiques qui considère, comme nous le rappelle Brousseau (1998), qu'il incombe aux enseignants de faire faire des mathématiques, et que le seul moyen d'y arriver c'est d'apprendre à poser et à résoudre des problèmes. Pourquoi alors ne pas poser comme référentiel un ensemble de problèmes de rêve, à la portée de tout élève d'un niveau donné, peu importe la façon dont les problèmes sont ensuite résolus ou négociés en classe? Après tout, les problèmes sont intrinsèquement liés à la conception et aux obstacles, eux-mêmes étant constitutifs de la connaissance, au point de s'y confondre :

Problems are the raison d'être of knowledge. The relations between problems and knowledge are dual and dialectic: problems are the source of knowledge and of its evolution, and conversely. But, just as knowledge cannot be equated to a representation, problems cannot be identified to a statement, especially in the learning context because both knowledge and problematization are there under construction. It is the role of situations to give birth to a problem by setting the scene for interactions between students and a material and social space for actions, and creating the circumstances to stimulate students' engagement. Such situations can be designed to make students experience the relevance and efficiency of a piece of mathematical knowledge by solving problems. (Balacheff, 2022)

Ce type d'initiative existe, à l'instar des questions de niveau de référence de l'EMS (2001) ou des travaux de Bodin (2006), et il est proche de la formation scientifique. L'ennui est que ministère de l'Éducation du Québec en a décidé autrement et qu'il préfère les approches transversales au détriment de l'épistémologique didactique, avec la complicité de certaines facultés d'éducation qui prônent des méthodes pédagogiques générales. Pourtant, le ministère même propose des référentiels d'intervention qui se distingue selon les disciplines (MÉQ, 2019) pour ceux qui éprouvent des difficultés en mathématique ou qui risquent d'en éprouver, quoiqu'il ne traite jamais la notion d'obstacle ni son lien avec les connaissances, pas plus que les conceptions ou les problèmes. En outre, l'école traditionnelle a un peu de difficulté avec la responsabilité d'« apprendre à poser des problèmes » puisque d'habitude, c'est l'enseignant qui arrive avec des problèmes tout faits ou qui aide l'élève à se poser des questions. Les situations de modélisation, avec la définition de situation modèle, le traitement mathématique, les allers et retours entre la réalité et les mathématiques, la recherche de variables et de contraintes, et surtout, leur exigence de problématisation constituent un vaste terrain qui gagnerait à se joindre aux questions de rêve. L'intégration des problèmes aux référentiels est certainement une avenue du succès, mais elle n'éclaire pas sur les moyens qui permettent de contrôler les connaissances ou de mieux comprendre les liens de nécessité qui les unit.

Comme toujours, l'envie est grande d'articuler un référentiel de mathématique autour d'un ensemble de connaissances propre au domaine, comme on le retrouve dans certains ouvrages qui proposent une théorie de mathématiques élémentaires (Usiskin, Peressini, Marchisotto, et Stanley, 2003; Bremigan, Bremigan, et Lorch, 2011) ou un exposé général de mathématiques au secondaire (Deledicq, 2004a, b; Chevallier, Degen, et coll., 2012). Encore une fois, parce que les enseignants sont tenus de respecter les connaissances minimales exigées par les programmes d'études de sa région, la référence ministérielle ou l'équivalent demeure incontournable. Ces connaissances sont généralement formulées en matière de contenu mathématique (concepts et processus), mais le rapport entre la thématique des ouvrages précédents et les exigences du programme de formation dans son ensemble n'est pas assuré d'entrée de jeu. De plus, ce genre de rapport nous oblige à revisiter des acquis de la littérature comme les notions de transposition dans la théorie anthropologique du didactique (Yves Chevallard, 1991), de dévolution dans la théorie des situations didactiques (Guy Brousseau, 1998), de référentiel dans la théorie des espaces de travail mathématique (Kuzniak, Montoya-Delgadillo et Richard, 2022a), et peut-être même l'idée émergente de propagation qui distingue les connaissances institutionnelles des conceptions se développant au cours de projets ou de tâches mathématiques. Ici, la notion d'idonéité participe au rapprochement des projets d'enseignement et d'apprentissage à travers les situations, ce qui offre un potentiel intéressant si l'on voulait un référentiel mixte. Il faudrait toutefois trouver une façon d'introduire une sorte de vigilance épistémologique, comme le propose la théorie des espaces de travail mathématique, pour éviter certains effets indésirables de localité ou d'inadaptation de connaissances rattachées à la mathématique transposée.

Un autre type de mixité se trouve dans les Principles and Standards for School Mathematics (2000), un must du National Council of Teachers of Mathematics étatsunien (NCTM). Avec ses Curriculum Focal Points et autres Illuminations (Applet Java), le NTCM prolonge l'idée d'un référentiel qui offre des repères et des moyens en amont (planification) et en aval (évaluation) d'une éducation mathématique. Mais ce sont surtout des lignes directrices qui énoncent des recommandations à l'intention des enseignants de mathématiques dans la scolarité obligatoire. Ce qui fait l'originalité de l'approche est d'avoir mis cinq processus fondamentaux qui caractérisent la pratique mathématique (résolution de problèmes, communication, raisonnement et la preuve, la représentation et les connexions) sur le même plan hiérarchique que les domaines mathématiques traditionnels (nombre et opérations, algèbre, géométrie, mesures, analyse des données et probabilités). Quant aux points focaux, ils enrichissent le programme d'études dans une quête de cohérence systémique. Les documents du NCTM sont souvent cités dans les programmes de formation, comme celui de l'école québécoise, ou dans les grandes études internationales, ne serait-ce que pour nommer le programme PISA de l'OCDÉ. Bien qu'ils demeurent une référence incontournable, ces principes et normes résultent de la transposition didactique et nécessitent une vigilance épistémologique jusque dans leur application avec des élèves.

Au cours du travail mathématique, la modélisation des connaissances est dépendante de la modélisation du raisonnement, et vice-versa. De fait, l'articulation des connaissances mathématiques procède et se contrôle d'une manière plus importante ou plus particulière par le raisonnement à travers le discours et les preuves. Cela porte à l'avant-scène le rôle des définitions, des propriétés ou des théorèmes, que ce soit dans une logique de découverte ou de production de connaissances non contradictoires, voire de communication de résultats valides avec la démonstration. Il devient alors tentant d'employer des objets métamathématiques (définition, propriété, théorème, etc.) comme source de référence, non pas parce qu'il s'agirait d'un savoir exigible pour la réalisation du travail mathématique, mais bien parce que ce sont des marqueurs épistémologiques autour desquels se forment et se développent les connaissances. La notion d'îlot déductif, développée à l'origine par Gustave Choquet (1964) pour l'enseignement de la géométrie, évoque le fait qu'un référentiel peut être cohérent à un niveau fonctionnel, mais pas nécessairement dans l'absolu. Cette idée est conséquente avec le rôle du raisonnement dans la conception, pour la résolution (transformation) de certains problèmes et de son contrôle, et avec l'hypothèse d'existence de référentiels de l'élève cohérents par groupements ou suivant certains réseaux conceptuels.

UN RÉFÉRENTIEL POUR LA CONCEPTION D'UN SYSTÈME TUTORIEL

Le tuteur QED-Tutrix (Font, Gagnon, Leduc & Richard, 2022) est un système expert qui accompagne le travail de la preuve au secondaire. Il aide l'enseignant à faire évoluer les conceptions des élèves en choisissant des problèmes (Leduc, 2016), il retourne à l'élève des messages discursifs ou cognitifs pour relancer un processus de résolution bloqué (Richard, Gagnon & Fortuny, 2018) et il facilite l'évaluation des conceptions des élèves en conservant et en interprétant leurs actions signifiantes. Que ce soit pour soutenir le modèle didactique (ici traduction de l'anglais instructional design) ou l'évaluation, l'élaboration d'un tel logiciel nécessite l'implémentation d'un référentiel calculable qui permet à la fois la résolution des problèmes par des élèves, selon les habitudes de leur contrat didactique, et une reddition de compte sur le travail mathématique ou son apprentissage.

Les preuves peuvent se concevoir comme une suite d'inférences qui s'articulent autour de connexions de nécessité épistémique (Richard, Venant & Gagnon, 2019). Une inférence est une opération logique consistant à conclure la vérité d'une proposition à partir d'autres propositions prises comme hypothèses, et d'une propriété ou d'une définition prise comme justification, c'est-à-dire une opération physique ou logique d'un élève qui lui permet d'admettre une connaissance qui découle de sa liaison avec d'autres connaissances déjà admises. On peut, en effet, définir une inférence comme une étape ou un pas dans un raisonnement. L'inférence se gouverne simultanément selon des principes plus généraux, par exemple, la nécessité des liens entre les concepts ou les processus mathématiques, la cohérence physique et le dynamisme des objets qui nous accompagnent dans un questionnement, ou les calculs inhérents à l'anticipation d'un résultat prémédité. Ces contrôles possèdent des caractéristiques d'invariance qui rendent les principes réutilisables et fondent en quelque sorte un référentiel implémentable. En outre, les problèmes modélisés se conforment génériquement à la forme étant donné les hypothèses, démontrer la conclusion, à moins qu'il ne s'agisse d'une conjecture qui joue provisoirement le rôle d'une conclusion. Le fait de pouvoir disposer d'un référentiel discursif permet notamment la génération automatique de problèmes, ce qui exige, d'une part, un nouveau type de réflexion sur la pertinence d'un problème pour la réalisation du travail mathématique. Et d'autre part, sur les possibilités d'extraction de l'information d'énoncés de problème (Farid, 2022) afin d'enrichir le répertoire des problèmes implémentés, mais aussi pour tester la cohérence du référentiel implémenté. Nous revenons brièvement sur la question de la complétude d'un système au prochain paragraphe (cf. Desmarais, Richard et Venant, ETM7).

En amont, le référentiel dépend déjà du projet d'enseigner selon l'ilot déductif du moment. Les définitions, propriétés caractéristiques, théorèmes ou autres justifications mis en œuvre dans la classe doivent être connus d'entrée de jeu et implémentés dans le système. Ceux-ci se révèlent en étudiant les moments d'institutionnalisation dans les cours, que ce soit dans le matériel didactique utilisé, au cours de la résolution publique de problèmes dans la classe ou lors de l'évaluation et des corrections d'épreuves. On y apprend même quels sont les raccourcis inférentiels qui sont tolérés, constituant de ce fait des propriétés ad hoc qui faut traiter. Toutefois, l'élaboration d'un référentiel ne peut se limiter à un espace de travail personnel, si général soit-il. Il faut alors engager une étude plus vaste. Ainsi, Cyr (2021) a relevé toutes les propriétés et définitions de géométrie de 19 ouvrages scolaires de l'école québécoise. Malgré les 707 règles d'inférence différentes qui ont été recensées, Cyr a surtout noté plusieurs propriétés manquantes afin d'assurer la cohérence du réseau déductif, voire permettre la résolution rigoureuse de certains problèmes de preuve. Autrement dit, même si QED-Tutrix profite de ce recensement et que le système est modulable selon les habitudes d'un contrat didactique, certains outils internes au système sont indispensables pour garantir la formation d'un référentiel complet (Font, Leduc & Richard, ETM7).

En aval, les outils d'évaluation qui sont implémentés actuellement dans QED-Tutrix sont plutôt modestes (Corbeil, 2018), mais nous savons que certaines techniques d'intelligence artificielle sont disponibles pour documenter la nature des référentiels effectifs de chaque élève selon leur itinéraire d'apprentissage (ensemble des problèmes résolus, incluant les problèmes connexes). Ici, le projet d'apprendre se concrétise à travers les problèmes résolus par chaque élève. Puisque QED-Tutrix conserve les fichiers journaux, on peut alors s'approcher du référentiel de chacun en interprétant une grande quantité de données (cf. Richard, Vélez, & Van Vaerenberg, 2022). Certaines études permettent déjà de mieux comprendre les différents usages de la géométrie dynamique du point de vue instrumental (Trgalová, 2022), et aussi la qualité des ressources de géométrie dynamique lorsque des outils d'évaluation complètent des indexations curriculaires (Projet européen Intergeo, 2007-2010). Un travail plus fin paraît nécessaire dans le cas d'un système tuteur, et sur le plan didactique, la comparaison du référentiel dans l'intention de l'enseignant et ceux qui se construisent effectivement par les élèves constitue un moyen assez prometteur.

SYNTHÈSE ET CONCLUSION

Notre contribution amorce une étude plus systématique des référentiels dans la théorie des espaces de travail mathématique. Dans sa formulation d'origine, le référentiel apparaît comme une composante de l'espace de travail mathématique. Puisqu'il est situé au pied de la genèse discursive, on est tenté de le cantonner à la sphère épistémologique. Cependant, la théorie définit également l'espace de travail mathématique de référence pour rendre compte d'un travail mathématique souhaité par l'institution scolaire, ce qui rejoint l'idée que le plan épistémologique est tout autant institutionnel qu'épistémologique (Artigue, 2022).

Comme on le sait, faire des mathématiques, les apprendre ou les enseigner sont des concepts distincts. Certes, on effectue un travail mathématique lorsqu'on apprend, mais c'est la finalité de l'activité mathématique qui change. Il en est de même lorsqu'on se sait évalué. La notion de paradigme évoquée dans l'extrait précédent se joint au fait qu'au cours de sa formation, le mode de pensée qui anime l'activité mathématique passe progressivement d'un mode élémentaire à un mode avancé. Il n'est pas question ici de transposition, mais du fait que l'élève subit une évolution psychologique et génétique qui l'amène à percevoir différemment les objets mathématiques. Cette évolution est constante et un changement qualitatif s'opère quelque part au secondaire[6]. Sans entrer dans le détail, l'idée d'une pensée mathématique élémentaire s'oppose à celle d'une mathématique avancée, comme le propose David Tall (1991) pour les études supérieures. L'activité mathématique qui découle d'un mode de pensée particulier, potentiel ou réel, teinte clairement la nature du référentiel en jeu. Lorsque l'on veut calculer des situations didactiques à travers des problèmes de preuve pour la conception d'un système tutoriel, ce type de question s'impose rapidement dès le prototypage, et il se poursuit dans l'usage pour le raffinement du système. Nous en déduisons que le référentiel doit se composer de trois dimensions, c'est-à-dire :

1. Un référentiel **épistémologique** qui relève des sciences mathématiques et permet l'évolution vers une pensée mathématique supérieure.
2. Un référentiel **institutionnel** (après la transposition externe), comme ceux que l'on retrouve dans les programmes d'études ou de formation, et les curriculums qui véhiculent des concepts, processus, attitudes et problèmes mathématiques.
3. Un référentiel **didactique** (après la transposition interne) sur les plans suivants :
    - Le référentiel **potentiel** de l'enseignant, celui qu'il utilise dans sa praxéologie, du choix des problèmes et de leur dévolution jusqu'à l'institutionnalisation des connaissances;
    - Le référentiel **effectif** de l'élève qui découle de son travail mathématique;

[6] Adhésion à une position théorique préexistante. À l'école secondaire, l'élève doit cesser de percevoir le monde à partir de son propre point de vue et de ses propres intérêts (égocentrisme). Il est censé passer d'une pensée mathématique élémentaire à une pensée mathématique supérieure, réinvestissant ses compétences mathématiques vers une nouvelle perspective des sciences mathématiques. Le 3e secondaire de l'école québécoise correspond à la 3e du collège en France (étape 14-15 ans). La trame du bleu au jaune laisse entendre que l'adhésion est progressive, mais elle peut aussi s'effectuer par saut qualitatif, à l'instar du passage entre deux stades.

- Le référentiel **idoine** entre l'espace de travail personnel et l'espace de travail de référence, éventuellement un référentiel ad hoc qui se discute au cours de la conception et du raffinement d'un espace de travail mathématique instrumenté, comme avec QED-Tutrix, ou qui intègrent des artéfacts numériques ou des machines mathématiques à des situations traditionnelles.

En marge de la transposition didactique, le référentiel didactique exige une vigilance épistémologique plus marquée que pour la dimension institutionnelle, ne serait-ce que pour le respect du principe de cohérence dans la construction des connaissances ou les rapports cognitifs qu'il faut préserver au regard du référentiel épistémologique. On peut citer en exemple l'encapsulation des processus pour le développement du sens du nombre. Il s'agirait d'une super catégorie d'obstacles épistémologiques qui rejoint notamment les irrationnels, les nombres réels et leurs extensions possibles, de même que la limite, l'asymptote, la continuité ou le zéro (incluant 0+ ou 0−) en tant qu'inverse de l'infini (idem +∞ ou −∞). L'idée d'un processus encapsulé dans l'objet est fondamentale pour la définition et la compréhension conceptuelle, et pour les rares fois où on l'aborde en classe, elle demeure particulièrement difficile à traiter. D'ailleurs, elle a longtemps été en gestation dans l'histoire des mathématiques (Berlinsky, 2001) et il semble impossible qu'un référentiel « statique » par énonciation soit capable de la représenter, sans être accompagné du potentiel des techniques de visualisation ou d'opérations cognitives qui permettent l'enchaînement logique d'objets ou de propositions. On pourrait poursuivre avec le fait que les modèles implémentés dans les artéfacts numériques sont rarement conçus en fonction de référentiels institutionnels ou didactiques. Il y aurait même une tension entre les modèles mathématiques et les modèles informatiques, sans compter que ces modèles ne sont généralement pas connus des usagers et qu'ils renouvellent le travail mathématique engagé (Richard, Venant, et Gagnon, 2019). C'est ici que le raisonnement joue un rôle clef pour tester, animer ou compléter la compréhension conceptuelle et que les définitions, propriétés caractéristiques, théorèmes et autres marqueurs métamathématiques prennent tout leur sens. Une question similaire se pose dans l'expectative de référentiels **instrumentés** résultant de l'activité sujet-milieu et elle rejaillit sur les trois dimensions du référentiel. Ce type de référentiel se rapporte au nouveau travail mathématique, notion émergente fondée sur des considérations épistémologiques sur l'interaction entre les humains et les machines (Flores, Gaona et Richard, 2022).

Pour terminer avec notre propos introductif, exit alors l'évaluation des apprentissages comme une sorte d'« écart métrologique » entre une valeur théorique (connaissances du référentiel) et le réel (conception de l'élève) dans une recherche d'adhésion à des normes. Et bienvenue à l'évaluation qui constate un certain respect des règles de l'art au cours du travail mathématique et qui procède par comparaison avec les productions canoniques dans des situations semblables. Les critères de similitudes ou de comparaison ne sont sans doute pas faciles à établir. Ils proviennent semble-t-il d'un dialogue permanent entre l'enseignant et des productions d'élèves en évolution, dans une vision dynamique du contrat didactique qui négocie l'adhésion au référentiel, mais qui ne constitue pas l'aboutissement de l'apprentissage. Puisqu'il existe un lien fort entre évaluation et institutionnalisation, comme nous le rappelle la théorie anthropologique du didactique, c'est d'abord parce que les rapports institutionnels transcendent les personnes. Mais c'est aussi parce que l'activité d'évaluation peut être un moment d'apprentissage en dehors des vouloirs de l'institution. C'est la raison pour laquelle la recherche d'un référentiel doit se mener sur plusieurs dimensions et qu'il faut imaginer des moyens qui permettraient d'accéder le moindrement au référentiel de l'élève, quitte à imaginer de nouvelles applications de l'intelligence artificielle.

REFERENCES

Artigue, M. (2022). Note de lecture : Mathematical work in educational context, the mathematical working space theory perspective. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, volume 27*, 175-182.

Bachelard G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique : contribution à une psychanalyse de la connaissance*. Paris : Vrin.

Berlinsky, D. (2001). *La vie rêvée des maths*. Paris : Éditions Saint-Simon.

Bremigan, E.G., Bremigan, R.J et Lorch, J.D. (2011). *Mathematics for Secondary School Teachers*. Washington : The Mathematical Association of America.

Brousseau G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. & Centeno, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 11* (2.3), 167-210.

Chevallier, A., Degen, D. et al. (2012). *Référentiel de mathématiques – De 12 à 16 ans*, 2e édition. Bruxelles : De Boeck.

Choquet, G. (1964). *L'enseignement de la géométrie*. Paris: Hermann.

Corbeil, J.-P. (2018). *Forage de données pour la détection d'un état de blocage de l'apprenant dans le cadre du système tutoriel intelligent QED-Tutrix* (Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal). Tiré de https://publications.polymtl.ca/3279/

Cyr, S. (2021). *Étude des référentiels de géométrie utilisés en classe de mathématiques au secondaire* [mémoire de maîtrise, Université de Montréal]. Permalien : http://hdl.handle.net/1866/25699

Deledicq, A. (2004a). Maths, lycée. (2004b). Maths, collège. Paris : Éditions de la cité.

Farid, O. (2020). *Extraction des connaissances en géométrie plane à partir d'énoncés de problèmes* (Mémoire de maîtrise, Polytechnique Montréal). Tiré de https://publications.polymtl.ca/5374/

Flores Salazar, J. V., Gaona, J., & Richard, P. R. (2022). Mathematical Work in the Digital Age. Variety of Tools and the Role of Geneses. Dans A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo & P. R. Richard (Éds.), *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Space*s (pp. 165-209). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_8

Font, L. (2021). *Génération automatique de preuves pour un logiciel tuteur en géométrie* (Thèse de doctorat, Polytechnique Montréal). Tiré de https://publications.polymtl.ca/9090/

Font, L., Gagnon, M., Leduc, N., Richard, P.R. (2022). Intelligence in QED-Tutrix: Balancing the Interactions Between the Natural Intelligence of the User and the Artificial Intelligence of the Tutor Software. In: Richard, P.R., Vélez, M.P., Van Vaerenbergh, S. (eds) *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence. Mathematics Education in the Digital Era, vol 17*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_3

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, volume 11*, 175-193. ⟨halshs-00858709⟩

Kuzniak, A. et Richard, P.R. (2014). Espaces de travail mathématique. Point de vues et perspectives. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 17*, 4(I), 1-37.

Kuzniak, A., Nechache, A., Richard, P.R. (2022a). *Mathematical Work in Educational Context. Mathematics Education in the Digital Era, vol 18*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8

Leduc, N. (2016). *QED-Tutrix : système tutoriel intelligent pour l'accompagnement des élèves en situation de résolution de problèmes de démonstration en géométrie plane* (Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal). Tiré de https://publications.polymtl.ca/2450/

Leduc, N. (2016). *QED-Tutrix : système tutoriel intelligent pour l'accompagnement des élèves en situation de résolution de problèmes de démonstration en géométrie plane* (Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal). Tiré de https://publications.polymtl.ca/2450/

Projet européen Intergeo [site Web]. (2007-2010). Tiré de http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/projets/intergeo/

Richard, P.R., Gagnon, M., Fortuny, J.M. (2018). Connectedness of Problems and Impasse Resolution in the Solving Process in Geometry: A Major Educational Challenge. In: Herbst, P., Cheah, U., Richard, P., Jones, K. (eds) *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools.* ICME-13 Monographs. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77476-3_20

Richard, P.R., Vélez, M.P., Van Vaerenbergh, S. (2022). *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence. Mathematics Education in the Digital Era, vol 17*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0

Richard, P. R., Venant, F., & Gagnon, M. (2019). Issues and Challenges in Instrumental Proof. In G. Hanna, D. A. Reid, & M. de Villiers (Eds.), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching* (pp. 139-172). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1_7

Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In: Tall, D. (eds) Advanced Mathematical Thinking. *Mathematics Education Library, vol 11*. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_1

Trgalová, J. (2022). Digital Technology and Its Various Uses from the Instrumental Perspective: The Case of Dynamic Geometry. In: Richard, P.R., Vélez, M.P., Van Vaerenbergh, S. (eds) *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence. Mathematics Education in the Digital Era, vol 17*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_18

Usiskin, Z., Peressini, A.L., Marchisotto, E. et Stanley, D. (2003). *Mathematics for High School Teachers. An Advanced Perspective.* Prentice Hall

LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE À L'AUNE DU CADRE DE L'APPRENTISSAGE PAR PROBLÉMATISATION : TRAVAIL MATHÉMATIQUE ET PROCESSUS DE PROBLÉMATISARION CHEZ LES ÉLÈVES

Christine Choquet, Sylvie Grau, Magali Hersant, Jean-Marc Legrand, Nadia Zebiche

INSPE Nantes Université – Laboratoire du CREN

Le Cadre de l'apprentissage par problématisation (CAP) considère l'activité scientifique (de l'élève ou du chercheur) en tant que problématisation. Nous présentons, à partir de quelques exemples, une utilisation des mêmes outils du CAP dans des domaines mathématiques différents, et les genèses associées.

The Learning by problematization framework considers scientific activity (of the student or the researcher) as problematisation. We illustrate with few examples how we account for problematization processes, with the same tool in different mathematical domains, and the associated geneses.

INTRODUCTION

Dans le cadre de l'apprentissage par problématisation, l'activité scientifique de l'élève ou du chercheur n'est pas envisagée comme un travail, comme c'est le cas dans l'ETM, mais comme une problématisation. Nous illustrons ici à partir d'exemples la façon dont nous rendons compte des genèses associées à ce processus de problématisation en mobilisant des outils du CAP. Les exemples sont choisis à différents niveaux de classe et dans différents domaines mathématiques. Pour asseoir la suite de notre propos nous précisons d'abord le point de vue du CAP.

CAP, travail du problème et genèses

Nous ne pouvons pas ici développer notre cadre théorique CAP et les conditions de possibilités de son usage en mathématiques, pour cela voir (Hersant, 2021). Nous allons nous centrer sur la façon dont le travail mathématique est envisagé par le CAP et les genèses associées. Les exemples permettront d'illustrer.

Le processus de problématisation se déploie à l'intérieur d'un cadre qui détermine les types de questions et les types de réponses pertinentes. La dimension « cognitive » du processus, implique la position, la construction et la résolution de problème. Poser un problème, c'est en prendre conscience; construire un problème, c'est le déterminer en « chercher les données et les conditions pertinentes » (Fabre, 1999, p. 198) pour le circonscrire et le résoudre. Ces données et ces conditions sont des réponses à des questions implicites que l'on se pose, elles sont de l'ordre du comprendre et non de l'ordre du résoudre. La seconde dimension concerne la mise en tension des faits et d'idées si on s'intéresse aux problématisations scientifiques (Orange, 2000). Les conditions du problème sont des contraintes non contingentes, des impératifs du problème, ce qu'il faut respecter et ce sur quoi on n'a pas prise; elles sont de l'ordre de l’apodictique (Bachelard, 1938), elles expriment des nécessités. Orange (2012), en référence à l’épistémologie des sciences, distingue trois registres : 1/ le registre empirique « des faits provenant d'observations ou expériences » (ces faits sont construits) ; 2/le registre des modèles (ou des nécessités) i.e. « des explications construites pour rendre compte des faits jugés pertinents pour le problème travaillé » (Orange, 2012, p. 24) ; 3/le registre explicatif (REX) qui correspond aux présupposés considérés comme allant de soi, non remis en cause, permettant de générer les explications. Le REX structure les explications construites par les élèves et la façon de travailler les problèmes scientifiques (Orange, 2012, p. 26). De ce fait, il ne correspond pas toujours à une théorie mathématique. Il donne avant tout « sens aux modèles et nécessités qui sont mis en jeu dans une problématisation. Il indique une manière habituelle ou établie de confronter les faits et les idées explicatives pour identifier les conditions de possibilité d’une explication » (Doussot, Hersant, Lhoste & Orange-Ravachol, 2022, p. 14). Ainsi, dans le CAP, c’est plus le travail de construction du problème par l’élève que le travail de l’élève qui est mis à l’étude. Ce point de vue sur l’activité de l’élève, orienté par un parti-pris épistémologique plus que cognitif, nous conduit à étudier plus particulièrement la genèse des nécessités du problème, en lien avec celles des éléments empiriques, à l’intérieur d’un REX et aussi la genèse de certains REX.

Nous donnons ici des exemples de ces genèses au travers de l’élaboration de trois espaces de contraintes (EC) (Orange, 2000) pour rendre compte *a priori* des potentialités de problématisation d’une situation (Hersant, 2010) et *a posteriori* du processus de problématisation. Dans ces EC, apparait ce qui, pour un élève, va être considéré comme une nécessité du problème même si cela ne correspond pas forcément à une nécessité du point de vue des mathématiques et de l’enseignant. L’étude des conditions pour permettre une problématisation, et donc ces genèses, fait quant à elle l’objet d’une autre communication.

Résolution d’un problème en géométrie au collège

Cet exemple illustre la (re)construction *a posteriori* de l’activité mathématique des élèves menée tout au long de la recherche/résolution d’un problème. L’énoncé suivant est proposé à des élèves de $4^{ème}$ (12-14 ans) dans un collège en France (Figure 1) :

Les droites (AB) et (EF) sont parallèles.
Question : Quelle est la mesure de l’angle DEF ?

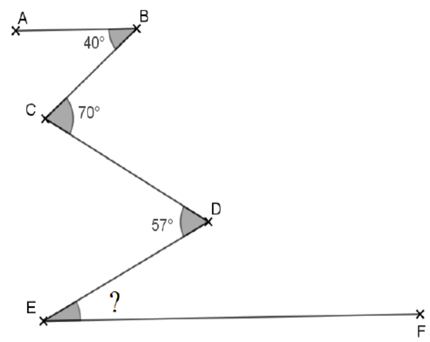


Figure 1 : Énoncé du problème *Les angles*

La séance observée est élaborée et mise en œuvre par une enseignante débutante. Celle-ci envisage avec ce problème d'amener les élèves, *a minima*, à effectuer quelques tracés qui leur permettront de calculer des mesures d'angles et, *a maxima*, à organiser des calculs de mesures d'angles pour aboutir, en mobilisant des tracés pertinents et les propriétés des angles adéquat, à la solution du problème (27°). Les élèves sont répartis en petits groupes, ils disposent d'une feuille au format A3 où figure l'énoncé du problème (Figure 1) et du matériel de géométrie usuel (règle, équerre, compas et rapporteur). Suite à nos observations, en étudiant les productions écrites de chaque groupe et les échanges entre les élèves, nous avons construit *a posteriori* un espace de contraintes (Orange, 2012) (Figure 2) : cet EC permet de repérer les trois registres (empirique, des nécessités et explicatif) et de rendre compte du processus de problématisation se développant chez les élèves de cette classe, tout au long de la séance. Le registre empirique rend compte des observations faites par les élèves sur la figure qu'ils complètent au fur et à mesure des réflexions qu'ils mènent. Les tracés sur la figure peuvent être différents selon les groupes, ils les amènent à un repérage de faits empiriques différents : par exemple, les angles 3 et 4 sont correspondants ou la droite (CE) est perpendiculaire à la droite (AB). Ces élèves de 4ème connaissent des propriétés des mesures des angles. Et comme l'énoncé précise que les deux droites (AB) et (EF) sont parallèles, un raisonnement mené par certains élèves aboutit à des nécessités: par exemple, si des angles alternes/internes sont repérables, ils seront de même mesure donc il faut repérer de tels angles.

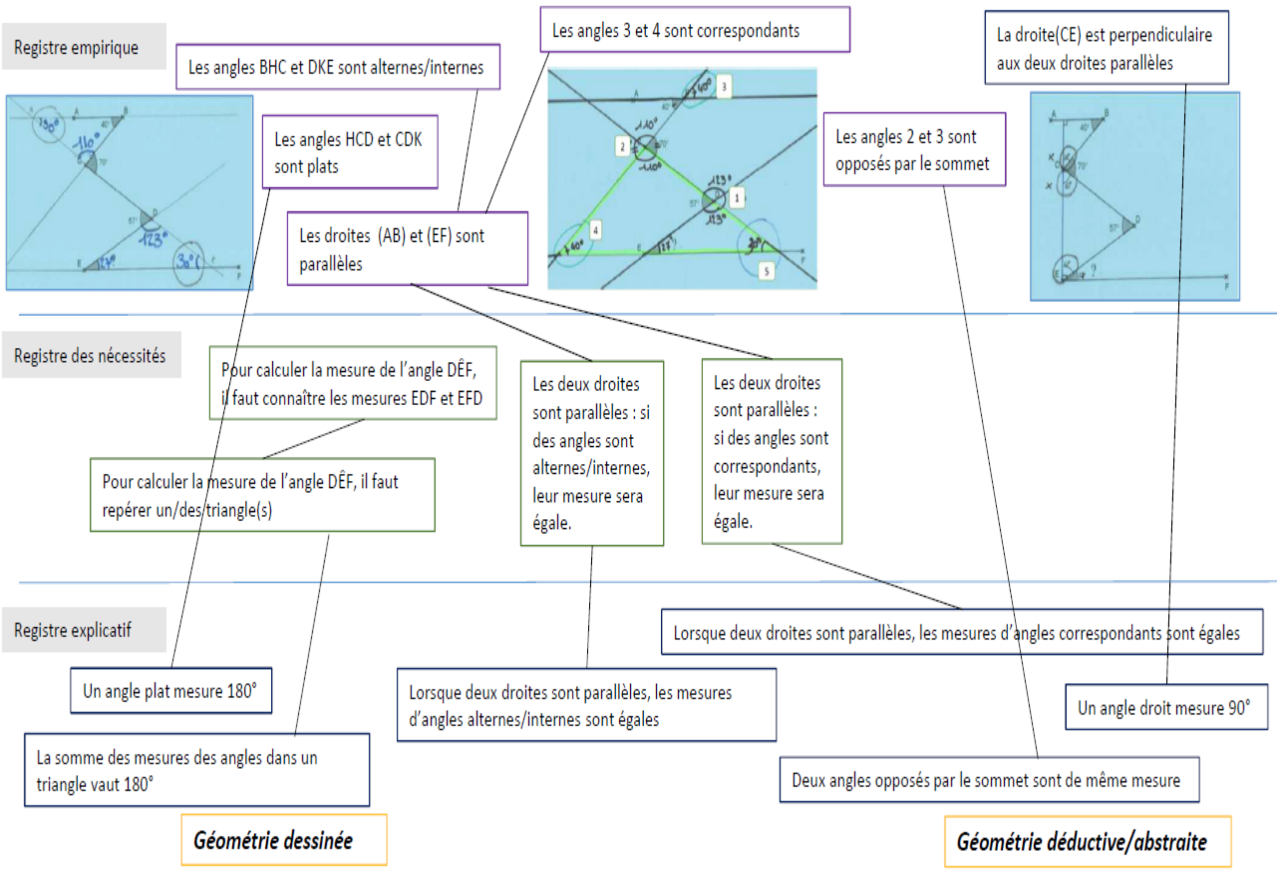


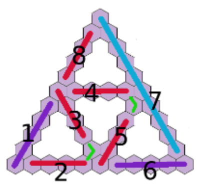
Figure 2 : Espace de contraintes a posteriori *Les angles*

Nous observons notamment dans quel(s) registre(s) explicatif(s) se situe le processus de problématisation des groupes : GI ou GII ou avec des allers-retours entre les deux. Ce processus peut alors être associé, dans le cas de cet exemple, aux jeux indispensables entre deux géométries (GI/GII) qui rendent compte de « *toutes les articulations entre deux géométries où la seconde géométrie du couple contrôle et assure la validité des techniques et des méthodes mises en œuvre dans l'autre géométrie* » (Kuzniak, 2006, p. 174).

Lors de la séance suivante, l'enseignante propose une synthèse écrite reprenant quelques productions d'élèves. Elle y expose les procédures qu'elle attendait : une première procédure utilisant une propriété des angles alternes/internes et une deuxième basée sur le repérage de différents triangles et des égalités de mesures d'angles correspondants. Elle fait le choix de ne pas évoquer une des procédures centrée sur le tracé d'une droite perpendiculaire aux deux droites parallèles. Nous en déduisons un décalage fort entre les éléments mis en avant par l'enseignante dans cette synthèse et ceux issus de l'analyse *a posteriori* dans le CAP. En effet, la synthèse focalisée sur deux procédures seulement ne rend pas compte du processus de problématisation en œuvre dans les différents groupes. Elle ne montre pas comment une majorité des élèves s'est interrogée sur la mobilisation ou non de propriétés qu'ils connaissent déjà, en les mettant à l'épreuve d'allers-retours avec une figure qu'ils ont complétée au fur et à mesure de leurs questionnements. Par ailleurs, étant donné que l'espace de contraintes permet l'identification des deux registres explicatifs dans lesquels ou entre lesquels évoluent les élèves de cette classe, il peut ainsi contribuer à envisager un processus d'institutionnalisation au regard non seulement des productions de certains groupes (comme le propose l'enseignante) mais plutôt en lien avec une explicitation d'articulations mises en œuvre entre GI et GII, à laquelle les élèves sont capables à ce moment-là, dans cette classe, d'accéder.

Généralisation informatisée de motif (cycle 4)

Ici, l'espace de contraintes (Cf. Figure 3) permet de décrire les relations mettant en jeu des faits ou des nécessités construits par les élèves lors de la généralisation, avec le support de programmation Snap !, d'un algorithme de tracé et de dénombrement d'un motif. Cet exemple est présenté plus en détails dans une communication du thème 2 (Legrand, J.-M.) Il s'agit d'une généralisation de motifs (Radford, 2006a), mais informatisée, c'est-à-dire automatisée. Le motif, la première itération d'un triangle de Sierpinski construit avec des hexagones, est tracé (et les hexagones dénombrés) par le programme.



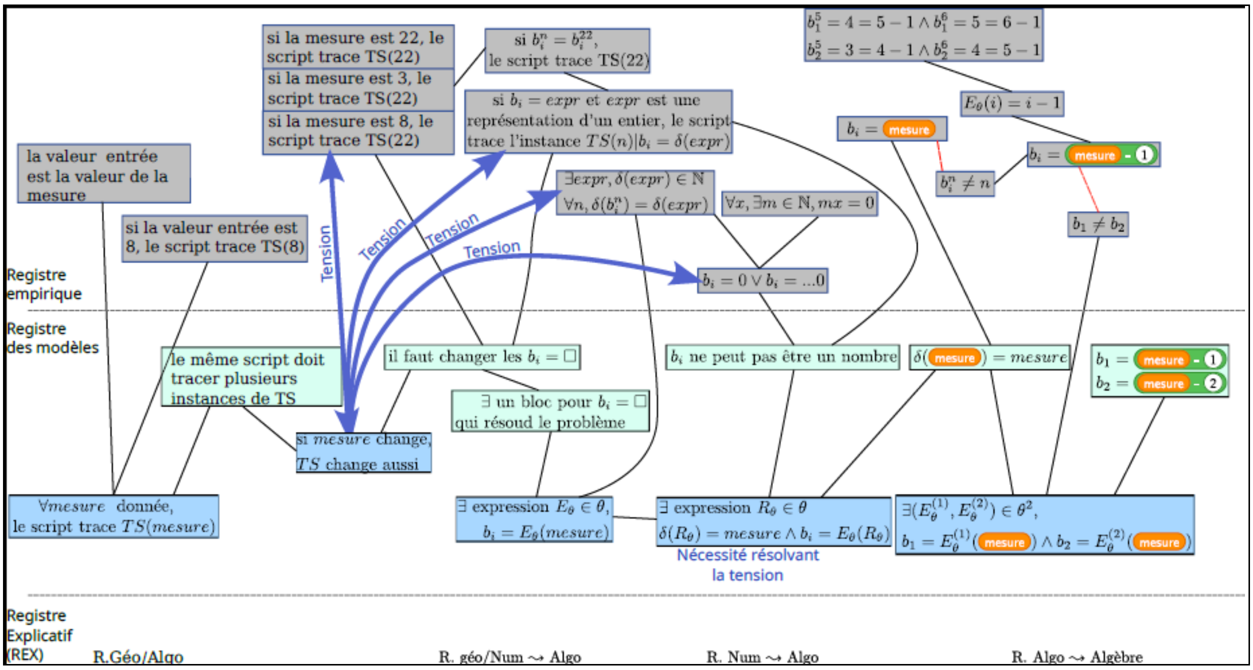


Figure 3 : Espace de contraintes *Triangle de Sierpinski*

L'EC permet de représenter les liens et tensions entre faits et nécessités afin de construire le concept de « paramètre » (ou de variable dans un rôle de paramètre), « ce qui fait la force de l'algèbre » pour (Chevallard, 1989) et qui est fondamental pour l'informatique. Les élèves du binôme, dont les actions de programmation et les interactions langagières permettent d'identifier les faits et nécessités représentés dans cet espace, construisent la nécessaire existence : d'un objet o dénotant une valeur arbitraire non définie *a priori* (ici la valeur du paramètre $mesure$, on notera $\delta(o) = \delta(mesure)$) ; disposant d'une représentation $R_\theta(o)$ dans le registre de représentation sémiotique θ dans lequel on représente la résolution du problème, ici le langage de programmation par bloc Snap! (Duval, 1993, 2006) ; dont cette représentation est manipulable dans une expression $E_\theta(o, b_i)$ de θ qui détermine la relation entre la *mesure* et le nombre d'itération des boucles, comme si la valeur $\delta(R_\theta(o))$ était connue. On retrouve ici les 3 critères caractérisant la pensée algébrique selon (Radford, 2013) : « indeterminacy », « denotation », « analycity » et observer que c'est la tension fixe-variable, ou unique-multiple, qui, lors de la construction du problème par ces élèves, génère la nécessité dans un premier temps de $E_\theta(o)$: une représentation fixe de $R_\theta(b_i)$ (en l'occurrence la représentation d'un nombre) trace une et une seule instance $TS(n)$ (par exemple si $R_\theta(b_1) = 8$, cela correspond à l'instance $TS(9)$), alors qu'« il faut trouver un programme pour aller pour toutes les mesures », or « là par exemple si je mets 8 [*i.e.* la valeur entrée par l'utilisateur, définissant la mesure du TS à tracer], il faut qu'il m'en fasse 8, enfin un de mesure 8, mais sauf que là ça va m'en faire un de mesure 22 », et de même pour une valeur entrée de 3 ou de 22, « mais du coup [...] c'est le même programme ». On a ici une mise en tension entre faits et nécessités qui fait avancer les élèves dans la construction du problème. Dans cet EC, on constate la construction de faits d'origines différentes : ceux qui sont issus d'un raisonnement, et ceux qui sont issus d'une mise en relation « action-effet de l'action ». Comme b_i ne peut pas être un nombre, une nouvelle nécessité est construite : non seulement il existe une expression $E_\theta(o)$ mettant en relation la mesure et le nombre d'itérations des boucles b_i, mais il faut aussi qu'il y ait « un bloc » qui représente la valeur entrée par l'utilisateur. Ainsi, l'EC représenté permet d'identifier les nécessités construites et les tensions qu'elles entretiennent avec les faits (les énoncés tenus pour vrai, au moins momentanément). La construction de la nécessité de la représentation du paramètre dans un registre sémiotique donné est ici permise par les nécessaires conversions d'un système sémiotique multifonctionnel (langue naturelle et représentation « non-iconique ») vers (et depuis) un registre monofonctionnel (langage informatique choisi) (Duval, 2006). Ces conversions étant elles-mêmes impliquées par l'automatisation de la méthode de tracé/dénombrement : en restant dans le langage naturel ou en n'automatisant pas la méthode, il est probable que les élèves ne puissent pas concevoir que, non seulement les représentations dans θ permettent de résoudre le problème, mais aussi qu'il ne peut en être autrement.

Le cas de la résolution d'un problème de modélisation à la fin du lycée

Nous reprenons ici une étude de cas déjà publiée (Hankeln, Hersant, 2020) pour illustrer les genèses que permettent d'étudier le CAP. Un élève de T$^{\text{ale}}$ résout à voix haute le problème de modélisation du « Phare des Baleineaux » dont l'énoncé est :

Le phare des Baleineaux est une construction située à 3 km de la pointe du Phare au nord-ouest de l'île de Ré. Il était originellement prévu que la tour mesure 50 m mais finalement, avec les difficultés géographiques, le phare ne s'élève qu'à 31 m. Avec son feu il permet aux navires de repérer la position des zones dangereuses se trouvant près des côtes, ainsi que les ports maritimes. À quelle distance des côtes se trouve le navire quand il aperçoit la lumière du phare pour la première fois ?

L'EC (Figure 4) met en évidence qu'il y a bien construction explicite de nécessités donc problématisation à partir d'éléments empiriques. De quelles genèses rend-il compte ? Dans ce schéma (Figure 4), ce qui figure dans un cadre en pointillés dans le registre empirique correspond à des éléments fournis par la chercheure à des moments où Jean est bloqué. Partons des nécessités erronées construites par Jean (cadre gris) pour comprendre comment il progresse dans la construction du problème. Au cours de son avancée dans le problème, ces nécessités se précisent ou se fissurent jusqu'à être abandonnées ou explicitement rejetées. Ainsi, au début de la résolution du problème, Jean considère que c'est uniquement la distance au phare qui va déterminer la possibilité ou pas de voir la lumière du phare, comme si l'intensité du rayon lumineux s'atténuait avec la distance.

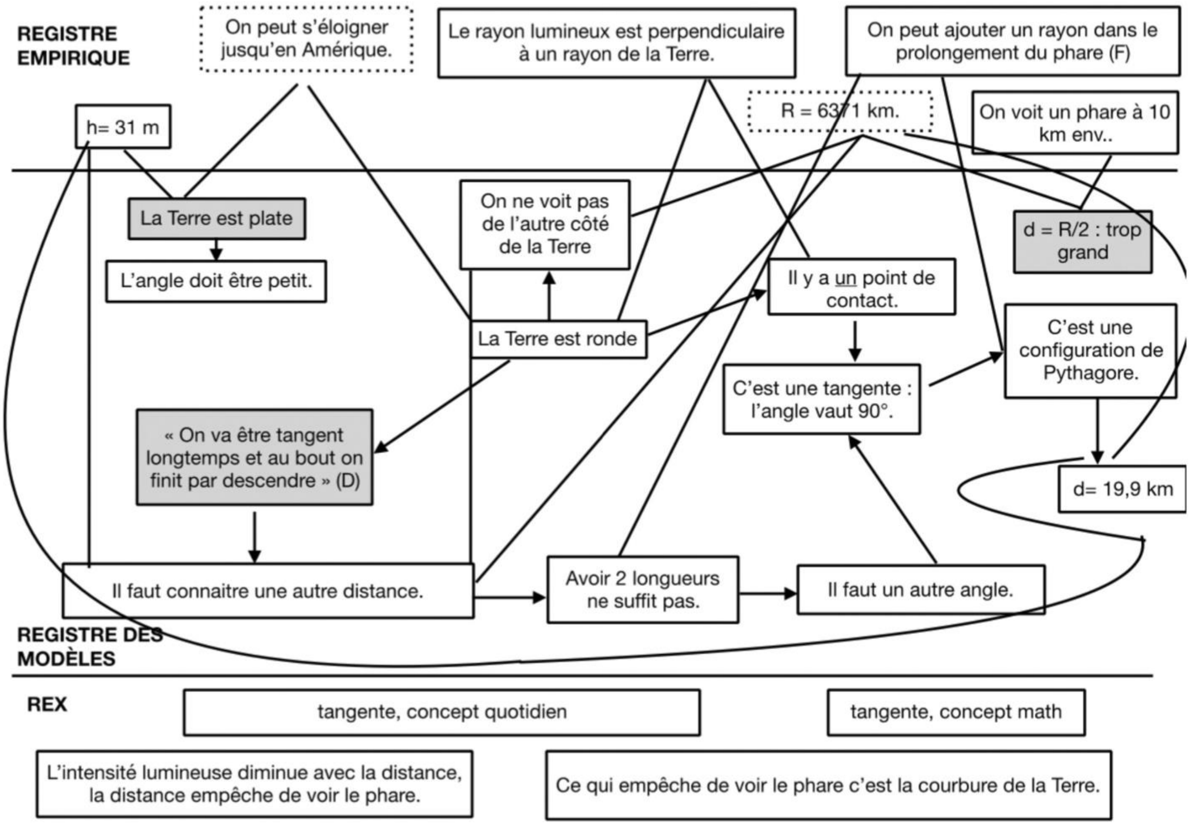


Figure 4 : Espace de contraintes pour *Le phare des Baleineaux*

Il cherche alors à trouver la valeur d'un angle, petit, pour déterminer la distance à laquelle on verra pour la première fois le phare. Puis, petit à petit, il prend en compte le fait que la Terre « se tord ». Cela l'amène à construire la nécessité que, puisque la lumière se déplace en ligne droite dans un milieu sans obstacle, « on est tangent longtemps » puis « qu'on a l'air tangent à la Terre » et enfin à considérer, en rupture avec ces premières nécessités, qu'il y a un seul point de tangence, conformément à la définition mathématique de la tangente. Cette propriété de la tangente est probablement rendue disponible par une des figures qu'il construit.

À partir de là, il ne cherche plus à déterminer la mesure de l'angle pour avoir la distance au phare mais à trouver la distance entre ce point de tangence et le phare. Cette évolution est sous-tendue par une évolution de la façon dont Jean s'explique le fait qu'on voit ou qu'on ne voit pas le phare, c'est pourquoi nous avons distingué deux registres explicatifs. D'abord, tout se passe comme si, pour Jean, ce qui empêche de voir le phare depuis le bateau est la distance, uniquement ; comme s'il y avait une perte de l'intensité lumineuse avec la distance. Cette explication renvoie à une conception erronée de la diffusion de la lumière qui correspond plutôt à une expérience terrestre et quotidienne d'un piéton, où les obstacles à la vue sont nombreux et empêchent de percevoir la rondeur de la Terre, et non à une expérience marine. Mais, en association étroite avec une représentation schématique de la situation, Jean mobilise une autre explication du phénomène: ce qui empêche de voir le phare est la courbure de la Terre. Cette seconde explication correspond à une explication scientifique, du phénomène. Le passage d'une explication à l'autre marque son changement de point de vue sur le phénomène et sa modélisation. Il ne se réalise pas de façon brutale, comme une sorte de révélation à partir du moment où le fait que la Terre est ronde est explicité.

En effet, Jean remarque que la Terre est ronde mais ce n'est que bien plus tard qu'il place sur sa figure un angle droit et qu'il indique « parce que, vu que c'est la tangente qui me permet de voir, je sais qu'il y a un angle droit ». Ce changement de REX témoigne d'un évènement de problématisation (Doussot et al., 2013 ; Doussot, Hersant, Lhoste, Orange-Ravachol, 2022) et s'articule étroitement avec une dynamique de problèmes. En effet, Jean pose et construit trois problèmes qui se font écho dans son activité : quel est l'angle entre la trajectoire du bateau et le sommet du phare ? quelle est la distance au phare lorsqu'un marin le voit pour la première fois ? et « combien de temps la Terre est-elle plate ? ».

L'EC et la dynamique des problèmes nous permettent ainsi de préciser la genèse des nécessités et du nouveau REX chez Jean. Un premier stade associe le REX « l'intensité lumineuse diminue avec la distance » et la nécessité, implicite dans le raisonnement de Jean, que la Terre est plate. Un second associe le même REX à deux nécessités : la Terre est ronde, qu'on « va être longtemps tangent à la Terre » ; la droite est perpendiculaire au rayon. Le troisième associe le REX « ce qui empêche de voir la lumière est la rondeur de Terre » à la nécessité que la Terre est ronde et que le rayon lumineux est tangent à la Terre. Le second stade est intermédiaire puisque, à la fois, Jean tient compte du fait que la Terre est ronde et qu'il va y avoir un phénomène de tangence mais n'en tire pas plus de conclusion. Ici, Jean utilise une conception de la tangente où l'unicité du point commun entre le cercle et la droite tangente est absente. Au stade 2, seul le fait que la droite est perpendiculaire au rayon est pris en compte ; Jean ne fait pas le lien entre la perpendicularité avec le rayon de la Terre, la tangence de la droite et l'unicité du point de contact. Autrement dit il ne mobilise pas le sens mathématique du mot « tangent » mais un sens plus commun. Cette représentation du problème est sollicitée à la fois pour la recherche d'un angle et pour la recherche d'une distance. Cependant, la recherche de la distance conduit Jean à se poser la question « combien de temps la Terre est plate ? » car pour calculer la distance au phare il lui faut déterminer un point de départ. À la suite de cet épisode, Jean associe clairement le fait que la Terre est ronde et le sens mathématique de la tangente, même s'il oscille entre le sens trigonométrique de ce mot pour chercher l'angle et son sens géométrique pour chercher une distance. Un déclic semble se produire lorsque Jean reprend ses différentes figures. Cela nous conduit à penser que la conception, erronée et imprécise de la tangente mobilisée dans un contexte non mathématique, a fait obstacle de façon majeure. Mais l'abandon du premier registre explicatif est aussi associé à l'abandon d'une pensée chronologique au profit d'une pensée logique. En effet, dans les propos de Jean, avant ce déclic, la notion de temps est prégnante : il cherche une distance, un angle ou un point en lien avec un déplacement dans le temps et l'espace qui explique qu'on aperçoive ou pas la lumière du phare. D'une certaine façon, tout se passe comme s'il y avait un avant et un après à propos de la possibilité de voir le phare plus que comme s'il y avait une partie de la circonférence de la Terre où l'on voit le phare et une autre où on ne le voit pas. Sa question « combien de temps la Terre est-elle plate ? » est à cet égard particulièrement significative. On est proche de l'obstacle chrono-causal identifié en histoire par Doussot et Vézier (2016). Et on comprend alors l'importance d'une avancée dans le processus de modélisation pour rompre avec ce raisonnement. La genèse des nécessités est étroitement liée au REX et aux éléments empiriques dont dispose Jean. La genèse d'un nouveau REX se produit en lien avec une dynamique de problèmes et le dépassement de certains obstacles en appui sur des schématisations du problème (Hersant, 2020).

CONCLUSION

Nous avons présenté ici comment le CAP nous permet d'envisager la question du travail mathématique des élèves : pour nous le travail du problème par les élèves correspond à un processus de problématisation qui revêt une dimension cognitive (Fabre, 1999) de construction du(des) problème(s) et une dimension incluant la mise en tension de données et de conditions (Fabre, 1999) ou de faits et d'idées (Orange, 2000). Les recherches présentées montrent comment nous rendons compte de ce travail du problème par les élèves à l'aide des EC (Orange, 2012). Ces EC renseignent la façon dont l'élève construit le problème : des modèles, des nécessités qu'il construit en lien avec des éléments empiriques et un registre explicatif. La catégorisation retenue pour construire ces espaces de contraintes les situe clairement dans une analyse épistémologique. Ces EC permettent de mettre en évidence une triple genèse : celle des nécessités, celle des éléments empiriques et celle du REX. Les trois forment un système d'interdépendance. L'évolution du REX peut témoigner de la genèse d'un nouveau REX par l'abandon d'un autre, ou sa transformation d'un REX. Dans cette dynamique se déploie une autre genèse, celle de nouveaux problèmes.

REFERENCES

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Vrin.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie: Perspectives curriculaires: La notion de modélisation. *Petit x, 19*, 45-75.

Choquet, C. (2017). Profils de professeurs des écoles proposant des problèmes ouverts en mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 36* (1), 11-47.

Doussot, S., Hersant, M., & Orange-Ravachol. (2013). Événement de problématisation et dynamiques de problématisation, *Communication au 11è colloque du Réseau Probléma*, Bruxelles.

Doussot, S., & Vézier, A. (2016). L'apprentissage par problématisation en histoire : proximité et distance avec la didactique des sciences de la nature. *Questions Vives, 26*. [http://jour- nals.openedition.org/questionsvives/1990].

Doussot, S., Hersant, M., Lhoste, Y., Orange-Ravachol, D. (2022). *Origine et développement du cadre de l'apprentissage par problématisation. Le cadre de l'apprentissage par problématisation. Apports aux recherches en didactique*. Presses Universitaires Rennaises.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

Duval, R. (2006). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. 67-89. Actes du XXXIIè Colloque COPIRELEM. 2005. IREM de Strasbourg.

Fabre, M. (1999). *Situations-problèmes et savoir scolaire*. Paris : Presses universitaires de France.

Fabre, M. (2011). *Eduquer pour un mode problématique. La carte et la boussole.* Presses universitaires de France.

Fabre, M. (2016). *Le sens du problème. Problématiser à l'école*. De Boeck Education.

Hankeln, C. & Hersant, M. (2020). Processus de modélisation et processus de problématisation en mathématiques à la fin du lycée Une étude de cas dans une perspective de didactique comparée. *Education et Didactique , 14*(3), 39-67.

Hersant, M. (2010). *Empirisme et rationalité à l'école élémentaire, vers la preuve au cycle 3* [Mémoire de recherche, Habilitation à Diriger des recherches, Université de Nantes]. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01777604

Hersant, M. (2014). Facette épistémologique et facette sociale du contrat didactique: Une distinction pour mieux caractériser la relation contrat didactique milieu, l'action de l'enseignant et l'activité potentielle des élèves. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(1), 9-31.

Hersant, M. (2021). L'usage du CAP en didactique des mathématiques : quels apports possibles ? In A. Chesnais, H. Sabra, *Actes du Séminaire national de didactique des mathématiques*, 202-224.

Orange, C. (2000). *Idées et raisons*. [Mémoire de recherche, Habilitation à Diriger des recherches. Université de Nantes].

Orange, C. (2012). *Enseigner les sciences. Problèmes, débats et savoirs scientifiques en classe*. De Boeck Education.

Radford, L. (2006a). Algebraic thinking and the generalization of patterns : A semiotic perspective. In Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M., and Méndez, A. (Eds.) (2006). *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2006b). The Cultural-Epistomological Conditions of the Emergence of Algebraic Symbolism. In F. Furringhetti, S. Kaijser & C. Tzanakis, *Proceedings of* *the 2004 History and Pedagogy of Mathematics Conference & ESU4*, Uppsala, Sweden, 509-524 (Plenary Lecture).

Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257-277.

Samurçay, R., & Rouchier, A. (1985). De « faire » à « faire faire » : Planification d'actions dans la situation de programmation. *Enfance*, *2*, 241-254.

CONCEPTION DE SITUATIONS ET CONDITIONS POUR LA CONSTRUCTION DE NÉCESSITÉS DANS LE CAP

Christine Choquet, Sylvie Grau, Magali Hersant, Jean-Marc Legrand, Nadia Zebiche

INSPE Nantes Université – CREN

Le cadre de l'apprentissage par problématisation permet de penser, dans une perspective d'ingénierie, la conception de séances qui visent l'apprentissage de savoirs problématisés. En nous appuyant sur des exemples, nous mettrons en évidence ce qui, du point de vue du CAP, constitue des conditions pour cette construction qui suppose une triple genèse : de nécessités, d'éléments empiriques, d'un registre explicatif. Nous nous intéresserons aux différents contrôles observés lors des expérimentations pour pointer leur fonction et les différents rôles qu'il s'agit d'endosser pour problématiser.

INTRODUCTION

Dans cette publication, nous nous intéresserons à cette question : comment guider et faciliter le contrôle du travail mathématique ? La notion de contrôle apparaît dans les différentes théories mobilisées lors de ce symposium. Nous allons essayer de préciser ici comment nous la comprenons et l'analysons au sein du cadre de l'apprentissage par problématisation – CAP désormais – (Hersant, 2021) en différenciant contrôle, action de contrôle et validation, et en lien avec la façon dont l'évaluation est envisagée dans le CAP (Doussot, Gomes, Hersant, Lebouvier, & Orange, 2022). Mais un contrôle ne peut s'effectuer que dans un cadre, un paradigme, que nous allons tenter de définir ici.

Le CAP envisage le travail mathématique comme un processus de problématisation. Les espaces de travail mathématiques – ETM désormais – désignent un environnement pensé et organisé pour permettre le travail des individus résolvant des problèmes mathématiques. Comme les ETM, le CAP s'intéresse à la résolution des problèmes mais il prend aussi en compte la manière dont les individus posent et construisent le problème. Ce sont ces trois étapes qui caractérisent le processus de problématisation. Dans le CAP, le temps long implique spécifiquement le processus d'institutionnalisation, processus qui est étroitement lié à la pratique des savoirs. Pour illustrer ce point, nous nous appuierons en particulier sur Hersant (2010a) qui propose une séquence pour entrer dans l'apprentissage de la rationalité mathématique à la fin de l'école élémentaire. Les travaux de Zebiche apportent par ailleurs un éclairage sur l'enjeu d'un apprentissage par problématisation en algèbre et la manière dont sont pensées les ingénieries didactiques dans le CAP. Ces ingénieries mettent en évidence que le CAP apporte des éléments d'analyse a priori pertinents pour penser un accompagnement des élèves dans la genèse d'un texte de savoir en parallèle de celle de la construction de nécessités en lien avec celle d'un nouveau registre explicatif. Nous aborderons alors la question des paradigmes et des référentiels et la manière dont nous les utilisons dans nos analyses. En particulier nous préciserons un lien possible entre théorie mathématique, registre explicatif et paradigme au sein du CAP.

Enfin, nous nous appuierons sur Grau (2017b) qui a expérimenté une séquence pour l'apprentissage du concept d'affinité à la fin du collège. Des productions d'élèves dépersonnalisées à l'aide de figurations (Grau, 2017a) sont mises en débat en petits groupes. Au cours de ces débats, les élèves prennent différents rôles, ce qui leur permet de construire des faits, des nécessités et de participer de la mise en texte des savoirs. Ce scénario vise à ce que les élèves soient explicitement dans des activités de contrôle. Nous essayerons de préciser en quoi cette scénarisation intervient dans la construction des connaissances à travers l'analyse dans le cadre du CAP d'une situation présentée par Flores González dans le thème 1 de ce symposium. Nous conclurons sur une piste de croisement entre le cadre du CAP et celui des ETM pour analyser l'activité des élèves.

PROBLÉMATISER POUR CONSTRUIRE L'IMPOSSIBLE MATHÉMATIQUE À LA FIN DE L'ÉLÉMENTAIRE

À la fin de l'école élémentaire, les élèves conceptualisent l'impossible mathématique de la même façon que l'impossible quotidien : comme ils le disent, « c'est impossible parce que j'ai beaucoup cherché et j'ai pas trouvé » (Hersant, 2008). Cette conception naïve et empirique de l'impossible mathématique est susceptible de limiter l'activité mathématique future des élèves, notamment au moment de l'entrée dans la preuve. En effet, ce qui se joue ici est bien de l'ordre de ce qu'est une preuve en mathématiques. Ce risque nous semble d'autant plus important pour trois raisons : les élèves ont rarement l'occasion de rencontrer des problèmes d'impossible mathématique ; lorsque c'est le cas la gestion en classe peut conduire à un fonctionnement basé sur les clauses sociales du contrat didactique qui privent les élèves d'une véritable activité mathématique (Hersant, 2008 ; Hersant, 2014) ; les savoirs sur la preuve en mathématiques sont peu travaillés explicitement au collège.

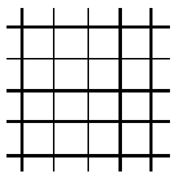
Pour ces raisons, nous avons conçu et expérimenté une séquence d'enseignement sur l'impossible mathématique à destination des élèves de 8 à 10 ans (Hersant, 2010a). Nous reprenons ici les principaux aspects de cette ingénierie élaborée en référence à deux cadres théoriques que nous avons articulés — le CAP et la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) — et mettons particulièrement en évidence les conditions que nous avons identifiées en référence à ces cadres.

L'enjeu de la séquence est de faire évoluer la façon dont les élèves s'expliquent l'impossible dans un problème de mathématique. Dans les termes du CAP (Hersant, 2021), il s'agit de permettre un changement de registre explicatif (REX dans la suite du texte) : d'un REX naïf qui n'est pas acceptable du point de vue des mathématiques — « c'est impossible parce que j'ai beaucoup cherché et j'ai pas trouvé » — à un REX scientifiquement acceptable. Une analyse préalable nous a permis d'identifier des conditions épistémologiques et didactiques à remplir pour que les élèves dépassent l'empirisme naïf et accèdent à l'impossible mathématique. Il s'agit de permettre aux élèves d'accéder aux nécessités du problème et de produire sa preuve. Ces conditions impliquent des propriétés du milieu de la situation qui doit être suffisamment proactif, rétroactif et contraignant (Hersant, 2010b). En effet, il s'agit d'amener les élèves, de façon pratiquement concomitante, avec un même problème, à invalider l'empirisme naïf et à établir des preuves acceptables, basées sur des nécessités mathématiques pour « leur permettre d'identifier clairement la différence entre les arguments naïfs et les arguments mathématiques ; rendre disponible auprès des élèves un moyen valide d'expliquer/prouver qui remplace l'argument empiriste » (Hersant, 2010a, p. 120). Il s'agit donc bien d'amener les élèves à un contrôle discursif tel que défini dans la théorie des ETM qui a pour fonction de valider un résultat.

Les problèmes d'optimisation discrète nous sont apparus comme de « bons » problèmes pour dépasser l'empirisme naïf. En effet, d'abord, ils permettent de tester des possibles, incitent à améliorer la solution trouvée et conduisent à se confronter à l'impossibilité de l'améliorer et quelques fois de la dépasser de nouveau. Finalement tout ceci rend nécessaire la construction de raisons mathématiques du possible et de l'impossible. Dit dans les termes du CAP, ces problèmes, à condition qu'ils n'embarquent que des savoirs disponibles pour les élèves de cet âge, permettent un dialogue des faits et des raisons à l'intérieur d'un REX. De plus, ces problèmes sont porteurs de possibilités de contradictions à l'échelle de chaque élève et de la classe qui permettent de mettre en défaut les raisons construites en référence au REX « empirisme naïf » et donc de faire évoluer le REX des élèves vers un REX plus adéquate d'un point de vue mathématique. Ce changement de REX correspond à l'apprentissage visé.

Illustrons cela en reprenant le déroulement observé dans une classe à propos du problème « Pas trois points qui se suivent » (Hersant, 2010a, p. 123) :

Pas trois points alignés, énoncé Combien de points au maximum peut-on placer sur les intersections de cette grille sans former aucun alignement de trois points ?



Les élèves s'engagent facilement dans la recherche du problème. Ils posent sans difficultés 6 à 8 points. Le 8ème point est plus difficile à poser et beaucoup pensent qu'il est impossible de placer plus de 8 points. Mais un élève en a placé 9. Vérification faite, il n'y aucun alignement de trois points dans cette solution à 9.

On peut estimer qu'il s'agit ici d'un contrôle instrumental. L'empirisme naïf peut alors être mis au travail. En effet, il ne suffit pas de dire qu'on n'a pas réussi, il faut faire le tri entre ce dont est sûr et ce dont on n'est pas sûr du point de vue des mathématiques : on est sûr qu'on peut placer 1, ...7, 8, 9 points car on l'a fait ; rien ne nous assure qu'on ne peut pas en placer plus. On poursuit en se demandant si, par exemple, on peut placer 25, 20, 11 points sans en aligner trois. Les premiers arguments sont faciles à trouver et, à l'aide d'un changement de cadre, les élèves peuvent construire la nécessité que jamais personne ne pourra placer 11 points (sur chacune des 5 lignes on peut mettre 2 points, pas plus, donc on ne peut pas placer 11 points). Ils accèdent alors à l'impossible mathématique. La nature du contrôle évolue, ainsi que sa fonction : il doit permettre de décider, de structurer le raisonnement et de sélectionner des indices. Ainsi le savoir construit résulte « d'un processus d'évaluation des idées et pratiques mobilisées en vue de la production d'explications ou de solutions et un processus spécifique de la discipline. » (Doussot et al., 2021, p.39).

Dans le CAP, nous estimons qu'un apprentissage a lieu lorsque, à partir des traces des explications que les élèves donnent à leur activité, nous identifions des éléments nouveaux, des indices d'un changement de REX. Dans cet exemple, le changement de REX ne correspond pas à un changement de domaine au sein des mathématiques ou de grand paradigme au sein d'un domaine comme le sont par exemple les paradigmes [A1] et [A2] de l'Analyse (Montoya Delgadillo et Vivier, 2016). Ici le changement de REX correspond au passage d'un REX non scientifique à un REX mathématique. Ainsi le REX « est composé de principes structurants, de modes de raisonnement, des références à des mondes d'expérience. » (Doussot et al., 2022, p.14). Un changement de REX ne suppose pas nécessairement un renoncement au REX initial du fait que différents éléments peuvent le faire évoluer. Il peut s'agir d'un nouveau REX englobant provoqué par l'apparition de nouveaux objets mathématiques ou d'un nouveau REX issu d'un nouveau point de vue sur un objet (comme les paradigmes de l'Analyse), voire des REX qui entrent en opposition (comme ceux de la Géométrie). Mais ces REX sont en lien avec le problème posé, l'expérience de l'élève et donc aux contraintes des programmes… Ainsi l'analyse d'une situation peut mettre en évidence différents REX suivant qu'il s'agit de l'analyse a priori à partir de l'activité supposée d'un élève générique à un niveau donné de la scolarité ou a posteriori à partir des traces effectives de l'activité des élèves au niveau méso d'un travail de groupe, ou micro d'un moment précis de l'activité d'un sujet. Le REX est ce qui fonde l'ensemble des éléments explicatifs du problème spécifique construit par l'élève, en lien avec des présupposés théoriques. Le REX est associé à la formalisation par l'élève d'explications ou du moins d'indices explicatifs identifiés dans son activité, et lors des débats.

PROBLEMATISER POUR ENTRER DANS L'ALGEBRE AU COLLEGE

La recherche engagée par Zebiche vise à proposer une ingénierie didactique (Artigue, 1988 ; Perrin-Glorian, 2011) favorisant l'appropriation du processus de démonstration algébrique dans le cas particulier des propriétés arithmétiques en cycle 4. L'ingénierie didactique, en tant que méthodologie de recherche, nous amène à procéder à une analyse préalable. Cette première étape nous permet d'identifier des conditions favorables à l'appropriation d'un tel processus.

Les prescriptions institutionnelles [1] ciblent la dimension objet du calcul algébrique à travers le travail sur le statut de la lettre, le statut du signe égal, les règles sur les manipulations d'écritures, en particulier la règle de la distributivité, et à travers la résolution d'équations de degré 1 ou s'y ramenant. Elles ciblent aussi la dimension outil à travers quatre grands types de tâches parmi lesquelles figure la démonstration d'un résultat général. Cet aspect est illustré par la proposition suivante : « prouver que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de trois ». Ainsi la volonté institutionnelle d'engager les élèves dans des démonstrations algébriques dans le domaine de l'arithmétique est bien présente.

Arrivée récemment dans les programmes de collège, l'arithmétique a pour l'instant fait l'objet de peu de recherches à l'instar de l'algèbre ou de la démonstration. Les travaux de Battie (2003) constituent un apport majeur : ils ont mis en évidence des potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement, potentialités exprimées en termes de dimension organisatrice et opératoire et de dialectique entre celles-ci. Or l'étude de manuels permet de constater que les séquences sur l'arithmétique et celles sur le calcul algébrique sont menées sans aucun lien et que les technologies (Chevallard, 1985) mises en œuvre ne sont que trop rarement explicitées. Ces premiers résultats rendent compte d'un vide didactique et conforte l'urgence de réfléchir à des alternatives.

Nous nous appuyons également sur les travaux de Sackhur et al. (2005) sur les ordres des connaissances. Pour les « calculateurs aveugles » identifiées par Sackhur et al. (2005) pour lesquels « le travail mathématique se réduit à l'application de règles, vraies ou fausses, dépourvues de cohérence globale, dont l'origine leur est inconnue et qu'ils ne cherchent pas à contrôler par leurs connaissances personnelles préalables », c'est le caractère nécessaire ou apodictique des énoncés qui n'est pas perçu. Ces connaissances ne peuvent être enseignées comme le sont les définitions et les théorèmes : on ne peut faire un cours sur la nécessité.

Ainsi une approche problématisée des savoirs à construire semble en adéquation avec ces recherches. En engageant des élèves dans un processus de problématisation, on vise à supplanter des savoirs assertoriques par des savoirs apodictiques : on vise la construction de nécessités, c'est-dire de savoirs scientifiques : « c'est vrai et il ne peut pas en être autrement ». Fabre et Orange

(1997) éclairent les savoirs scientifiques sous trois aspects. Les savoirs scientifiques sont des compétences pour maîtriser des problèmes, pas seulement les résoudre. Les savoirs scientifiques sont raisonnés. Les savoirs scientifiques sont partagés, soumis à la critique. Ainsi, ces premiers éléments nous permettent de poser déjà des pistes quant aux conditions favorables à la construction de notre ingénierie. Certaines conditions relèvent de l'explicitation de connaissances que l'on peut qualifier d'ordre 1 (SACKUR, ASSUDE, MAUREL, DROUHARD & PAQUELIER, 2005) comme peuvent l'être les notions de divisibilité sur les entiers. D'autres relèvent de l'expérience de la nécessité épistémique (Sackur et al., 2005) pour amener les élèves à problématiser et se saisir du sens porté par les expressions algébriques.

On comprend donc ici qu'un REX est caractérisé par des nécessités théoriques. La construction de nécessités par les élèves a pour objectif de construire de nouvelles connaissances opérationnelles dans un REX spécifique qui, soit est une évolution d'un REX antérieur, soit un changement de REX, par la mise en évidence d'une incohérence au sein de l'ancien. Le REX est ainsi multi-référencé. Il prend en compte certains éléments théoriques d'un domaine mathématique précis, certains éléments de l'organisation mathématique de référence (programme officiel, programmation de l'enseignant, organisation au sein d'un manuel ou d'un parcours numérique de formation) et certains aspects cognitifs liés aux élèves (âge, développement, expériences…).

La preuve joue un rôle primordial dans cette construction de nécessités. Elle est le moteur de leur formalisation et permet celle des connaissances construites au sein d'une communauté. La preuve n'est pas seulement détenue par l'enseignant ou le savant, elle s'appuie sur les nécessités mises en évidence par le processus de problématisation et participe à la construction théorique de référence.

ACTIVITE DE CONTROLE ET PROBLÉMATISATION AU LYCEE

Dans son travail de thèse, Grau (2017b) a expérimenté une situation de problématisation en classe de seconde (élèves de 15-16 ans). Le problème demande de modéliser la relation entre la pression d'un corps à volume constant (exprimée en hPa) et sa température exprimée dans différentes unités – degrés Celsius, Kelvin et degrés Fahrenheit – pour amener les élèves à formaliser une caractéristique des fonctions affines – la proportionnalité des accroissements. La séquence proposée alterne des temps de recherche dans différents groupes et sa spécificité est d'amener les élèves à travailler à partir des productions faites antérieurement par la classe. Ce scénario dit de « problématisation par analyse des productions » (PPAP) est basé sur la construction par l'enseignant de figurations à partir des productions des élèves (Grau, 2017b, 2017a). Une figuration consiste à dépersonnaliser certaines productions, à amplifier certains éléments qui seront soumis à l'analyse et à introduire des éléments symboliques comme ostensifs des objets mathématiques sur lesquels doit porter l'analyse. L'enchaînement de ces situations doit conduire à une triple genèse : celle d'un savoir problématisé par une activité constructive (l'élève agit sur et dans un milieu à fort potentiel a-didactique (Perrin-Glorian et Hersant, 2003)), celle d'une problématisation (l'élève est amené à poser, construire et résoudre un problème), et celle d'un texte de savoir par une activité productive (l'élève doit formaliser des nécessités liées au savoir étudié). En parallèle, le paradigme dans lequel se construisent ces nécessités évolue, amenant une autre genèse, celle d'un nouveau REX. La figuration étant une production anonyme, elle assure la protection des élèves qui peuvent avoir fait des erreurs. Par ailleurs la PPAP permet de donner le temps nécessaire à tous de s'approprier les travaux des autres groupes et de formaliser des éléments de synthèse. Elle vise ainsi à diminuer l'effet discriminant des recherches de problèmes ouverts en situation de classe ordinaire (Choquet, 2017 ; Grau, 2017a, 2018, 2019) du fait de la gestion des temps de mise en commun et de synthèse sous forme de débats ou de cours dialogués. Une autre caractéristique est de séparer deux types de débats : le premier type porte sur la validité (on débat du vrai ou du faux), le second sur la preuve (savoir que c'est ainsi et que cela ne peut pas être autrement).

L'enregistrement des échanges entre les élèves dans les différents groupes permet de comprendre comment les élèves posent et construisent le problème et en particulier comment ils construisent des faits. En effet, il s'agit d'identifier ce qui est hors question pour les élèves, le hors-question désignant des faits considérés comme vrais et non remis en question et non ce qui est ignoré. Il s'agit aussi d'identifier quels sont les arguments exposés par les élèves pour justifier la valeur de vérité d'une proposition, ou quelles sont les représentations ou principes élèves qui font que ces arguments ne sont pas nécessairement formalisés, tant cette valeur de vérité est acquise pour l'ensemble des élèves du groupe.

Au sein des interactions, nous avons pu repérer que les élèves peuvent jouer alternativement quatre rôles différents : ils peuvent questionner, formaliser, agir, vérifier. Ces rôles sont ceux que nous utilisons pour mener un débat intérieur, ils permettent le contrôle de l'activité (Grau, à paraître). Un des principes de la PPAP, est de proposer aux élèves des tâches explicites de contrôle en étant contraint à endosser un rôle spécifique aux différentes étapes de la séquence. Par exemple lorsque des traitements sont demandés, il est en fait demandé d'agir : on est sur un contrôle interne instrumental. Lorsque la figuration doit amener les élèves à valider une proposition, il s'agit de vérifier : on force ici le contrôle local qu'il soit instrumental, sémiotique ou discursif. Quand la consigne demande de poser le problème, il s'agit de questionner, le contrôle est alors global, l'élève doit se situer dans un cadre déterminé pour poser le problème. Enfin demander de rédiger une conclusion à partir des résultats de recherche de différents groupes correspond à formaliser : ici il s'agit d'attester la validité du contrôle, on vise un contrôle discursif au sein d'un REX.

Si nous reprenons la situation expérimentée et analysée par Flores González dans sa présentation à ce symposium, il s'agissait d'amener les élèves à exercer les trois types de contrôles locaux − sémiotique, instrumental et discursif. Son analyse montre que « si la dialectique entre les paradigmes [A1] et [A2] peut être comprise par certains élèves, le contrôle discursif n'est pas toujours mis en fonctionnement ». Une PPAP à partir du problème posé pourrait contraindre les élèves à exercer spécifiquement, en plusieurs étapes, ces différents contrôles. Rappelons le contexte : on donne une suite (u_n) définie par $u_n + 1 = 1 / (2 - u_n)$ avec u_0 dans [0,1]. Les élèves doivent émettre des conjectures sur les propriétés de la suite en utilisant la calculatrice, puis démontrer ces propriétés. Nous pouvons considérer la formalisation de conjectures comme la première étape de la PPAP et partir de ces conjectures pour construire une figuration. On peut ainsi proposer aux élèves un nouveau travail contraignant à un contrôle local instrumental afin de les amener à valider ou invalider les informations. Il peut s'agir par exemple de donner plusieurs affichages à critiquer avec une consigne du type « comment peut-on être certain que l'affichage A ne correspond pas à la suite que nous devons étudier ? ». Ce qui est mis en débat sera alors le contrôle lui-même, la fonction du contrôle est l'exactitude des données du problème. Une fois les élèves d'accord sur les affichages valides, une nouvelle figuration peut proposer différentes conjectures émises valides et demander aux élèves d'expliquer quels indices permettent de les formuler dans les différents registres que sont le graphique, le tableau de valeurs et l'expression algébrique. Ici, la fonction du contrôle est surtout la conformité, le contrôle sémiotique est largement convoqué. La troisième étape de la PPAP peut consister à proposer les explications données par les élèves à l'étape précédente, sachant qu'elles auront mobilisé un contrôle sémiotique, instrumental ou discursif. La tâche demandée peut être de rédiger une démonstration à partir de ces explications. La fonction du contrôle est alors la complétude. Le principe de la PPAP est de donner un temps long pour permettre à chacun de construire les connaissances attendues. Cela peut sembler difficile à mettre en œuvre en classe ordinaire mais l'expérimentation sur une année montre que quelques situations exemplaires suffisent pour installer des automatismes. Ici encore le contrat didactique joue de manière importante. On voit par ailleurs que les différents contrôles peuvent être caractérisés par leur finalité (sélectionner, décider, raisonner), leur nature (global ou local : discursif, instrumental ou sémiotique), leur fonction (conformité, exactitude, complétude) telles que Nechache les a définies dans sa présentation « La notion de contrôle dans la théorie des ETM ».

Enfin dans le processus de problématisation, le contrôle n'a pas la même finalité, suivant qu'il s'agit de poser, construire ou résoudre le problème. Le contrôle peut permettre de prendre une décision, de sélectionner ou construire un fait, de valider un processus, de maîtriser le raisonnement. Des inducteurs de problématisation (Fabre et Musquer, 2009) peuvent alors intervenir pour potentiellement orienter l'activité de contrôle des élèves.

CONCLUSION

Le CAP vise la construction d'un savoir apodictique. En mathématiques, nous articulons le CAP avec la théorie des situations didactiques de Brousseau. Notre hypothèse est que poser, construire et résoudre des problèmes, amène à conceptualiser les objets étudiés en lien d'une part avec le problème posé, et d'autre part avec des contraintes de différentes natures : épistémique, heuristique et cognitive. Ces contraintes mettent alors en évidence des nécessités au sein des modèles utilisés qui délimitent le domaine de validité du savoir et justifient en quoi il est opérationnel pour le problème posé. L'enjeu est double. D'une part, il s'agit de rendre ce savoir disponible pour les élèves, de sorte qu'ils puissent le mobiliser dans des problèmes reconnus comme similaires par la mise en évidence des nécessités qu'ils ont identifiées comme des caractéristiques de schèmes en lien avec ce savoir. D'autre part, le point de vue du CAP permet d'identifier et de mettre au travail des savoirs cachés, ignorés, non enseignés et pourtant indispensables à l'activité mathématique. D'un point de vue épistémique, il s'avère particulièrement pertinent d'utiliser le CAP pour penser des situations d'enseignement et d'apprentissage pour aborder des notions résistantes et des modes de pensée spécifiques. Cela revient à dire que ces savoirs supposent la construction d'un nouveau registre explicatif (REX). Nous avons vu que c'était le cas de l'apprentissage de la rationalité mathématique des jeunes élèves avec les travaux de Hersant, de la démonstration algébrique avec ceux de Zebiche, de celui des fonctions affines avec ceux de Grau. En effet, dans ces exemples, il s'agit d'amener les élèves à construire de nouvelles connaissances qui supposent des continuités et des ruptures avec des représentations anciennes associées à des savoirs ancrés dans des REX qu'il s'agit de faire évoluer – le calcul arithmétique, la proportionnalité, la façon de penser l'impossible en mathématiques. Ces ruptures sont liées à des obstacles et les franchir ne peut se faire que sur un temps long pour en éprouver la résistance.

La question est alors de concevoir des situations favorisant la problématisation, la difficulté étant d'accompagner les élèves dans le processus tout en veillant à ne pas problématiser à leur place. Des ingénieries ont été testées. Une caractéristique des situations construites avec le CAP est que les élèves sont largement associés au processus d'institutionnalisation et que l'activité de contrôle y est prédominante. Ces situations visent une évolution ou une genèse du REX adossée à deux autres genèses : celle des nécessités et celle des éléments empiriques. L'ingénierie didactique doit permettre à l'enseignant de provoquer cette triple genèse en proposant des situations contraignantes amenant alternativement à effectuer des traitements, identifier des paradoxes, comparer et critiquer des propositions, mettre en débat des éléments de preuve etc. L'ingénierie didactique pensée à travers le prisme du CAP amène ainsi à concevoir de nouveaux scénarios de séquences, en particulier pour que le débat ne vise pas seulement à valider ou invalider des procédures mais à expliciter les raisons du vrai et du faux et à séquentialiser l'activité de contrôle qui peut alors avoir différentes finalités, natures et fonctions. Un croisement des analyses dans les deux cadres que sont les ETM et le CAP devraient permettre de mieux comprendre la nature du REX mobilisé par les élèves et de mieux ajuster les situations proposées pour viser un ETM complet. La notion de contrôle peut alors être intéressante à préciser à la croisée de ces deux cadres.

NOTES

1. BO de 2020 https://eduscol.education.fr/90/j-enseigne-au-cycle-4.

REFERENCES

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 9(3), 281-308.

Battie, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique*. Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot - Paris VII.

Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, *5*, 51-94.

Choquet, C. (2017). Profils de professeurs des écoles proposant des problèmes ouverts en mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 36 (1), 11-47.

Doussot, S., Gomes, L., Hersant, M., Lebouvier, B., & Orange, C., (2021). Le cadre de l'apprentissage par problématisation et les questions de l'évaluation, *Recherches en Didactiques*, 33, 37-58.

Doussot, S., Hersant, M., Lhoste, Y., & Orange-Ravachol, D. (2022). Origine et développement du cadre de l'apprentissage par problématisation. In *Le cadre de l'apprentissage par problématisation. Apports aux recherches en didactique.* Presses Universitaires Rennaises.

Fabre, M., & Musquer, A. (2009). Comment aider les élèves à problématiser ? Les inducteurs de problématisation. *Les Sciences de l'éducation - Pour l'Ère nouvelle*, Vol. 42(3), 111-129. https://doi.org/10.3917/lsdle.423.0111

Fabre, M., & Orange, C. (1997). Construction des problèmes et franchissements d'obstacles. *ASTER*, 24, 37 57.

Flores Gonzalez, M. (2021). *Activité et travail mathématique à la transition lycée université en Analyse : le cas de suites* $u_{n+1}=f(u_n)$. Thèse de doctorat. Université de Paris.

Grau, S. (2017a). Les figurations : Écrit intermédiaire pour problématiser. *Actes du 44e Colloque COPIRELEM*, Epinal.

Grau, S. (2017b). *Problématisation en mathématiques : Le cas de l'apprentissage des fonctions affines*. Thèse de doctorat. Université Bretagne Loire. https://hal.science/tel-01629911

Grau, S. (2018). *Enseigner par les problèmes : La question de la mise en commun*. Conférence CREN-CARDIE, Nantes.

Grau, S. (2019). Entre problème construit par l'élève et problème théorique : Distance et/ou malentendu. In Chaachoua, H., Bessot, A., Barquero, B., Coulange, L., Cirade, G., Job, P., ... Vandebrouk, F. (Dir), *Nouvelles perspectives en didactique : le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure*. Grenoble : La pensée sauvage. (p.541-552). https://hal-02517943

Grau, S. (à paraître). Le modèle de séquence PPAP in Lebouvier, B. (Ed.), *Aider les apprentissages par problématisation en classe*. Manuscript in preparation

Hersant, M. (2008). "Problèmes pour chercher": Experience, Possible and Necessity in Pupils Reasonings. *The First Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and Shaping the World of Mathematics Education.* Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICMI, Rome. https://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/

Hersant, M. (2010a). *Empirisme et rationalité à l'école élémentaire, vers la preuve au cycle 3*. Mémoire de recherche pour l'Habilitation à Diriger des recherches, Université de Nantes. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01777604

Hersant, M. (2010b). *Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir : De l'analyse de séquences ordinaires au développement de situations didactiques.* [Note de synthèse des travaux, habilitation à diriger des recherches, Université de Nantes]. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01777604/document

Hersant, M. (2014). Facette épistémologique et facette sociale du contrat didactique : Une distinction pour mieux caractériser la relation contrat didactique milieu, l'action de l'enseignant et l'activité potentielle des élèves. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 34(1), 9-31.

Hersant, M. (2021). L'usage du CAP en didactique des mathématiques : Quels apports possibles ? In A. Chesnais, H. Sabra (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2020.* Grenoble : La pensée Sauvage. (p. 202-224).

Montoya Delgadillo, E. M., & Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM*, 48(6), 739–754.

Perrin-Glorian, M.-J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants.

In C. Margolinas et al. (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage. (p. 57-78).

Perrin-Glorian, M.J., & Hersant, M. (2003). Milieu et contrat didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23(2), 217-276.

Sackur, C., Assude, T., Maurel, M., Drouhard, J.-P., & Paquelier, Y. (2005). L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 25(1), 57–90.

ON THE INFLUENCE OF CONSTRUCTIVISM AND THE THEORY OF DIDACTICAL SITUATIONS ON THE THEORY OF OBJECTIFICATION

Luis Radford

Université Laurentienne, Canada

This article deals with the influence of North American constructivism and the French theory of didactical situations on the theory of objectification. Understanding "influence" in a dialectical Hegelian sense, the purpose of the article is to show how the concepts of knowledge and the concepts of the subject (i.e., the individual) of constructivism and the theory of didactical situations shaped the corresponding concepts in the theory of objectification. The shaping of these concepts is described through a process of sublation informed by a theoretical archaeological expedition of concepts in the early modern period.

INTRODUCTION

At the end of the 19th century, French philosopher André Lalande contended that "toute l'histoire de la philosophie montre qu'une théorie ne dépend pas moins de celles qu'elle réfute que de celles qu'elle continue" (1899, p. 1). I would argue that this claim is also true of theories in mathematics education. However, I would also argue that things are more complex. A theory B does not need to refute or continue another theory A to be profoundly affected by it. Theory A can be a great source of inspiration in the constitution of the key concepts of B even if it does not refute or prolong A. In other words, the way theory B relates to A and/or other previous theories seems to me to be much more complex than the lines of refutation/continuation. There are important influences that escape this schema.

As Hegel argued in his Shorter Logic,

> This is the true meaning of a much misunderstood phenomenon in the history of philosophy—the refutation of one system by another, of an earlier by a later. Most commonly the refutation is taken in a purely negative sense to mean that the system refuted has ceased to count for anything, has been set aside and done for. Were it so, the history of philosophy would be, of all studies, most saddening, displaying, as it does, the refutation of every system which time has brought forth. Now although it may be admitted that every philosophy has been refuted, it must be in an equal degree maintained that no philosophy has been refuted. (Hegel, 2009, pp. 223-224)

In this paper I would like to discuss the influence that North American constructivism (as articulated for Cobb and Yackel (1998) and von Glasersfeld (1995) among others) and the theory of didactical situations (Brousseau, 2005) have had on the theory of objectification. In particular, I would like to focus on the concept of knowledge and the concept of the subject (le sujet, l'individu).

INFLUENCES

"In the passage of different into different, the different does not vanish: the different terms remain in their relation." (Hegel, 2009, p. 260)

In a naïve sense, everything is influenced by something else. The influence I am talking about here is more specific; it has a dialectical materialist sense. Let me try to explain it.

From a dialectic materialist perspective, when an entity B emerges, it emerges from something else, say A. In the emergence of B, links or relations between A and B are created. Think now of B as a theory emerging from a collection of theories. It means that between theory B and a collection of theories $A_1, A_2, \ldots$ that B considers while building its theoretical apparatus definite links between B and the A_i are created.

Through those links, theory B enters into a dialectical relation with theories $A_1, A_2, \ldots$.These links allow B to see how a certain theoretical construct C (e.g., "knowledge," "subject") is framed, theorized, and thematized in $A_1, A_2, \ldots$. Although B does not need to build the construct C (we'll call it C_B), as an expansion or generalization of the corresponding constructs as found in $A_1, A_2, \ldots$, the dialectical link is such that the form and content of C_B is profoundly affected by them. Hegel provides us with a term and an idea to better express my argument. Hegel talks about sublation, the sublation (or preservation) of something into something else, which, by being something else appears as an "opposite" entity to that which is sublated. Let's see these ideas in some detail.

In Science of Logic, Hegel says: "Nothing is immediate" (1969, p. 107; emphasis in the original). What Hegel means is that any entity is always derived from something else, it comes from something. "What is sublated . . . is the result of mediation" (p. 107; emphasis in the original). Then, he explains that "what is sublated . . . is not thereby reduced to nothing" (p. 107). The derived entity hence keeps in itself the "the determinateness from which it originates . . . Thus what is sublated is at the same time preserved; it has only lost its immediacy but is not on that account annihilated" (p. 107).

Along with the preservation of the source entity in the new entity, Hegel also recognizes a difference. The concept of difference is relational: A is different from B. And by being different, B does not only distinguish itself from A, but negates A—it negates A as something B is not, as fractions negate whole numbers. Hegel's concept of negation, which attempts to go beyond the concept of negation of classical logic (a concept that does not tolerate that something can be and not be at the same time), sheds a new light on the idea of sublation. Sublation is the result of a mediation that not only emphasizes the preservation of the source entity in the new entity but also exposes the latter as an opposition or negation of the former; that is, as something the first is not. This is why "Something is sublated only in so far as it has entered into unity with its opposite" (Hegel, 1969, p. 107).

In the preface of the Phenomenology of the Spirit, the idea is presented through a biological metaphor: the bud, the blossom, and the fruit. First

> the bud disappears in the bursting-forth of the blossom, and one might say that the former is refuted by the latter; similarly, when the fruit appears, the blossom is shown up in its turn as a false manifestation of the plant, and the fruit now emerges as the truth of it instead. These forms are not just distinguished from one another, they also supplant one another as mutually incompatible. Yet at the same time their fluid nature makes them moments of an organic unity in which they not only do not conflict, but in which each is as necessary as the other; and this mutual necessity alone constitutes the life of the whole. (Hegel, 1977, p. 2).

In the language of the Science of Logic, the bud is sublated in the blossom as the blossom is sublated in the fruit. Not only the fruit comes from the bud and the blossom, but the fruit, by being different, negates them. This negation is not a simple opposition. It is an opposition from where the entities acquire new meanings. Indeed, the three entities create a new unity—a dialectical unity of units, each unit bestowing meanings on the others, meanings that they did not have before.

Michael Inwood uses the following example to explain these ideas:

> Before the emergence of Protestantism, Catholicism is just (Western) Christianity as such. It then generates Protestantism, which negates it. Protestantism is not just non-Catholicism, but actively differentiates itself from it and bears the marks of the Catholicism that it negates. Catholicism in turn negates Protestantism, thereby ceasing to be simply Christianity as such and bearing the marks of its active self-differentiation from Protestantism. (Inwood, 1992, p. 201)

We could also use the example of intuitionism in mathematics (Brower, 1952). Intuitionism emerges from classical Aristotelian mathematics as something different; it negates its source. But by coming into life, intuitionism sheds light on classical mathematics, and vice versa. Žižek has famously used this Hegelian idea to understand how the present and the past continuously rewrite each other (see, e.g., Žižek, 2010).

Hegel’s philosophy rests on an organic view of life that, contrary to other philosophical systems, conceives of living organisms, not only biological organisms but also ideas, and systems of ideas (theories, we may say), as mutually interrelated. Their interrelations come out of mediations that account for their historical transformations allowing us to see living organisms as “moments” (historical moments) of a whole in motion.

One of the limits of Hegel’s biological metaphor is that, in matters of human phenomena, sublation—that is, the transformation of something into something else that keeps ineluctably in itself the traces of the sublated form—does not follow a natural course. The sublation of concepts of the subject or concepts of knowledge cannot be approached as natural phenomena.

We must bear in mind that sublation is at the heart of the "dialectical moment," the moment of movement and transformation. The dialectical moment, as Marx (2007) and Ilyenkov (1977) argued later, can only be understood in the comprehensive context of history and culture, for it is there that the mediations find their force.

To recap, the sublated form is a central part of the derived form that sublates it. One and the other appear as different, as one negating the other, but in the dialectical movement of this negation, they are both enriched by acquiring meanings they did not have before. This is the idea that I want to explore in discussing how the concepts of knowledge and subject (the teacher, the student) in the theory of objectification have been deeply shaped by those of constructivism and the theory of didactical situations. Although different, the theory of objectification's concepts of knowledge and subjectivity could hardly have appeared in the way they did without a continuous reference to the concepts of constructivism and the theory of didactical situations (TDS).

THE SUBJECT IN CONSTRUCTIVISM AND THE TDS

One of the chief characteristics of the learner in constructivism and the TDS is the learner's autonomy. Autonomy is modernity's answer to the question of the relation between the individual and the social. The relation that lies at the heart of the answer is one that, for the first time in Western history, gives precedence to the individual over the social. In premodern times, the individual was certainly a physical entity, but it was rather conceived as an integral part of a larger unit (Marcus & Fischer, 1999). Indeed, medieval political treatises portray the societies of the time as a sort of body arranged by a natural transcendental order; in this body the individuals found their own positions and roles to play (Adams, 2009). What was it then that made the individuals come to see their relationship with the social in a different way, to see themselves as autonomous beings?

The concept of autonomy grew up out of the progressive collapse of feudal structures and the rise of artisanal capitalism in the late Middle Ages. Indeed, the emergence of market towns and the bourgeois world led to the transition from what the German sociologist Norbert Elias (1991) describes as "external consciousness" to "self-consciousness," the former referring to doing things as one is told, the latter to doing things as oneself decides to do. Elias says,

> One can see more clearly in retrospect how closely this new form of self-consciousness was linked to the growing commercialization and the formation of states, to the rise of rich court and urban classes and, not least, to the noticeably increasing power of human beings over non-human natural events. (Elias, 1991, pp. 97–98)

Historically speaking, autonomy is the name of the societal movement of emancipation of the early modern individual from the medieval order. It consisted in conceiving of oneself as the origin of authentic action and thought (Taylor, 2003). This concept of autonomy accompanied indefatigably the unfolding of modernity, finding a special place in Piaget's work. In his reflection on the future of education, we find him asserting that "The goal of intellectual education is not to know how to repeat or retain ready-made truths (a truth that is parroted is only a half-truth). It is in learning to master the truth by oneself" (Piaget, 1973, p. 106; my emphasis).

Von Glasersfeld's (1995) book, Radical Constructivism, draws heavily on Piaget's work. In this book von Glasersfeld purposely draws on the aforementioned conception of the autonomous individual. It does not then come as a surprise that, in this seminal book, to the eyes of the individual, the social world appears in a way that would have scandalized the ancient Greeks, namely as a kind of space comprised of independent autonomous monads, a space where these monads jump in and out at their convenience, like in a market. Naturally, this modern social world is made up of relations. As Jean-Jacques Rousseau (2012) noticed, these relations are of a very specific nature: they are contractual. Thus, individuals relate to each other, they collaborate among themselves; but they do it from their individual perspective and interests, exactly in the manner Piaget (1967) does when he tries to understand interaction in his Études sociologiques. This is why, as von Glasersfeld reminds us, autonomy has to do with "the need [of the individual] to manage with what is available" (1995, p. 147). Von Glasersfeld finds in this principle of autonomy the principle that "governs the construction of human knowledge, and therefore lies at the root of all epistemology" (p. 147). It is against the background of the autonomous subject that we need to understand the main theoretical claim of constructivism, namely that "knowledge is actively built up by the cognizing subject" (p. 51).

What happened when these ideas were transposed to education? For one thing, constructivists have emphasized the idea that it is the student and only the student who constructs her own knowledge; the teacher cannot just pass on knowledge to the student. The theoretical assumptions about the individual have given rise to a pedagogy where the teacher is pushed to the margins of the student's processes of learning. The teacher is there to help but she must be very cautious not to trespass into the student's autonomous space of action. If she trespasses on the thin frontier separating herself from the student, then she may find herself imposing her own view on the student, thereby ruining the autonomous learning project, the only possible one in the constructivist account (for details, see Radford, 2014).

Because constructivism and the TDS (Brousseau, 2005) have drawn on Piaget's epistemological principles, it is not surprising to see similarities in terms of the way they conceptualize the student. In both approaches autonomy is part of the theoretical backbone to witness the concepts of a-didactical situations, the Topaze Effect, devolution, and the TDS's conception of learning as something that the student has to accomplish independently of the teacher. However, there are differences, some of which come from a different understanding of knowledge.

KNOWLEDGE IN CONSTRUCTIVISM AND THE TDS

The constructivist emphasis on “the need [of the individual] to manage with what is available” (von Glasersfeld, 1995 p. 147) leads to a subjective radical concept of knowledge. Knowledge is what the individual does or produces in order to cope with the situations in which she finds herself immersed. All knowledge is simply “viable” (von Glasersfeld, 1995). Although the TDS adopts a Piagetian adaptive view of knowledge, it does not see this adaptation in the same way. The TDS adds that knowledge results from the optimal solution to a certain situation or problem. Of course, what is optimal is relative. Something can be optimal in one culture but not in others. The optimal in the TDS must be understood in terms of mathematically optimal; that is to say, in the sense of the optimal according to what came to be, historically speaking, standard Western mathematics.

We are ready to come back to Hegel’s ideas to better understand the question of the influence that theories have on each other.

THE PROCESSES OF MEDIATION

One way to understand a theory is perhaps to start by considering what questions the theory tries to address. The research questions provide us with a sense of what the theory wants to do. Next, we can move on to how the theory tries to answer its questions. Finally, we want to understand the theoretical principles of the theory, from where the theory intends to start to reach its ends. Although useful to understand what a theory is, this strategy does not help much in understanding the genesis of a theory. So, the what-how-where strategy needs to be supplemented with something else. It is at this point where the processes of mediation are important.

As I mentioned before, in a process of mediation an entity (e.g., a concept) is sublated; that is, transformed into something else. Let us look first at the concept of knowledge in the TO.

The role of the sublated forms

Because the intention of the theory of objectification was to provide a cultural-historical account of learning, the concepts of knowledge conveyed by constructivism and the TDS did not seem to fit the theoretical project. In the case of constructivism, the subjectivist and individualist concept of knowledge was at odds with the sought-after concept. In constructivism, knowledge is a psychological entity. We needed something of a different order. In the case of the TDS, knowledge is not seen as a psychological entity. But because of its ubiquitous commitment to standard Western mathematics, it did not seem to have the encompassing cultural generality we wanted to cover in the TO.[7] The encompassing cultural generality requires us to bear in mind that, like truth, knowledge is always embedded in cultural, symbolic, political, and economic structures of authority and assent (Fernandez-Armesto, 1998, p. 67; see also Shapin, 1994; Detienne, 1996). To know something is to enter into a rhetorical structure that Foucault called the society's regime of truth:

> Each society has its regime of truth, its 'general politics' of truth: that is, the types of discourse which it accepts and makes function as true; the mechanisms and instances which enable one to distinguish true and false statements, the means by which each is sanctioned; the techniques and procedures accorded value in the acquisition of truth; the status of those who are charged with saying what counts as true. (Foucault, 1980, p. 131)

The mediation I am describing (although I am not attempting to offer a precise historical reconstruction of it) already puts into evidence how the sought-after concept of knowledge in the TO is influenced by the concepts of knowledge in constructivism and the TDS. The TO's concept of knowledge does not arise "immediately," to use Hegel's expression; it arises in a process in which it is shaped by those concepts. In this process of mediation, there is a dialogue that helps the nascent entity recognize itself by acquiring bit by bit determinations it did not have before.

The sublated forms contribute in different ways. They are permanent reminders of important aspects of a concept of knowledge. One reminds us of the subjective presence and role of the individual; the other reminds us of the cultural logic that organizes knowledge.

The nascent entity could be seen as a synthesis of the sublated forms, at least in the sense that these forms are constitutive parts of it. But a synthetic view may put us at risk of forgetting the dialectical movement that remains between these forms and the result of the process of mediation. Indeed, things are more complex. A synthetic view fails to capture the fact that new relations are crafted between the three entities—knowledge in constructivism, in the TDS, and the TO. In other words, the process of mediation is not merely a process of emergence of something from something else but also a process through which relations are created. We need to better understand this process. We need to consider the constant presence of the general project of the theory, which acts as a remote lighthouse.

The general project

If there were no general project, all theories informed by constructivism and the TDS would end up at the same point. Obviously, this is not the case. The process

[7] During a coffee break after a presentation I made at a conference organized by Bruno D'Amore in Locarno in 2004 (see Radford, 2005), in front of a table full of cookies and refreshments, Guy Brousseau told me that he liked the presentation but did not see much of "his" mathematics in it.

of mediation is animated and vitalized by its own telos. Its starting point is the concepts at hand from which the TO's concept of knowledge tries to differentiate itself. Now to move, to be put into motion, the process of mediation requires a reference point (un repère) so that it can move in a certain direction. However, rather than being something precise, definite and definitive, and worked out in all its details, the repère of the general project is refined as the process of mediation unfolds. To continue with our metaphor, the lighthouse moves. It is never still. In actual fact, it is produced in the very movement of the process of mediation—in this movement that is informed by the cultural-historical setting and the educational project it tries to respond to. It is also crucially informed by the confrontation of the theory with its effective reality; that is, with the educational settings (the school, academia, etc.).

One of the earliest explicit formulations of the TO's concept of knowledge appeared in 2004 through the idea of mathematical objects "seen as fixed patterns of activity embedded in the always changing realm of reflective, semiotic- and artefact-mediated social practice" (Radford, 2004, p. 4). This formulation includes the constructivist emphasis on the individual but articulates it in a way that the individual appears sublated in an activity that is more than merely her; it is an activity with others (Radford, 2022). Mathematical knowledge would be not the activity itself but something more general: a pattern of activity.

This formulation also includes the cultural-historical dimension of knowledge in the emphasis that this activity is situated in social practices of a different nature (not only the ones of standard Western mathematics) and the claim that these activities (and hence knowledge) is always changing. No wonder that, when presented at the CERME 7 group of theories in mathematics education in Poland in 2011, this formulation ended up with mixed results. Constructivist-oriented scholars did not recognize their concept of knowledge in it. The process of mediation is such that the sublated form is not easy to recognize. It is far from evident to see that "what is sublated is . . . preserved; it has only lost its immediacy but is not on that account annihilated" (Hegel, 1969, p. 107) as mentioned above. From the 2004 formulation to the present one, the process of mediation continued, highlighting and/or making explicit new features; for example, that knowledge is a cultural-historical entity, not a psychological one. Knowledge is a general entity in the Hegelian sense; it is a dialectical system of ways of thinking, action, and reflection constituted historically and culturally out of material, embodied, and sensible collective labour (Radford 2021).

The articulation of the question of the subject (the individual) in the TO followed a similar process of mediation. As discussed before, in constructivism and the TDS, one of the main features of the student is considered to be her autonomy, understood as an emancipating relation vis-à-vis authority—the authority of the teacher. From a Vygotskian perspective, the question of the student is put in different terms, as clearly illustrated in Vygotsky's (1987) concept of the zone of proximal development where the teacher and the student work together to get things done. The challenge here was to come up with a new form of the subject where autonomy is not the leading principle. We had to completely rethink the leading type of relation (social relation) that would replace autonomy. Of course, this point led us to an altogether different conception of learning (Radford, 2018).

The departure point of the mediating process was the fundamental participation of the student in learning. But the process of mediation had to move in a direction that would show that this student finds herself in front of systems of mathematical thinking that were already there, in her culture, before her arrival in the world. Ontogenetically speaking, the object precedes the subject. We had hence to move from a conception of the student as one who creates or recreates knowledge to a conception in which the student encounters knowledge. One of the challenges was that the encounter with knowledge should not be seen as a mere receptive act, as in acquiring knowledge, which, as we were often told, seems to entail a passive subject. An invited seminar at the University of Ottawa around 2007 is a case in point. Objectification as a creative, active, sensible, and material encounter with cultural knowledge was our response. Learning, we argued at the Ottawa seminar, consists of actively and creatively noticing and making sense of cultural-historical knowledge (Radford, 2021, p. 81).

The sublated forms can be clearly discerned in the TO's emphasis on the active learner. However, after a lengthy process of mediation, this encounter has been theorized as one that involves more than merely recognizing cultural knowledge and its cultural logic; the encounter is also a site of transformation of teachers and students. The result is that in the TO, learning is not only about knowing but also about becoming. Learning moves around Knowledge and Being.

Out of the processes of mediation, the aforementioned concepts of the theories considered here enter into new relations, which give them meanings these concepts did not have before. We are, I believe, in a situation like the one mentioned by Inwood in his example of Catholicism and Protestantism. Each theory does not look the same; they form a new unity from where they see things under a new light, even if only to be in a position to better say what they are not. But this negation—this Hegelian negation—is part and parcel of what they are.

ACKNOWLEDGMENT

This article is a result of a research programs funded by the Social Sciences and Humanities Research Council of Canada / Le conseil de recherches en sciences humaines du Canada (SSHRC/CRSH).

REFERENCES

Adams, J. (2009). Introduction. In W. Caxton (Ed.), *The game and playe of the chesse* [sic] (pp. 1-14). Western Michigan University.

Brousseau, G. (2005). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer.

Brower, L. E. J. (1952). Historical background, principles and methods of intuitionism. *South African Journal of Science*, *49*, 139-146.

Cobb, P., & Yackel, E. (1998). A constructivist perspective on the culture of the mathematics classroom. In F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio (Eds.), *The Culture of the Mathematics Classroom* (pp. 158-190). Cambridge University Press.

Detienne, M. (1996). *The masters of truth in archaic Greece*. Zone Books New York.

Elias, N. (1991). *The society of individuals*. Basil Blackwell.

Fernandez-Armesto, F. (1998). *Truth: A history and a guide for the perplexed*. Black Swan Books.

Foucault, M. (1980). *Power / Knowledge*. Pantheon Books.

Hegel, G. (1969). *Science of logic*. Humanity Books.

Hegel, G. W. F. (1977). *Hegel's phenomenology of spirit* (A. V. Miller, Trans.). Oxford University Press (First edition, 1807).

Hegel, G. (2009). *Hegel's Logic*. (W. Wallace, Trans.). MIA.

Ilyenkov, E. V. (1977). *Dialectical logic*. Progress Publishers.

Inwood, M. (1992). *A Hegel dictionary*. Blackwell.

Lalande, A. (1899). *La dissolution*. Félix Alcan.

Marcus, G., & Fischer, M. (1999). *Anthropology as cultural critique*. University of Chicago Press.

Marx, K. (2007). *Manuscrits économico-philosophiques de 1844* [Economic and Philosophic Manuscripts of 1844]. Vrin.

Piaget, J. (1967). *Études sociologiques* [Sociological studies]. Librairie Droz.

Piaget, J. (1973). *To understand is to invent. The future of education*. Grossman.

Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità [Sensible Things, Essences, Mathematical Objects and Other Ambiguities]). *La Matematica e la sua didattica*, *1*, 4-23. http://luisradford.ca/publications/#2004

Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica como processo semiotico [Mathematical generalization as a semiotic process]. *La matematica e la sua didattica*, *2*, 191-213.

Radford, L. (2014). On teachers and students: An ethical cultural-historical perspective. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 1, pp. 1-20). PME.

Radford, L. (2018). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación [Some challenges encountered in the development of the theory of objectification]. *PNA*, *12*(2), 61-80.

Radford, L. (2021). *The theory of objectification. A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning*. Brill/Sense. https://doi.org/10.1163/9789004459663

Radford, L. (2022). Activité, apprenant(s), apprentissage. *Revue québécoise de didactique des mathématiques, Numéro thématique 1*, 134-157.

Rousseau, J.-J. (2012). *Collection complète des œuvres*. www.rousseauonline.ch.

Shapin, S. (1994). *A social history of truth. Civility and science in seventeenth century England*. University of Chicago Press.

Taylor, C. (2003). *The ethics of authenticity*. Harvard University Press.

Žižek, S. (2010). Foreword: With the keen edge of a knife. In M. Rothenberg (Ed.), *The excessive subject. A new theory of social change* (pp. ix-xxi). Polity.

von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. Falmer Press.

Vygotsky, L. S. (1987). *Collected works* (Vol. 1). R. W. Rieber and A. S. Carton (Eds.). Plenum.

MARCHES ALEATOIRES DANS LE PRISME SIMPLICIAL DE L'ETM PROBABILISTE

Jorge Soto-Andrade[1], Daniela Díaz-Rojas[2], Amaranta Valdés-Zorrilla[1]

[1]Universidad du Chili, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences et CIAE [2]University of Oxford , Department of Education.

Nous regardons le prisme classique qui métaphorise l'ETM, comme un complexe simplicial où se déroule le travail mathématique, individuel ou collectif, en tant que système dynamique. Nous métaphorisons ce dernier comme le volettement d'un papillon dans le prisme (le plus souvent, dans son intérieur, mais restant confiné parfois dans des plans ou des arêtes). Nous discutons l'interprétation didactique des différents simplices (sommets, arêtes, faces, intérieur) à la lumière des exemples concrets tirés de travaux précédents sur l'ETM et de notre enseignement à des étudiants humanistes de première année et des maitres en formation à l'Université du Chili.

INTRODUCTION

Notre titre est dans une certaine mesure un jeu de mots métaphorique. D'une part, nous considérons des exemples emblématiques de tâches probabilistes, dont la mise en œuvre énactiviste avec des apprenants divers entraîne, du point de vue du travail mathématique, une marche (circulation) souvent aléatoire dans le prisme de l'ETM probabiliste. D'autre part, ces tâches portent sur des situations probabilistes qui peuvent être (très souvent) métaphorisées comme des marches aléatoires.

Dans Soto-Andrade et Yañez-Aburto (2019) nous avons suggéré qu'une métaphore alternative à celle du prisme classique pour l'ETM, en pourrait être une corde à trois brins entrelacés (les trois genèses). En effet, même si on ne comprend pas vraiment ce que c'est comprendre (Sfard, 2008), nous prétendons que la compréhension mathématique implique forcément les trois genèses (sémiotique, instrumentale, discursive) entrelacées. Nous convergeons ici avec Kuzniak, Nenache et Drouhard (2016) qui considèrent qu'un travail mathématique est complet quand les dimensions sémiotique, instrumentale et discursive sont articulées de manière appropriée, et il existe une vraie relation entre les aspects épistémologiques et cognitifs.

Dans cet article cependant, nous développons un point de vue différent. Nous prenons au sérieux la métaphore du prisme pour l'ETM, en tirant parti de sa structure de complexe simpliciale. Nous portons notre attention donc sur les six sommets, les neuf arêtes, les cinq faces et l'intérieur du prisme (les simplices de dimension 0, 1, 2 et 3), que nous réinterprétons comme des métaphores géométriques des différents aspects du travail mathématique.

D'habitude, en métaphorisant le prisme de l'ETM avec ses deux plans horizontaux et ses trois arêtes verticales, le développement d'une leçon ou d'un apprentissage, individuel ou collectif se voit comme la trajectoire d'un point (une fourmi, si l'on veut) sur le prisme. En principe, la fourmi se balade sur les arêtes et les faces verticales du prisme sans entrer dans son intérieur.

Ici cependant, nous métaphorisons le déroulement du travail mathématique, d'un élève ou d'un collectif d'élèves, comme la trajectoire d'un point dans le prisme, espace intérieur compris. Une métaphorisation encore plus amicale en serait un papillon qui volette dans (l'intérieur de) ce prisme, en se posant parfois sur une face, une arête ou même un sommet. Certains proposent encore une chauve-souris, moins amicale peut-être, mais qui estime très précisément sa distance aux faces du prisme à l'aide de son remarquable sonar.

Dans la suite, nous précisons tout d'abord notre point de vue dynamique simplicial sur l'ETM. Après, nous esquissons, tout en discutant des exemples illustratifs concrets relatifs aux probabilités, une mise en réseau de l'ETM et la métaphorisation et l'énaction en didactique des mathématiques, dans l'esprit de Soto-Andrade et Yañez-Aburto (2019).

Remarquons qu'il émerge ici une relation circulaire (bien métaphorisée par l'Ouroboros), car d'une part, on peut voir la métaphorisation logée dans l'arête genèse sémiotique du prisme de l'ETM, mais d'autre part, ce prisme est lui-même une métaphore géométrique du travail mathématique.

LE TRAVAIL MATHEMATIQUE EN TANT QUE SYSTEME DYNAMIQUE SIMPLICIAL

Nous voyons le travail mathématique comme un système dynamique, dont les orbites (ou trajectoires) en décrivent les déroulements possibles. L'espace de phase de ce système dynamique (le prisme droit de base triangulaire de l'ETM) est porteur d'une structure géométrique métaphorique simpliciale, donnée par ses sommets, ses arêtes, ses faces et son intérieur.

Au lieu d'une circulation, nous envisageons donc une promenade, une marche, ou un vol, souvent aléatoire, d'un papillon (ou une chauve-souris) métaphorique dans le prisme, dont la distance aux sommets, aux arêtes et aux faces est significative.

On a donc une métaphore simpliciale du processus cognitif-épistémologique envisagé, qui s'active dans les contenus mathématiques (concepts ou processus) concernés. A noter que génériquement les trajectoires du système dynamique se trouvent à l'intérieur du prisme. Néanmoins, des dégénérescences sont possibles (et fort probables dans l'enseignement traditionnel) où les trajectoires restent confinées dans une face ou même une arête.

Les différents simplices du prisme admettent des interprétations didactiques, cognitives, épistémologiques. Certaines ont été plus développées que d'autres jusqu'à présent, à savoir celles qui correspondent aux sommets et aux arêtes et faces verticales.

Nous proposons ici une réinterprétation (Fig. 1) du prisme célèbre de l'ETM. Dans Soto-Andrade et Yáñez-Aburto (2019) nous avons déjà proposé de nommer « métaphorisation » le sommet « visualisation » du prisme; nous suggérons en plus « énaction » à la place de « construction » et « déduction » à la place de « preuve » . À noter que nous prenons ici le terme « énaction » dans le sens de Bruner (1966) et Gallagher & Lindgren (2015), de « mettre en acte », plutôt que dans celui de Varela et al. (1991). Nous trouvons en effet que le terme « construction » est encore trop relié à la géométrie. Nous songeons au fait que notre corps même peut devenir un instrument cognitif (Abrahamson & Sanchez-García, 2016; Macrine & Fugate, 2022) et que les artefacts devenus instruments (Rabardel, 1995) sont des extensions cognitives de notre corps; des recherches récentes (Favela et at. 2021) montrent expérimentalement que les systèmes personne + outil fonctionnent comme des systèmes cognitifs étendus.

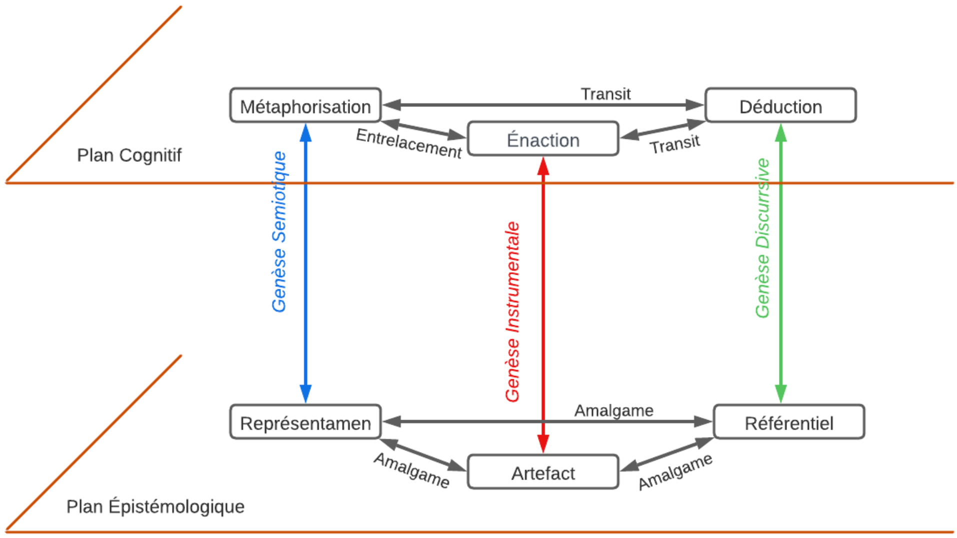


Figure 1 : Le prisme simplicial de l'ETM (notre version)

Ainsi, de notre point de vue les trois arêtes verticales du prisme correspondent essentiellement aux modes cognitifs : métaphorique, énactif et déductif, proches des trois modes, iconique, énactif et symbolique de Bruner (1966).

Notons que dans notre métaphorisation, l'intégration – par exemple – des genèses sémiotique, instrumentale et discursive est incarnée par un papillon équidistant ou presque, des trois arêtes verticales, qui pourrait en même temps se trouver à mi-chemin entre le plan épistémologique et le plan cognitif.

On peut avancer qu'un parcours dans l'intérieur du prisme correspond à un travail mathématique plus riche ou complet (Kuzniak et al., 2016) qu'un parcours qui « dégénère » (géométriquement parlant) en restant confiné à une face ou une arête.

On peut imaginer un point associé à chaque agent cognitif impliqué dans un « même » travail mathématique, notamment le professeur et les élèves. On voit apparaitre alors un flot dans le prisme, formé des trajectoires de ces différents points.

A partir des vidéos, ou des transcriptions des classes, on pourrait générer donc des animations 3D du déroulement d'une classe, des résolution de problèmes ou de « tâches ».

Remarquons cependant que notre point de vue énactiviste, au sens de Varela et al. (1991), Proulx et Maheux (2017), Diaz-Rojas, Soto-Andrade et Videla-Reyes (2021), ne fait pas bon ménage avec la notion de tâche. Nous favorisons plutôt les situations, ou même des germes de situations - proches des situations a-didactiques de Brousseau (1998) - où les élèves ont assez de place pour explorer, conjecturer, se tromper, se corriger, en s'entraidant, dans des contextes auto-validants; autrement dit, s'engager dans des marches aléatoires collectives dans un « paysage cognitif ».

De notre point de vue, planifier une leçon, à la manière de l'ingénierie didactique, revient en fait à définir une marche aléatoire dans le prisme, soumise à quelque contraintes (données par le contrat didactique en vigueur). Cela, pourvu qu'on souscrive à une leçon participative, où les réactions des élèves comptent et ne sont pas ignorées para un professeur qui récite des contenus, comme c'est trop souvent le cas. Alors la marche barycentrique associée à notre marche aléatoire didactique apparait comme le déroulement espéré de la leçon.

QUELQUES EXEMPLES ILLUSTRATIFS

Nous nous proposons dans la suite de discuter et commenter quelques exemples concrets de situations a-didactiques tirés de notre enseignement à des professeurs de mathématiques en formation et à des étudiants humanistes de première année universitaire, ainsi que des exemples présentés dans Kuzniak et al. (2016).

Notons qu'une toute première question qui se pose est de situer dans le prisme la « tâche » proposée, en supposant que cela soit possible. Nous pourrions voir une tâche qui vient d'être proposée comme un papillon posé sur la face épistémologique du prisme (voir exemple 1 ci-dessous). Ou bien prétendre que cette tâche n'est pas visible dans le prisme, puisque le travail mathématique correspondant n'a pas encore démarré. Nous nous inclinons pour la première alternative, et voyons donc notre papillon décoller du plan épistémologique lors de l'émergence d'une réaction cognitive de l'élève à la tâche proposée.

Exemple 1. Les billets tirés d'un porte-feuille (Kuzniak et al. 2016)

On a deux portefeuilles, dont le premier contient 3 billets de 10 euros et 5 billets de 20 euros, tandis que le second contient 2 billets de 10 euros et 4 billets de 20 euros. On choisit un portefeuille au hasard et l'on en tire un billet sans regarder. Quelle est la probabilité qu'on ait tiré un billet de 10 euros?

La tache proposée présente une situation concrète (incarnée dans des porte-feuilles et des coupures de banque), où on pose des questions portant sur des probabilités, ce qui nécessite un référentiel (notion abstraite de probabilité). On ne pose pas de question concrète dans la langue vernaculaire (comme dirait Brousseau), ou comme dans le test célèbre de Fischbein et Snarch (1997) : si le billet extrait est de 10 euros, est-t-il plus vraisemblable (likely) qu'on l'ait tiré de du porte-feuille 1 ou 2? De même pour l'exercise des urnes (2.4.1 dans Kuzniak et al (2016)) discuté dans Soto-Andrade et Yáñez -Aburto (2019).

La situation est concrète (arête instrumentale) mais les questions son abstraites (arête discursive) et nécessitent de la notion de probabilité et d'un calcul symbolique. On est donc à mi-chemin sur l'arête horizontale qui amalgame artefact et référentiel, au moment de poser la tâche. Dès que les élèves commencent à réagir et à réfléchir, le papillon s'envole vers la face cognitive, entre l'arête de la genèse instrumentale et celle de la genèse discursive.

D'après Kuzniak et al. (2016) les arbres jouent un rôle important dans les programmes de scolaires pour l'enseignement des probabilités en France, en tant qu'instrument multidimensionnel : representamen, instrument et référentiel. À l'origine, ils étaient une visualisation, une métaphorisation, un representamen, devenus prescriptifs, avec des règles de calcul mécaniques, énoncées souvent gratuitement. De notre point de vue, l'usage des arbres comme outil sémiotique dans le curriculum français tourne court : la genèse sémiotique se réduit à dessiner un arbre pour représenter le problème. Dans Soto-Andrade et Yáñez-Aburto (2019) et dans les exemples 2 à 4, ci-dessous, nous montrons une genèse sémiotique où l'on dessine les arbres verticalement et non pas horizontalement, ce qui suggère une métaphore hydraulique, le « fluide probabiliste » s'écoulant par gravité. Les règles de calcul découlent d'une métaphore hydraulique (calembour métaphorique volontaire) au lieu d'être données gratuitement. Nous prétendons que l'usage habituel des arbres en probabilités est un cas d'artefact aveugle car non soutenu par une métaphore.

Il est à remarquer que pour les « règles de calcul hydraulique », le point clé est que 1/3 de 1/ 2 es 1/3 multiplié par 1/ 2, ce qui admet une justification métaphorique à son tour.

On voit ici que la genèse sémiotique s'entrelace avec une genèse discursive et avec une genèse instrumentale; on se trouve donc à l'intérieur du prisme.

De plus, si les arbres ne nous cachent pas la forêt, on remarque que très souvent une grille, un réseau ou des graphes plus généraux sont mieux adaptés aux problématiques probabilistes, notamment aux problèmes Bayésiens, comme nous l'avons montré dans Soto-Andrade et Yañez-Aburto (2019).

Nous coïncidons avec Kuzniak et al (2016), quand ils signalent les problèmes didactiques dus à un confinement dans une arête (celle de la genèse discursive, dans le cas du professeur) ou dans un plan (Sem-Dis dans le cas du professeur, Sem-Ins dans le cas de l'élève); c'est ce que nous avons appelé plus haut des « dégénérescences » du vol de notre papillon métaphorique.

L´erreur commise par l´élève (qui obtient 5/14 comme probabilité d'un billet de 10 euros par une application hâtive de la règle de Laplace, en prenant les 14 billets comme équiprobables), mérite deux remarques au moins.

Primo : Les 14 issues de l'expérience sont non équiprobables, non pas parce que les proportions des coupures de 10 euros et 20 euros sont différentes dans les deux portefeuilles (comme laissent entendre Kuzniak et al. (2016)), mais parce que le nombre de coupures est différent dans chaque portefeuille. Si on avait 7 coupures dans le premier portefeuille, dont 3 de 10 euros et 7 coupures dans le second, dont 4 de 10 euros, les 14 coupures seraient équiprobables, malgré la différence entre les proportions de billets de 10 euros entre les deux portefeuilles. Dans ce cas, il est légitime de vider les deux portefeuilles dans un même sac pour calculer la probabilité d'un billet de 10 euros, comme fait l'élève.

D'autre part, notons qu´on peut avoir la même proportion de billets de 10 euros, disons un sur deux, dans deux portefeuilles contenants, disons, 6 billets et 8 billets. Dans ce cas les 14 issues de l'expérience ne seront pas équiprobables, mais on peut calculer tout de même, la probabilité d'un billet de 10 euros en vidant les deux portefeuilles dans un même sac !

Secundo : Le professeur ne tire pas parti de l'erreur de l'élève, qui est en fait très fécond et mériterait une louange, et une discussion collective, à notre avis. Notre arête énactive suggère que le professeur aurait pu exhiber un exemple extrême : une urne avec une boule rouge et une bleue, une autre urne avec 100 boules rouges et 200 bleues. On choisit son urne au pile ou face. Avec la méthode hâtive de l´élève on trouve que la probabilité de rouge est 101/301, presque 1/3. En réalité, elle est la moyenne entre 1/ 2 et 1/3, c'est-à-dire 5/12, ce qui est aussi visible expérimentalement.

La question se pose : où est l'exploitation des erreurs des élèves dans le prisme? De notre point de vue, elle est autour de l'arête instrumentale, qui aboutit à l'énaction : on apprend à bouger dans le monde par essai et erreur, et « le mouvement importe » (Abrahamson & Sanchez-Garcia, 2016 ; Macrine et Fugate, 2022).

Aussi, le professeur prend, à notre avis, une posture « bureaucratique », confinée à l'arête discursive, en insistant qu'il faut définir l'univers de possibles d'abord, ce qui n'est pas nécessaire. En effet, un gamin peut étudier la variable aléatoire « temps d'attente de pile en lançant une pièce » sans avoir à plonger dans l'ensemble infini de toutes les issues de l'expérience aléatoire de lancer une pièce « jusqu'à ce qu'on obtienne pile ».

Nous commentons maintenant des « tâches » ou des situations, que nous avons mises en œuvre avec des maîtres en formation, des futurs mathématiciens et des étudiants humanistes de première année, à l'Université du Chili. L'exemple 2 est proche d'une tâche classique. Les deux autres correspondent à des situations, plus enactivistes, où la notion de « question impossible (à répondre) »), joue un rôle clé.

Exemple 2 : La 5ème boule tirée…

On tire 5 boules, l'une après l'autre, sans remplacement, d'une urne contenant 3 boules rouges et 5 boules bleues. Quelle est la probabilité que la 5ème boule tirée soit rouge ?

La tache se situe dans l'arête horizontale « amalgame épistémologique » de la face instrumentale - discursive car elle propose une situation concrète et une question théorique.

Nos étudiants ont abordé ce problème en calculant diligemment la probabilité demandée à l'aide d'un arbre des possibles fort feuillu, où les probabilités sont assignées pas à pas en se servant d'une métaphore hydraulique (Soto-Andrade & Yañez-Aburto, 2019) Celle-ci voit les probabilités comme des portions d'un litre d'eau qui draine par gravité depuis la racine (placée en haut dans un arbre vertical !). Ainsi (paradigme P2, d'après Nenache & Parzysz, 20219), ils ont trouvé que la probabilité que la 5ème boule soit rouge est 3/8 et de même pour n'importe quelle autre boule de la série de tirages.

Nous observons d'abord une genèse discursive (calcul), puis les élèves se rapprochent de l'arête sémiotique (usage de la métaphore hydraulique, ignorée habituellement dans l'enseignement traditionnel). Ils restent cependant encore confinés dans la face sémiotique-discursive, tout près du plan cognitif. Ils reconnaissent néanmoins qu'ils calculent ce fait, surprenant pour eux, mais ils ne voient pas pourquoi c'est vrai. À noter que passer au paradigme 3 ne les aide pas beaucoup.

On est en présence d'un divorce entre le calcul symbolique (genèse discursive) et la vision intuitive (genèse sémiotique) des étudiants. La question se pose : Où voit-t-on les divorces dans l'ETM ?

Si un pratiquant de l'ETM ne regarde que le produit du travail de l'élève, à savoir son calcul impeccable avec les arbres des probabilités, il ratera le divorce. Il verra le papillon posé dans l'arête discursive, ce qui lui semblera honorable.

Dans notre cas, face à ce divorce, nous avons suggéré aux étudiants d'énacter (mettre en acte) la situation, ce qui devrait leur permettre de se rapprocher d'une genèse instrumentale énactive. Notre papillon métaphorique décollerait alors vers l'arête instrumentale, en rentrant dans l'intérieur du prisme (intégration).

Certains étudiants argumentent cependant qu'un problème mathématique se résout dans la tête, donc l'énacter n'apporte rien. En énactant, néanmoins, ils sont forcés de décider quoi faire avec les boules qui ils ont prélevées. D'habitude, ils les rangent soigneusement en file (au lieu de les jeter à la poubelle) et en ce faisant ils « voient » pourquoi la probabilité de « rouge » reste invariante.

Certains ont même la bonne idée de les ranger en cercle! Une variante de cette énaction, suggérée par Borovcnik (communication personnelle, ICME 13, 2016), est d'attraper 5 boules en simultané dans l'urne, avec 5 mains, et décider après, quelle main ouvrir d'abord !

Nous encourageons aussi les étudiants à métaphoriser ce processus – de tirages successifs – par une marche aléatoire dans le plan quadrillé, qui part de la source, placée – disons - au point (3,8), pour s'achever au puits (0,0), et qui peut être métaphorisée à son tour comme un processus déterministe de morcellement. Ils découvrent ainsi que la promenade barycentrique associée à notre marche aléatoire, qu'on pourrait appeler la « marche espérée » et qui est déterministe, se déroule géodésiquement suivant une ligne droite, dont la pente est la probabilité constante de « rouge »! À noter que cette notion de promenade barycentrique est fort générale : nous la voyons apparaitre associée à n'importe quelle marche aléatoire, dès que nous métaphorisons celle-ci comme un processus de morcellement ou de partage. Elle est souvent triviale (stationnaire), e.g. dans le cas d'une marche aléatoire « symétrique ».

De notre point de vue, en regardant le prisme de l'ETM, ce divorce est résolu par l'activation de la genèse instrumentale. En ce rapprochant de celle-ci, notre papillon en même temps se rapproche de l'arête sémiotique, en s'engageant donc dans l'intérieur du prisme.

Nous voyons donc que des « cascades » des métaphorisations sont possibles (genèses sémiotiques et instrumentales), qui contribuent à la compréhension et visualisation des étudiants bien plus que la pratique du paradigme P3 (Nechache & Parzysz, 2019). On va ainsi plus loin que l'usage préconisé en P2, des arbres pondérés avec la règle de multiplication des poids des branches (facile à retenir, mais gratuite), qui risque de devenir un outil « aveugle », car non soutenu par une métaphorisation pertinente (hydraulique, par exemple).

Exemple 3. La grenouille entre deux crocodiles.

Une grenouille se promène au hasard, symétriquement, sur une rangée de 6 pierres (notées 0 à 5) dans une rivière tropicale, en démarrant à la pierre 3, les pierres 0 et 5 étant cependant…des crocodiles camouflés. Dès que la grenouille arrive par hasard à 0 ou 5, elle sera instantanément avalée par le crocodile correspondant.

Les élèves travaillent en petits groupes aléatoires sur cette situation, où aucune tâche n'est proposée. Ils s'intéressent néanmoins au destin de la grenouille et ils se posent maintes « questions impossibles », comme :

- *Où se trouvera-t-elle, la grenouille, après n sauts ? Après « une infinité des sauts » ?*

- *Peut-elle survivre jusqu'à la fin des temps? Quel crocodile l'avalera?*

A nouveau, ils peuvent métaphoriser cette promenade aléatoire entre deux « trous noirs », si l'on veut, comme un écoulement de liquide dans une grille verticale (métaphore hydraulique) ou bien comme un processus de morcellement des masses.

Remarquons que dans la perspective habituelle de l'ETM, le travail mathématique est déclenché par une question, problème ou tâche, déjà posée. Dans notre perspective, ce travail commence en amont de la question, avec une situation où des questions ou des problèmes émergent. La question se pose : Quelle sorte de genèse est alors activée? Faudrait-il peut-être une nouvelle arête verticale dans notre prisme simpliciale? Ou il s'agit encore d'une genèse énactive, mais au sens de Varela non pas de Bruner.

Une fois les questions formulées, souvent on métaphorise (genèse sémiotique). Dans notre exemple, plusieurs voies de solution métaphoriques s'avèrent possibles. Certaines, celles s'appuyant sur notre métaphore hydraulique, par exemple, mènent à sommer des séries de Fibonacci normalisées (où le n-ième nombre de Fibonacci est divisé par 2^n) pour trouver les probabilités que la grenouille finisse ses jours dans le ventre du crocodile de gauche ou celui de droite; ces probabilités sont métaphorisées comme les portions du fluide finalement englouties par chaque « trou noir ».

Les élèves qui choisissent de s'appuyer sur une métaphore de morcellement, ont tendance à observer le barycentre des portions de grenouille simultanément crées à chaque étape de ce processus, et à remarquer *qu'il reste stationnaire, « jusqu'à la fin des temps ». A noter qu'on n'a pas besoin ici d'expliciter l'univers des possibles (« sample space »*) associé à cette situation (qui est l'ensemble – un peu délicat à manier - des toutes les trajectoires possibles de la grenouille), comme requis par P3 pour résoudre le problème (un choix plus idéologique que mathématique).

Nous avons aussi une autre approche, fort efficace, inspirée métaphoriquement par la thermodynamique : On place la grenouille à une pierre quelconque k entre 0 et 5, et l'on visualise la probabilité P(k) qu'elle finisse ses jours dans le ventre du crocodile de droite. Bien sûr, *P(0) = 0 et P(5) = 1. Comment sont-ils reliés entre eux les valeurs intermédiaires de la fonction P ? En particulier, P(k), P(k-1) et P(k+1)* ?

En travaillant en groupes, les étudiants trouvent sans trop de difficulté que

$$P(k) = [P(k-1) + P(k+1)]/2$$

Autrement dit, la fonction P a *la propriété de la moyenne* (elle est une fonction harmonique sur un domaine discret). Il s'ensuit que sa représentation graphique est une droite, qui passe par (0,0) et (5,1) : la solution de l'équation de la chaleur avec ces conditions de bord! Sa valeur en k = 3 est donc 3/5. Les étudiants trouvent ainsi que la probabilité que la grenouille soit dévorée par le crocodile de droite à la fin des temps, vaut 3/5. Il s'ensuit que la probabilité d'être dévorée par celui de gauche est 2/5.

Il est à remarquer que cette marche aléatoire est équivalente au *problème classique* de la ruine, pour deux joueurs jouant au pile ou face (avec des fortunes initiales de 3 et 2 euros). Rappelons que la règle du jeu est que *chaque fois le perdant donne une de ses pièces au gagnant et que le jeu s'arrête dès qu'un joueur perd toutes ses pièces (il n'y a pas de crédit).*

Nous avons d'ailleurs proposé à nos étudiants, et la marche aléatoire de la grenouille et le problème de la ruine, avec les mêmes données, dans un test. Plusieurs ont résolu les deux problèmes, sans s'en apercevoir qu'il s'agissait du même problème. Il y en a qui ont même proposé une résolution correcte et une autre fausse! À notre avis, on a ici, un effet du contrat didactique dominant dans nos salles de cours : le professeur n'est pas censé de proposer deux fois le même problème dans un test. En fait, un ou deux étudiants sur 50 ont avoué après-coup qu'ils avaient bien remarqué qu'il s'agissait deux fois du même problème, mais ils n'ont pas osé le dire dans le test.

Notons le rôle clé qui joue ici la genèse sémiotique : si l'on commence avec le problème de la ruine, celui-ci pourrait être métaphorisé *ad libitum* comme la promenade de la grenouille, le drainage d'un fluide, le morcellement d'une particule (ce qui suggère regarder le mouvement barycentrique associé).

Exemple 4. Entre la peur et la cupidité : un jeu de stratégie.

On lance un dé à plusieurs reprises, en accumulant les points obtenus, aussi longtemps qu'on n'obtient pas un six, cas où on perd tous ses points et le jeu se termine. On peut néanmoins quitter le jeu après n'importe lequel lancer, en emportant tous les points gagnés.

On laisse les étudiants réagir au jeu, l'explorer et se poser maintes questions (genèse instrumentale-énactiviste). Nous leur demandons de « baptiser » ce jeu (anonyme pour l'instant). Les étudiants humanistes proposent « chronique d'une mort annoncée (García Marquez), et « une métaphore de la vie ». Le jeu est en fait une métaphore de Wall Street. Éventuellement, nous leur disons que la moyenne de points qu'il gagneront va s'ajouter à la note du prochain test traditionnel. Ils sont motivés alors à imaginer des *stratégies* (par exemple, la stratégie S_n de quitter le jeu après le *n*-ième lancer, si l'on est encore « vivant »), et à chercher un n optimal, en comparant les gains espérés, en simulant ou en théorisant…

Nous observons que nos étudiants humanistes arrivent à résoudre ce problème en travaillant principalement dans le plan instrumental-sémiotique avec un minimum de genèse discursive. Sans préciser l'univers de possibles ni une notion explicite de probabilité, ils arrivent à calculer le gain espéré en appliquant la stratégie $S_{n.}$ Autrement dit, ils réussissent à calculer *l'espérance de la variable aléatoire* G_n = gain obtenu avec la stratégie S_n (notions qui ne nécessitent pas P3), sans avoir à calculer au préalable la loi de probabilité de G_n. Ils manipulent des valeurs espérées partout, en suivant ainsi les traces de Pascal, en tant que précurseur de la théorie de jeux, qui abordait l'espérance avant les probabilités! Le rapprochement à l'arête discursive n'intervient qu'après-coup.

DISCUSSION

Nous avons proposé d'envisager, métaphoriquement, le travail mathématique comme un « système dynamique simplicial », dont les trajectoires se déroulent dans le prisme de l'ETM, vu comme complexe simplicial, dont les simplices sont ses sommets, ses arêtes, ses faces et son intérieur (Fig. 1). Nous voyons métaphoriquement le devenir du système dynamique comme le volettement d'un papillon (ou une chauve-souris) dans le prisme, souvent dans son intérieur (ce qui correspond à un travail mathématique plus riche et complet), mais parfois voletant sur une face ou une arête ou même posé sur un sommet (ce qui correspond à un travail mathématique plus biaisé ou confiné).

Par exemple, le papillon voletant sur l'arête de la genèse discursive peut représenter l'élaboration de la preuve d'un fait mathématique, par un calcul correct, qui s'appuie sur le référentiel, mais qui est « aveugle » : on calcule sans comprendre. Le passage au paradigme P2 ou même P3, n'assure pas nécessairement une meilleure compréhension (cf. exemple 2 ci-dessus), qui est déclenchée plutôt par le décollage du papillon de l'arête où il confiné, pour rentrer à l'intérieur du prisme en se rapprochant, dans ce cas, du plan sémiotique-instrumental (métaphorique-énactif). Nous avons appelé « dégénérescences » les volettements qui restent confinés dans un plan ou une arête.

Si on s'intéresse au travail collaboratif des élèves, on verra apparaitre plutôt un flot dans le prisme simplicial (formé par les trajectoires de plusieurs élèves), qui permet de visualiser la dynamique collective de leur travail mathématique.

Nous avons discuté les limitations de l'usage prescriptif de certains instruments comme les arbres en probabilité, qui étant sémiotiques à l'origine, deviennent prescriptifs et « aveugles » par manque de support métaphorique (confinement dans le plan instrumental – discursif).

Plusieurs questions restent ouvertes. Parmi d'autres : Quelle est la localisation du travail relatif aux erreurs des élèves dans le prisme. Ou de la construction des concepts? Ou de l'émergence des questions et problèmes posés par les étudiants confrontés à une situation ouverte?

Provisoirement, nous voyons le travail lié aux erreurs au voisinage de l'arête instrumentale – énactive : du point de vue énactiviste, nous construisons notre monde en bougeant, en interagissant, par essai et erreur. La détection des erreurs ne concerne cependant que l'arête discursive, souvent elle nécessite une genèse instrumentale. Il y aussi des métaphorisations qui déclenchent des erreurs.

Pour ce qui est de la construction des concepts, en amont de la définition discursive formelle d'un concept nous voyons souvent une genèse métaphorique et énactive, qui reste cachée à posteriori. Cela suggère des trajectoires qui démarrent dans l'arête sémiotique près de la métaphorisation et finalement aboutissent au référentiel.

REMERCIEMENTS

Cette recherche a été subventionnée par le Fonds Basal PIA-CONICYT pour des centres d'excellence, Project FB0003, et par le Projet DAAD 573 35022 D.

REFERENCES

Abrahamson, D., Sanchez Garcia, R. (2016) Learning Is Moving in New Ways: The Ecological Dynamics of Mathematics Education, *Journal of the learning sciences*, *25*, 203–239. DOI: 10.1080/10508406.2016.1143370

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage.

Bruner, J. (1966). *Toward a theory of instruction*. Harvard University Press.

Dewey, J. (1997). *How we think. Dover*. (Original work published 1910)

Díaz-Rojas, D., & Soto-Andrade, J. (2015). Enactive Metaphoric Approaches to Randomness. In K. Krainer, & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings CERME 9*, 629-636. Prague: Charles University & ERME.

English, L. (Ed.) (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. Lawrence Erlbaum Associates.

Favela, L. H., Amon, M. J., Lobo, L., & Chemero, A. (2021). Empirical evidence for extended cognitive systems. *Cognitive Science*, *45*(11), e13060. https://doi.org/https://doi.org/10.1111/cogs.13060

Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal of Research in Science Teaching*, *28*, 96-105.

Gallagher, S., & Lindgren, R. (2015). Enactive metaphors: learning through full body engagement, *Educational Psychology Review*, *27*, 391-404.

Gibbs, R. W. (Ed.) (2008). *The Cambridge handbook of metaphor and thought*. Cambridge University Press :

Johnson, M., & Lakoff, G. (2003). *Metaphors we live by*. The University of Chicago Press.

Kuzniak, A. (2011a). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 19-24.

Kuzniak, A., Nechache, A., & Drouhard, J.-P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM Mathematics Education*, *48* (6), 861-874.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics comes from*. Basic Books.

Macrine, S.L & Fugate, J.MB. (2022). *Movement Matters: How Embodied Cognition Informs Teaching and Learning*. The MIT Press. https://doi.org/10.7551/mitpress/13593.001.0001

Nechache, A. & Parzysz, B. (2018). Le jeu de paradigmes dans l'ETM probabiliste. Dans E. Montoya Delgadillo, P. R. Richard, L. Vivier, I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto, D. Tanguay (Eds). *Actes ETM6* (pp 179-191), PUCV.

Proulx J. & Maheux J.-F. (2017). From problem solving to problem posing, and from strategies to laying down a path in solving: taking Varela's ideas to Mathematics Education Research, *Constructivistic Foundations*, *13*(1), 161-167.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating*. Cambridge University Press.

Soto-Andrade, J. & Yañez-Aburto, A. (2019). En amont de l'ETM: un regard métaphorique. Dans E. Montoya Delgadillo, P. R. Richard, L. Vivier, I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto, D. Tanguay (Eds). *Actes ETM6* (pp 257-270).

Varela, F.J., Thompson, E., Rosch, E. (1991), *The embodied mind: cognitive science and human experience*. The MIT Press.

LE CADRE DES ETM ET LA CONCEPTUALISATION

Stéphanie Sampson, Denis Tanguay et Luis Saldanha

UQAM

Le présent article est orienté selon une perspective résolument théorique. Le contexte est celui de l'élaboration d'un cadre théorique pour un projet de thèse portant sur la cohérence conceptuelle en trigonométrie. Il s'agit d'examiner comment les Espaces de Travail Mathématique (ETM) peuvent être mis à contribution pour encadrer un tel travail de recherche, sur la conceptualisation d'un sujet mathématique donné. Des cadres théoriques de la conceptualisation sont invoqués comme points d'ancrage et de comparaison. Par l'intégration de ces cadres au modèle des ETM, nous présentons cinq composantes qui permettraient de décrire et d'analyser le processus de conceptualisation autour d'une notion mathématique donnée. Une composante « réseau de relations » nous apparaît centrale mais cependant, pas explicitement prise en compte dans les cadres considérés. Ceci nous amène à proposer les idées de séquences, phases ou circulations entre les ETM de différents domaines considérés en parallèle, comme des éléments susceptibles d'être fertiles à la structuration de l'analyse des processus de conceptualisation en trigonométrie.

INTRODUCTION

Les difficultés et conceptions incohérentes chez les apprenants de tout niveau scolaire sont nombreuses en ce qui concerne le radian, le cercle trigonométrique et les fonctions trigonométriques (Bloch, 2009; Tanguay, 2010). De plus, la littérature soulève que l'articulation des domaines géométriques, numériques et fonctionnelles serait au cœur des difficultés et conceptions des objets de la trigonométrie (Moore, 2014). Les deux cadres de la trigonométrie (triangle et cercle) abordés au secondaire, ainsi que leur articulation, font appel à ces différents points de vue, qui sont par ailleurs centraux dans l'apprentissage des fonctions trigonométriques. Ainsi, il y a un enjeu de cohérence intra-cadre/domaine et inter-cadre/domaine qui se manifeste dans l'apprentissage de la trigonométrie.

Dans le cadre du projet de thèse dont il est question dans cet article, l'objectif général est d'approfondir la compréhension du développement de la cohérence conceptuelle dans l'apprentissage de la trigonométrie du secondaire (du collégial en France) par l'entremise d'un regard porté sur les réseaux de relations entre les objets, entre les significations d'un même objet d'un domaine à l'autre (objet reconsidéré par extension de théories), entre les différents domaines en jeu dans cet apprentissage. Dans ce contexte, la présente contribution est orientée selon une perspective théorique et concerne l'élaboration d'un cadre pour ce projet. Il s'agit d'examiner comment les Espaces de Travail Mathématique (ETM), développés par Kuzniak (2011), peuvent être mis à contribution pour encadrer un tel travail de recherche, sur la conceptualisation d'un sujet mathématique donné.

La conceptualisation doit être ici envisagée à la fois comme processus, à travers lequel les multiples facettes d'un concept mathématique prennent forme et évoluent dans l'entendement d'un apprenant, mais aussi comme « instantané » de la forme, des structures, schèmes et configurations sous-jacents aux éléments constitutifs d'un concept donné dans un contexte (scolaire et mathématique) fixé.

Dans un premier temps, les cadres théoriques de la conceptualisation suivants seront discutés et agiront comme références, comme points de comparaison ou d'ancrage :

- les *concepts* de Vergnaud (1990, 1989-90);
- le cadre cK¢ de Balacheff (2011; Balacheff et Margolinas, 2003);
- le cadre APOS — Actions-Process-Objects-Schemes (en anglais) — de Dubinsky (2005) et ses collaborateurs (Asiala et al., 1996);
- le cadre des quatre T — Tâche – Technique – Technologie – Théorie — de la *genèse instrumentale* (Rabardel, 1995; Artigue, 2002; Lagrange, 2000 ; Kieran et al., 2006).

Dans un deuxième temps, l'intégration de ces cadres théoriques au modèle ETM et la considération des raisonnements et de la cohérence conceptuelle nous mèneront à identifier l'idée de séquences, phases ou circulations entre les ETM de différents domaines, considérés en parallèle, comme étant un élément fertile à la structuration de l'analyse des processus de conceptualisation en trigonométrie. Des exemples seront présentés autour des concepts suivants : l'angle, le radian, le sinus.

CONCEPTS ET CONCEPTIONS

Chez Vergnaud, la partie « visible » de la conceptualisation est le schème opératoire : l'organisation invariante de la conduite (des actions du sujet, élève ou autre) pour une classe de situations donnée. C'est la partie plus ou moins stabilisée des séquences d'actions mise en œuvre dans une situation donnée, mais bien sûr ces schèmes sont appelés à évoluer. Vergnaud désigne par théorèmes-en-actes (du type « propositions », c-à-d. des énoncés susceptibles d'être vrais ou faux) et par concept-en-actes (du type objets — l'angle, la fonction sinus, etc. — ou fonctions propositionnelles — le parallélisme, la relation d'ordre « est plus grand que », etc.) les connaissances impliquées dans les schèmes. Il les désigne globalement par l'expression invariants opératoires. Pour Vergnaud, tout schème repose sur une conceptualisation implicite. Il est ainsi amené à définir un **concept** comme un triplet C = (S, I, L) :

- S = l'ensemble des situations à travers lesquelles l'apprenant qui y fait intervenir le concept lui donne sens,
- I = l'ensemble des invariants (opératoires) sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes,

- L = l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter (symboliquement) le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement.

Le cadre cK¢ de **Balacheff** a plusieurs points communs avec celui de Vergnaud mais le point de vue de Balacheff ne relèverait pas de la psychologie cognitive. Le sujet y est considéré du strict point de vue, en quelque sorte phénoménologique, de ses connaissances et de leurs interactions avec la situation, dans la triade sujet-milieu-situation, issue de la Théorie des situations didactiques (TSD) de Brousseau. Il s'agit donc d'un sujet considéré indépendamment de ses particularités propres, des contingences, Balacheff parle d'un « sujet épistémique » (2011, p. 9). Le sigle cK¢ tient pour c-conception, K-connaissance, ¢-concept. Pour Balacheff (2011), une **conception** est

> une connaissance située, en d'autres termes [...] l'instanciation d'une connaissance dans une situation spécifique précisée par les propriétés du milieu en jeu et les contraintes sur les relations (action/feed-back) entre ce milieu et le sujet *(p. 10)*

Balacheff reprend de Vergnaud son « concept » pour l'adapter à la c-conception. Ainsi, il caractérise la c-conception par un quadruplet (P, R, L, Σ). Les trois premières composantes se rapprochent du triplet de Vergnaud ou même, y correspondent :

- P un ensemble de problèmes (correspondent aux situations de Vergnaud, mot que Balacheff réserve plutôt aux situations de la TSD);
- R un ensemble d'opérateurs, outils dont le sujet dispose pour intervenir dans le milieu (se rapprochent des invariants opératoires de Vergnaud);
- L un système de représentations (comme chez Vergnaud).

De Vergnaud à Balacheff s'ajoute la quatrième composante, soit la **structure de contrôle Σ**, un ensemble de règles mathématiques de conformité qui

> « … assure la cohérence de la conception, [incluant] les outils nécessaires à la prise de décision, aux choix, à l'expression de jugements sur l'utilisation d'un opérateur ou sur l'état d'un problème (résolu ou non, par exemple). ... [La structure de contrôle] permet l'expression et la discussion des moyens du sujet pour décider de l'adéquation et de la validité de son action mais aussi les critères nécessaires au milieu pour choisir un feedback. » (Balacheff, 2011, p. 11).

Selon Balacheff, c'est cette structure de contrôle qui assure la cohérence de la c-conception.

CONCEPTUALISATION

Chez les deux auteurs, la conceptualisation se révèle et se construit à travers les actions du sujet (élève ou autre) aux prises avec une situation ou un problème mathématique donné ; là où d'autres parlent de **tâches**. La « tâche » est selon nous plus générale et « atomique », et peut par ailleurs être considérée sous l'angle de la théorie de l'activité (par ex. Vandebrouck et Robert, 2017), encore qu'elle n'y a alors pas exactement la même signification que dans les deux cadres dont nous discutons maintenant.

Mise en évidence du caractère évolutif

On voit poindre à ce stade les liens à tisser avec le cadre **APOS** de Dubinsky et ses collaborateurs (par ex. Asiala et al., 1996)[8]: une tâche mathématique donnée déclenche une série d'**a**ctions, ces actions s'organisent progressivement en **p**rocessus, ces processus sont réifiés (ou objectivés, encapsulés dirait D. Tall) en **o**bjets et ces objets sont, à un stade plus avancé de la conceptualisation, groupés, conjugués et organisés en **s**chèmes. L'idée qu'il y a au départ des tâches (ou problèmes) et des actions déclenchées est donc commune aux trois cadres théoriques. Également, l'idée que ces actions s'organisent en séquence qui se stabilise (en processus) jusqu'au prochain problème qui la déstabilisera, est aussi commune. Les processus objectivés (réifiés) ont certainement une parenté avec les connaissances chez Vergnaud-Balacheff. Les schemes de APOS reprennent le mot « schème » (que Vergnaud emprunte aux schèmes opératoires de Piaget), mais ils semblent arriver à un stade plus avancé dans APOS, et y relèvent d'une amorce d'organisation en « théories », qu'on peut à notre avis rapprocher de la structure de contrôle de Balacheff. De ceci, il nous semble que le caractère évolutif de la conceptualisation est plus explicitement mis en évidence dans le cadre APOS que dans le cadre cK¢.

Des précisions sur les composantes évoquées

Ceci nous amène assez naturellement à un autre cadre théorique, celui des quatre T de la genèse instrumentale (Rabardel, Artigue, Kieran, etc.) : **Tâche** – **Technique** – **Technologie** – **Théorie**. La Technologie est à prendre au sens du Logos (le discours) sur la Technique. Quant à la Théorie, elle permet la validation par la démonstration, processus de validation caractéristique des mathématiques : une preuve tant soit peu formelle n'est possible que si l'on a recours à des éléments de développement théorique.

Par rapport aux cadres précédents, celui de la genèse instrumentale met mieux en évidence le rôle des **instruments** dans la conceptualisation. Un exemple maintenant classique est celui du cercle : un élève ne développe pas la même conceptualisation du cercle en le traçant avec un compas (favorisant la conception « lieu des points équidistants du centre ») qu'en le traçant avec une boîte de

[8] Il y a aussi des liens à faire entre APOS et les dualités Process-Object de Sfard, ou Outil-Objet de Douady

conserve (conception « courbe à courbure constante »). Ainsi, il nous apparaît que la « Théorie » du cadre des quatre T serait à inclure dans la structure de contrôle Σ de Balacheff. Sauf qu'il y a plus dans Σ; entre autres les vérifications empiriques, avec les instruments (de mesure ou autres) qui permettent ces vérifications, incluant par exemple l'ordinateur et ses logiciels.

Également, on peut chercher à préciser ce que désigne « L » chez Balacheff et chez Vergnaud par le biais de plusieurs développements théoriques empruntant à la sémiotique : des signes, incluant les mots et symboles d'un langage proprement mathématique mais aussi de la langue naturelle, les gestes (voir les travaux de Radford, 2014, ou encore la notion de faisceau sémiotique d'Arzarello, 2006), les représentations sémiotiques selon différents registres (Duval, 1993, 1995), etc.

Caractère évolutif et liens avec les ETM

Par ailleurs, tous ces cadres théoriques insistent sur le caractère évolutif de la conceptualisation, adaptable selon les tâches-problèmes. Le modèle des **Espaces de Travail Mathématiques** (ETM, Kuzniak et al., 2016) prend explicitement en compte le caractère évolutif de la conceptualisation avec ses trois **genèses**. De plus, par rapport aux cadres précédents, il nous apparaît porter une potentialité intégratrice. Tout d'abord, il distingue un plan cognitif, qui correspondrait au point de vue psycho-cognitif de Vergnaud, et un plan épistémologique, qui correspondrait au point de vue de cK¢ ou de APOS. Les deux points de vue, épistémologique et cognitif, sont ainsi considérés en parallèle. Il inclut une composante sémiotique, avec l'axe vertical de la **genèse sémiotique**, qui prend donc en compte la composante L de Vergnaud et de Balacheff. La composante instrumentale du modèle des ETM, selon l'axe vertical de la **genèse instrumentale**, permet de mettre en valeur le rôle des instruments et ainsi, de considérer la question des outils (artéfactuels, symbolico-syntaxiques) qui influent sur la conceptualisation. Finalement, la composante théorique, dans l'axe de la **genèse discursive**, est également prise en compte. Ainsi, le référentiel, aussi appelé « référentiel théorique », est composé des théorèmes, résultats, définitions de la théorie mathématique en cause. Il serait donc inclus dans la structure de contrôle Σ de Balacheff et correspondrait aux schemes dans le cadre d'APOS ou à la « Théorie » dans celui des « quatre T ». Cette genèse discursive est celle qui assure la validation par la démonstration (la preuve mathématique). En outre les validations empiriques, considérées par la structure de contrôle Σ de Balacheff, pourraient relever du plan vertical [Ins-Dis], tel que discuté dans Kuzniak, Tanguay & Elia (2016, § 3.3.2).

Synthèse des composantes de la conceptualisation d'une notion

En résumé, les composantes auxquels nous comptons avoir recours pour décrire et analyser le processus de conceptualisation (par exemple autour des concepts « angle », « radian », « sinus », concepts sur lesquels la thèse envisagée va porter) chez un « sujet épistémique », sont les suivantes :

- un ensemble de tâches typiques (cf. le Thème 4 dans ETM 6 et ETM 7), où les concepts à l'étude entrent en jeu;
- des signes, organisés ou non en systèmes : langages, gestes, représentations...;
- un ensemble d'instruments, aussi bien matériels (ou artéfactuels) — règle, compas, calculatrice, logiciels, etc. — que symboliques : algorithmes, méthodes et processus encapsulés, théorèmes, concepts accessoires, etc.;
- une ou des théories, désignées comme « référentiel théorique » dans le cadre des ETM, à savoir l'organisation hiérarchique des théorèmes, résultats, définitions, concepts institutionnalisés..., sur lesquels on s'appuie pour la validation;
- un réseau de relations entre les théories, de corrélations intra-domaine mais aussi inter-domaine (par exemple entre le domaine[9] de la géométrie euclidienne — triangles, théorème de Pythagore, similitude, rapports trigonométriques —, et le domaine des fonctions trigonométriques — cercle trigonométrique, radians, sinusoïdes, etc.), de liens même informels (qui peuvent aller jusqu'à être purement analogiques ou métaphoriques) entre les domaines, entre les théories.

Cette dernière composante, le réseau de relations, est plus difficile à repérer, à décrire, parce que plus intangible. Or, elle nous semble centrale dans l'étude des processus de conceptualisation relatifs aux notions de la trigonométrie.

COHÉRENCE CONCEPTUELLE ET RAISONNEMENTS

L'apprentissage de la trigonométrie du collège et du lycée (secondaire et Cégep au Québec) relève entre autres d'une articulation entre les objets en jeu à travers les différents cadres et domaines[10] qui la concernent (Figure 1, p. 7). La notion de sinus, par exemple, en circulant entre la trigonométrie du triangle et celle du cercle, peut impliquer des conceptions qui peuvent apparaître contradictoires à l'apprenant : la conception « rapport de longueurs de côtés » implique que le sinus ne peut prendre de valeurs négatives ; elle peut donc entrer en conflit avec la conception du sinus en tant que relation fonctionnelle qui peut, elle, prendre des valeurs négatives. Or, ce qui nous intéresse ici est l'articulation (mathématiquement) cohérente. Nous nous proposons d'investiguer la nature des éléments qui donnent de la cohérence à cette articulation.

Les raisonnements sont caractérisés par Jeannotte (2015; Jeannotte et Kieran,

[9] Douady parlerait de cadres plutôt que de domaines. D'autres auteurs utilisent le mot « champs ».

[10] On entend par cadre les deux cadres de la trigonométrie abordée au secondaire au Québec (le collège en France) : le cadre du triangle rectangle et le cadre du cercle trigonométrique. On entend par domaine les domaines géométrique, numérique et fonctionnelle qui sont impliqués dans l'étude de la trigonométrie du secondaire

2017), par leurs doubles aspects, structurel et processuel. En tant que processus, les raisonnements sont ceux par lesquels les concepts mathématiques sont effectivement mis en relation de façon logique et cohérente chez celui qui les déploie, et ils seraient donc à la source de l'édification de ce réseau de relations dont il a été question : raisonnements et cohérence seraient donc indissociables.

Ainsi, le projet de recherche se propose d'explorer les questions suivantes : 1) Quelles sont les caractéristiques du processus de conceptualisation des objets de la trigonométrie du secondaire (principalement l'angle, le radian, le sinus), en particulier les processus de mise en relation intra-cadre/domaine et inter-cadre/domaine en trigonométrie ? 2) De quelle nature sont les raisonnements déployés, et comment se caractérise leur articulation, incluant les règles (ou théories) et les relations qui sont en cause en contexte d'apprentissage de la trigonométrie ? 3) Comment ces processus et raisonnements interviennent-ils dans la « recherche de cohérence » par l'apprenant ?

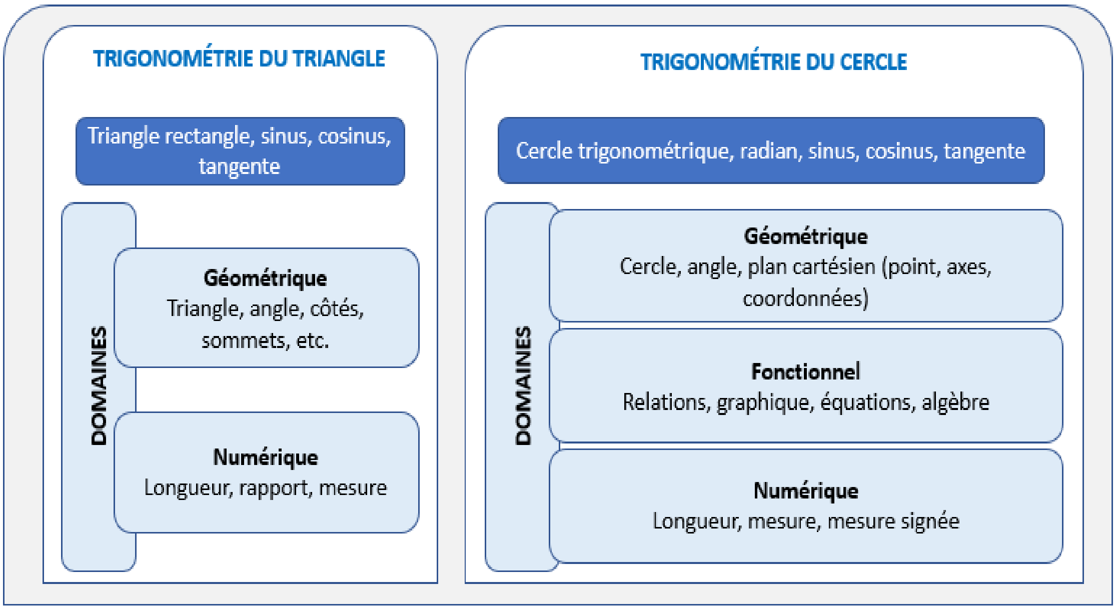
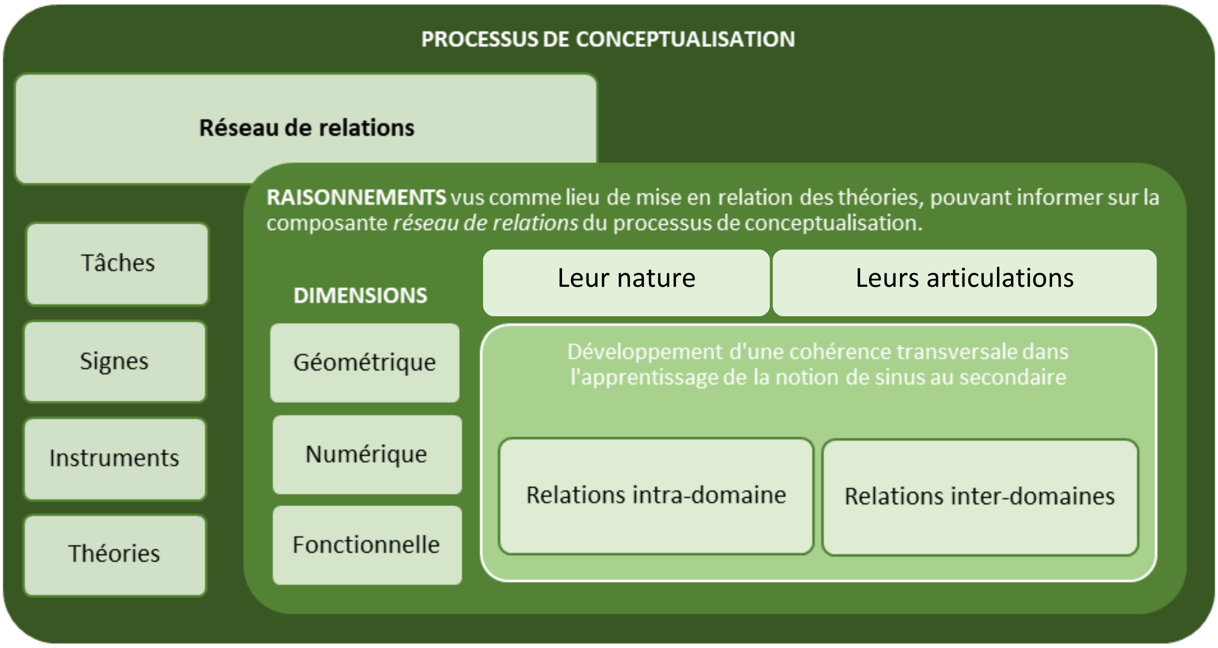


Figure 1 : Cadres, domaines et objets de la trigonométrie

SÉQUENCES, PHASES, ET CIRCULATIONS ENTRE LES ETM DE DIFFÉRENTS DOMAINES DE LA TRIGONOMÉTRIE

Il nous semble que les modèles présentés précédemment n'intègrent pas explicitement cette composante de la conceptualisation que l'on nomme « réseau de relations » (Figure 2). Cela dit, dans les travaux conduits à travers les différents symposiums ETM, on voit bien que cette question, à propos des réseaux de relations, refait régulièrement surface, quand les auteurs ont recours à des séquences, des phases, des circulations entre les ETM de différents domaines considérés en parallèle, circulations explicitement décrites ou évoquées par le recours à des fibrations ou des bandes-dessinées (ou comics) : cf. les Synthèses du Thème 1 dans ETM 4, ETM 5 et ETM 6.

Dans le cadre du présent projet de thèse, des ETM locaux ou personnels (par exemple, de la géométrique euclidienne; de la mesure; des fonctions trigonométriques) et les fibrations ou circulations entre ceux-ci, pourraient être considérés et permettraient de structurer (en tant que cadre théorique) l'analyse des processus de conceptualisation. Par ailleurs, les modalités et significations de ces circulations, de ces fibrations, de ces recours aux bandes-dessinées restent



selon nous encore largement à préciser, à approfondir.

Figure 2 : Composantes pour décrire et analyser le processus de conceptualisation autour d'une notion trigonométrique donnée

Cette contribution au symposium ETM7 a été rendue possible par une subvention du CRSH, projet n° 435-2018-1308.

RÉFÉRENCES

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, pp. 245-274.

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa 544* (RELIME), vol. 9, nº extraordinario 1, pp. 267–299.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *CBMS Issues in Mathematics Education*, vol. 6. American Mathematical Society. (APOS)

Balacheff, N. (2011). *cK¢, un modèle pour relier connaissance et preuve en didactique des mathématiques*. Jacques Baillé, Du mot au concept : Preuve, PUG, pp. 9-32.

Balacheff, N. et Margolinas, C. (2003). cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. *XII^{e} école d'été de didactique des mathématiques*, 1-32.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Éditions La pensée sauvage, Grenoble.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques*, vol. 7, n°2, pp. 5-31.

Dubinsky, E. (2005). Some historical issues and paradoxes reading the concept of infinity: An APOS-based analysis. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 60, n°2, pp. 253-266.

Duval, R. (1995). S*émiosis et pensée humaine*. Éditions Peter Lang, coll. Exploration, recherches en sciences de l'éducation. Berne, Suisse.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, n°5, pp. 37-65.

Jeannotte, D. (2015). *Raisonnement mathématique: proposition d'un modèle conceptuel pour l'apprentissage et l'enseignement au primaire et au secondaire*. Thèse de doctorat inédite, Université du Québec à Montréal.

Jeannotte, D. et Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), pp. 1-16.

Kieran, C. & Drijvers, P., avec Boileau, A., Hitt, F., Tanguay, D., Saldanha, L., & Guzmán, J. (2006). Learning about equivalence, equality and equation in a CAS environment: The interaction of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theorizing. In C. Hoyles, J.-B. Lagrange, L. Hung Son, & N. Sinclair (éds.), *Proceedings of the 17th ICMI Study, "Digital technologies and mathematics teaching and learning."* [CD-ROM]. Vietnam, Décembre 2006.

Kuzniak, A. (2011) L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Paris (IREM), 16, 9-24.

Kuzniak, A., Tanguay, D. et Elia, I. (2016). *Mathematical Working Spaces in Schooling: An introduction*. Dans A. Kuzniak, D. Tanguay et I. Elia (éds.), Mathematical Working Spaces in Schooling, chap. 1. ZDM Mathematics Education, vol. 48 (6), pp. 721-737. Springer, New-York, Heidelberg.

Lagrange, J.-B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics*, n°43, pp. 1-30.

Piaget, J. (1964). *Six Études de psychologie*. Coll. Folio/Essais. Éditions Denoël, Paris.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Éd. Armand Colin, Paris.

Radford, L. (2014). Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM), vol. 46 n°3, pp. 349-361.

Tall, D. (2006). A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol. 11, pp. 195-215.

Tanguay, D., Montoya Delgadillo, E., Nechache, A. et Oktaç, A. (2019). Synthèse du Thème 1. In Vivier, L., Montoya Delgadillo, E., Richard, P. R., Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., Maschietto, M. & Tanguay, D. (Eds), *Actes du 6e Symposium Espace de Travail Mathématique* (ETM 6), 13-18 décembre 2018, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chili, pp. 137-147.

Tanguay, D., Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E. et Gagatsis, A. (2017). Le travail mathématique et les espaces de travail mathématique : Synthèse du Thème 1. Dans I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, P.R. Richard et L. Vivier (éds), *Actes du 5e symposium Espace de Travail Mathématique* (ETM 5), pp. 33-48. University of Western Macedonia, Florina, Grèce.

Vandebrouck, F. et Robert, A. (2017). Activités mathématiques des élèves avec les technologies numériques : vers une théorie didactique de l'activité. Cahiers du Laboratoire de Didactique André Revuz, IREM de Paris.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 10, n°2.3, pp. 133-170.

Vergnaud, G. 1989-90. Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. Un exemple : les structures additives. *Petit x*, n°22, pp. 51-69.

THEME 2 : ÉTUDE DES SIGNES, DES OUTILS ET DU DISCOURS DANS LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE

Responsables : Michela Maschietto (Italie), Philippe R. Richard (Canada), Jesús Victoria Flores Salazar (Pérou)

Université de Modena e Reggio Emilia, Université de Montréal, Pontificia Universidad Católica del Perú

INTRODUCTION

Le Thème 2 se concentre sur une étude approfondie des outils utilisés dans le travail mathématique, des signes qui leur sont associés et de leurs relations avec le discours. Dans le cadre de la Théorie des Espaces de Travail Mathématique (ThETM), nous nous penchons sur des questions déjà abordées lors de symposiums précédents, comme celles qui sont centrées sur les genèses et leur coordination, mais aussi sur des aspects concernant les rapports entre les différentes genèses.

Au cours des sessions de travail, nous avons présenté et discuté à partir de 13 contributions provenant de quatre pays : le Canada, le Chili, la France et l'Italie. Les points de discussion proposés incluent les relations entre espace de travail mathématique et espace de travail algorithmique, de même que les liens entre preuves et genèses. Nous abordons également l’utilisation d’artéfacts numériques, ainsi que les relations entre divers cadres et approches théoriques.

ALGORITHMES ET MATHEMATIQUES

Un premier point de discussion concerne le potentiel des environnements technologiques et des systèmes de signes pour faire évoluer le travail mathématique des élèves. Nous nous intéressons particulièrement à l’utilisation d'outils informatiques et aux aspects sémiotiques liés à leur utilisation. Les contributions abordent l’algorithmique sous deux angles différents.

La contribution de Legrand examine la construction du concept de variable en tant que paramètre. Elle présente une situation de généralisation de motif liée à un problème d’optimisation proposée à des élèves de quatrième en France (13-14 ans). Deux aspects sont relevés : comment le logiciel utilisé (dans ce cas, Snap!) contraint-il le langage, et comment certaines commandes influencent-elles les solutions des élèves ? L’analyse des traces de programmation et des interactions langagières entre les élèves révèle une tension « fixe-variable » qui semble nécessaire à dépasser pour construire le concept de paramètre.

Venant, Passaro, Jeannotte, Knoll et Saboya analysent les interactions entre le travail algorithmique et le travail mathématique lors de la résolution d’une tâche de programmation informatique donnée à six formateurs-chercheurs en didactique des mathématiques. Plus précisément, la tâche consiste tout d’abord à écrire un programme qui teste et affiche si deux nombres entiers sont multiples l’un de l’autre, elle demande de modifier le programme en ne pouvant pas utiliser certaines commandes. La question de recherche abordée dans cette contribution concerne le rôle de la programmation informatique dans la mobilisation des connaissances et des raisonnements mathématiques. L'analyse porte sur les espaces de travail de référence et les espaces de travail personnels de ces formateurs, qui ont des liens très variés avec l'algorithmique. En utilisant le cadre des ETM, les auteurs analysent les interactions et les circulations au sein de chaque espace de travail, fournissant ainsi un aperçu des relations entre le domaine de l'algorithmique et celui des mathématiques. Plus précisément, lors de la transition vers l'Espace de Travail Algorithmique, exigée par la tâche, une réinterprétation des objets mathématiques en jeu devient nécessaire. Le logiciel utilisé (Scratch) et, en particulier, le langage de programmation impliquent une nouvelle utilisation de ces objets. Comme souligné également par la contribution de Legrand, la généralisation algébrique et la généralisation algorithmique prennent des formes différentes, étant donné qu'elles sont guidées par des critères sous-jacents distincts. Par conséquent, la prise en compte des enjeux didactiques propres au travail algorithmique constitue une question ouverte et d'une grande importance dans la recherche.

PREUVES ET GENESES

En se situant toujours dans l'environnement technologique, les contributions de Font, Leduc et Richard, et de Desmarais, Richard et Venant portent sur l'interrogation des types de preuves et de raisonnements qui interviennent au cours du travail mathématique.

La première contribution aborde la question du développement d'un générateur de preuves automatisé, en particulier en s'interrogeant sur la possibilité de simuler la genèse discursive d'un élève du secondaire à l'aide d'une machine. L'analyse de l'implémentation de certaines preuves en géométrie donne des éléments de réponse positive à la question et met bien en évidence les enjeux de cette recherche. En même temps, elle relève les limites d'une telle approche à la preuve : par exemple, l'identification et la classification des raccourcis inférentiels – considérés comme une simplification faite par l'élève lors de sa preuve, qui n'est pas rigoureusement valide, mais qui est tout de même acceptée par le professeur – se révèlent un travail qui demande ressources et temps.

La seconde contribution propose un projet de recherche visant à améliorer les compétences argumentatives en mathématiques. Il vise à modéliser les conditions d'apprentissage des preuves instrumentales en classe, en intégrant le système tuteur intelligent QED-Tutrix. L'objectif de l'approche est de créer des modèles et des outils informatiques pour mieux comprendre ces conditions d'apprentissage. Dans un contexte numérique, où les questions didactiques, mathématiques et informatiques se rejoignent, cette contribution cherche à exploiter le potentiel des outils informatiques pour travailler sur la preuve. Elle met l'accent sur l'utilisation des preuves instrumentales, en cherchant à rapprocher les artéfacts technologiques et le discours mathématique.

ARTÉFACTS ET GENÈSES

Un autre point de discussion est développé autour des contributions s'intéressant à l'introduction et à l'utilisation des artéfacts, tant matériels que numériques, en lien avec les manipulations et les gestes associés, aux aspects sémiotiques présents dans l'artéfact et aux formes différentes de discours.

La contribution de Arevalo vise à étudier le travail mathématique d'étudiants de la première année d'instruction technique supérieure face à une tâche sur l'homothétie posée dans un contexte 3D. Plus précisément, cette tâche – proposée pendant des séances de cours à distance – concerne la reproduction en échelle d'un monument de la ville de Valparaíso dans l'environnement 3D du logiciel GeoGebra. L'analyse des réponses des étudiants montre l'activation des genèses instrumentale et sémiotique. En particulier, elle porte l'attention sur la genèse sémiotique qui doit prendre en compte la visualisation 3D et l'articulation entre les deux genèses d'où la pertinence du plan [Sém-Ins].

Toujours dans le contexte de GeoGebra, López présente une analyse approfondie de la résolution d'une tâche d'optimisation portant sur la notion d'approximation locale de fonctions qui a été proposée aux étudiants en ingénierie. Dans le cadre des ETM, elle tient compte des spécificités de l'analyse mathématique et des trois paradigmes qui lui sont associés. L'analyse approfondie se concentre sur la visualisation locale et met en évidence les difficultés rencontrées par les étudiants et comment l'utilisation de GeoGebra peut soutenir les relations entre visualisation locale et globale, ouvrant ainsi de nouvelles perspectives de recherche pour l'enseignement et l'apprentissage de l'analyse.

La coordination entre genèses est au centre de l'étude de Soto-Henríquez et Menares Espinoza sur la fonction exponentielle à l'école secondaire. En particulier, cette notion est abordée par deux types de tâches proposées aux élèves : une séquence de représentations graphiques dans lesquelles les élèves doivent relier des situations présentées comme des situations réelles en justifiant leur choix ; une tâche qui leur demande de formuler des fonctions adaptées à une situation concernant la quantité de lumière selon la profondeur des océans. L'expérimentation didactique a été menée à l'école secondaire avec 20 élèves. Les auteurs identifient l'activation des trois genèses (sémiotique, discursive et instrumentale) auprès des étudiants et des plans correspondants, et concluent que le travail sollicité permet d'approcher la construction de l'objet fonction exponentielle.

L'étude de Gaona, Lopez et Montoya-Delgadillo se développe toujours dans un environnement numérique, à partir de tâches sur les nombres complexes proposées à des enseignants en formation initiale pendant la première année d'université. Cette étude se concentre sur la caractérisation du travail mathématique personnel lorsque différents artéfacts numériques sont utilisés dans la résolution des tâches. Ces dernières sont proposées par la plateforme Moodle/Wiris et les étudiants peuvent utiliser un CAS (par exemple, GeoGebra, Symbolab, Wolfram Alpha, Photomath). L’analyse des réponses des étudiants met en évidence des potentialités dans l’usage de ces outils, mais aussi des limites. Dans le premier cas, on a constaté que : le travail avec le numérique ainsi que ses contraintes spécifiques ont conduit à l’activation de la genèse discursive et soutenu le discursif ; l’articulation entre les artéfacts numériques et leur genèse a permis une meilleure compréhension des solutions des équations traitées. Dans l’autre cas, des difficultés des étudiants concernant l'interprétation des erreurs de calcul affichées par les CAS et les rétroactions données ont émergé.

En relation avec cette contribution et tout en restant dans un contexte numérique constitué par une base d’exercices en ligne pour les étudiants, Gaona aborde la question de la construction des tâches et de leurs caractéristiques dans un système d’évaluation en ligne. L’une des tâches considérées dans cette étude est celle portant sur les nombres complexes cités ci-dessus. L’analyse met en évidence comment certaines variables didactiques influencent le travail mathématique au niveau des genèses activées, en faisant apparaître toute la complexité de la conception des tâches.

Le groupe de travail a eu la chance de pouvoir se confronter non seulement avec des artéfacts numériques, mais également avec des artéfacts matériels grâce à la contribution de Rollinde, Nechache et Abboud.

Cette contribution concerne une séquence didactique utilisant un planétaire humain avec des élèves de 14-15 ans (classe 3e en France). Les tâches proposées impliquent un travail dans le méso-espace avec la production de conjectures sur le mouvement et les trajectoires des planètes, la construction de l’ellipse dans le micro-espace suivant un programme de construction donné par l’enseignant et, enfin, un retour au méso-espace par la construction dans la cour de l’école. L’analyse montre l’activation de la genèse instrumentale pour exécuter le programme de construction en recourant aux instruments matériels (comme le compas, la règle …) et un travail dans le plan [Sém-Ins]. L’espace de travail géométrique personnel des élèves s’enrichit ainsi par cette introduction de l’ellipse au niveau des signes et des artéfacts.

RELATIONS ENTRE CADRES ET APPROCHES THÉORIQUES

Enfin, trois contributions ont apporté une réflexion théorique d’une part, et des propositions d’articulation ou d’intégration avec des cadres théoriques d'autre part.

La contribution de Parzysz introduit dans la discussion l’analyse du travail des artisans antiques qui ont produit des décors géométriques, et la met en relation avec le travail de reconstruction des procédures et des techniques utilisées. Ce type d’analyse interroge le cadre des ETM, les paradigmes géométriques (G1, G2) ainsi que leurs relations mutuelles. De plus, elle attire l’attention sur le référentiel théorique auquel ces décors se réfèrent et celui requis pour les reconstruire.

Dans leur proposition, Bouzelmate et Rittaud montrent leur étude sur l’utilisation de vidéos dans l’enseignement supérieur des mathématiques. Plus précisément, les auteurs se réfèrent à la ThETM pour analyser une vidéo produite par eux-mêmes sur la résolution d'équations différentielles du premier ordre. La recherche vise à identifier quels éléments peuvent solliciter l'activation des genèses, en particulier les genèses discursive et sémiotique. Cette contribution pose également la question du statut de la vidéo pour les étudiants et de l'activation de la genèse instrumentale.

La participation de Arzarello et Bagossi introduit dans la discussion le sujet de la covariation de fonctions. Elle est étudiée par deux approches théoriques différentes, qui sont la ThETM et le faisceau sémiotique. Ce dernier inclut toutes les ressources sémiotiques produites ou exploitées pour penser et communiquer dans l'environnement de la classe et permet de décrire les activités sémiotiques de manière globale. Deux épisodes d'une expérience d'enseignement sur la modélisation d'un phénomène réel sont analysés à partir de ces deux lentilles théoriques. L'outil méthodologique pour mener l'analyse est la frise chronologique, par laquelle les auteurs montrent les processus de raisonnement covariant en mettant l'accent sur les productions sémiotiques des élèves et sur le rôle des outils dans le travail mathématique des élèves. Cette frise chronologique permet de montrer les ETMs personnels des élèves et de l'enseignant à un grain très fin et de décrire son évolution dynamique au sein du plan [Sém-Ins].

TEMA 2: ESTUDIO DE LOS SIGNOS, HERRAMIENTAS Y DISCURSO EN EL TRABAJO MATEMÁTICO

Responsables: Michela Maschietto (Italia), Philippe R. Richard (Canadá) y Jesús Victoria Flores Salazar (Perú)

Università di Modena e Reggio Emilia, Université de Montréal, Pontificia Universidad Católica del Perú

INTRODUCCIÓN

El Tema 2 se centra en un estudio exhaustivo de las herramientas utilizadas en el trabajo matemático, los signos asociados a ellas y sus relaciones con el discurso. En el marco de la Teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ThETM), nos concentramos en cuestiones que ya han sido abordadas en simposios anteriores, como aquellas centradas en las génesis y su coordinación, así como aspectos relativos a las relaciones entre diferentes génesis.

Durante las sesiones de trabajo, hemos presentado y discutido 13 contribuciones de cuatro países: Canadá, Chile, Francia e Italia. Los temas propuestos para la discusión incluyen las relaciones entre el espacio de trabajo matemático y el espacio de trabajo algorítmico, así como los vínculos entre las pruebas y las génesis. También abordamos el uso de artefactos digitales, además de las relaciones entre diversos marcos y enfoques teóricos.

ALGORITMOS Y MATEMÁTICAS

Un primer punto de discusión se refiere al potencial de los entornos tecnológicos y los sistemas de signos para hacer evolucionar el trabajo matemático de los alumnos. Nos interesa especialmente el uso de herramientas informáticas y los aspectos semióticos relacionados con su uso. Las contribuciones abordan la algorítmica desde dos perspectivas diferentes.

La contribución de Legrand examina la construcción del concepto de variable como parámetro. Presenta una situación de generalización de patrones relacionada con un problema de optimización propuesto a alumnos de cuarto grado en Francia (13-14 años). Se destacan dos aspectos: ¿cómo el software utilizado (en este caso, Snap!) limita el lenguaje y cómo ciertos comandos influyen en las soluciones de los alumnos? El análisis de las trazas de programación y las interacciones lingüísticas entre los alumnos revela una tensión entre "fijo-variable" que parece ser necesario superar para construir el concepto de parámetro.

Venant, Passaro, Jeannotte, Knoll y Saboya analizan las interacciones entre el trabajo algorítmico y el trabajo matemático durante la resolución de una tarea de programación informática dada a seis formadores-investigadores en didáctica de las matemáticas. Más concretamente, la tarea consiste en escribir un programa que pruebe y muestre si dos números enteros son múltiplos uno del otro, y se solicita modificar el programa sin poder utilizar ciertos comandos. La pregunta de investigación abordada en esta contribución se refiere al papel de la programación informática en la movilización del conocimiento y el razonamiento matemático. El análisis se centra en los espacios de trabajo de referencia y los espacios de trabajo personales de estos formadores, que tienen vínculos muy diversos con la algorítmica. Utilizando el marco de los ETM, los autores analizan las interacciones y las circulaciones dentro de cada espacio de trabajo, proporcionando así una visión de las relaciones entre los campos de la algorítmica y las matemáticas. Específicamente, durante la transición al Espacio de Trabajo Algorítmico, exigido por la tarea, se hace necesaria una reinterpretación de los objetos matemáticos en juego. El software utilizado (Scratch) y, en particular, el lenguaje de programación implica un nuevo uso de estos objetos. Como también destaca la contribución de Legrand, la generalización algebraica y la generalización algorítmica adoptan formas diferentes, ya que se guían por criterios subyacentes distintos. Por lo tanto, tener en cuenta las cuestiones didácticas propias del trabajo algorítmico constituye una pregunta abierta y de gran importancia en la investigación.

PRUEBAS Y GÉNESIS

Siempre ubicándose en el entorno tecnológico, las contribuciones de Font, Leduc y Richard, y de Desmarais, Richard y Venant se centran en la interrogación de los tipos de pruebas y razonamientos que intervienen en el trabajo matemático.

La primera contribución aborda la cuestión del desarrollo de un generador de pruebas automatizado, particularmente cuestionando la posibilidad de simular la génesis discursiva de un alumno de secundaria mediante una máquina. El análisis de la implementación de algunas pruebas en geometría proporciona elementos de respuesta positiva a la pregunta y destaca claramente los desafíos de esta investigación. Al mismo tiempo, señala los límites de tal enfoque hacia la prueba: por ejemplo, la identificación y clasificación de atajos inferenciales – considerados como una simplificación realizada por el estudiante durante su prueba, que no es rigurosamente válida pero que aun así es aceptada por el profesor – resultan ser un trabajo que requiere recursos y tiempo.

La segunda contribución propone un proyecto de investigación con el objetivo de mejorar las habilidades argumentativas en matemáticas. Busca modelizar las condiciones de aprendizaje de las pruebas instrumentales en el aula, integrando el sistema tutor inteligente QED-Tutrix. El enfoque tiene como objetivo crear modelos y herramientas informáticas para comprender mejor estas condiciones de aprendizaje. En un contexto digital donde convergen cuestiones didácticas, matemáticas e informáticas, esta contribución busca aprovechar el potencial de las herramientas informáticas para trabajar en la prueba. Hace hincapié en el uso de pruebas instrumentales, buscando acercar los artefactos tecnológicos y el discurso matemático.

ARTEFACTOS Y GÉNESIS

Se plantea otro punto de discusión en torno a las contribuciones que abordan la introducción y el uso de artefactos, tanto materiales como digitales, en relación con las manipulaciones y gestos asociados, los aspectos semióticos presentes en los artefactos y las diferentes formas de discurso.

La contribución de Arevalo tiene como objetivo estudiar el trabajo matemático de estudiantes de primer año de educación técnica superior frente a una tarea sobre homotecia planteada en un contexto 3D. Más específicamente, esta tarea, propuesta durante sesiones de clase a distancia, se refiere a la reproducción a escala de un monumento de la ciudad de Valparaíso en el entorno 3D del software GeoGebra. El análisis de las respuestas de los estudiantes muestra la activación de las génesis instrumental y semiótica. En particular, se presta atención a la génesis semiótica que debe tener en cuenta la visualización en 3D y la articulación entre ambas génesis, de ahí la relevancia del plan [Sem-Ins].

También en el contexto de GeoGebra, López presenta un análisis exhaustivo de la resolución de una tarea de optimización relacionada con el concepto de aproximación local de funciones que se propuso a los estudiantes de ingeniería. Dentro del marco de los ETM, se tienen en cuenta las especificidades del análisis matemático y los tres paradigmas asociados a él. El análisis exhaustivo se centra en la visualización local y destaca las dificultades encontradas por los estudiantes y cómo el uso de GeoGebra puede respaldar las relaciones entre la visualización local y global, abriendo así nuevas perspectivas de investigación para la enseñanza y el aprendizaje del análisis.

La coordinación entre las génesis es el foco del estudio de Soto-Henríquez y Menares Espinoza sobre la función exponencial en educación secundaria. En particular, esta noción se aborda a través de dos tipos de tareas propuestas a los alumnos: una secuencia de representaciones gráficas en las que los alumnos deben vincular situaciones presentadas como situaciones reales justificando sus elecciones, y una tarea que les pide formular funciones adecuadas a una situación relacionada con la cantidad de luz según la profundidad de los océanos. Se llevó a cabo una experimentación didáctica con 20 alumnos de educación secundaria. Los autores identifican la activación de las tres génesis (semiótica, discursiva e instrumental) en los alumnos y los correspondientes planes, y concluyen que el trabajo realizado permite aproximarse a la construcción del objeto función exponencial.

El estudio de Gaona, López y Montoya-Delgadillo se desarrolla también en un entorno digital, a partir de tareas sobre los números complejos propuestas a profesores en formación inicial durante su primer año de universidad. Este estudio se centra en la caracterización del trabajo matemático personal cuando se utilizan diferentes artefactos digitales en la resolución de las tareas. Estas últimas son propuestas por la plataforma Moodle/Wiris y los estudiantes pueden utilizar un CAS (por ejemplo, GeoGebra, Symbolab, Wolfram Alpha, Photomath). El análisis de las respuestas de los estudiantes resalta las potencialidades en el uso de estas herramientas, pero también sus limitaciones. En el primer caso, se observó que el trabajo con lo digital, así como sus restricciones específicas, condujo a la activación de la génesis discursiva y respaldó lo discursivo; la articulación entre los artefactos digitales y su génesis permitió una mejor comprensión de las soluciones de las ecuaciones tratadas. En el otro caso, surgieron dificultades por parte de los estudiantes en la interpretación de los errores de cálculo mostrados por los CAS y en las retroalimentaciones proporcionadas.

En relación con esta contribución y aún en un contexto digital compuesto por una base de ejercicios en línea para estudiantes, Gaona aborda la cuestión de la construcción de tareas y sus características en un sistema de evaluación en línea. Una de las tareas consideradas en este estudio es la mencionada anteriormente sobre los números complejos. El análisis destaca cómo algunas variables didácticas influyen en el trabajo matemático en términos de las génesis activadas, revelando toda la complejidad del diseño de las tareas.

El grupo de trabajo tuvo la oportunidad de enfrentarse no solo a artefactos digitales, sino también a artefactos materiales gracias a la contribución de Rollinde, Nechache y Abboud. Esta contribución se refiere a una secuencia didáctica que utiliza un planetario humano con estudiantes de 14 a 15 años (grado 3 en Francia). Las tareas propuestas implican trabajar en el mesoespacio mediante la producción de conjeturas sobre el movimiento y las trayectorias de los planetas, la construcción de la elipse en el microespacio siguiendo un programa de construcción proporcionado por el profesor, y finalmente, un retorno al mesoespacio a través de la construcción en el patio de la escuela. El análisis muestra la activación de la génesis instrumental para ejecutar el programa de construcción utilizando instrumentos materiales (como el compás, la regla, etc.) y un trabajo en el plano [Sem-Ins]. El espacio de trabajo geométrico personal de los alumnos se enriquece así mediante esta introducción de la elipse en términos de signos y artefactos.

RELACIONES ENTRE MARCOS TEÓRICOS Y ENFOQUES

Por último, tres contribuciones han aportado una reflexión teórica, por un lado, y propuestas de articulación o integración con marcos teóricos por otro lado.

La contribución de Parzysz introduce en la discusión el análisis del trabajo de los artesanos antiguos que produjeron decoraciones geométricas, y lo relaciona con el trabajo de reconstrucción de los procedimientos y técnicas utilizadas. Este tipo de análisis cuestiona el marco de las ETM, los paradigmas geométricos (G1, G2), así como sus relaciones mutuas. Además, llama la atención sobre el marco teórico al que estas decoraciones se refieren y el necesario para reconstruirlas.

En su propuesta, Bouzelmate y Rittaud presentan su estudio sobre el uso de videos en la enseñanza superior de las matemáticas. Específicamente, los autores se refieren a la ThETM para analizar un video producido por ellos mismos sobre la resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden. La investigación tiene como objetivo identificar qué elementos pueden activar las génesis, especialmente las génesis discursiva y semiótica. Esta contribución también plantea el problema del estatus del video para los estudiantes y la activación de la génesis instrumental.

La participación de Arzarello y Bagossi introduce en la discusión el tema de la covariación de funciones. Se estudia a través de dos enfoques teóricos diferentes, que son la ThETM y el enfoque semiótico. Este último incluye todos los recursos semióticos producidos o utilizados para pensar y comunicarse en el entorno del aula, y permite describir las actividades semióticas de manera global. Dos episodios de una experiencia de enseñanza sobre la modelización de un fenómeno real se analizan desde estas dos lentes teóricas. La herramienta metodológica utilizada para el análisis es la línea de tiempo, mediante la cual los autores muestran los procesos de razonamiento covariante, centrándose en las producciones semióticas de los estudiantes y en el papel de las herramientas en el trabajo matemático. Esta línea de tiempo permite mostrar en detalle los ETM personales de los estudiantes y del profesor y describir su evolución dinámica dentro del plan [Sem-Ins].

ALGORITHMIQUE ET ENTREE DANS L'ALGEBRE ÉLÉMENTAIRE: LA (DIFFICILE) CONSTRUCTION DU CONCEPT DE «PARAMÈTRE»

Jean-Marc Legrand

CREN, Université de Nantes, Inspé de Nantes

Algorithmique et algèbre partagent de nombreux concepts. Deux points nous paraissent fondamentaux dans ces deux registres: la généralisation, et la variable dans un rôle de paramètre. En nous situant dans le Cadre de l'Apprentissage par Problématisation, nous nous proposons ici d'étudier la construction du concept de variable dans un rôle de paramètre en s'appuyant sur une situation de généralisation informatique de motif. Les premières analyses semblent montrer l'importance d'une tension fixe-variable qu'il importe de faire vivre avant de la régler dans un registre de représentation sémiotique donné.

INTRODUCTION

En France, au cycle 4, les élèves font leur entrée dans l'algèbre élémentaire (Grugeon-Allys & al., 2012), source de difficultés sérieuses (Ministère de l'éducation nationale et Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, 2002), liées à un certain nombre de ruptures d'ordre épistémologique (Grugeon-Allys, 2016). D'autre part, depuis 2016, une part d'enseignement de l'algorithmique et de la programmation a fait son entrée dans les programmes du collège et de l'école élémentaire. Or, on rapproche souvent algorithme et algèbre, ne serait-ce que parce que ces termes ont une origine commune. Ceci offre potentiellement de nouvelles opportunités didactiques, s'appuyant sur ces nouveaux enseignements ainsi que sur des concepts à l'interface entre algorithmique et algèbre. Parmi ceux-ci, il en est un qui nous semble fondamental, celui de variable dans un rôle de paramètre. Nous nous proposons dans ce texte d'exposer les raisons de ce caractère fondamental, puis d'analyser la construction de ce concept lors d'une situation de généralisation de motif informatisée.

ALGORITHMIQUE ET ALGEBRE: CONCEPTS A L'INTERFACE

Algorithme et algèbre sont des mots que l'on rapproche souvent : ils ont pour origine le même mathématicien (al Khwarizmi), et Chabert (2010) rappelle que dans l'Encyclopédie de d'Alembert le mot algorithme est décrit ainsi: « Terme Arabe, employé par quelques auteurs, et singulièrement par les Espagnols pour signifier la pratique de l'algèbre. » Mais quels sont les concepts à l'interface entre algorithmique et algèbre ?

Nous considérons ici, suivant Grugeon-Allys et al. (2012) que l'algèbre est notamment mobilisée

> [...] comme outil de résolution via la modélisation, pour résoudre des problèmes « arithmétiques » formulés en langue naturelle sous forme d'équations et, au-delà, pour

résoudre des problèmes intra ou extra mathématiques sous forme de relations fonctionnelles entre données et variables.

Ainsi, la pratique algébrique consiste (en partie) à concevoir des procédures de résolutions de problèmes modélisables par des équations polynomiales. D'un autre côté, une définition couramment admise de l'algorithme est donnée par Modeste (2012) :

Un algorithme est une procédure de résolution de problème, s'appliquant à une famille d'instances du problème et produisant, en un nombre fini d'étapes constructives, effectives, non-ambigües et organisées, la réponse au problème pour toute instance de cette famille.

Ainsi, lorsqu'on parle d'algèbre élémentaire ou d'algorithme :

- on recherche la conception d'une méthode ou d'une procédure transformant les données d'un problème en une solution ;
- cette méthode doit s'appliquer à une famille d'instances du problème, c'est-à-dire que l'on recherche une méthode générique (le plus possible) — Bronner et Squalli (2021) soulignent que de nombreux auteurs reconnaissent la généralisation comme étant une « composante très importante de la pensée algébrique » ;
- cette méthode est exécutable par un « dispositif d'exécution » (Samurçay & Rouchier, 1985): l'objectif n'est pas de « produire un résultat » mais de « faire-faire » par autrui (élève scribe pour les babyloniens, mathématicien pour Diophante ou juriste pour al Khwarizmi) ou par une machine, « un système matériel qui obéit aux lois de la physique […] pour lequel nous avons défini un protocole d'interaction » (Dowek, 2011);
- cette méthode doit donc aussi être écrite dans un langage spécifique interprétable par le dispositif d'exécution : il y a une conversion de registre de représentation sémiotique (Duval, 1993), entre le langage de description du problème et le langage de description de l'algorithme, ce que Christianidis (2007), en parlant de Diophante, nomme « l'invention », « le transfert du problème (ou de sa version instanciée) dans le cadre de la « théorie arithmétique ».

On retrouve là « les quatre concepts de l'informatique » de Dowek (2011): un <u>algorithme</u>, traitant des <u>données</u> ou des informations, écrit dans un certain <u>langage</u> afin d'être exécuté sur une certaine <u>machine</u> [1].

Généralisation et nécessité du paramètre

La généricité des méthodes de résolution de problème est visible chez les babyloniens. Ainsi par exemple sur la tablette VAT6505 (entre -1900 et-1600), on retrouve un algorithme de recherche de l'inverse d'un nombre, cependant cet algorithme n'est pas lui-même formulé de façon générique : seules sont présentées plusieurs instanciations du problème, c'est-à-dire la description détaillée de la méthode pour certains nombres donnés. La charge de la construction de la méthode générale est laissée à l'étudiant scribe. On retrouve ici les exemples à caractère générique de Balacheff (1987), les nombres donnés prenant un statut de nombre générique, « un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus. ». Dans ces algorithmes babyloniens, deux des trois conditions caractéristiques de la pensée algébrique selon Radford (2014) sont présentes : l' « indétermination » (des nombres inconnus sont impliqués dans le problème), de façon partielle, la « dénotation » (les nombres indéterminés sont parfois nommés, en fonction de leur nature - longueur, inverse etc.) Cependant, il manque l' « analycité », c'est-à-dire la manipulation des nombres indéterminés comme s'ils étaient connus : on a parfois une dénomination du nombre inconnu, mais on n'opère pas sur le nombre inconnu.

L'analycité est en revanche visible chez Diophante : le nombre inconnu (l'arithme) dispose cette fois d'un symbole (ς) qui va être manipulé comme si le nombre était connu. Ceci permettra de construire une méthode présentant « un caractère automatique, extraordinairement commode : la mécanique "aveugle" du calcul, dont Leibniz le premier, souligna avec insistance les privilèges. » (Serfati, 1997). Cependant la symbolisation n'est pas le seul moyen d'accéder à cette analycité. Chez al Khwarizmi, on ne retrouve aucun symbole (c'est une algèbre rhétorique), mais l'inconnue (la chose) est manipulée dans des expressions afin de produire les six formes canoniques des équations polynomiales du second degré. Malgré cela, chez Diophante comme chez al Khwarizmi, les méthodes de résolutions ne sont pas décrites sous forme générique, mais restent instanciées : ce sont encore des exemples génériques.

En fait, il manque « ce qui fait la force de l'algèbre » pour Chevallard (1989) : les paramètres, « soit les variables du système [mathématisé] dont les valeurs sont supposées connues ». La représentation sous forme de symboles de ces paramètres ne viendra qu'à la fin du XVI^{e} siècle avec Viète puis Descartes. Il aura ainsi fallu attendre trois millénaires entre les premières dénominations de l'inconnue et les représentations symboliques du paramètre, ou encore près d'un millénaire et demi entre la symbolisation de l'inconnue et celle du paramètre. Cette rupture épistémologique (Ely & Adams, 2012) – et donc possiblement obstacle épistémologique pour les élèves - a été rendue possible et nécessaire entre autres par la recherche de méthodes « efficaces » selon Radford (2006b), c'est-à-dire de méthodes « claires et systématiques » permettant d'obtenir « une série de symboles que vous pouvez manipuler à la manière d'une machine, de façon efficace ». On retrouve ainsi la spécificité des « situations de programmation » selon Samurçay et Rouchier (1985) qui impliquent « le passage d'une planification des actions exécutables par le sujet lui-même à celle d'un plan d'actions dont l'exécution n'est pas contrôlée par l'opérateur humain ». Dans ce cas, comme « le sujet n'aura pas l'occasion d'intervenir en cours d'exécution pour modifier le déroulement de la procédure » (ibid.), cela nécessitera la représentation des paramètres dans le langage de description de l'algorithme. Ce langage sera noté θ dans la suite de ce texte, en référence au « langage de la théorie arithmétique » de Diophante. La représentation d'une méthode générique dans θ nécessite l'existence d'une représentation des paramètres dans θ, ainsi que celle d'expressions de θ manipulant ces représentations de paramètres comme s'ils étaient connus.

Cette construction longue du concept de paramètre peut s'expliquer par la difficulté de dépasser la dialectique unique-multiple, puisqu'il s'agit pour Serfati (2010)

> […] de combiner au sein du système symbolique deux concepts jusqu'alors considérés comme opposés, l'arbitraire et le fixe, ou l'un et le multiple ou même, peut-être de manière plus significative, l'indéterminé et le singulier.

Comment concevoir que le « donné » puisse être en même temps arbitraire ? Il s'agit aussi de pouvoir identifier un objet à sa représentation et de pouvoir remplacer un objet déterminé par un objet susceptible d'être déterminé, ce qui par exemple était impensable pour les mathématiciens grecs (Ely & Adams, 2012). Enfin, les questions liées à l'homogénéité (généricité du nombre) doivent être réglées.

Nous nous proposons ici d'étudier la construction de la variable dans un rôle de paramètre en s'appuyant sur une situation de généralisation informatique de motif, c'est-à-dire en se basant sur un dispositif d'exécution automatique impliquant la nécessité de manipuler un paramètre dans un langage défini (le registre de représentation sémiotique interprétable par le dispositif d'exécution). Précisons ici que nous parlerons de « variable » pour désigner une représentation dans un système sémiotique donné d'un objet représentant *a priori* un objet indéterminé, soit *non encore déterminé mais susceptible de l'être*.

Nous nous situerons dans le Cadre de l'Apprentissage par Problématisation [2], dans lequel on s'intéresse notamment à la construction de savoirs raisonnés, apodictiques, par la mise en tension de faits et de nécessités (Fabre & Orange, 1997) Il s'agit non pas de savoir que c'est vrai, mais de savoir que ça ne peut pas être autrement : les savoirs scientifiques ont un caractère de nécessité « de par la construction du problème qui les organise en articulant des principes explicatifs (le registre explicatif) avec des faits d'observation ou expérimentaux (le registre empirique) » (Orange, 2012) Dans notre cas, il ne s'agit pas d'établir l'intérêt pour la modélisation de l'utilisation de symboles représentant des paramètres, ni d'apprendre à manipuler des paramètres pour résoudre un problème, mais de construire la nécessité du paramètre dans le cadre d'un problème de généralisation. Plus précisément, il s'agit d'établir la nécessaire existence d'un objet représentant une certaine propriété non définie *a priori*, ainsi que la nécessaire existence, dans le registre de représentation sémiotique de la construction du problème (θ), d'un symbole permettant de manipuler cet objet comme s'il était connu, dans une expression mettant en relation la valeur que dénote l'objet et au moins une autre valeur du système mathématisé.

Faire-faire une généralisation de motif par une machine est impossible sans paramètre ni signes permettant de manipuler ce paramètre dans un certain langage.

Nous avons donc conçu une situation s'appuyant sur la construction d'un algorithme de généralisation de motif exécuté par un artefact informatique.

UN ARTEFACT POUR TROIS FONCTIONS

L'artefact informatique sera ainsi mobilisé comme support de la situation. Il servira aussi de système producteur de rétroactions, permettant aux élèves de construire des faits relatifs à la généralisation et d'explorer le langage du dispositif d'exécution. L'environnement utilisé est Snap! (https://snap.berkeley.edu/), proche de Scratch, et son instrumentalisation (Legrand, 2019) permettra d'utiliser ce même artefact informatique comme système de captation de traces de programmation et d'exploration du problème par les élèves.

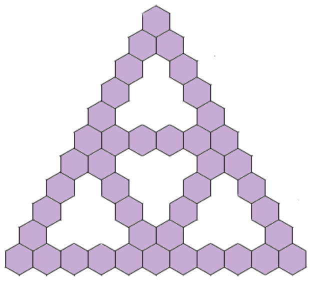


Figure 1 : TS(6): le motif "Triangle de Sierpinski" de mesure 6

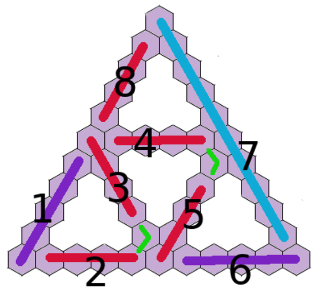


Figure 2 : Séquence de boucles traçant un TS

Figure 3 : Rétroaction pour un script erroné - TS(5)

Support de la situation

La situation proposée aux élèves est celle d'une généralisation de motif rendue nécessaire par un problème d'optimisation. Le motif choisi est la première itération d'un triangle de Sierpinski construit avec des hexagones (Figure). On définit avec les élèves la $mesure$ d'un « triangle de Sierpinski » comme étant le nombre d'hexagones dont est formé un côté des triangles de base. Ainsi pour l'exemple, la $mesure$ est de 6 hexagones, et le motif sera nommé TS(6). Les élèves doivent trouver quel est le plus grand TS que l'on peut construire dans un premier temps avec 35 hexagones, puis dans un second temps avec 1400, 1654 ou 1710 hexagones. Pour cette deuxième phase, il est proposé aux élèves d'étendre leur méthode mise en œuvre dans la première phase en faisant construire et dénombrer les TS par l'ordinateur. Pour cela, dans l'environnement de programmation par blocs *Snap*!, un script est fourni aux élèves qui permet de tracer un TS(4). Ceux-ci doivent alors modifier ce script afin de « lui apprendre à dénombrer » c'est-à-dire afin qu'il indique à tout moment le nombre d'hexagones tracés. L'objectif est ici d'inciter les élèves à s'intéresser à la structure de l'algorithme mis en mot dans ce script, et de leur faire rencontrer une première variable informatique, dans un rôle de compteur (Sajaniemi, 2005).

Les élèves devront ensuite construire différentes instances de l'algorithme pour tracer et dénombrer des TS de mesure 5, 6, 7, puis 11 et 22, avant de le modifier pour qu'il trace et dénombre n'importe quel TS dont la mesure est entrée par l'utilisateur. Ils utiliseront ensuite le script obtenu pour résoudre le problème. Finalement, ils seront amenés à trouver une solution algébrique (non informatisée) pour déterminer le nombre d'hexagones de n'importe quel TS en allant « plus vite que l'ordinateur ».

L'algorithme est pour l'essentiel constitué d'une suite de huit boucles dont le nombre d'itérations doit être mis en relation avec la mesure du TS. Ces boucles, visualisées et numérotées suivant leur ordre d'exécution dans l'algorithmique du tracé (figure 2), sont de trois familles possibles, suivant leur relation avec la $mesure$ entrée (nous identifierons dans la suite la boucle et sa famille) : les boucles b_1 et b_6 dont le nombre d'itérations est $mesure\ -\ 1$; les boucles b_2, b_3, b_4, b_5, et b_8 dont le nombre d'itérations est $mesure\ -\ 2$; la boucle b_7 (le « grand côté ») dont le nombre d'itérations est $2\ \times mesure\ -\ 2$.

La notation b_i^n désignera la boucle numéro i pour l'instance du programme traçant un TS(n). Dans la suite de ce texte, $b_i = expr$ sera utilisé pour signifier « l'expression dans le programme permettant de déterminer le nombre d'itérations de la boucle n°i est $expr$». $\delta(b_i)$ est la valeur dénotée par l'expression définie pour b_i. Ainsi, $b_i^5\ =\ 4\ -\ 1$ signifie que les élèves ont entré (ou envisagé) l'expression « $4 - 1$ » pour le nombre d'itérations de la boucle i du script traçant un TS(5). Ce nombre d'itérations à l'exécution sera donc $\delta(4 - 1)$ soit 3.

Faire-faire le tracé par l'ordinateur, c'est exprimer l'algorithme générique dans θ, ce qui implique de construire la nécessaire existence d'un objet o :

- dénotant une valeur arbitraire non définie a priori, ici la valeur du paramètre $mesure$ — on notera $\delta(o) = \delta(mesure)$,
- disposant d'une représentation $R_\theta(o)$ dans le registre de représentation sémiotique θ dans lequel on exprime l'algorithme permettant de résoudre le problème, ici Snap! (Duval, 1993, 2006),
- dont cette représentation est manipulable dans une expression $E_\theta(o, b_i)$ de θ qui détermine la relation entre la $mesure$ et le nombre d'itérations de la boucle b_i, comme si la valeur $\delta(R_\theta(o))$ était connue.

Le résultat valide attendu étant ici $R_\theta(o) =$ `mesure` et pour b_1 : $b_1 = E_\theta(o, b_1)$= `mesure - 1`. Avec une notation similaire, dans le langage symbolique A de l'algèbre, $R_A(o) = n$ et $b_1 = E_A(o, b_1) = n - 1$.

Producteur de rétroactions

Afin d'explorer le problème et réduire le champ des possibles, le programme de construction et dénombrement du TS est conçu pour donner à voir son état. Donner à voir le déroulement du programme ainsi que le résultat permettra aux élèves de valider ou non certaines hypothèses et de construire des faits et des nécessités permettant la construction du problème. Dans la **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** on représente ainsi une rétroaction produite par un TS(5) erroné, permettant de localiser et corriger l'erreur : la boucle b_7 est ici « trop courte » de 1 hexagone, ce qui est confirmé par le nombre d'hexagones comptés (qui devrait être 33).

Captation de traces de programmation: des traces aux faits

Afin de déterminer comment les élèves construisent le problème, et donc notamment de savoir quels faits sont produits ou mobilisés, le programme final n'a que peu d'intérêt. Il est nécessaire de saisir la dynamique de la généralisation du programme, c'est-à-dire de reconstituer l'histoire du programme. « Histoire » est ici entendu dans le sens « ensemble d'événements, évolution concernant une personne ou une chose » (CNRTL). L'environnement de programmation a été instrumenté afin de capter automatiquement les événements de programmation produits par les élèves, ce qui permet de représenter et parcourir cette histoire, puis de la représenter en épisodes « actions-effets de l'action». Ces épisodes sont des manifestations des théorèmes en actes (Vergnaud, 2007) organisant l'activité des élèves, et la prise en compte des ré-actions des élèves suite à une rétroaction, nous permet d'établir la possibilité de construction d'un fait, vu comme *relation action-effet, sous-tendue par un théorème en acte trouvant sa justification dans un registre explicatif (REX) particulier.*

Ces traces permettent ainsi d'identifier les faits construits par les élèves et leur mise en tension au regard de certaines nécessités.

ANALYSE DES PREMIERS RESULTATS: TENSION FIXE-VARIABLE ET NECESSITE DU PARAMETRE

En complétant l'histoire du programme avec l'analyse des interactions langagières entre élèves, nous pouvons reconstituer l'espace des contraintes spécifique à un binôme (Orange, 2005). Dans cet espace (figure 5), on indique en éléments grisés les faits construits ou mobilisés par les élèves, ce qui constitue le registre des données. Les éléments du registre des nécessités (ou des modèles) sont en bleu, plus clair pour les nécessités locales, plus spécifiques au problème traité. C'est « le registre des explications construites pour rendre compte des faits jugés pertinents pour le problème travaillé » (Orange, 2012). Nous indiquons en dessous ce qui « structure les explications des élèves et donc leur façon de travailler les problèmes scientifiques » (Orange, 2012), le registre explicatif (REX). Cet espace montre la construction des nécessités lors de l'avancée dans la construction du problème. Cependant, il n'est pas à lire de façon chronologique de gauche à droite, il s'agit d'indiquer ici les tensions entre faits et nécessités, quel que soit le moment de leur apparition dans la séance. Nous indiquons par un lien rouge pointillé un fait qui se retrouve invalidé par un autre fait construit ou une nécessité.

Ces premiers résultats concernent une classe de 4ème (troisième année du secondaire, élèves de 13-14 ans), formée de 13 binômes, suivis en janvier/février 2019. Nous nous intéressons ici spécifiquement à la phase de généralisation du programme d'un binôme: les élèves ont dû dupliquer puis modifier le script TS(4) pour construire les instances 5, 6, 7, 11, puis 20, 21 ou 22. Il s'agit ici de construire le script TS(n) permettant de tracer et dénombrer n'importe quel TS dont la mesure est entrée par l'utilisateur. C'est une phase de généralisation algébrique: il s'agit *d'identifier une régularité* dans l'ensemble des instances produites, d'être conscient que cette *régularité peut s'étendre à l'ensemble des instances* possibles, et de pouvoir *exprimer cette régularité* pour trouver n'importe quelle instance. En reprenant les niveaux de généralisation algébriques de Radford (2006a), les élèves ne peuvent se limiter au niveau « factuel » (la généralité se limite à des actions, sans nommer le paramètre), ou « contextuel » (le paramètre est nommé). Ici, ils doivent exprimer la généralité dans θ, registre sémiotique particulier proche du registre algébrique, donc faire une généralisation algébrique « symbolique ».

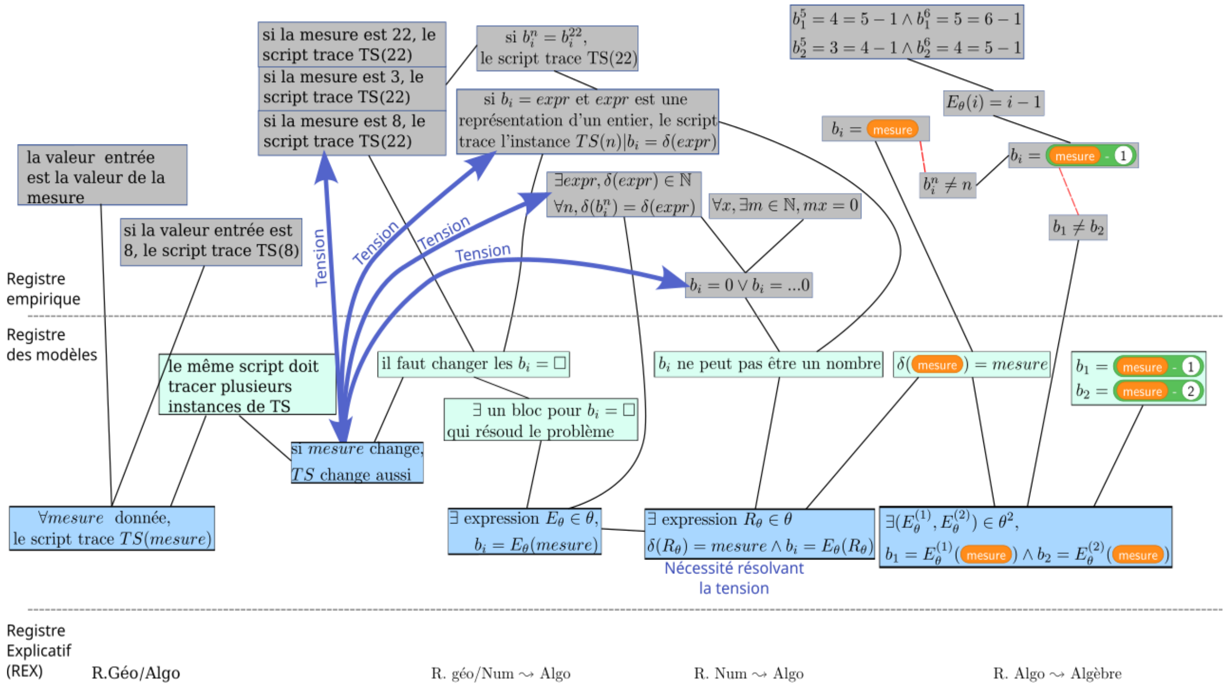


Figure 5 : Espace des contraintes – groupe 46_e

Position du problème : un programme pour tous

386 E2 maintenant faut qu'on fasse mille euh chais pu combien

388 E1 non maintenant faut qu'on fasse n'importe quelle | mesure

389 E2 ah d'accord

392 E2 comment on change ça?(doigt sur "initialisation" de TSn ou commentaire)

394 E1 pourquoi

395 E2 bah parce que là c'est là qu'il y a vingt-deux (montre "initialisationmax22")

396 E2 mais pour celui-là on sait pas

397 E1 mais justement c'est en fait parce que

398 *Script* START - ASK <<Quelle est la mesure du triangle de Sierpinski que tu veux dessiner?>>

400 E1 et là par exemple si je mets huit

401 *Script* ANSW <<8>>

402 E1 il faut que | il m'en fasse huit 'fin un de mesure huit (montre tracé en gros)

403 E1 mais sauf que là ça va m'en faire un | un de mesure vingt-deux

404 *Script* STOP receiveKey(478)

405 E2 ah oui

406 E1 donc il faut trouver un programme

407 E1 pour aller pour toutes les mesures (geste englobant avec la souris)

Dans cet extrait issu de la fin de la séance 4, les élèves ont déjà construit les différentes instances prévues, et doivent donc commencer la généralisation. On peut observer que E1 au moins pose correctement le problème : il s'agit de « trouver <u>un</u> programme pour aller pour <u>toutes</u> les mesures », et dans le même temps la tension fixe-variable est visible. E1 explique que si l'utilisateur entre la valeur « 8 », le programme doit tracer un TS(8), mais « sauf que là ça va m'en faire un de mesure vingt-deux », puisque les élèves ont dupliqué le TS(22). Plus tard, E1 donnera de nouveaux exemples, en insistant sur le fait que « mais du coup [...] c'est le même programme »(S4,437). E1 précisera aussi pour E2 que « si on marque par exemple 10 [...] ça va pas le faire pour tous » (S4,498-500): cette nouvelle tension fixe-variable va amener E1 à aboutir à la conclusion qu'il faut changer les expressions des boucles. Elle supprime d'ailleurs toutes les expressions des b_i, en se demandant « quel bloc il faut mettre » (S4,424) « à la place » du « nombre qu'il faut changer » (S4,447 ;473).

Un nombre pour les représenter tous

E2 semble chercher alors un nombre particulier, qui serait commun à toutes les instances, ou qui aurait une relation commune avec toutes les valeurs testées. Elle envisage « un multiple de tout ça » (S4,480) et elle propose ainsi « un truc qui finit par zéro, parce que zéro c'est un multiple de tout »(S4,496) : $\forall n, 0 = 0 \times b_i^n$. On retrouve ici un élément constaté lors de l'analyse des traces de programmation des autres groupes : la recherche d'un nombre porteur d'une certaine forme de généricité, comme les puissances de dix, avec en plus rendue visible ici l'idée d'une relation entre ce nombre et le zéro qui représenterait la multiplicité. b_i=0 sera testé et invalidé : là encore, ce qui devrait changer ne change pas.

Un élément du langage représentant la mesure et/ou la relation mesure-b_i

Les élèves ayant établi que b_i ne pouvait pas être un nombre, elles explorent le langage θ en navigant dans les différentes catégories de blocs. En effet, les faits construits amènent à la nécessité « qu'il y a un bloc qui existe » (S4,501), c'est-à dire qu'il existe une expression dans θ qui permet de dépasser cette tension unique-multiple et d'adapter en quelque sorte le programme à la mesure. Elles tenteront ainsi d'abord d'utiliser mesure pour toutes les boucles. Tout se passe comme s'il s'agissait d'une instruction qui allait d'elle-même faire la relation entre la valeur entrée et le nombre d'itérations, manifestation probable de la « pensée magique ». Cependant, très rapidement, les élèves établissent un nouveau fait invalidant, puisque « là on n'a pas le même truc que ta mesure »(S4,541) : pour une mesure de 11, $b_1 = 10$. Elles commencent ici à identifier `mesure` à un objet dénotant la mesure. Après avoir testé `taille hexagone` (une variable interne calculée) car E1 voulait « regarder ce que ça faisait que ça » (S4,643), elles vont ensuite, en séance 5, mobiliser `mesure` dans une expression permettant d'obtenir b_1 : `mesure - 1`. Mais cette relation est appliquée pour toutes les boucles, correspondant peut-être à un énoncé impliqué involontairement par le bilan de début de séance. La tension fixe-variable se manifeste de nouveau, puisque b_1 et b_2 partagent la même expression mais pour des dénotés différents. b_2=`mesure - 2` sera rapidement identifiée, avant que ce binôme ne passe le reste de la séance à tenter d'établir l'expression permettant de définir b_7, en tâtonnant avant d'essayer de raisonner sur le tracé effectif.

CONCLUSION

L'analyse des traces de programmations, complétées par les interactions langagières laisse penser que la tension (si spécifique au paramètre) unique-multiple, et son dépassement, semble bien être un élément nécessaire pour construire le concept de paramètre : elle est présente à chaque fois que les élèves avancent dans la construction du problème. Faire vivre cette tension serait ainsi essentiel. Cela est rendu possible par une situation de généralisation informatisée car celle-ci crée la nécessité d'un représentant unique incontournable et non ambigu, ce qui n'est pas le cas lors d'une généralisation avec des dispositifs d'exécutions humains, donc capables d'interpréter des instructions imprécises ou mêmes erronées. La rétroaction produite permet une exploration des possibles par les élèves, exploration qui semble bien illustrer la difficulté de la construction du paramètre et de sa symbolisation. Cette exploration a cependant certaines limites : d'une part le langage est imposé (et non construit), et son étendue est contrainte, notamment par le contrôle du typage ; d'autre part, le choix du paramètre est lui aussi contraint puisque le programme impose sa dénotation (le nombre d'hexagones d'un côté du triangle de base).

En outre, s'il est nécessaire de connaître différents faits numériques, il faut aussi être capable de les identifier en mettant en relation des valeurs, ce qui souligne l'intérêt des activités d'« early-algebra ». Ainsi, b_7 est difficilement identifiée par les différents groupes. Sans fait numérique simple identifiable, il faut raisonner sur la figure, le tracé et le nombre d'itérations : nous faisons l'hypothèse que les jeux de cadres sur lesquels nous comptions ont été peu ou pas présents.

Pour finir, on peut noter que lors de la séance de généralisation « purement » algébrique lors de laquelle les élèves devaient produire une expression permettant de déterminer le nombre d'hexagones d'un TS quelconque sans l'artefact informatique, on retrouve de nombreuses occurrences du mot « mesure », mais les expressions produites semblent indépendantes de l'algorithme construit : les élèves se situent alors dans un REX algébrique.

NOTES

[1] Un programme, ou un script, est ainsi un algorithme mis en mots.
[2] Pour une présentation plus détaillée et les liens possibles avec les ETM, voir la contribution de Choquet et al.

REFERENCES

Bronner, A. & Squalli, H. (2021). La généralisation dans la pensée algébrique. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, *3*(0).

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147-176. https://doi.org/10.1007/BF00314724

Chabert, J.-L. (2010). *Histoire d'algorithmes : Du caillou à la puce*. Belin.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : Perspectives curriculaires : La notion de modélisation. *Petit x*, *19*, 45-75.

Christianidis, J. (2007). The way of Diophantus : Some clarifications on Diophantus' method of solution. *Historia Mathematica*, *34*(3), 289-305.

Dowek, G. (2011). *Les quatre concepts de l'informatique*. https://edutice.archives-ouvertes.fr/edutice-00676169

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*, 37-65.

Duval, R. (2006). *Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques*. 67-89.Ely, R., & Adams, A. (2012). Unknown, placeholder, or variable : What is x? *Mathematics Education Research Journal*, *24*.

Fabre, M., & Orange, C. (1997). Construction des problèmes et franchissements d'obstacles. *Aster*, *24*(1), 37-57.

Grugeon-Allys, B., Pilet, J., Chenevotot-Quentin, F., & Delozanne, É. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *Hors-série Algèbre*, 26.

Grugeon-Allys, B. (2016). Modéliser le profil diagnostique des élèves dans un domaine mathématique et l'exploiter pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages en classe : Une approche didactique multidimensionnelle. *Évaluer. Journal international de Recherche en Education et Formation*, *2.2*, 63-88.

Legrand, J.-M. (2019, juin). Captation Automatisée et Visualisation de Traces de Programmation dans un Environnement de Programmation Graphique par Blocs. *RJC EIAH 2019*. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02615243

Ministère de l'éducation nationale & Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques. (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques : Rapport au Ministre de l'Éducation nationale* (J.-P. Kahane, Éd.). Centre national de documentation pédagogique : O. Jacob, DL 2002.

Modeste, S. (2012). *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* [Phdthesis, Université de Grenoble].

Orange, C. (2005). Problématisation et conceptualisation en sciences et dans les apprentissages scientifiques. *Les Sciences de l'education - Pour l'Ere nouvelle, Vol. 38*(3), 69-94.

Orange, C. (2012). *Enseigner les sciences ; problèmes, débats et savoirs scientifiques en classe*. de Boeck.

Radford, L. (2006a). *Algebraic thinking and the generalization of patterns : A semiotic perspective. 1.*

Radford, L. (2006b). The Cultural-Epistomological Conditions of the Emergence of Algebraic Symbolism. *In F. Furringhetti, S. Kaijser & C. Tzanakis, Proceedings of the 2004 History and Pedagogy of Mathematics Conference & ESU4, Uppsala, Sweden, Pp. 509-524 (Plenary Lecture).*

Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257-277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Sajaniemi, J. (2005). Roles of Variables and Learning to Program. *Proceedings of the 3rd Panhellenic Conference « Didactics of Informatics ».*

Samurçay, R., & Rouchier, A. (1985). De «faire» à «faire faire» : Planification d'actions dans la situation de programmation. *Enfance*, *38*(2), 241-254.

Serfati, M. (1997). *La constitution de l'écriture symbolique mathématique.* [Phdthesis, Université Paris I].

Serfati, M. (2010). Symbolic revolution, scientific revolution : Mathematical and philosophical aspects. In M. Van Dyck & A. Heeffer (Éds.), *Philosophical Aspects of Symbolic Reasoning in Early Modern Mathematics* (p. 103). College Publications.

ARTICULER TRAVAIL MATHÉMATIQUE ET TRAVAIL ALGORITHMIQUE

Fabienne Venant, Valériane Passaro, Doris Jeannotte, Eva Knoll et Mireille Saboya

Université du Québec à Montréal

Nous présentons une mise en œuvre du cadre théorique des ETM pour analyser les interactions entre travail algorithmique et travail mathématique lors de la réalisation d'une tâche de programmation informatique mettant en jeu des concepts mathématiques.

CONTEXTE

Le gouvernement du Québec envisage de réintroduire la programmation informatique dans les programmes scolaires. Barma (2018) recommande que la programmation informatique soit ajoutée au curriculum québécois comme une nouvelle compétence transversale en lien avec la pensée informatique, prenant ancrage dans plusieurs compétences disciplinaires, en mathématiques, en sciences et technologies, en arts, etc. Ce renouveau d'intérêt pour la programmation a interpellé notre équipe de recherche. Dans la lignée de Modeste (2012), nous pensons qu'en mathématiques, il est fondamental de ne pas s'en tenir à des « questions de programmation, de rédaction et d'exécution d'algorithme » (p.13), mais d'aborder le rôle que les algorithmes peuvent jouer dans le travail mathématique (Venant, 2018). Or nous avons réalisé qu'il nous était difficile, en tant que chercheurs mais également en tant que formateurs, de penser la place de l'algorithme dans l'enseignement des mathématiques et dans la formation des enseignants de mathématiques, tout simplement parce que c'est un objet que nous connaissons mal. L'objectif du travail présenté ici est d'amener des formateurs-chercheurs à mieux appréhender l'algorithme en tant qu'objet didactique. Partant du constat que nos conceptions personnelles de l'algorithme étaient relativement floues et non convergentes, nous avons décidé d'observer notre propre travail lors d'une tâche de programmation. Nous cherchons, plus précisément à répondre à la question de recherche suivante : « quel rôle peut jouer la programmation informatique dans la mobilisation de connaissances et de raisonnements mathématiques? » Répondre à cette question passe par une meilleure compréhension de l'algorithme en tant qu'objet de savoir et de recherche, et par une exploration des liens fondamentaux qu'entretiennent travail algorithmique et travail mathématique.

UN ESPACE DE TRAVAIL ALGORITHMIQUE

Nous convoquons pour cela le modèle ETM [espaces de travail mathématiques (Kuzniak, 2011; Kuzniak et Richard, 2014)]. Initialement prévu pour rendre compte du travail mathématique selon trois genèses, sémiotique, instrumentale et discursive, ce cadre a été étendu pour prendre en compte les liens qui s'établissent entre différents domaines lors de la résolution d'une tâche mathématique

(Delgadillo et Vivier, 2014; Kuzniak, 2014). Lagrange et Laval (2019) ont étendu la notion de domaine mathématique à l’algorithmique. Ils ont montré l’intérêt de considérer les connections entre un espace de travail algorithmique (ETA) et un espace de travail de mathématique (ETM) pour créer des activités favorisant la coordination des genèses algorithmiques et mathématiques dans les trois dimensions. Nous reprenons leur idée pour analyser l’articulation des travaux algorithmique et mathématique dans des tâches de programmation informatique mettant en jeu des concepts mathématiques. Notre analyse prend en compte les plans verticaux défini par Kuzniak et Richard (2014). Ces plans verticaux peuvent être reliés aux différentes phases du travail mis en œuvre dans l'exécution d'une tâche.

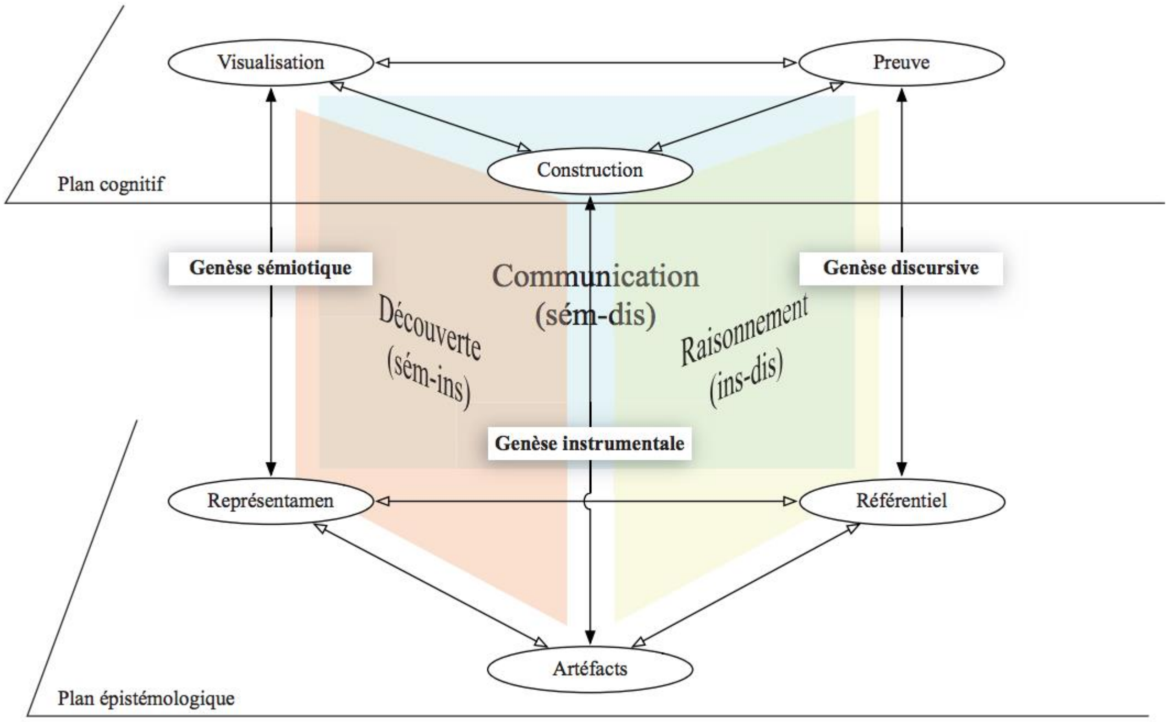


Figure 1 : Plans verticaux dans un espace de travail (Kuzniak et Richard, 2014)

MÉTHODOLOGIE

Notre projet s’inscrit dans le cadre conceptuel des formations expérientielles du pragmatisme américain (Dewey, 1938). Pour Dewey, l’expérience fonde et favorise l’apprentissage d’un individu et ce, tout au long de la vie humaine. Nous cherchons donc à appréhender nos expériences respectives de l’algorithme et les apprentissages algorithmiques ou mathématiques qui en découlent (ou pourraient en découler). L’expérience vécue consiste à résoudre une tâche de programmation dans un contexte mathématique. Les données recueillies sont de deux types : les verbalisations du travail réalisé et des émotions ressenties, rédigées après l’expérience, d’une part, les algorithmes et les programmes produits pendant l’activité, d’autre part. Une analyse inspirée de la démarche phénoménologique à orientation thématique permet d’extraire de ces données les composantes principales des expériences en procédant à trois niveaux de lecture : générale, sélective puis détaillée (Van Manen, 2014, p. 319-322). Ces trois niveaux de lecture permettent d'identifier des faits saillants dans les expériences vécues. À travers ces lectures, nous cherchons à mettre au jour le travail algorithmique et le travail mathématique. La lecture détaillée s'attarde davantage sur les traces des genèses mises en place. Nous convoquons à chaque étape le cadre des ETM afin d'accéder à une « description décontextualisée et dépersonnalisée des opérations de la pensée » (Van der Maren, 1996, p. 409).

Six formateurs-chercheurs en didactique des mathématiques ont participé à l'expérience. Chacun des participants a suivi au moins un cours de programmation lors de sa formation universitaire, il y a plus de 15 ans. Leurs relations à l'algorithmique sont cependant variées : quatre des participants n'ont pas utilisé la programmation depuis leur formation initiale, une participante l'a utilisée dans un cadre professionnel antérieur, il y a également plus de 15 ans, mais ne l'a pas utilisé dans sa carrière universitaire, et la dernière est la formatrice en charge du cours d'initiation à la programmation informatique dans la formation initiale des enseignants de mathématiques au secondaire à l'UQAM. Cette dernière propose et anime les activités. L'expérimentation se fait en salle informatique, trois personnes travaillent individuellement, communiquant régulièrement entre elles, les deux autres travaillent en équipe. À l'issue du travail de programmation, les participants, y compris l'animatrice, rédigent dans un premier temps leur récit respectif d'expérience rendant compte de la démarche suivie incluant les blocages, les questionnements, etc. Dans un deuxième temps, chacun revisite son récit de manière à dégager et distinguer les éléments des espaces de travail mathématique et algorithmique.

En tout, l'équipe a réalisé de cette manière cinq tâches. Pour cette contribution nous avons retenu l'une de ces tâches s'inspirant d'un exercice classique en algorithmique, enrichi progressivement par des enjeux mathématiques. La tâche se déroule en deux temps :

1. L'animatrice présente la plateforme Scratch à ses collègues. Elle leur demande ensuite d'écrire un programme qui teste et affiche si deux nombres entiers sont multiples l'un de l'autre.
2. Elle demande de modifier le programme avec la contrainte de ne pas utiliser les opérateurs *partie entière*, *modulo* ou *arrondi*.

ESPACES DE TRAVAIL DE RÉFÉRENCE

La verbalisation de l'animatrice du groupe nous donne accès à la façon dont elle a pensé la tâche et anticipé le travail des participants. La première question joue, selon elle, le rôle de déclencheur pour amener à penser la divisibilité en termes de reste de la division entière. Pour elle, le travail s'initie dans le plan SEM-INS de l'ETA, par l'activation de l'instruction conditionnelle *si... alors...sinon* et la recherche du bloc pertinent dans la liste des instructions disponibles sur Scratch. Cette action met en jeu également une fibration externe avec l'ETM, puisqu'elle repose sur le sens donné à la notion de divisibilité. C'est ce sens, issue d'une genèse sémiotique dans l'ETM, qui permet de sélectionner un concept mathématique pertinent pour caractériser la divisibilité, par exemple, le reste de la division entière. Un retour vers l'ETA permet alors de sélectionner l'opérateur informatique correspondant, par exemple *modulo*. La deuxième question a pour but de provoquer un travail plus poussé dans l'ETM. Pour l'animatrice, l'objectif de cette tâche est double. Du point de vue mathématique, il s'agit de revisiter le sens de la division entière en pensant la construction dynamique du reste ou du quotient. Du point de vue algorithmique, il s'agit de traduire cette construction en termes itératifs et de travailler le concept de boucle avec test de fin. Puisque les opérateurs informatiques sont interdits, l'apprenant doit les expliciter, ce qui le ramène dans le plan SEM-DIS de l'ETM. L'enjeu sémiotique est de retrouver le sens du concept *reste* (ou *quotient*) dans la division entière, afin de déterminer une procédure pour le calculer par opérations répétées (soustractions, additions ou multiplications selon la démarche empruntée). L'enjeu majeur du travail se joue alors dans une fibration externe ramenant vers le plan DIS-INS de l'ETA, afin de rendre la procédure conçue dans l'ETM effective dans Scratch. Traduire l'algorithme mathématique des opérations successives en termes algorithmiques suppose également une circulation interne entre les différentes genèses : concevoir l'itération sous forme de boucle (sémiotique), sélectionner le bon type de test d'arrêt (instrumentale), assembler les éléments algorithmiques en un discours exécutable (discursive) (voir figures 2 et 3).

Figure 2. Programme Scratch anticipé par l'animatrice pour la soustraction répétée

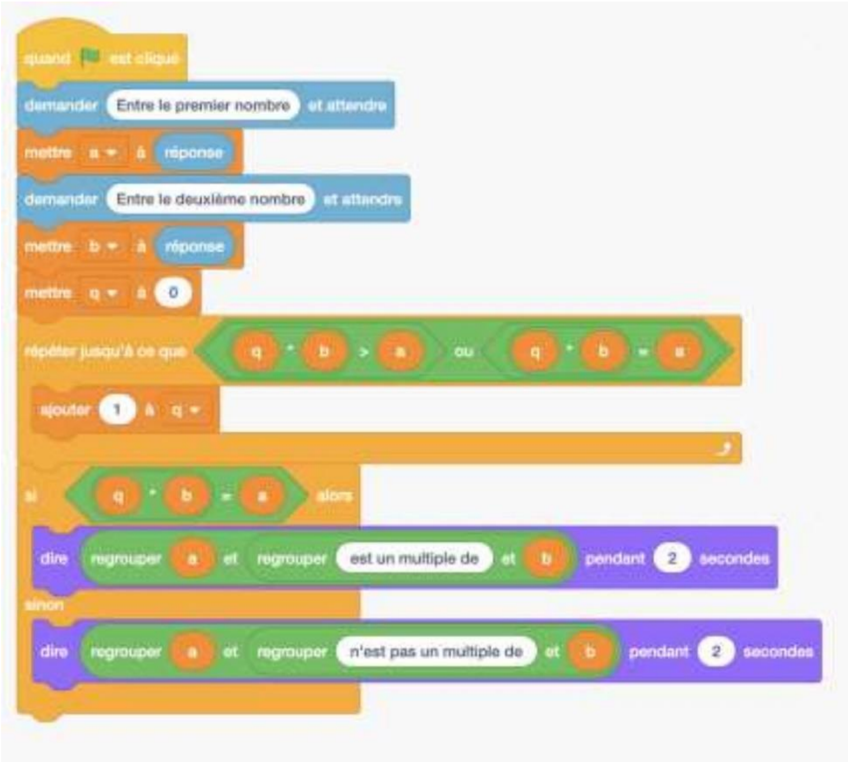


Figure 3. Programme Scratch anticipé par l'animatrice pour la multiplication répétée.

L'observation de ses collègues durant l'expérience a permis à l'animatrice de confronter son anticipation de la tâche avec le travail effectivement réalisé par les participants. Elle réalise à cette occasion la difficulté de mettre en œuvre ce que Briant et Bronner (2015) appelle la double transposition. Penser à une procédure mathématique effective ne suffit pas, il faut encore pouvoir la transposer en termes algorithmiques. Elle note à ce sujet « Penser à la soustraction répétée est une chose, la traduire en une boucle avec compteur et réaliser que le compteur représente le quotient en est une autre. ». Nous constatons donc que l'ETM de référence qu'elle a mis en place a sous-estimé la difficulté de la mise en place des fibrations externes entre les ETM et ETA personnels.

ESPACES DE TRAVAIL PERSONNELS

La première question a été traitée de façon collective, avec projection du programme Scratch sur un écran en avant. C'est la notion de *reste*, et l'opérateur *modulo* qui ont été choisi pour écrire un algorithme semblable à celui de la figure 2. Nous présentons ici le travail de deux des participantes lors de leur résolution individuelle de la question 2. La participante 1 se trouve dans l'ETA, suite à la résolution de la question 1. Elle commence par analyser les conséquences de la nouvelle contrainte imposée. L'impossibilité d'avoir recours à l'opérateur *modulo*, qu'elle a utilisé précédemment, la ramène dans le plan SEM-DIS de l'ETM : « Je cherche à représenter autrement (algébriquement) le fait que deux nombres sont multiples de l'autre. J'utilise ce que je connais du fait d'*être multiple* ». Elle convoque la représentation suivante : a est multiple de b si et seulement il existe k tel que $a=kb$. Une fibration externe vers l'ETA se produit alors, car elle cherche comment rendre cette représentation opératoire d'un point de vue algorithmique, initiant ainsi un travail dans le plan SEM-INS. C'est le fait de devoir écrire un programme qui l'amène à penser en termes de boucle. Elle écrit explicitement « On programme donc l'outil peut répéter rapidement la même opération un grand nombre de fois. » Elle cherche donc une opération à itérer. Elle revient alors dans l'ETM, pour accéder à la conception de la division comme soustraction répétée. Sa réflexion mathématique porte alternativement sur deux objets, le quotient et le reste. La représentation algébrique qu'elle utilise l'amène d'abord à raisonner en termes de quotient. Elle cherche d'abord k tel que $a=kb$, ce qui active, depuis l'ETM, la genèse instrumentale dans l'ETA : « Le nombre de fois où b est soustrait est gardé en mémoire à l'aide d'un compteur. ». Elle revient ensuite au point de départ de son travail. La nécessité de palier l'interdiction de l'opérateur *modulo* la ramène vers le reste de la division. Ayant posé a-b=c, elle écrit « si c=0, c'est que a est un multiple de b et le compteur nous donne alors le quotient de a par b. ». A ce moment, elle bascule complétement dans le plan SEM-DIS de l'ETA. Elle écrit : « Je me lance dans Scratch. J'associe les nombres à des variables (constantes?). » Cette hésitation sur le terme à employer, variable ou constante, est issue de la réflexion a posteriori sur la démarche. La participante réalise en effet que pour traduire son raisonnement en programme informatique elle a eu besoin de nommer chaque nombre qui servira aux calculs (ex. *grand – petit = différence*). Or, certains de ces nombres changent au fur et à mesure que la boucle se répètent (*grand* et *différence*) et d'autres non (*petit*). Cette démarche fait en sorte que la réaffectation de la variable est évitée ce qui nuit au travail algorithmique. En effet, un enjeu majeur en algorithmique est la conception du traitement informatique comme « une succession d'affectations de variable qui modifient l'état du dispositif » (Lagrange et Rogalski, 2017). Le recours à des noms de variables très explicites *grand*, *petit*, *différence* gêne le processus de généralisation algorithmique. Le basculement dans l'ETA semble faire obstacle à la conception de la variable comme un objet générique et calculable et bloque les genèses instrumentales et discursives de l'affectation. Certaines variables sont ainsi dédoublées plutôt que réaffectées (*Premier nombre*, *Deuxième Nombre*, *Grand* et *Petit*). Le recours à la variable *différence* démontre une difficulté à concevoir la réaffectation récursive d'une variable (grand ← grand-petit). Il en résulte un algorithme syntaxiquement correct mais peu économique :

Figure 4. Programme Scratch produit par la participante 1

La participante 2 entre, elle aussi, dans la question 2 par l'ETA. Le fait de ne pas pouvoir accéder au reste par l'opérateur modulo lui fait chercher une procédure pour accéder au quotient, ce qui la ramène brièvement dans l'ETM pour convoquer la représentation algébrique de la division entière : $a=mq+r$ avec $r<b$. L'algorithme qui lui vient en tête est alors le suivant :

1 calculer $n=a : b$

2 arrondir le résultat à l'entier inférieur et l'affecter à la variable m

3 Si $m=n$ alors b divise a

Elle se heurte alors à la contrainte de ne pas utiliser non plus l'opérateur *arrondi*. Elle bascule alors dans l'ETM pour convoquer le sens du quotient : « m représente le nombre de fois qu'il faut multiplier a pour obtenir b sans le dépasser, r est alors la différence entre mb et a ». C'est cette traduction en langage naturel de l'écriture algébrique qui la met sur la voie algorithmique : « *nombre de fois* me fait penser à une boucle. ». À ce stade de sa réflexion, elle aurait pu s'orienter vers une conception de la division comme une multiplication répétée. En fait, comme elle se questionne à haute voix, la participante 1 l'entend et intervient « Moi, j'ai utilisé la soustraction répétée. » À partir de là, elle travaille de concert et leurs démarches sont très semblables.

CONCLUSION

Le cadre des ETM s'avère très pertinent pour mettre au jour les concepts algorithmiques et mathématiques, analyser les circulations au sein de chaque espace de travail et rendre compte des interactions permanentes entre les deux domaines.

Nos premières analyses des récits de participants expérimentés en mathématiques montrent que les fibrations entre les espaces de travail sont provoquées par les contraintes de la tâche. La tâche choisie, pensée pour susciter le travail algorithmique, amène effectivement les participants à chercher comment traduire leur démarche mathématique en programme informatique et par conséquent à côtoyer l'algorithmique. Toutefois, cette traduction ne se fait pas sans heurt puisque la culture algorithmique ne leur est pas familière. Il en résulte des programmes adéquats mais peu économique.

Les analyses des récits d'expérience montrent par ailleurs le rôle important que joue la plate-forme de programmation comme matérialisation de l'espace de travail algorithmique. Les contraintes et spécificités de la plate-forme orientent les choix posés lors de la transposition du raisonnement mathématique au raisonnement algorithmique. La possibilité de tester l'algorithme au fur et à mesure de son élaboration favorise les circulations dans le plan INS-DIS. Les essais et erreurs permettent en général d'ajuster l'initialisation, et l'incrémentation des variables, ou la gestion des tests. Toutefois, les participants observés ont peu exploité ce potentiel puisque leurs structures de contrôle étaient ancrées dans l'ETM.

Ainsi, les travaux mathématiques et algorithmiques sont difficiles à articuler. Les fibrations externes sont nécessaires pour réaliser la tâche mais peuvent ne pas se mettre en place spontanément comme l'illustre les propos de la participante 3 : « Dans le cours de didactique, on voit avec les étudiants les différents sens des opérations dont le sens soustractions répétée de la division, je n'avais pas fait le lien! ». La nécessité du passage dans l'ETA force une réinterprétation des objets mathématiques. Le langage de programmation et les pratiques algorithmiques amène un nouvel usage de ces objets. La généralisation algébrique et celle algorithmique ne prennent pas la même forme puisque les critères d'efficacité et d'économie diffèrent. Ces conditions amènent l'animatrice à constater que ses intentions didactiques ne se sont pas réalisées. Il est difficile d'anticiper le travail qui va réellement être mis en place et la façon dont algorithmique et mathématique vont s'articuler durant l'activité. C'est un point soulevé aussi par la participante 4 : « On voit ici une divergence de ce qu'elle (l'animatrice) et moi pensons qu'est la tâche. » Démêler les enjeux didactiques propres au travail algorithmique s'avère crucial au moment où la tendance est à une vision purement instrumentale de la programmation informatique et de l'algorithmique qui la sous-tend. C'est un enjeu à prendre en compte dès la formation initiale des enseignants (Venant, à paraître).

REFERENCES

Barma, S. (2018). *Rapport final : Réaliser une étude de cas multiple qui vise à affiner les connaissances sur l'usage pédagogique ou didactique de la programmation dans les écoles du Québec* (Rapport no 118982). Québec, Québec : Université Laval.

Briant, N., & Bronner, A. (2015). Étude d'une transposition didactique de l'algorithmique au lycée : une pensée algorithmique comme un versant de la pensée mathématique. Dans L. Theis (resp.), *Pluralités culturelles et universalités des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Colloque EMF2015–GT3* (pp. 231-246). Alger, Algérie.

Combier, G., Guillaume, J.-C., & Pressiat, A. (1996). *Les débuts de l'algèbre au collège: au pied de la lettre!* Institut National de Recherche Pédagogique.

Delgadillo, E. M., & Vivier, L. (2014). Les changements de domaine dans le cadre des espaces de travail mathématique. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 19*, 73-101.

Dewey, J. (1938). *Experiential learning*. New Jersey: Pentice Hall.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16*, 9-24.

Kuzniak, A. (2014). Travail mathématique et domaines mathématiques. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), 17*(4-2), 385- 399.

Kuzniak, A., & Richard, P. R. (2014). Espaces de travail mathématique. Point de vues et perspectives. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), 17*(4-I), 5-40.

Lagrange, J.-B., & Laval, D. (2019). Connected Working Spaces: the case of computer programming in mathematics education. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME.

Lagrange, J. B., & Rogalski, J. (2017). Savoirs, concepts et situations dans les premiers apprentissages en programmation et en algorithmique. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, 22*, 119-158.

Modeste, S. (2012). *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* Université de Grenoble.

Van der Maren, J.-M. (1996). *Méthodes de recherche pour l'éducation*. Presses de l'Université de Montréal et de Boeck.

Van Manen, M. (2016). *Phenomenology of practice: Meaning-giving methods in phenomenological research and writing*. Routledge.

Venant, F. (2018). Programmer les mathématiques : la pensé informatique à l'école primaire. *Bulletin AMQ*, *58*(3), 57-70.

Venant, F. (à paraitre). La programmation informatique dans la formation initiale des enseignants de mathématiques au Québec. Prendre en compte les enjeux algorithmiques. *Colloque « Rendez-vous en Didactique »*. Paris.

GENÈSE DISCURSIVE ARTIFICIELLE : L’IA AU SERVICE DE LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Ludovic Font[1], Nicolas Leduc[1], Philippe R. Richard[2]

[1]École Polytechnique de Montréal, [2]Université de Montréal

Pour rendre l’expérience d’utilisation d’un logiciel tuteur la plus interactive possible, il est nécessaire que ce dernier « comprenne » ce que fait l’élève, et ce malgré la complexité du raisonnement humain. Dans ce but, nous avons développé un outil capable de trouver toutes les façons de résoudre un problème de géométrie, tout en respectant les réalités de la didactique des mathématiques. Cet outil procède ainsi, en quelque sorte, à une genèse discursive artificielle, qui a pour but de permettre à la machine de modéliser, d’analyser et d’assister la genèse discursive de l’élève en situation de résolution. Cet article a pour but de présenter ces travaux, fortement informatiques, à travers l’œil du didacticien.

INTRODUCTION

Le logiciel QED-Tutrix est un tuteur intelligent qui offre un cadre aidant les élèves de secondaire à résoudre des problèmes de géométrie. Une de ses caractéristiques fondamentales est l'aspect tuteur, qui accompagne l'élève dans sa résolution du problème, et l'aide à avancer en cas de blocage par le biais de messages, personnalisés selon son avancement dans la preuve. Une autre de ses caractéristiques est de rester proche de la façon dont un élève résoudrait le problème avec un papier et un crayon, et, par conséquent, lui permet d'explorer la construction de sa preuve dans l'ordre de son choix. Ces deux caractéristiques permettent ainsi au logiciel d’accompagner finement l’élève lors de sa genèse discursive.

Cette capacité précieuse demande cependant un important travail en amont. En effet, le logiciel doit être capable de « comprendre » le travail de l’étudiant, et d’insérer son progrès dans une modélisation informatique de la genèse discursive afin de pouvoir l’y accompagner. Celle-ci étant évidemment très différente d’un élève à l’autre, il est ainsi nécessaire de disposer d’une connaissance préalable de tous les chemins discursifs possibles pour la résolution du problème, ou, en d’autres termes, de l’ensemble de ses preuves possibles (et acceptables dans un contexte d’enseignement au secondaire).

Ce travail d’identification de toutes les preuves possibles d’un problème est loin d’être anodin. L’approche la plus évidente est de faire effectuer ce travail à un professeur ou expert en didactique des mathématiques, mais celle-ci n’est pas extensible, et demande de dédier de précieuses heures à un travail méticuleux, répétitif, et fastidieux, où chaque erreur signifie une frustration potentielle des élèves utilisant le logiciel. Par conséquent, nous avons mis en place une approche informatique, exploitant la rapidité et le déterminisme de la machine pour des tâches simples et bien posées.

Cette seconde approche crée cependant de nouveaux enjeux. En effet, là où un professeur dispose d'une connaissance intrinsèque voire intuitive des chemins de pensée que peut prendre un élève, ainsi qu'une expérience de premier plan sur la réalité de l'enseignement en classe, la machine ne fait que suivre les instructions que l'on lui donne. Il est donc crucial de créer un cadre rigoureux qui permet au logiciel de simuler toute l'étendue de la genèse discursive possible dans une classe de secondaire. Cet article a pour but de présenter les difficultés émergeant de cette intersection entre les techniques d'intelligence artificielle utilisées et la théorie des Espaces de Travail Mathématique, en tentant de répondre à la question de recherche : est-il possible de simuler dans une machine la genèse discursive d'un élève, et quelles sont les limites d'une telle approche ?

OBJECTIFS

Dans cet article, nous présentons le cadre dans lequel s'est inscrit notre travail de développement d'un générateur de preuves automatisé. Ce cadre inclut notamment les enjeux didactiques et les contraintes informatiques qu'il a fallu concilier. Pour rappel, l'objectif principal de ce projet fut la création d'un outil capable de générer automatiquement l'ensemble des preuves possibles pour un problème de géométrie donné, dans un référentiel donné (typiquement, tout ou un sous-ensemble des propriétés et définitions accessibles au secondaire).

Enjeux didactiques

Comme expliqué dans l'introduction, le but de ce travail est avant tout d'alimenter le logiciel tuteur QED-Tutrix, impliquant donc de respecter sa fondation principale, celle d'accompagner au mieux les élèves de secondaire dans leur apprentissage de la géométrie. Cet objectif a ainsi exigé une collaboration rapprochée entre experts en informatique et en didactique des mathématiques.

La première de ces contraintes est, naturellement, la production de preuves « humaines », c'est-à-dire aisément traduisibles en langue naturelle. Ceci interdit par exemple l'utilisation de méthodes purement calculatoires, tels que la traduction du problème en géométrie complexe et la résolution du système d'équations résultant, comme peut le faire Geogebra, par exemple.

La seconde est que le référentiel mathématique dans lequel le système opère doit être configurable et modulaire, afin de pouvoir adapter les éléments sémiotiques accessible dans le logiciel pour se calquer sur la situation du moment en classe.

Enfin, il doit être possible d'inclure dans le système la notion de raccourci inférentiel, c'est-à-dire des inférences qui ne sont pas strictement rigoureuses mais qui seraient tout de même acceptées par le professeur. Par exemple, toute justification aboutissant sur le parallélisme de deux droites exige que ces droites soient distinctes, mais cette vérification est rarement exigée au niveau secondaire. Le système tuteur doit donc être « conscient » de ces possibilités, et permettre au professeur d'adapter le logiciel à ses habitudes d'enseignement. Cette contrainte se place surtout au niveau du tuteur QED-Tutrix, mais se ressent également au niveau du générateur de preuves, en créant un besoin de modularité dans les inférences.

Enjeux informatiques

Ces travaux de génération automatique de preuve se rapprochent fortement du domaine de recherche en démonstration automatique de théorèmes (ATP – Automated Theorem Proving). Malheureusement, en raison des enjeux didactiques illustrées précédemment, il est difficile d'utiliser les outils existants. En revanche, l'exploration des solutions proposées dans ce domaine fut particulièrement enrichissante et nous a aidés à mettre en place notre système sur une fondation solide. Quelques exemples de travaux pertinents, mais non utilisables directement, sont ceux de (Botana et al., 2015), (Boutry et al., 2016) et (Braun & Narboux, 2017).

Un enjeu informatique important, et illustré par les difficultés rencontrées par les experts en ATP, est l'explosion combinatoire. En effet, la génération de l'ensemble des preuves possibles d'un problème demande la construction d'un graphe de connaissances pouvant être imposant, et chaque élément de ce graphe peut potentiellement servir de base à une nouvelle inférence. Bien que les ordinateurs modernes soient incroyablement rapides, ils sont malgré tout démunis face à une croissance exponentielle du nombre de combinaisons à vérifier.

Par ailleurs, comme notre objectif n'est pas l'obtention d'une simple démonstration, mais de l'obtention de l'<u>ensemble</u> des preuves possibles, il n'est pas possible de s'arrêter dès que l'on a trouvé une preuve valide : il faut s'assurer de les avoir toutes trouvées. Pour cela, il n'y a pas d'autre choix que de continuer à générer de nouvelles inférences mathématiques, et ce jusqu'à ce que rien de nouveau ne puisse être trouvé.

Ceci nous amène au troisième enjeu, celui de la construction de nouveaux éléments géométriques. En effet, une preuve typique d'un problème de géométrie de secondaire demande souvent la création de nouveaux éléments, tels que des diagonales, hauteurs, etc. Si l'on autorise le générateur de preuves à créer de tels éléments, on se heurte à un problème insurmontable : quand doit-il s'arrêter ? En effet, comme nous cherchons l'ensemble des preuves possibles, un programme informatique n'a aucune possibilité de savoir à l'avance si un élément géométrique va permettre un nouveau cheminement menant à la conclusion. Un professeur ou un élève dispose de son intuition et de ses connaissances d'autres problèmes pour identifier si un élément géométrique a le potentiel d'être utile pour une preuve, mais ce n'est pas le cas d'un générateur automatique de preuves. Nous avons donc choisi de ne pas attaquer ce problème épineux, mais plutôt d'exiger que l'encodage du problème initial contienne tous les éléments géométriques pouvant servir à la résolution, et ne travailler que sur cet ensemble fermé d'éléments. Ceci, combiné avec l'utilisation d'un référentiel relativement restreint (ne contenant que la matière utilisée au secondaire), assure, d'une part, que le générateur va finir par épuiser toutes les possibilités, et, d'autre part, que ce nombre de possibilités reste raisonnable.

FONCTIONNEMENT DU GENERATEUR

Dans ce chapitre, nous donnons un bref aperçu du fonctionnement haut-niveau du générateur, de l'étape d'encodage du problème jusqu'à l'utilisation de l'ensemble de preuves généré par QED-Tutrix.

Création du référentiel

Un travail crucial pour l'implémentation du générateur est la création du référentiel mathématique dans lequel celui-ci travaille. En d'autres termes, c'est l'ensemble des propriétés et définitions dont il dispose pour résoudre les problèmes qu'on lui soumet. Ces propriétés et définitions, que l'on regroupe sous le terme de « justifications », ont été minutieusement assemblées à partir d'une collection de manuels scolaires de secondaire (Cyr, 2021). Ces justifications ont ensuite été implémentées sous forme de règles informatiques utilisant la programmation logique (Font et al., 2018). Au total, nous avons créé 183 règles implémentant 113 justifications. Ces nombres diffèrent car il est souvent nécessaire d'avoir plusieurs règles pour une seule justification afin de traiter différents cas d'utilisation. Ce travail préliminaire sert de fondation à la suite du processus.

Encodage du problème

Chaque problème pour lequel on souhaite générer l'ensemble des preuves possibles doit tout d'abord être encodé en Prolog, le langage utilisé par le générateur de preuves. Le générateur de preuves travaillant dans un monde informatique où le raisonnement autonome n'est pas de mise, il est nécessaire d'expliciter rigoureusement chaque élément pouvant être utile à la preuve. Par exemple, pour un humain, il est trivial de déduire de l'existence d'un rectangle celle des quatre points constituant ses sommets, ainsi que des quatre segments composant ses côtés. Pour une machine, ce processus doit être explicite, et il serait dans ce cas nécessaire de cimenter l'existence de ces quatre points, en les nommant, ainsi que des quatre segments, en plus de celle du rectangle.

En d'autres termes, là où, pour un humain, le court énoncé « Démontrer qu'un quadrilatère ayant trois angles droits est un rectangle » est suffisant, il est nécessaire d'en spécifier plus précisément les éléments pour pouvoir utiliser le générateur de preuves. L'encodage de cet énoncé demande ainsi de nommer explicitement tous les éléments, ainsi que leurs relations. On se retrouve ainsi avec l'ensemble d'hypothèses suivantes :

- Il existe quatre points A, B, C et D ;
- Il existe quatre droites (AB), (BC), (CD) et (AD) ;
- Il existe un quadrilatère ABCD ;
- Les angles $\widehat{DAB}$, $\widehat{BCD}$ et $\widehat{CDA}$ sont droits.

Notons également qu'il a été nécessaire d'expliciter lesquels des quatre angles du quadrilatère sont droits. De plus, l'orientation du quadrilatère a été fixée par l'orientation des angles.

Ce processus est nécessaire pour donner une fondation solide au générateur, mais également pour le bon fonctionnement du logiciel tuteur. En effet, pour que l'élève puisse rentrer un résultat mathématique, par exemple « l'angle $\widehat{ABC}$ est droit », il est nécessaire de pouvoir nommer l'élément en question. Plutôt que d'autoriser l'élève à nommer les éléments mathématiques selon son bon vouloir, nous avons choisi d'imposer tous leurs noms directement dans le tuteur. Il serait bien sûr possible d'explorer la possibilité de personnaliser les noms selon le choix de l'élève, mais ce n'est pas un travail que nous avons entrepris à ce stade. Par ailleurs, le tuteur dispose d'une interface GeoGebra permettant à l'élève de manipuler la figure du problème, ce qui impose une convention de nommage commune entre la figure du problème et son implémentation informatique.

Par conséquent, la nécessité d'avoir un nom unique et inchangé pour chaque élément mathématique se manifeste dès l'encodage du problème, le point de transfert entre la connaissance humaine et le raisonnement de la machine.

L'encodage en Prolog du problème mentionné précédemment est fourni dans la Figure 4.

```
hypothese(point(a)).
hypothese(point(b)).
hypothese(point(c)).
hypothese(point(d)).
hypothese(line([a,b])).
hypothese(line([b,c])).
hypothese(line([c,d])).
hypothese(line([d,a])).
hypothese(isAQuad(quad(a,b,c,d))).
hypothese(angleValue(angle([d],a,[b]),value(90))).
hypothese(angleValue(angle([b],c,[d]),value(90))).
hypothese(angleValue(angle([c],d,[a]),value(90))).
conclusion(rectangle(quad(a,b,c,d))).
usefulAngle([a],b,[c]).
```

Figure 4 : l'encodage en Prolog du problème du rectangle

Sans rentrer dans les détails, la dernière ligne, non mentionnée jusqu'à maintenant, est une façon d'autoriser le générateur de preuves à inférer des résultats sur l'angle $\widehat{ABC}$. Ceci évite la multiplication des calculs d'angles inutiles dans des situations où plusieurs droites s'intersectent en un seul point, comme celle représentée dans la Figure 5. Ici, il existe un nombre d'angles important (56 si l'on considère les angles orientés), et la prise en compte de tous ces angles ralentit considérablement le mécanisme de génération de preuves. Pour en avoir une idée, il suffit de considérer le nombre d'inférences de type « La mesure de l'angle formé par deux angles adjacents est égale à la somme de la mesure de ces angles » dans cette situation. Pour éviter cette explosion combinatoire, nous avons choisi d'imposer la présence explicite des angles utiles à la résolution du problème dans son encodage, ici $\widehat{ABC}$. Le générateur de preuves ne peut ensuite inférer de nouveaux résultats que sur les angles spécifiés.

Enfin, notons que la conclusion attendue est également encodée. Cette ligne n'est pas nécessaire à l'exécution du générateur de preuves à proprement parler, mais est utile par la suite dans le processus de marquage des inférences non pertinentes, dont nous parlons plus loin.

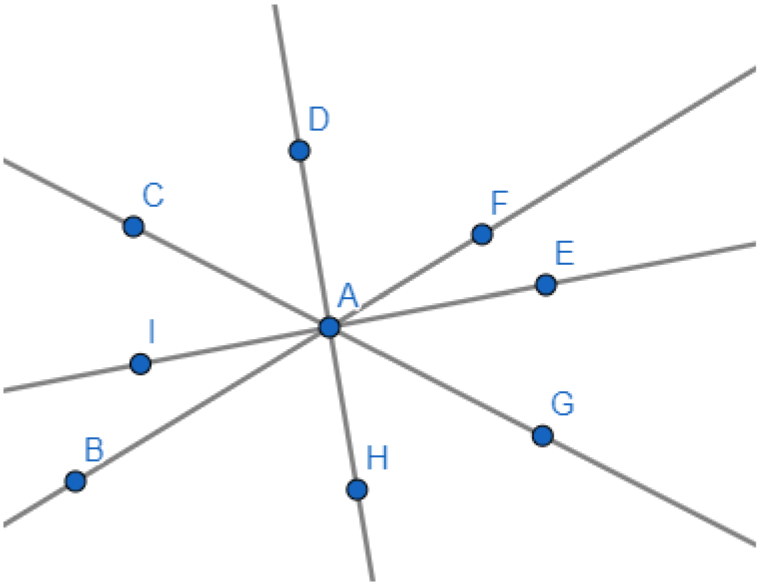


Figure 5 : une figure contenant de nombreux angles

Processus d'inférence itératif

Le processus itératif utilisé par le générateur de preuves a pour but, de façon simplifiée, de « balayer » les justifications du référentiel et les résultats connus afin d'inférer de nouveaux résultats. Au départ, les résultats connus sont l'ensemble des hypothèses du problème, telles que celles de la Figure 4, par exemple. Ce processus se poursuit jusqu'à l'épuisement de nouveaux résultats. Comme l'ensemble des justifications et l'ensemble des éléments géométriques sont finis (pour rappel, on ne s'autorise pas à en créer de nouveaux), nous avons l'assurance que l'exécution va atteindre un point d'arrêt.

Un certain nombre de précautions ont dû être prises pour assurer le bon fonctionnement de ce processus, par exemple pour éviter les boucles infinies (le résultat A permet d'obtenir B par la justification I, mais la réciproque de I permet d'obtenir A à partir de B). Ces détails techniques n'ont cependant que peu d'intérêt dans le cadre de cet article.

Pour résumer, ce processus infère itérativement de nouveaux résultats à partir des résultats connus et des justifications du référentiel. Bien que très systématique et mécanique, on peut néanmoins le voir comme une genèse discursive artificielle, utilisant les éléments sémiotiques mis à la disposition du logiciel (énoncé du problème et référentiel) pour obtenir finalement, non seulement une démonstration du problème, mais <u>toutes</u> les démonstrations du problème.

Marquage des inférences non pertinentes

Nous avons jusqu'à présent mentionné que notre générateur construit l'ensemble des preuves possibles du problème. Dans la partie précédente, nous avons également expliqué que le processus itératif se poursuit jusqu'à ce qu'aucun nouveau résultat ne puisse être trouvé. Une conséquence de cela est que beaucoup des résultats produits peuvent ne pas être utiles à la résolution du problème mais être tout de même valides. Il est crucial d'inclure cette information et de la transmettre au logiciel tuteur, car nous voulons absolument distinguer les réponses « ce résultat est faux » et « ce résultat est valide, mais non pertinent pour ce problème » lorsqu'un élève tente de rentrer un résultat.

Pour cela, l'étape de marquage des inférences non pertinentes est relativement simple. Il s'agit simplement d'explorer l'ensemble des inférences obtenues en partant de la conclusion, et en marquant tout résultat intermédiaire exploré comme « pertinent ». Une fois que l'on est rendu aux hypothèses, nous savons que tout résultat non marqué comme « pertinent » est valide, car il a été généré, mais n'est utile à aucune preuve.

Nous parlions plus tôt de genèse discursive artificielle. Ces inférences non pertinentes ajoutent un élément intéressant, car elles permettent de modéliser toute la partie du processus de genèse discursive n'aboutissant pas à un élément présent dans la preuve finale. Par exemple, lorsqu'un élève utilise un théorème pour obtenir un résultat, mais se rend compte que ce résultat n'est pas utile pour sa preuve, ou explore une autre voie plus prometteuse et le laisse de côté.

Génération du graphe HPDIC

La dernière étape n'a que peu d'intérêt dans le cadre de cet article. Il s'agit simplement de traduire cet ensemble d'inférences contenant les résolutions possibles du problème, ainsi que les inférences non pertinentes, en un format utilisable par QED-Tutrix. Ce format est nommé le graphe HPDIC (Hypothèses, Propriétés, Définitions, résultats Intermédiaires, Conclusion) et est présenté plus en détails dans d'autres articles (Font et al., 2020). Une fois ce graphe HPDIC construit, il ne reste qu'à l'adjoindre avec les autres éléments nécessaires (un énoncé textuel et un fichier contenant la figure du problème au format GeoGebra), et le problème est maintenant prêt à être utilisé dans QED-Tutrix.

En résumé, le processus part d'un encodage informatique du problème et du référentiel mathématique, et, à partir de ces éléments, trouve toutes les façons de résoudre le problème dans le référentiel donné. Nous avons ainsi un outil capable de procéder à une genèse discursive artificielle permettant de modéliser approximativement la genèse discursive de l'élève.

RACCOURCIS INFERENTIELS

Parmi les enjeux didactiques ayant dirigé le développement du générateur de preuves, les raccourcis inférentiels occupent une place importante. Un raccourci inférentiel représente une simplification faite par l'élève lors de sa démonstration, qui n'est pas rigoureusement valide, mais est tout de même acceptée par le professeur. Les trois types de raccourcis que nous avons identifié sont :

1. Omission d'un ou plusieurs antécédents lors de l'utilisation d'une justification ;
2. Agrégation de plusieurs justifications en une seule ;
3. Omission de la justification.

Le premier cas est assez courant, car un grand nombre de justifications ont des conditions de non-dégénérescence qui ne sont que rarement explicites dans une démonstration de niveau secondaire. Par exemple, toute justification permettant d'obtenir le parallélisme de deux droites exige que ces droites soient distinctes.

Le second cas se produit typiquement lorsqu'un résultat a déjà été prouvé, et est réutilisé par la suite. Par exemple, nous avons parlé précédemment du problème du rectangle (« prouver qu'un quadrilatère ayant trois angles droits est un rectangle »). Une fois ce problème vu en classe, il est possible que le professeur accepte le raccourci « le quadrilatère ABCD a trois angles droits, donc c'est un rectangle », car il s'agit d'une référence à un résultat précédemment prouvé.

Le troisième cas est assez explicite, il arrive souvent que la justification (propriété, définition ou théorème) ne soit simplement pas mentionnée. Dans l'exemple précédent, « le quadrilatère ABCD a trois angles droits, donc c'est un rectangle », il n'y a pas de justification explicite, mais uniquement les antécédents et le conséquent.

Le premier et le troisième type de raccourcis n'apparaissent qu'au niveau du logiciel QED-Tutrix, et n'ont pas d'influence sur le fonctionnement du générateur. En effet, ce dernier doit fonctionner dans un monde où tout est explicite, car l'omission d'un antécédent évident pour un humain, par exemple, peut avoir des résultats désastreux. Le second, en revanche, a imposé une importante modularité du référentiel. En effet, l'agrégation de plusieurs justifications en une seule revient à implémenter une (ou plusieurs) nouvelle règle informatique représentant cette « méta-justification ».

Le travail d'identification de tous les raccourcis utilisés en classe, leur classification, et leur implémentation, est colossal, et est encore inachevé. Par conséquent, à ce stade, nous nous sommes contentés de nous assurer sur quelques exemples que le générateur de preuves est compatible avec ce paradigme, en permettant une modification ponctuelle du référentiel pour ajouter ou supprimer des justifications. Par ailleurs, cette possibilité permet également de traiter un autre point qui n'a pas été abordé dans cet article, qui est la possibilité pour le professeur utilisant QED-Tutrix d'ajuster aisément son référentiel aux besoins de sa classe, qu’il s’agisse de raccourcis ou, plus simplement, d’interdire des justifications qui n’ont pas encore été vues en classes ou qui ne sont pas l’objet d’étude du moment.

CONCLUSION

Ce n’est que par une étroite collaboration entre informatique et didactique qu’il est possible d’exploiter toutes les possibilités offertes par la technologie au service d’une meilleure qualité d’enseignement. Dans ce projet, nous avons tenté de reproduire de façon artificielle et systématique la genèse discursive potentielle des élèves de secondaire, ce qui a nécessité de prendre en compte les différences profondes et parfois subtiles entre les raisonnements naturel et artificiel. Ceci nous permet d’obtenir, à l’aide de la technologie, un ETM idoine, qui donne à QED-Tutrix les outils pour guider et accompagner les élèves dans leurs genèses. Il semble donc possible, dans une certaine mesure, de reproduire de façon automatique la genèse discursive d’un élève de secondaire. Cependant, ces travaux permettent d’illustrer très concrètement les limites de la machine pour cette tâche complexe, issue des différences entre le raisonnement humain et un algorithme, aussi complexe soit-il. À l’inverse, la nécessité d’établir une rigueur absolue, imposée par la rigidité du raisonnement algorithmique, permet à son tour d’enrichir la théorie didactique pour mieux comprendre les élèves et leur travail.

REFERENCES

Botana, F., Hohenwarter, M., Janičić, P., Kovács, Z., Petrović, I., Recio, T., & Weitzhofer, S. (2015). Automated theorem proving in GeoGebra: Current achievements. *Journal of Automated Reasoning*, *55*(1), 39–59. https://doi.org/10.1007/s10817-015-9326-4

Boutry, P., Braun, G., & Narboux, J. (2016). From Tarski to Descartes: Formalization of the arithmetization of euclidean geometry. *SCSS 2016, the 7th International Symposium on Symbolic Computation in Software Science*, *39*(14–28), 15. https://doi.org/10.29007/k47p

Braun, G., & Narboux, J. (2017). A synthetic proof of Pappus’ theorem in Tarski’s geometry. *Journal of Automated Reasoning*, *58*(2), 209–230. https://doi.org/10.1007/s10817-016-9374-4

Cyr, S. (2021). *Étude des référentiels de géométrie utilisés en classe de mathématiques au secondaire* [Master’s Thesis]. Université de Montréal.

Font, L., Cyr, S., Richard, P. R., & Gagnon, M. (2020). Automating the generation of high school geometry proofs using prolog in an educational context. *ArXiv Preprint ArXiv:2002.12551*.

Font, L., Richard, P. R., & Gagnon, M. (2018). Improving QED-Tutrix by Automating the generation of Proofs. *ArXiv Preprint ArXiv:1803.01468*.

LES PREUVES INSTRUMENTALES POUR LA RÉALISATION DU NOUVEAU TRAVAIL MATHÉMATIQUE À L'ÉCOLE

Michel Desmarais, Philippe R. Richard et Fabienne Venant

Polytechnique Montréal, Université de Montréal et Université du Québec à Montréal

Notre contribution propose des moyens d'analyse et un projet de recherche pour l'amélioration des compétences argumentatives en classe de mathématiques. Notre propos vise une modélisation des conditions d'apprentissage des mathématiques, en interaction avec un système intelligent, et la création de modèles et de moyens informatiques pour les comprendre.

INTRODUCTION

En notre ère numérique, la compréhension du domaine des preuves dans la recherche et l'enseignement des mathématiques est devenue un enjeu de premier plan où les questions didactiques, mathématiques et informatiques s'entrelacent comme jamais. Mais la preuve est parfois considérée comme l'aspect de l'activité mathématique qui résiste le plus à l'influence du changement technologique, comme si les sciences mathématiques ne pouvaient prouver qu'avec l'écriture. Notre propos vise alors à montrer certaines potentialités dans l'usage d'outils informatique pour travailler la preuve, en mettant en jeu des preuves instrumentales, notion développée sur des assises épistémologiques (Richard, Venant & Gagnon, 2019) avec, en toile de fond, l'intention de rapprocher artéfacts et discours (Flores, Gaona & Richard, 2022).

OBJECTIFS

Notre projet soulève deux questions de recherche : comment comprendre et modéliser des conditions d'apprentissage des preuves instrumentales en classe de mathématiques, conjointement à la création de modèles didactiques et de moyens informatiques pour soutenir l'apprentissage ? Quels renseignements nous apporte l'interaction de l'élève avec un milieu11 pour la réalisation du travail mathématique en matière de preuves et de raisonnements ? Pour y répondre, nous revisitons les objectifs de recherche que nous avions étayés dans Richard, Gagnon et Fortuny (2015) ainsi que les éléments fondateurs de la modélisation des connaissances et du raisonnement dans Richard Gagnon et Fortuny (2018) sur les plans :

1. Du modèle didactique en matière de conception, d'implantation, d'interrogation et de raffinement de situations modèles pour l'apprentissage instrumenté dans les écoles, respectant les habitudes du travail mathématique au cours de la résolution de problèmes de preuve.
2. De l'interprétation et de la théorisation sur les caractéristiques inférentielles,

[11] Dans le sens de la théorie des situations didactique en mathématique (Brousseau, 1998). Voir section *Cadre théorique*.

épistémologiques, représentationnelles, didactiques et instrumentales dans l'enseignement des mathématiques qui intègrent des outils technologiques.

3. De l'évaluation et du contrôle impliqué dans l'évolution des compétences mathématiques, l'acquisition du savoir, la construction de la pensée mathématique et l'apprentissage de l'élève dans une perspective instrumentée.

La méthodologie proposée repose sur l'articulation et la continuité entre la conception d'un système expert pour le travail de la preuve au secondaire, nommé QED-Tutrix (Font, Gagnon, Leduc & Richard, 2022), et les analyses d'idonéité issues de sa mise en œuvre dans la résolution de situations engageant les élèves dans des preuves instrumentales. Pour certaines étapes de raisonnement, nous introduisons un outil technologique en guise de justification, prolongeant de ce fait la structure discursive du système, comme la construction d'une figure dynamique, l'exécution d'un algorithme ou la modélisation d'une situation réelle.

CONTEXTE

La notion de preuve est au cœur de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques. Dans les référentiels de compétences mathématiques (Niss & Højgaard, 2019), qu'ils s'agissent des programmes d'études de l'école québécoise (MÉES, 2019), des « process standards » consensuels du *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2019) ou de grandes études internationales comme le *Programme international pour le suivi des acquis des élèves* (OCDÉ, 2019), le raisonnement et les preuves apparaissent invariablement au premier plan. Alors qu'au primaire, on limite souvent la preuve au raisonnement mathématique et à la conviction, et qu'aux études postsecondaires, on la porte habituellement jusqu'à la démonstration, l'évolution du traitement réservé au raisonnement déductif dans son ensemble est très variable, hésitant entre valorisation et mise de côté, ce qui représente une source majeure d'injustice épistémique (cf. Tanswell & Rittberg, 2020). Pourant, en constituant un authentique vecteur de formation au cours de la scolarité mathématique (Coutat, Laborde & Richard, 2016), les notions de preuve et de raisonnement représentent d'emblée un enjeu éducationnel majeur. Nous distinguons ici deux types de preuve. Les *preuves mécaniques* et les *preuves algorithmiques*, dites preuves instrumentales, mettent en jeu un raisonnement instrumenté et sont des processus qui font intervenir un outil technologique en interaction. Elles complètent ainsi les *preuves discursivo-graphiques* et le raisonnement qui procède à la fois par le discours et les systèmes de représentation sémiotique habituels en mathématiques. Ce qui fait l'originalité de notre approche est de considérer, au-delà du déploiement du raisonnement et des preuves discursives traditionnelles, les notions de raisonnement dans l'action interagissant avec un artéfact matériel, numérique ou symbolique. La notion de nouveau travail mathématique se réfère au travail qui se réalise ainsi dans l'interaction et qui supplante, réinvente ou tend à remplacer le travail mathématique plus traditionnel (Flores-Salazar, Gaona & Richard, 2022).

CADRE THÉORIQUE

Le cadre général du projet suit cinq axes de références conceptuelles. Ces axes sont de nature *épistémologique* [tradition des Éléments d'Euclide (Richard, Oller & Meavilla, 2016), heuristiques de résolution de problèmes de Polya (2007) et dialectique des preuves et des réfutations de Lakatos (1984)], *sémiotique* [théorie des fonctions du langage de Duval (1995) et approche fonctionnelle-structurelle de Richard et Sierpinska (2004)], *didactique* [théorie des situations didactiques de Brousseau (1998) et modèle des espaces de travail mathématique de Kuzniak et Richard (2014)], *instrumentale* [théorie de l'instrumentation de Rabardel (1995) et modèle pour raisonner sur les conceptions des apprenants de Balacheff et Margolinas (2005)] et *inférentielle* [théorie de la prise de décision de Schoenfeld (2011), raisonnement instrumenté de Coutat, Laborde et Richard (2016) et preuves instrumentales de Richard, Venant et Gagnon (2019)].

Notre cadre théorique convoque deux théories complémentaires : la Théorie des Situations Didactiques (TSD, Brousseau, 1998) et la Théorie des Espace de Travail Mathématiques (ThETM, Kuzniak, Montoya-Delgadillo & Richard, 2022). La TSD nous permet de prendre en compte les rapports du sujet (l'élève) avec le milieu a-didactique. Ce milieu, choisi par l'enseignant, peut être matériel (manuel, outil ou machine, logiciel, mise en scène, etc.) ou intellectuel (compagnon ou tuteur jouant un rôle de collaborateur) et, en bout de piste, il doit permettre à l'élève d'évoluer de son propre mouvement. Le a privatif signifie qu'il s'agit d'un milieu pour lequel l'enseignant a réussi à faire disparaître sa volonté et ses interventions en tant que renseignements déterminants pouvant influencer l'acquisition des connaissances. Dans la TSD, le milieu apparaît comme étant le système antagoniste de l'élève. Puisque le milieu véhicule des connaissances, celles-ci ne peuvent se révéler que lorsque l'élève l' « interroge ». Il ne s'agit donc pas d'un vis-à-vis réagissant, mais bien d'un partenaire dans la création du sens. Le système qui nous intéresse est alors le système sujet-milieu défini la connaissance et produit des connaissances nouvelles (Margolinas, 2009). Rappelons que nous nous intéressons ici aux preuves instrumentales, réalisées avec un outil technologique en interaction. Les preuves peuvent se concevoir comme une suite d'inférences qui s'articulent autour de connexions de nécessité épistémique. Une inférence est une opération logique consistant à conclure la vérité d'une proposition à partir d'autres propositions prises comme hypothèses, et d'une propriété ou d'une définition prise comme justification, c'est-à-dire une opération physique ou logique d'un élève qui lui permet d'admettre une connaissance qui découle de sa liaison avec d'autres connaissances déjà admises. On peut, en effet, définir une inférence comme une étape ou un pas dans un raisonnement. L'inférence se gouverne simultanément selon des principes plus généraux, par exemple, la nécessité des liens entre les concepts ou les processus mathématiques, la cohérence physique et le dynamisme des objets qui nous accompagnent dans un questionnement, ou les calculs inhérents à l'anticipation d'un résultat prémédité. Ces contrôles possèdent des caractéristiques d'invariance qui rendent les principes réutilisables avec de nouveaux opérateurs. Lorsque l'inférence est associée à une situation, un problème ou une tâche à résoudre, elle est une interaction finalisée pour le système sujet-milieu. En outre, si elle modifie la valeur sociale, épistémique ou logique des connaissances, elle s'implique aussi bien dans la découverte de conjectures que dans la réalisation des preuves. Ce double jeu des inférences rejoint la notion de conception dans le modèle de Balacheff et Margolinas (2005) et rapproche l'intuition de la preuve (Mariotti & Pedemonte, 2019). En étant au cœur de la transformation des concepts mathématiques, agir sur l'inférence dans l'interaction sujet-milieu c'est agir autant sur la quête et l'acquisition de connaissances valides que sur leurs transformations (cf. Radford, 2017).

On sait que les compétences mathématiques sont des compétences intellectuelles et que la pensée mathématique n'est jamais directement accessible pour l'autre. Le travail mathématique constitue la partie visible de la pensée mathématique, aussi bien chez ceux qui font des mathématiques que chez qui les apprend. Le travail mathématique à l'école peut alors se considérer comme étant la partie visible de la pensée mathématique, et l'espace de travail mathématique qui intègre un dispositif technologique n'est pas tant un lieu où se visualisent, se construisent ou se prouvent des connaissances, mais un système d'activité qui engendre l'espace et qui envisage l'effet coordonné de processus sémiotiques, instrumentaux et discursifs. La théorie des espaces de travail mathématique (ThETM) complète l'approche proposée par la TSD et fournit un cadre particulièrement adapté à l'étude des preuves instrumentales. Dans la ThETM, le travail mathématique peut se considérer en tant qu'interaction entre un usager et un milieu (matériel, intellectuel) qui véhicule des connaissances mathématiques. Les connaissances se révèlent et se construisent progressivement dans ces interactions, au cours d'un processus de rapprochement des aspects épistémologiques et cognitifs selon trois jeux génétiques entrelacés, identifiés dans la théorie comme les genèses sémiotique, instrumentale et discursive (Kuzniak & Richard, 2014). Ces genèses permettent d'apprécier des questions comme celles de la création du sens, de la validation de propriétés ou de l'usage d'outils techniques en termes de coordination des genèses. Ainsi, il est possible d'expliquer une preuve en s'interrogeant sur la nature des interactions entre les plans épistémologiques et cognitifs de l'espace de travail. C'est dans ce contexte que les preuves instrumentales prennent forme. Aux preuves traditionnelles, qui se lient au référentiel par la genèse discursive et qui s'enrichissent naturellement en les prolongeant aux preuves discursivo-graphiques, les preuves mécaniques procèdent avant tout par la coordination des genèses sémiotique et instrumentale, et les preuves algorithmiques, par celle des genèses instrumentales et discursives (Fig. 1). Enfin, si la ThETM est tout aussi utile pour rapporter l'activité mathématique en matière de preuves sur les plans théorique et méthodologique, elle constitue un avantage stratégique dès que l'on veut concevoir un dispositif informatique (Lagrange & Richard, 2022). Il suffit de penser l'outil en termes d'interactions potentielles dans un espace de travail mathématique, pour ensuite raffiner l'outil dans l'usage avec des élèves réels.

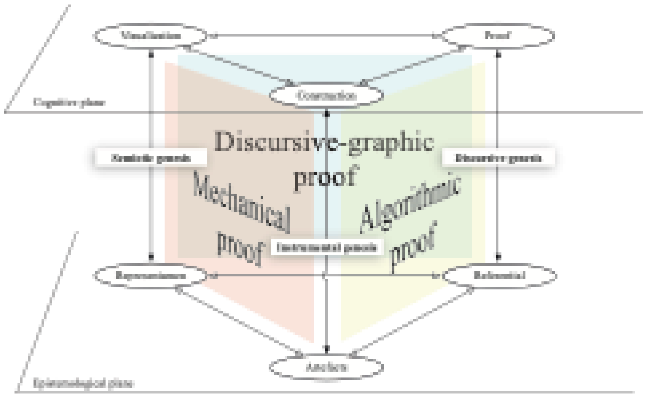


Figure 1 : Les preuves instrumentales apparaissent dans plans verticaux saillants de l'espace de travail mathématique (Richard, Venant & Gagnon, 2019)

DÉROULEMENT DE LA RECHERCHE

Notre projet se fonde sur des méthodes qualitatives (Bikner-Ahsbahs, Knipping & Presmeg, 2015) et il profite de la tradition de la recherche ethnographique pour la recherche sur l'enseignement des mathématiques (Eisenhart, 1988), ce qui oblige les chercheurs à s'interroger et à dialoguer constamment. Ce caractère dynamique de la recherche s'appuie sur des prémisses où la flexibilité, la réflexivité et l'adaptation exigées contribuent à la rigueur de la collecte et de l'analyse des données:

> La recherche qualitative vise à comprendre comment les personnes perçoivent le monde et la façon dont elles se comportent et agissent dans celui-ci. Cette approche oblige les chercheurs à comprendre les phénomènes à partir de paroles, d'actions et de documents. Elle les amène à s'interroger sur la façon dont les individus interprètent et donnent sens à leurs paroles et à leurs actes, ainsi qu'à d'autres aspects du monde avec lesquels ils sont en relation (y compris les autres personnes). (EPTC2 2018, pp.151-152)

Bien qu'en théorie, l'ethnographie se présente comme une méthodologie naturaliste puissante, en pratique elle est rarement utilisée par les chercheurs en éducation en raison de différences dans les hypothèses, les objectifs et les questions de recherche fondamentale (Eisenhart, 1988).

Notre méthodologie prolonge la conception d'un système expert pour l'apprentissage et le travail de la preuve au secondaire à l'aide du système QED-Tutrix (Font, Gagnon, Leduc & Richard, 2022). QED-Tutrix est conçu de façon à laisser à l'apprenant une liberté totale dans l'exploration du problème à résoudre et dans le choix de la preuve, tout en lui proposant un accompagnement adapté à ses choix (Leduc et al., 2017; Font, Gagnon, Leduc, & Richard, 2022; Font, Leduc & Richard, ETM7). La création originale d'une structure de raisonnements permet au système de suivre l'élève, de l'évaluer et de s'y adapter. Ainsi, la justification d'une étape de raisonnement procède selon les connaissances de références habituelles dans ses cours, légitimant la nécessité dans l'enchaînement de ces connaissances. Actuellement, ces justifications sont verbales, nous voulons explorer les possibilités d'utiliser QED-Tutrix pour le travail sur les preuves instrumentales. La question centrale qui se pose est alors :

Que se passe-t-il si certaines inférences sont justifiées par un outil technologique en interaction, comme des **calculs** (numériques ou symboliques), la construction ou l'animation d'une **figure dynamique**, l'exécution d'un **algorithme**, la création d'un processus mathématique reconnu, l'utilisation d'un **outil de raisonnement automatisé** ou la **modélisation** d'une situation réelle?

Ce point de vue permet de renouveler notre compréhension du travail mathématique à l'ère du numérique. Si la perspective d'un système tuteur conditionne le type de référentiel (définitions, propriétés caractéristiques, théorèmes, etc.) qui sert de base à la validation des inférences, l'introduction de moyens technologiques pousse beaucoup plus loin le regard sur les rapports entre les aspects sémiotiques, instrumentaux et discursifs qui affectent le travail mathématique. Le discours permet de structurer l'enchaînement des connaissances sur les plans de la nécessité (progression interne) et du contrôle (validité), alors que l'usage d'outils technologiques amène de nouveaux principes justificatifs, ce qui représente un nouveau défi de validité sur la cohérence externe avec des résultats discursifs, si possible, arrivant au même résultat.

LA QUESTION DU SAVOIR ET DES CONNAISSANCES EN GÉOMÉTRIE

Dans cette section, nous reprenons des éléments que nous avons déjà présentés à la 21e école d'été de didactique des mathématiques lors d'une table ronde sur l'intelligence artificielle (IA) et l'apprentissage des mathématiques. Dans un contexte scolaire, la géométrie porte en elle une spécificité aux accents sémiotiques qui n'est pas nécessairement le cas de tous les signes mathématiques. Les figures sont à la fois la représentation d'une référence instituée, c'est-à-dire l'idéal où le concept figural que l'on dessine et que l'on décrit, et aussi la signification d'un objet qui est son propre modèle, le dessin étant simultanément une forme qui se représente elle-même. Lorsque la figure se pose à l'interface d'un dispositif de géométrie interactive, elle apparaît aussi comme une situation que l'on peut manipuler, paramétrer ou interroger, le contrôle sur les propriétés signifiées est typique de l'interaction entre un usager et un milieu. On peut parler de figure dynamique opératoire (Coutat, Laborde et Richard, 2016), un idéal instrumenté qui émergent dans les nouvelles mathématiques et qui se distingue des représentations sémiotiques ou discursives standards. Ainsi, dans GéoGébra, qui s'intègre à l'interface de QED-Tutrix, on retrouve une figure apparente dans le module de construction géométrique qui autorise le déplacement, une figure paramétrable définie par la logique de la construction, une figure numérique sur laquelle on peut vérifier par échantillonnage certaines propriétés, de même qu'une figure symbolique modélisée par l'algèbre, qui peut statuer sur le vrai et sur le faux par des techniques de calcul symbolique dans une logique modale. L'imbrication de plusieurs figures donne à l'objet figural instrumenté toutes les caractéristiques d'une figure émergente par rapport à l'idéal traditionnel et affecte particulièrement le travail mathématique.

Si la modélisation des connaissances pour stimuler l'IA doit déjà se réfléchir dès la conception des techniques informatiques mises en œuvre, il faut que celles-ci introduisent les caractéristiques du travail mathématique d'aujourd'hui avec ses valences sémiotiques, discursives et instrumentales. Quant au savoir fondamental en jeu, il dépend du référentiel géométrique pour une personne ou pour une institution sur les plans mathématique et scolaire (à ce sujet, voir la contribution À la recherche d'un référentiel de Cyr, Danguy-Pichette & Richard, ETM7). Ces questions sont habituelles dans la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1992) et la théorie des espaces de travail mathématique (Kuzniak, Montoya-Delgadillo & Richard, 2022). Dans une perspective instrumentée par l'IA, le savoir géométrique est aussi celui qui se crée dans l'usage avec un artéfact numérique, ce qui rapproche savoir et praxéologie à la manière de la théorie anthropologique du didactique. Dans ce qui suit, nous illustrons quelques enjeux cognitifs ou épistémiques selon deux réalisations technologiques, avant terminer la section avec des considérations générales sur l'effet boîte noire inhérent à l'usage d'outil technologique pour justifier des inférences. Il s'agit des Outils de Raisonnement Automatisé (ORA) dans Géogébra (GGB) et du système tuteur intelligent QED-Tutrix (QEDX) qui adoptent des approches symboliques.

La principale différence entre les ORA de GGB et le système QEDX est que dans le premier cas, les connaissances géométriques sont modélisées par l'algèbre, alors que dans le second cas, elles restent dans l'univers géométrique. Depuis 2016, les objets dans GGB ont été redéfinis symboliquement, ce qui permet d'employer le calcul symbolique pour trouver des relations entre des éléments géométriques, tester la véracité ou la fausseté d'une affirmation, ou même découvrir des hypothèses supplémentaires afin qu'une affirmation donnée soit valable dans le contexte d'un problème. Par rapport aux logiciels de géométrie dynamique précédents, le passage vers le symbolique est un changement majeur pour lequel nous sommes loin d'en avoir exploré tous les bénéfices. Pour l'usager, la valeur épistémique des réponses qu'il reçoit de la machine vient de dépasser les approches numériques et leurs limites dans la discrétisation du continu. Lorsqu'un usager interroge un oracle (ex. les objets sont-ils parallèles et si oui, sous quelles conditions?), l'effet boîte noire de la vérification par échantillonnage disparait au profit d'une réponse vraie ou fausse sous certaines conditions. C'est un gain appréciable. Cependant, avec sa puissance de calcul et la modélisation de la géométrie par l'algèbre, de nouveaux effets « indésirables » se produisent pour l'usager. Tandis qu'avec l'approche symbolique, on peut en principe détailler la mécanique interne qui produit la réponse, l'usager ne connaît pas cette mécanique qui lui est, à toutes fins utiles, inaccessible. De plus, la réponse obtenue n'est pas toujours facilement interprétable dans la situation d'origine, le modèle géométrique de référence en 2D fonctionne dans $\mathbb{R}2$, tandis que les opérateurs à l'interne travaillent dans le plan complexe.

Le système QEDX a été créé pour soutenir la résolution de problèmes complexes en géométrie. Développé conjointement en didactique et en génie informatique dans une perspective de travail mathématique, il a été conçu de façon à intégrer les utilisateurs, et ce très tôt dans le processus de conception. Ainsi, l'élève qui résout un problème de géométrie peut construire une figure dynamique, raisonner sur celle-ci, en dégager une conjecture, l’écrire, la démontrer ou la réfuter. Au besoin, un agent pédagogique virtuel répond aux difficultés de chaque élève par des messages sous forme de phrases ou de problèmes qui s’adaptent au comportement et à la stratégie de chacun. L’intelligence du système tuteur doit être capable de communiquer avec l’élève dans la logique du problème, avec son langage et ses contraintes, et anticiper des moments de blocages qui se lient aux connaissances en jeu. Par ses possibilités de messages discursifs (propositions verbales) et de messages cognitifs (problèmes connexes), le tuteur reste dans le giron du modèle géométrique de l’usager. Il s’agit d’un avantage dès qu’on cherche à produire l’articulation d’un raisonnement humain ou produire des preuves qui sont lisibles. Toutefois, l’approche symbolique du système sous forme de graphe inférentiel exige la production préalable de toutes les preuves possibles, ce qui est susceptible d’entraîner une explosion combinatoire bien connue en informatique. En revanche, l’organisation déductive de QEDX permet d’engager les élèves dans des preuves instrumentales, bien au-delà des preuves discursives à la manière d’Euclide. En effet, pour certaines étapes de raisonnement, il est possible d’introduire un outil technologique en interaction en guise de justification d’une déduction, prolongeant de ce fait la structure discursive du système, comme la construction d’une figure dynamique, l’exécution d’un algorithme ou la modélisation d’une situation réelle.

Dans un contexte d'automatisation des procédures par des algorithmes, notre système d'éducation doit favoriser la résolution de problèmes difficiles et la conception de solutions, à l'instar des scientifiques, chercheurs, médecins et ingénieurs. Des outils tels que QED-Tutrix offrent des environnements sécurisés pour expérimenter, échouer, réessayer et réussir dans la résolution de problèmes complexes. On peut envisager une combinaison de l'approche discursive de QEDX avec celle des ORA de GGB, qui permettrait la génération automatique de problèmes et de solutions, avec la vérification interne des inférences par les ORA. Ces outils peuvent également aider à extraire des informations significatives des manuels scolaires (propositions en instance discursive, Fig. 2; voir également Farid, 2020) pour adapter le système tutoriel au contrat didactique. Bien entendu, ces possibilités soulèvent de nouvelles questions, comme la pertinence des problèmes générés ou l’à-propos des raccourcis inférentiels selon les habitudes du contrat. En revanche, l’intérêt pour la recherche d’invariants dans la pertinence de problèmes ou au cours de la gestion des inférences d’une solution donnée est à noter. C’est même d’un avantage pour le forage exploratoire de données en IA ou pour la formation de catégories conceptualisantes en sciences humaines (Paillé et Mucchielli, 2021). Enfin, si l’on considère l’historique des processus de résolution de l’élève et que l’on applique des techniques d’apprentissage profond pour repérer des invariants dans le travail mathématique effectif, on obtient soudainement de l’information sur le référentiel de l’élève à travers ses conceptions. Cela complète, au besoin, ce que nous savons sur le référentiel potentiel ou présumé de l’enseignant à travers ses définitions mathématiques, propriétés caractéristiques, théorèmes et problèmes à résoudre.

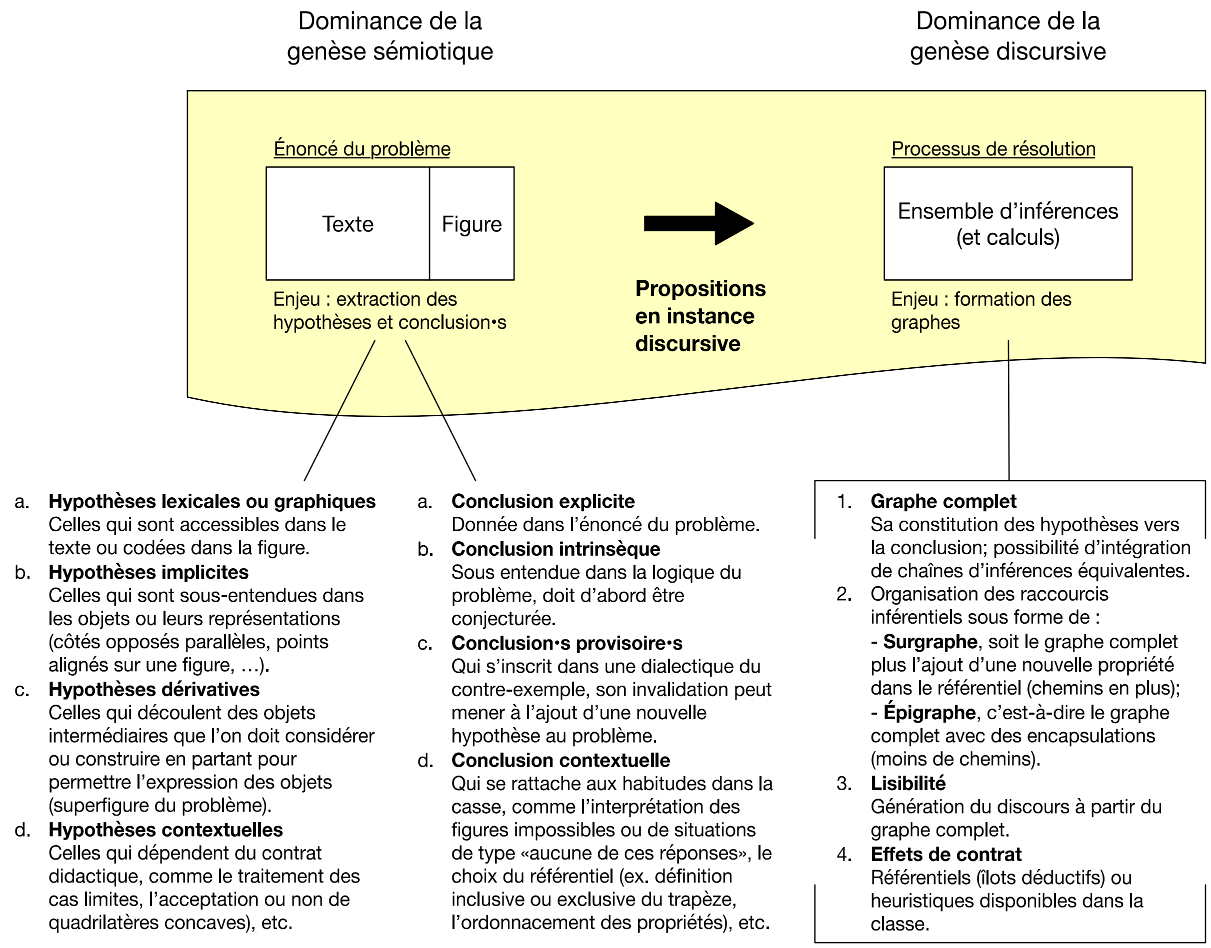


Figure 2. Genèses virtuelles et enjeux principaux qui situent l'activité mathématique dans le système tuteur intelligent QED-Tutrix pour l'extraction de l'information de problèmes. Les besoins d'automatisation du processus répercutent sur l'identification et l'organisation des hypothèses, des conclusions et des graphes.

CONCLUSION

À une époque où l'usage des outils technologiques invite à repenser comment les mathématiques se prouvent et se raisonnent, notre système d'éducation doit dépasser la politique traditionnelle du transfert de connaissances par une habileté à résoudre des problèmes difficiles et à concevoir des solutions, comme le font effectivement les scientifiques, les chercheurs, les médecins ou les ingénieurs. Des systèmes comme QED-Tutrix, développé en collaboration avec la communauté, offrent des environnements sûrs pour expérimenter, échouer puis réessayer, et surtout, pour miser sur la réussite des élèves en résolution de problèmes complexes. Puisque notre système a été conçu pour produire une classe d'effets (soutien de l'élève au cours de la résolution de problèmes de preuve), l'introduction de justifications qui font intervenir un outil technologique en interaction instaure un rapport légitime et nouveau entre les aspects discursifs et instrumentaux de l'activité mathématique. Autrement dit, si le développement du travail mathématique est constitutif de la conception du système tutoriel, il est à l'origine même de son existence par une anticipation experte des interactions de systèmes en évolution. Contrairement aux systèmes tutoriels existants (Tessier-Baillargeon, Leduc, Richard & Gagnon, 2017), notre approche est une marque d'originalité importante qui rejette le déterministe dominant, mais qui est obligé de le traiter pour des raisons évidentes de programmation informatique.

En nous centrant sur la compréhension et la création pour mieux comprendre, notre démarche de recherche fonde empiriquement l'articulation et la continuité entre les processus institutionnels de conception de solutions préméditées et la poursuite de la conception au sein de la résolution de problèmes de preuve avec des élèves réels. Avec une approche intelligente comme celle que nous préconisons – entendue ici comme étant l'aptitude de nos moyens théoriques, méthodologiques et pragmatiques à s'adapter à des situations nouvelles, notamment grâce à la souplesse de la théorie des espaces de travail mathématique –, nous arrivons à comprendre et à résoudre certaines difficultés, à donner un sens aux contextes dans lesquelles elles surviennent et à permettre aux usagers à agir avec discernement au cours d'une preuve instrumentale. Il s'agit là d'un gage pour l'obtention de résultats durables qui portent aussi bien sur l'apprentissage des mathématiques que sur la formation initiale et continue des enseignants. Enfin, notre démarche offre une garantie à respecter la diversité des comportements qui résultent d'une négociation subtile dans le partage des responsabilités quant aux mathématiques à apprendre. Parce que nous encourageons l'élève à questionner un milieu susceptible de véhiculer des connaissances mathématiques, l'esprit d'initiative et le développement de l'autonomie gagnent en force, répondant ainsi à un enjeu social majeur. La possibilité d'aménagement des raisonnements disponibles permettra à l'enseignant d'aiguiser son sens didactique en pouvant simuler l'effet de son action et de s'identifier au comportement de l'élève, depuis l'anticipation de solutions jusqu'à la planification de problèmes de preuve adaptés à l'élève dans une perspective instrumentée.

REFERENCES

Balacheff N. & Margolinas C. (2005), Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques, dans *Balises pour la didactique des mathématique* (Éds. Mercier & Margolinas), 75-106. La pensée sauvage, Grenoble.

Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C., Presmeg, N.C. (Eds.) (2015). *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods*. Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6

Brousseau G. (1998), *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques, 12*(1), 73–112. https://revue-rdm.com/1992/concepts-fondamentaux-de-la-didactique/

Coutat, S., Laborde, C. & Richard, P.R. (2016). L'apprentissage instrumenté de propriétés en géométrie : propédeutique à l'acquisition d'une compétence de démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(2), 195-221.

Duval R. (1995), Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Peter Lang, Berne.

Eisenhart, M.A. (1988). The Ethnographic Research Tradition and Mathematics Education Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(2), 99–114. https://doi.org/10.2307/749405

EPTC2 (2018). Conseil de recherches en sciences humaines, Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada, Instituts de recherche en santé du Canada : *Énoncé de politique des trois Conseils – Éthique de la recherche avec des êtres humains*, décembre 2018.

Farid, O. (2020). *Extraction des connaissances en géométrie plane à partir d'énoncés de problèmes* (Mémoire de maîtrise, Polytechnique Montréal). Tiré de https://publications.polymtl.ca/5374/

Flores Salazar, J. V., Gaona, J., & Richard, P. R. (2022). Mathematical Work in the Digital Age. Variety of Tools and the Role of Geneses. Dans A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo & P. R. Richard (Éds.), *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 165-209). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_8

Font, L., Gagnon, M., Leduc, N., Richard, P.R. (2022). *Intelligence in QED-Tutrix: Balancing the Interactions Between the Natural Intelligence of the User and the Artificial Intelligence of the Tutor Software*. In: Richard, P.R., Vélez, M.P., Van Vaerenbergh, S. (eds) Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence. Mathematics Education in the Digital Era, vol 17. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_3

Kuzniak, A. & Richard, P.R. (2014). Espaces de travail mathématique. Point de vues et perspectives. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa 17.4*(I), 5-40.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. R. (Eds.). (2022). *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (1st ed., Mathematics Education in the Digital Era, Vol. 18). Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8.

Lagrange, JB., Richard, P.R. (2022). Instrumental Genesis in the Theory of MWS: Insight from Didactic Research on Digital Artifacts. In: Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., Richard, P.R. (eds) *Mathematical Work in Educational Context. Mathematics Education in the Digital Era, vol 18*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_9

Lakatos I. (1984), *Preuves et réfutations. Essai sur la logique de la découverte mathématique*. Hermann, Paris.

Leduc, N., Tessier-Baillargeon, M., Corbeil, J.P., Richard, P.R., & Gagnon, M. (2017). Étude prospective d'un système tutoriel à l'aide du modèle des espaces de travail mathématique. In I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, P.R. Richard & L. Vivier (Eds.), *Actes du 5e symposium Espaces de Travail Mathématique* (ETM 5) (pp. 281-295). Florina, Grèce : University of Western Macedonia.

Margolinas C. (2009), *Points de vue de l'élève et du professeur : essai de développement de la théorie des situations didactiques*, Habilitation à diriger les recherches en sciences de l'éducation, Université de Provence, version électronique récupérée le 10 septembre 2019 à https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00429580v2

Mariotti, M.A. & Pedemonte, B. (2019). Intuition and proof in the solution of conjecturing problems'. *ZDM Mathematics Education, 51*(5), 759-777.

MÉES (2019). *Programme de formation de l'école québécoise, préscolaire, primaire et secondaire*. Récupéré à http://www.education.gouv.qc.ca/enseignants/pfeq/ le 10 septembre 2019. Publications du Gouvernement du Québec.

NCTM (2019). *Principles and Standards for School Mathematics*. Tiré de https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/. Publication du National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M. & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics* **102.1**, 9-28.

OCDÉ (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*. Tiré de https://www.oecd-ilibrary.org/docserver/b25efab8-en.pdf. Publications de l'Organisation de coopération et de développement économiques.

Paillé, P. et Mucchielli, A. (2016). *L'analyse qualitative en sciences humaines et sociales*. Paris : Armand Colin.

Polya, G. (2007). *Comment poser et résoudre un problème, 2e éd.* Pour l'original de 1965, Paris : Dunod, 1965; pour le nouveau tirage de 2007, Paris : Jacques Gabay.

Rabardel P. (1995). *Les hommes et les technologies : Approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin, Paris.

Radford, L. (2017). *On inferentialism. Mathematics Education Research Journal, 29*(4), 493-508.

Richard P.R., Gagnon M. & Fortuny J.M. (2015). Gestion interactive de problèmes en géométrie pour le développement des compétences des élèves et l'acquisition du savoir mathématique. In Mª I. Gómez-Chacón et al. (eds.), *Espacio de Trabajo Matemático, Actas Cuarto Simposio Internacional ETM*. Madrid: Publicaciones del Instituto de Matemática Interdisciplinar, Universidad Complutense de Madrid. (ISBN 978-84-606-9475-5).

Richard, P.R. et Sierpinska, A. (2004). Étude fonctionnelle-structurelle de deux extraits de manuels anciens de géométrie. In Lemoyne, G. et Sackur, C. (rédactrices invitées) *Le langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques*, *Revue des sciences de l'éducation, Numéro thématique, 30* (2), 379-409.

Richard, P.R., Gagnon, M., Fortuny, J.M. (2018). Connectedness of Problems and Impasse Resolution in the Solving Process in Geometry: A Major Educational Challenge. In: Herbst, P., Cheah, U., Richard, P., Jones, K. (eds) *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77476-3_20

Richard, P.R., Oller, A.M. & Meavilla, V. (2016). The Concept of Proof in the Light of Mathematical Work. *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 843–859.

Richard, P. R., Venant, F., & Gagnon, M. (2019). Issues and Challenges in Instrumental Proof. In G. Hanna, D. A. Reid, & M. de Villiers (Eds.), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching* (pp. 139-172). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1_7

Schoenfeld, A.H. (2011). *How We Think - A Theory of Goal-Oriented Decision Making and its Educational Applications*. New York : Routledge.

Tanswell, F.S. & Rittberg, C.J. (2020). Epistemic injustice in mathematics education. *ZDM Mathematics Education* **52**, 1199-1210.

Tessier-Baillargeon, M., Leduc, N., Richard, P.R. et Gagnon, M. (2017). Étude comparative de systèmes tutoriels pour l'exercice de la démonstration en géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 22*, 91-117.

TRABAJO MATEMÁTICO EN TORNO A UNA TAREA PARA GEOMETRÍA 3D CON TECNOLOGÍA: LA HOMOTECIA EN EL PLANO Y EL ESPACIO

Fabiola Arévalo-Meneses

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.

La presente investigación de enfoque cualitativo, tiene como objetivo indagar en el trabajo matemático del estudiante ante una tarea para geometría 3D en relación a la homotecia, la que consideró la utilización de un software de geometría dinámica y en donde la tarea hace referencia a una situación en un entorno arquitectónico. A través de una ingeniería didáctica como metodología de investigación, se recogieron datos analizados mediante el marco teórico Espacio de Trabajo Matemático (ETM). Los resultados muestran la activación de los planos semiótico-instrumental e instrumental-discursivo, dando cuenta de una tarea que permite al estudiante establecer relaciones entre los elementos de la homotecia, no obstante, los estudiantes presentan dificultades para poder coordinar la representación geométrica de objetos en 2D y 3D.

PROBLEMÁTICA

El estudio de la homotecia es un área hasta ahora poco estudiada, sin embargo, se encuentran algunos resultados de investigaciones, que dan cuenta de actividades propuestas centradas en un trabajo aritmético y algorítmico, particularmente para determinar la razón de homotecia y medir longitudes presentes en los textos de estudios del estudiante (González et al., 2020). Por otra parte, se presenta el escaso dominio del objeto matemático homotecia en los profesores, lo que se transforma en una dificultad que podría afectar la manera en que es abordado su estudio y por ende el aprendizaje del estudiante. Esto se confirma en la literatura, por ejemplo, Castro y Riascos (2019) manifiestan que existe una discordancia entre elementos conceptuales y cognitivos sobre el concepto de homotecia en relación a las definiciones y ejemplos sugeridos. Del mismo modo, Segreccia et al. (2012), destacan el escaso conocimiento de geometría 3D en profesores de matemática, quienes además observaron una discordancia entre la apreciación de futuros profesores de matemática, profesores de matemática en ejercicio y formadores de profesores en relación a sus conocimientos sobre geometría y su didáctica. Mientras los futuros profesores manifiestan que no han recibido formación en didáctica de la matemática durante su formación inicial, los formadores de profesores consideran que ellos abordan conocimientos de didáctica de la geometría con sus estudiantes, sin embargo, los profesores en ejercicio indican que lo que conocen sobre geometría 3D y en general, así como de didáctica de la geometría, lo han adquirido en la práctica por ensayo y error o por medio de cursos de perfeccionamiento que han realizado posterior al término de su formación inicial. Todos concuerdan en que existe poca presencia de geometría, en particular de geometría 3D, en los programas de educación secundaria.

Al analizar el objeto matemático homotecia, se observa que la homotecia es compleja epistemológicamente pues se trata de una transformación geométrica de R^n en R^n, que se operacionaliza mediante relaciones de proporción entre distancias.

Por otra parte, estudios sobre transformaciones geométricas, aunque no tratan específicamente de la homotecia, proponen trabajar con Sistemas de Geometría Dinámica (SGD). Ferrarello et al. (2018) declaran lo difícil que es dibujar figuras tridimensionales y objetos en el espacio, ante lo cual indican que el uso de SGD favorecen la visualización y comprobación de conjeturas. En el mismo sentido, Dana-Picard (2006). señala que la percepción antecede a la compresión del objeto matemático, por lo que recomienda el uso de SGD, lo que también fue observado por Salazar (2006), quién indica que el uso de herramientas digitales facilitó la percepción de figuras de manera dinámica, así como la observación de cambios y posición de figuras en el espacio, lo que es apoyado por de Sousa et al. (2021), quienes observaron que el uso guiado de la calculadora 3D de GeoGebra es un gran potencial para estimular el pensamiento geométrico del estudiante, a través del desarrollo de la percepción, intuición y visualización geométrica.

Esto nos presenta un escenario complejo en relación al estudio de la geometría proporcional y en consecuencia de la homotecia. De este modo, surge el interés de indagar en relación a cómo se aborda el aprendizaje de homotecia en el aula, lo que cobra relevancia ante la reciente incorporación del nuevo programa de estudios de tercero y cuarto año de secundaria para formación diferenciada en matemática, que contempla el curso Geometría 3D, el cual vincula la homotecia con el dibujo en perspectiva y la geometría proyectiva, resaltando la importancia de la utilización de herramientas digitales para el logro de los objetivos. El programa se presenta como una contribución al pensamiento espacial, en donde se relacionan situaciones y problemas en el espacio 3D que permiten utilizar conocimientos de la geometría 2D para resolver problemas en el espacio tridimensional (Ministerio de Educación Chile, 2020, p. 21).

En consecuencia, considerando los antecedentes antes expuestos es que se quiere realizar un estudio de la homotecia desde la propuesta de tareas que potencien la representación geométrica y que consideren el uso de sistemas de geometría dinámica, de manera que puedan favorecer la observación y manipulación, con el fin de caracterizar el trabajo matemático del estudiante frente a tareas con estas características.

Nace así la siguiente pregunta de investigación; ¿Cuál es el trabajo matemático de los estudiantes ante una tarea situada en un contexto arquitectónico que involucra el objeto matemático homotecia y la utilización de un software de geometría dinámica?

MARCO TEORICO

El Espacio de Trabajo Matemático (ETM) es una teoría que permite estudiar el trabajo matemático realizado por un individuo ante una tarea determinada considerando elementos cognitivos y epistemológicos. El propósito es poder comprender, desde un punto de vista didáctico, lo que se pone en juego alrededor del trabajo matemático en un contexto educativo (Kuzniak et al., 2014). Se basa en la articulación de dos planos horizontales, el *plano epistemológico* y el *plano cognitivo* (Ver figura 1).

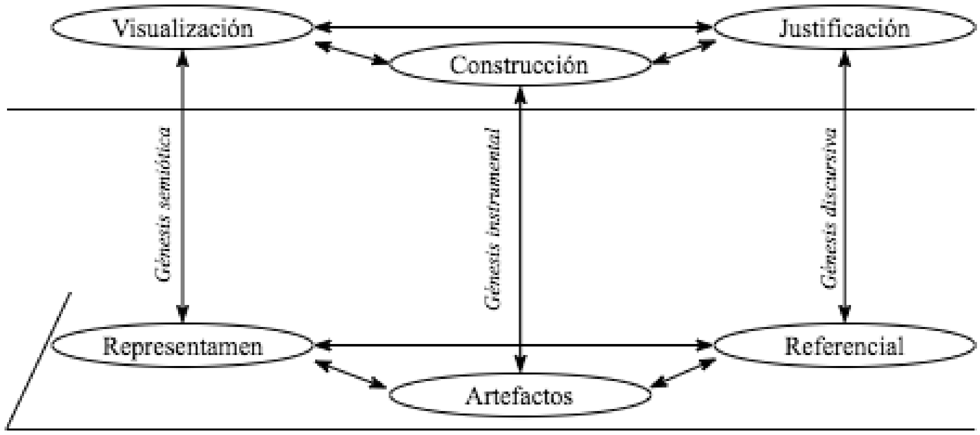


Figura 1: Esquema del ETM (Kuzniak et al., 2016)

Estos dos planos se articulan a través de la activación de tres génesis: semiótica, instrumental y discursiva.

La *génesis semiótica* se basa principalmente en los registros de representación semiótica (Duval, 1993), en que el individuo decodifica e interpreta un conjunto de signos y objetos (*Representamen*) organizados en sistemas de representación semiótica a los cuales da significado (*Visualización*). La *génesis instrumental* permite hacer operarios los artefactos utilizados en el proceso constructivo durante el trabajo matemático, considerando que un instrumento posee dos componentes, un artefacto material o simbólico y esquemas de uso determinado (Rabardel, 1995). Existen distintos tipos de artefactos; *artefactos simbólicos*, como los algoritmos, artefactos materiales como la regla y el compás y artefactos digitales, como software geométricos y calculadoras, en este sentido los artefactos se transforman en instrumentos cuando el sujeto tiene asociados esquemas para su utilización (Gómez-Chacón et al., 2016; Kuzniak et al., 2016). Por otra parte, la génesis discursiva hace referencia al proceso en que las propiedades, definiciones y teoremas (*Referencial teórico*) son empleadas en el proceso discursivo para el razonamiento matemático y la validación. Del mismo modo, cuando se articulan distintas génesis se activan los planos verticales (Figura 2), *plano semiótico-instrumental, plano instrumental-discursivo* y *plano semiótico-discursivo* (Kuzniak et al., 2016, 2022).

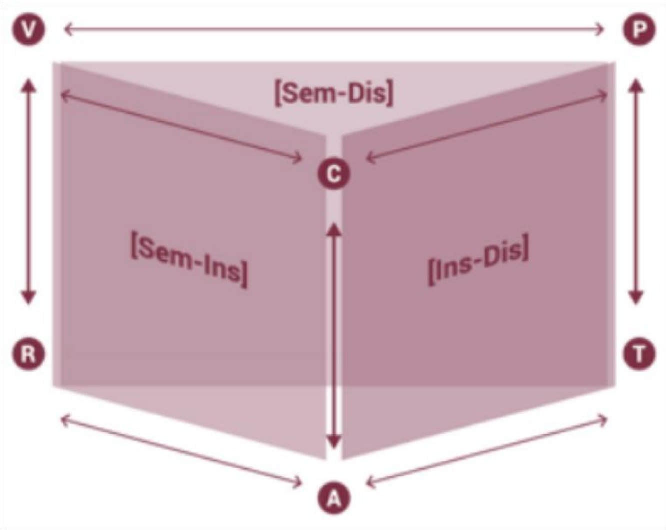


Figura 2: Planos verticales del ETM (Kuzniak et al., 2016)

El *plano semiótico discursivo* $[Sem - Dis]$, une la génesis semiótica y la génesis discursiva y se asocia al proceso de modelización. La activación de esta génesis es muy importante pues trasciende a la visualización de objetos. Por otra parte, también se presenta la interacción de la génesis semiótica y la génesis instrumental, *plano semiótico instrumental* $[Sem - Ins]$, por ejemplo, en un ambiente geométrico la utilización de software de geometría dinámica facilita la visualización de propiedades a través de la exploración ante alguna noción en particular, activándose así la génesis instrumental, ahora bien, la misma manipulación del artefacto requiere de un proceso de visualización de los componentes simbólicos, en tal caso se activa la génesis semiótica (Kuzniak et al., 2016, 2022). Así también al articularse la génesis instrumental y la génesis discursiva, se activa el *plano instrumental discursivo* $[Ins - Dis]$, que surge en la exploración o experimentación, de tal manera que si las conclusiones surgen desde la utilización de un instrumento, es posible decir que se sitúa en este plano. Kuzniak et al. (2016) señalan que estos tres planos son fundamentales al momento de caracterizar las fases de los momentos de resolución de una tarea.

METODOLOGIA

La presente investigación es desarrollada con un enfoque cualitativo, dadas las características del objeto de estudio, considerando la ingeniería didáctica como metodología de investigación (Artigue et al., 1995). Se llevan a cabo las cuatro fases de la ingeniería didáctica. En primer lugar, un análisis preliminar, luego la concepción y análisis a priori de la situación de aprendizaje que considera la tarea en relación a la homotecia. Luego se realiza la experimentación desde donde se tomarán los datos para el análisis de la investigación y finalmente el análisis a posteriori y evaluación.

Para levantar los datos se trabajó con 17 estudiantes de un curso de nivelación matemática que se encuentran en su primer año de educación superior técnico profesional de la carrera de Construcción. Los estudiantes durante el desarrollo del curso, previo a la actividad, han estudiado funciones reales. La clase fue grabada y realizada en modalidad virtual dada la contingencia por Covid-19.

Existen dos componentes fundamentales que se describen a continuación, el diseño de la tarea y la implementación.

Descripción de la tarea

Se diseña una tarea que consiste en un problema situado en un contexto arquitectónico (Arco Británico de Valparaíso) que involucra el objeto matemático homotecia y la utilización de una figura dinámica (applet de GeoGebra) que presenta una vista 2D y una vista 3D.

La tarea hace mención al arco británico ubicado en la avenida Brasil de la cuidad de Valparaíso, Chile, ante el cual un arquitecto necesita realizar una réplica del arco, pero de mayor tamaño y que debe ubicarse en la misma avenida (Figura 3).

Figura 3: Contexto del problema planteado

Considerando la situación planteada, se presenta la siguiente tarea a los estudiantes (ver Figura 4).

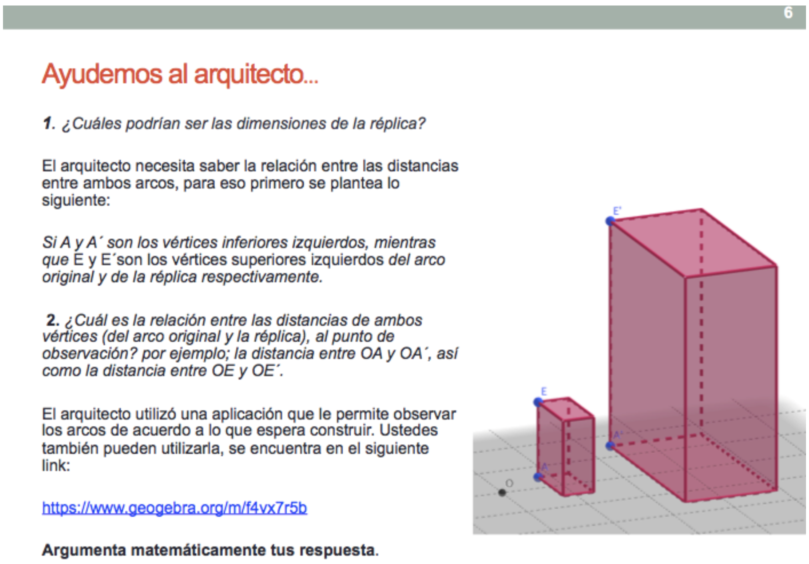


Figura 4: Tarea presentada a los estudiantes

Junto con el desafío de ayudar al arquitecto en su misión, se presenta a los estudiantes la figura dinámica que posee una vista 2D y una vista 3D (Figura 5), junto con un deslizador que permite observar cómo varían las figuras representativas, de la réplica del arco, de manera coordinada en ambas vistas, 2D y 3D.

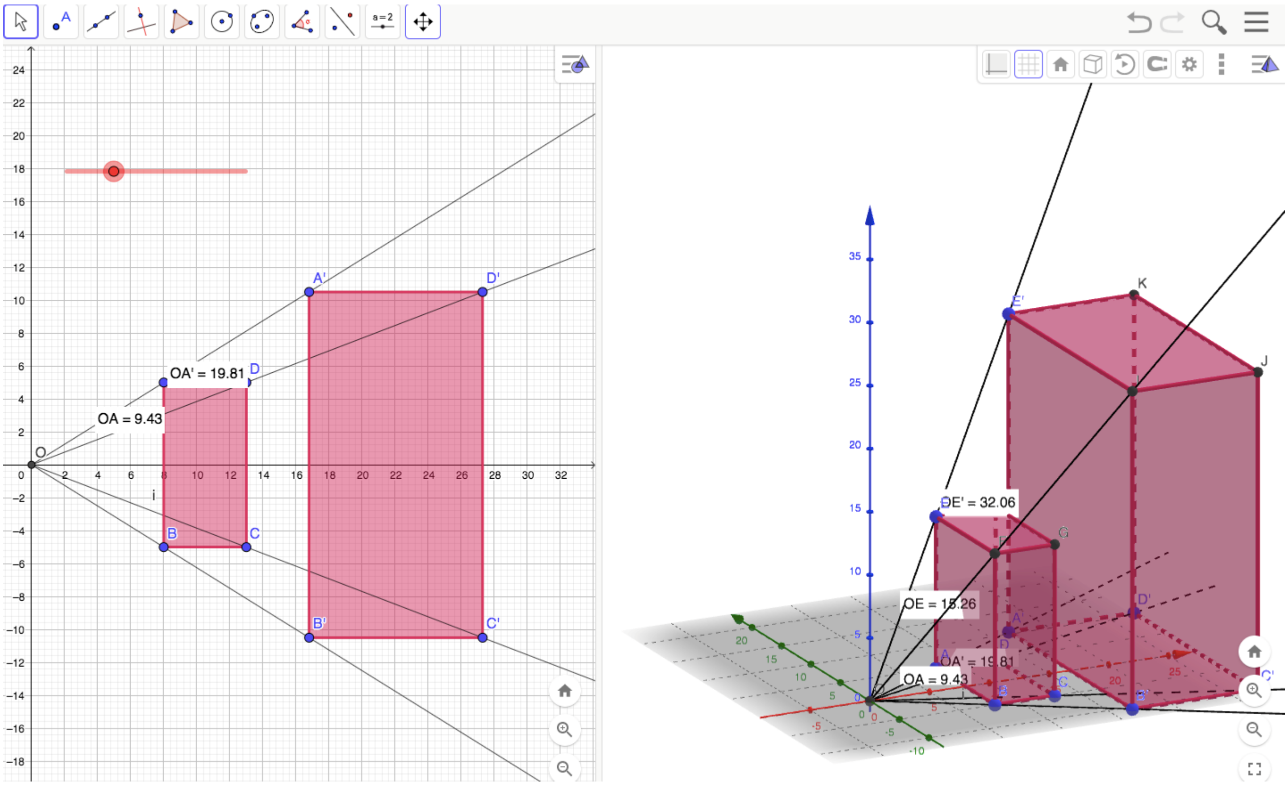


Figura 5: Figura dinámica, applet de GeoGebra

Descripción de la implementación

La implementación se lleva a cabo en el desarrollo de una clase en modalidad virtual, en que se realiza una presentación de la situación y de la tarea en una sala común para luego formar grupos de trabajo de 3 estudiantes, los que trabajarán en salas virtuales designadas para cada grupo, teniendo a su disposición el applet de GeoGebra. El profesor luego de un tiempo de trabajo individual visitará las salas para observar el trabajo realizado por los estudiantes y realizar las devoluciones que sean necesarias de acuerdo a las consultas de los estudiantes. Finalizado cada grupo deben enviar sus producciones al profesor. Posteriormente se hará un plenario en que cada grupo compartirá su trabajo y luego se realizará la institucionalización del objeto matemático homotecia. Cabe destacar que el desarrollo de la clase, así como el trabajo realizado por los grupos quedará grabado para su posterior análisis.

Método de análisis

Para analizar los datos se realiza un estudio de casos múltiple (Stake, 2007), pues se tiene un interés intrínseco en un caso particular y que permite profundizar en los distintos factores que se pueden identificar, sin el interés de generalizar a partir de los resultados. De este modo, de acuerdo al marco teórico Espacio de Trabajo Matemático (ETM) (Kuzniak, 2016, 2022), se observarán las génesis y planos verticales presentes para caracterizar el ETM personal (Menares-Espinoza y Vivier, 2022) de los estudiantes.

RESULTADOS Y CONCLUSION

Dado el análisis de los datos, en relación a la primera pregunta; ¿cuáles podrían ser las dimensiones de la réplica?, se observa que gran parte de los estudiantes intentan entregar dimensiones para el nuevo arco que consideran el doble o triple de las dimensiones originales, algunos de los cuales las obtienen aplicando factor de homotecia (Figura 6).

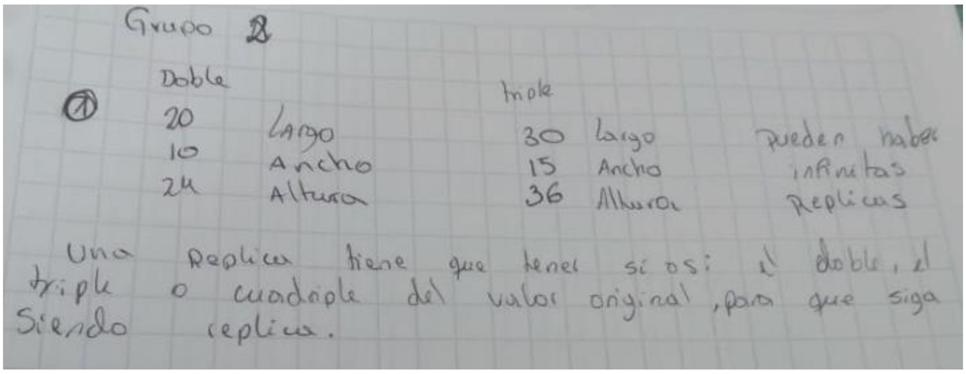


Figura 6: Dimensiones desde la multiplicación por un escalar (Génesis Instrumental).

En tal caso los estudiantes realizan la multiplicación por un escalar, lo que es utilizado como un artefacto simbólico. Se activa la *génesis instrumental*.

Cabe destacar que, en un comienzo, los estudiantes de forma inmediata intentan dar respuesta a la pregunta sin haber utilizado el applet de GeoGebra. Es así que el profesor recuerda a los estudiantes que pueden utilizar el applet. Solo un grupo entregó dimensiones erróneas, al determinar medidas para el arco réplica que obtuvieron a partir de sumar un mismo número a cada una de las medidas del arco original, ante lo cual el profesor les pregunta si lograron encontrar el arco réplica, con las dimensiones que indicaron, en el applet de GeoGebra. Los estudiantes comienzan a mover el deslizador para representar el arco con las medidas que indicaron, luego de unos minutos uno de los estudiantes del grupo manifiesta:

> 94 Estudiante1: [...] profesor, intentamos encontrar el arco, pero algo pasa, si logramos dejar el ancho, el largo del arco no tiene la misma medida que obtuvimos[...]. Los estudiantes muestran la figura obtenida en el applet al profesor.
>
> 95 Profesor: Pero, ¿ustedes que creen?, la figura que obtuvieron ¿parece una réplica del arco original?
>
> 96 Estudiante1: Sí, tiene la misma forma [...] nuestras medidas están mal, las medidas de la figura si están bien.

En esta situación, el applet de GeoGebra (*artefacto digital*) es utilizada como un instrumento [94], activándose la *génesis instrumental*, a la vez que observan la figura obtenida y logran compararla con la figura representativa del arco original [96], (*génesis semiótica*), lo que se transformó en una herramienta importante para que los estudiantes lograra constatar el error, por sus propios medios. En consecuencia se articula el *plano semiótico instrumental* $[Sem - Ins]$.

Es importante señalar que una vez que los estudiantes han dedicado mayor cantidad de tiempo a la manipulación del applet, todos los grupos logran concluir que existen infinitas posibles dimensiones para la réplica del arco, apoyando su respuesta desde la utilización del applet de GeoGebra.

P: ¿Por qué pueden ser infinitas?

E2: Porque puede ser el doble, el triple, etc.

E3: Además si uno mueve la figura, los puntos quedan sobre las líneas, por eso pueden ser en cualquier punto de las líneas, pueden ser muchas.

P: ¿muchas? ¿cuántas?

E3: ¡¡Infinitas profe!!

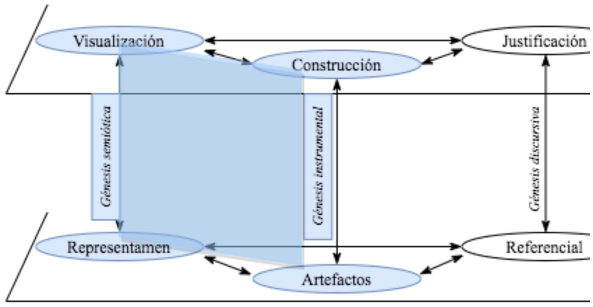
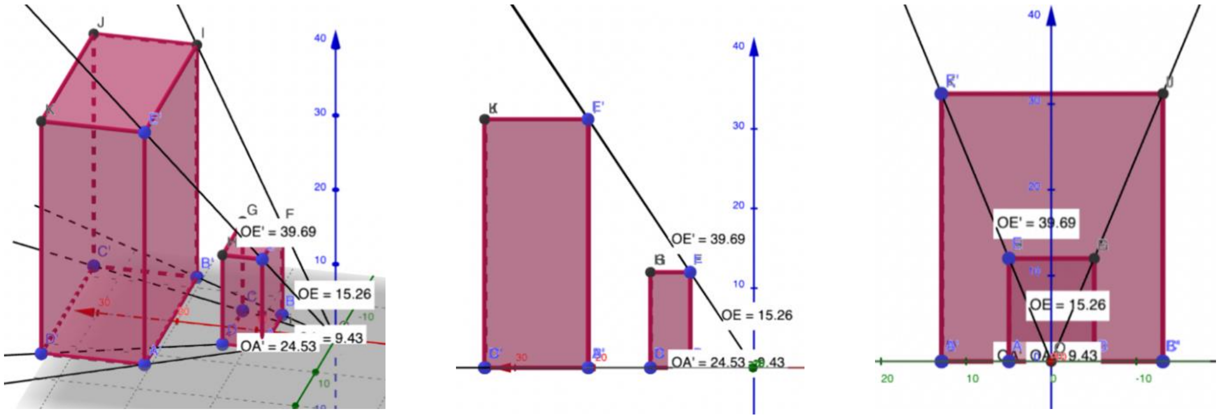


Figura 7: Idea de infinito. Activación de plano Semiótico-Instrumental $[\boldsymbol{Sem} - \boldsymbol{Ins}]$.

Los estudiantes utilizan el deslizador de la figura dinámica (*génesis instrumental*) y llegan a su respuesta al observar las líneas proyectivas presentes en la figura, relacionando la continuidad de estos segmentos de rectas con la idea de infinito (*génesis semiótica*). Se activa el *plano semiótico-instrumental* $[Sem - Ins]$ (Figura 7).

Por otra parte, uno de los resultados relevantes se presenta ante la necesidad de los estudiantes de poder observar la altura de los arcos en el applet de GeoGebra, dado que constantemente han centrado su atención en la vista 2D. Es en este momento que los estudiantes manifiestan dificultades para establecer las relaciones entre los objetos representados en la vista 2D y 3D, recurriendo finalmente a posicionar la vista 3D de maneral tal que se puedan observar solo dos dimensiones, es decir, a través de la herramienta de rotación del espacio transforman la vista 2D en 3D (Figura 8). Finamente logran observar la medida de la altura considerando vista lateral, frontal o posterior. Nuevamente la figura dinámica (*artefacto digital*) es utilizado como una herramienta para facilitar la visualización de nuevas representaciones de los objetos. Articulación del *plano semiótico-instrumental* $[Sem - Ins]$.



Vista noroeste **Vista lateral** **Vista frontal/Vista trasera**

Figura 8: Posiciones del arco y su réplica en vista 3D, obtenidas por rotación (applet de GeoGebra).

Finalmente ante la segunda pregunta de la tarea, referente a la relación entre las dimensiones del arco réplica y las distancias de ambos arcos al punto en que se encuentra parado el arquitecto (centro de homotecia), la mayoría de los estudiantes logra determinar la relación, sin embargo sus argumentos se basan en la utilización de artefacto digital, sin evocar aspectos del referencial teórico. No obstante, en el momento del plenario e inmediatamente después de que el profesor realizara la institucionalización, surge la pregunta de un estudiante [187], que permite ampliar el problema:

187 Estudiante 3: [...]¿qué debería pasar con las medidas de la réplica si ahora la réplica debe ser más pequeña que el arco original?

188 Profesor: Muy buena pregunta [...] ¿qué crees tú?

189 Estudiante 3: Debería estar entre el punto [...] (refiriéndose al centro de homotecia) y el arco original, entonces las dimensiones deben ser más pequeñas (el profesor proyecta una pantalla digital para ir escribiendo lo que el estudiante le indicaba).

190 Estudiante 3: [...] por ejemplo si está a la mitad de distancia entonces las dimensiones del arco se reducen a la mitad y cuando es una réplica exacta, será del mismo tamaño de la original, por lo que corresponde a multiplicar por 1 las dimensiones originales (ver Figura 9).

191 Profesor: [...] y en general ¿cuál será el valor "K", si la réplica se encuentra entre el punto (centro de homotecia) y el arco original?

194 Estudiante 3: Ah!!! K debe ser mayor que cero y menor que uno.

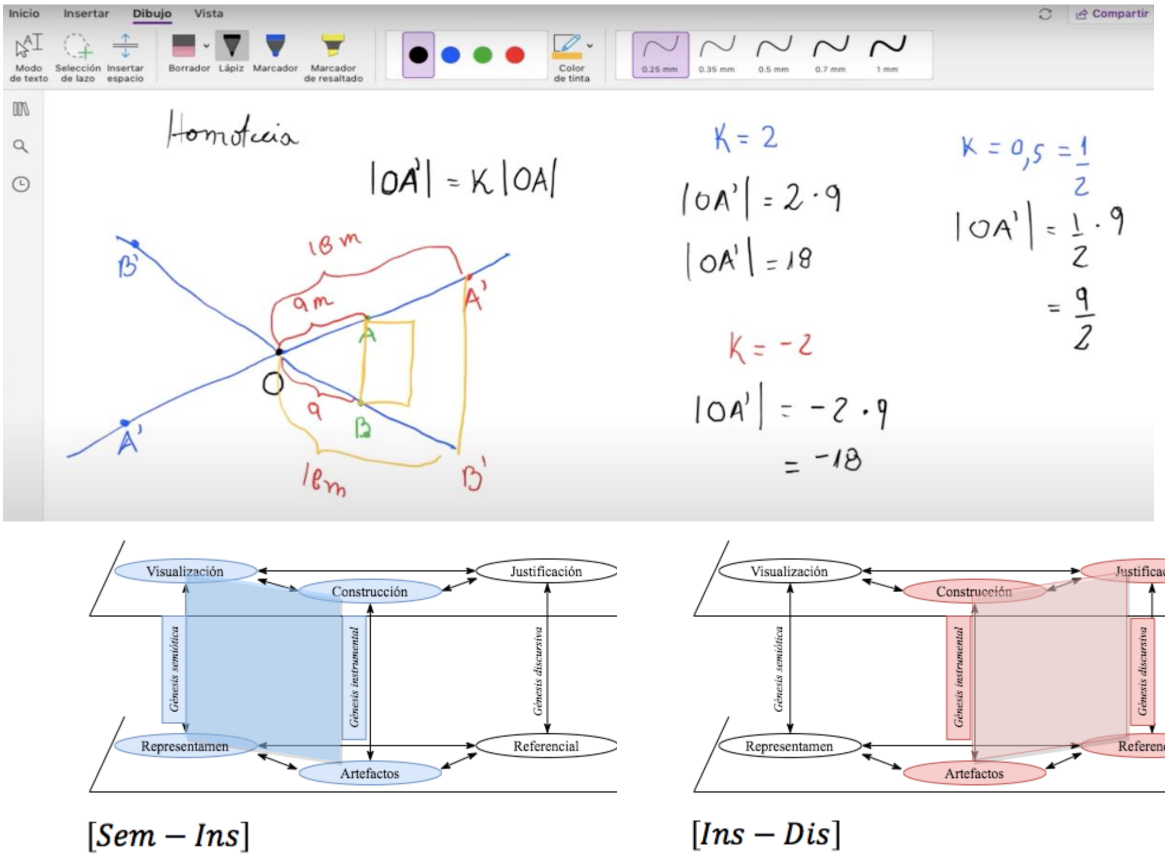


Figura 9: Posiciones del arco y su réplica en vista 3D, obtenidas por rotación (applet de GeoGebra).

El estudiante utiliza la ecuación $|OA'| = K|OA|$, como *artefacto simbólico*, para poder argumentar (Figura 9) en relación a elementos de la homotecia que no estaban contempladas en el problema, utilizando conocimiento de su referencial teórico [194], para argumentar en relación a las conjeturas que realiza sobre la homotecia [190]. De este modo, el estudiante logra realizar conclusiones a partir de la experimentación (*planos semiótico-instrumental* $[Sem - Ins]$ y *plano instrumental-discursivo*$[Ins - Dis]$.

Finalmente es posible afirmar que dadas las características de la tarea los estudiantes lograron establecer relaciones entre los elementos presentes en la homotecia, en donde la utilización de la herramienta digital (applet de GeoGebra) facilitó a los estudiantes la visualización, la manipulación de los objetos representados, así como la posibilidad de validar o refutar sus conjeturas, concordando con Ferrarello et al. (2018), de Sousa (2021), Dana-Picard (2006) y Salazar (2006). Todos los estudiantes lograron expresar que existen infinitas posibilidades de dimensiones para el nuevo arco, haciendo referencias a los objetos representados. No obstante, un aspecto a destacar son las dificultades que poseen los estudiantes para establecer relaciones entre los objetos representados en la vista 2D y 3D, utilizando principalmente la vista 2D, para luego posicionar la vista 3D de manera tal que solo se visualicen dos de las tres dimensiones. Esto puede llegar a ser un obstáculo considerable para el estudio de la geometría tridimensional, presentándose así un aspecto a abordar en futuras investigaciones. Por otra parte, un punto importante a destacar es que los estudiantes dan muestras de que carecen de referencial teórico o bien de las etiquetas de los conceptos involucrados, ya que presentan dificultades al comunicar su trabajo, dificultando la fluidez del desarrollo de la clase, y la comunicación entre los estudiantes y el profesor. Se puede decir que la tarea permitió activar los *planos semiótico-instrumental* ([Sem-Ins]) e *instrumental-discursivo* ([Ins-Dis]), lo que bajo la teoría del ETM da cuenta de un trabajo matemático más completo por parte de los estudiantes (Kuzniak & Richard, 2014, 20016, 2022). Sin embargo, pese a que el diseño de la tarea permitió abordar la homotecia sin dar realce a la razón de homotecia, la tarea no logró propiciar un tránsito adecuado entre los objetos de la vista 2D y 3D, lo que da cuenta de las dificultades de orientación espacial que tienen los estudiantes, de ahí la importancia de diseñar tareas que permitan potenciar el trabajo matemático de geometría en el espacio. Por otra parte, la tecnología ha sido y seguirá siendo una herramienta importante y en constante cambio al servicio de la educación, sin embargo, por sí sola no es suficiente, debemos ampliar y actualizar nuestros conocimientos de tecnología para poder ligarlo a nuestros conocimientos didácticos de la disciplina, y de esta manera lograr utilizar de manera adecuada sus múltiples elementos con fines en una educación matemática acorde a las características y demandas del siglo XXI.

REFERENCIAS

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Grupo editorial Iberoamérica.

Cortes, A. C., y Riascos, J. J. (2019). *Una aproximación al concepto de homotecia a partir de la noción de proporcionalidad geométrica en séptimo grado*.

Dana-Picard, T. (2006). Plane transformations in a complex setting I: Homotheties-translations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *37*(6), 726–734. https://doi.org/10.1080/00207390500064247

de Sousa, R. T., Alves, F. R. V., y de Azevedo, I. F. (2021). Categories of intuitive reasoning and GeoGebra 3D: An experience with Brazilian students. *LUMAT, 9*(1), 622–642. https://doi.org/10.31129/LUMAT.9.1.1618

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* (Vol. 5, pp. 37–65). https://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/Annales_didactique/vol_05/adsc5_1993-003.pdf

Ferrarello, D., Mammana, M. F., y Pennisi, M. (2018). Magic of centroids. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(4), 628–641. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1418917

Gómez-Chacón, I. M. (2022). Mathematics Teachers' Knowledge and Professional Development: A Cross-Case Comparison Study. In E. and R. P. R. Kuzniak Alain and Montoya-Delgadillo (Ed.), *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 229–246). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_10

González, Y., Arias, I., y Picado, M. (2020). La Homotecia : Análisis conceptual y análisis de contenido. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *33*, 283–294.

Kuzniak, A. (2022). The Theory of Mathematical Working Spaces—Theoretical Characteristics. In E. and R. P. R. Kuzniak Alain and Montoya-Delgadillo (Ed.), *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 3–31). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_1

Kuzniak, A., y Richard, P. R. (2014). Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. Revista Latinoamericana de Investigación En *Matemática Educativa*, *17*(4(I)), 17–27. https://doi.org/10.12802/relime.13.1741b

Kuzniak, A., Tanguay, D., y Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM - Mathematics Education*, *48*(6), 721–737. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x

Menares Espinoza R., Vivier, L. (2022). Personal Mathematical Work and Personal MWS. In E. and R. P. R. Kuzniak Alain and Montoya-Delgadillo (Ed.), *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 91–120). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_5

Ministerio de Educación Chile. (1369). *Programa de Estudio 3° y 4° Medio*. Ministerio de Educación.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Sgreccia, N., Amaya De Armas, T., y Massa, M. (2012). ¿Qué dicen los docentes, futuros docentes y formadores de docentes sobre su formación en didáctica de la geometría 3d? In *Quaderni di Ricerca in Didattica* (Mathematics) (Vol. 22).

Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos. Segunda edición*; Ediciones Morata, SL Madrid, España.

LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES: LA TRANSICIÓN DE UNA A DOS VARIABLES REALES

Silvia Soledad López

Universidad Viña del Mar

La optimización se enseña inicialmente con las funciones de una variable en educación secundaria, con el criterio de la primera derivada. El criterio de la segunda derivada también puede utilizarse para determinar la naturaleza de los puntos críticos. Sin embargo, lo que se explica para las funciones de una variable, con el uso de la monotonía, no puede extenderse a funciones de dos variables. Se diseñó una situación didáctica y se implementó con estudiantes de ingeniería en Chile. Se consideró la visualización utilizando GeoGebra, se estudiaron aproximaciones locales de primer y segundo orden usando el polinomio de Taylor. Los resultados muestran que la visualización local de la aproximación de Taylor de primer orden fue bastante fácil de entender para los alumnos (curva y tangente), pero que la visualización local de la aproximación de Taylor de segundo orden (curva y parábola osculatoria) lo fue mucho menos.

Palabras claves: *visualización, función, optimización, espacio de trabajo matemático.*

MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

En primer lugar, se presenta la teoría del espacio del trabajo matemático (ETM), los paradigmas del análisis y las perspectivas de localización, y a continuación se define la metodología.

La teoría del ETM

El objetivo de la teoría ETM es describir, analizar, diseñar y comprender el trabajo matemático propuesto a un individuo en una institución y realizado poréste. Para caracterizar el trabajo matemático, la teoría considera aspectos epistemológicos y cognitivos que se organizan en dos planos: plano epistemológico y plano cognitivo. En cada uno de estos planos se consideran tres componentes, organizados en tres dimensiones, también denominados génesis, que se resultan esenciales en el trabajo matemático (figura 1):

- La *Génesis semiótica* considera la visualización como un proceso cognitivo donde un individuo da significado a los signos matemáticos (considerados, por ejemplo, los registros de representación semiótica, Duval, 1993) de la componente representamen;
- La *Génesis instrumental* en la que un individuo transforma un artefacto (que puede ser material, digital o simbólico) en un instrumento para utilizarlo en unproceso cognitivo de construcción;
- La *Génesis discursiva* en la que un individuo utiliza el conocimiento matemático (definiciones, teoremas, propiedades, ...) del referencial teórico

en el proceso cognitivo de comprobación (en sentido amplio).

Obviamente, estas tres dimensiones están interrelacionadas. Se necesitan conocimientos para poder visualizar los signos matemáticos o utilizar eficazmente un artefacto; la demostración utiliza representaciones semióticas de los objetos matemáticos; la construcción crea nuevos signos matemáticos, etc. La teoría del ETM pretende comprender el papel de cada una de estas dimensiones y componentes en un sistema integrado que da lugar al trabajo matemático.

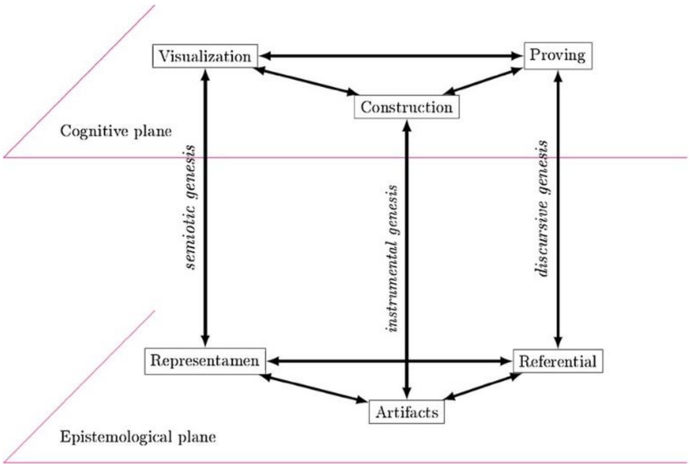


Figura 1: El modelo de los ETM (Kuzniak et al., 2016, p.725)

La articulación y las interrelaciones entre los diferentes géneros se presentan a través de planos verticales. Cada uno de ellos destaca el papel preponderante de dos planos el plano semiótico-instrumental *[Sem-Ins]*, el plano instrumental-discursivo *[Ins-Dis]* y el plano semiótico-discursivo *[Sem- Dis]*.

Los artefactos desempeñan un papel crucial en nuestro estudio. Pueden ser de tres tipos:

- Materiales, como brújulas o transportadores, que no se tratan aquí;
- Digitales, como las calculadoras o los programas informáticos dinámicos como GeoGebra, estos últimos juegan un rol importante en nuestro estudio;
- Artefactos simbólicos, son rutinas o algoritmos que se utilizan en el proceso de construcción sin hacer ninguna conexión con la dimensión discursiva donde se justifican.

Los artefactos simbólicos son importantes en nuestro estudio, como las reglas de cálculo de la derivada y el criterio de la segunda derivada (si $f'(a)=0$ y $f''(a)>0$, entonces a es un punto mínimo de f). Los artefactos simbólicos son muy útiles en el trabajo matemático, debido a su eficacia. Sin embargo, es importante que el individuo sea capaz de reflexionar, de dar sentido al uso de los artefactos simbólicos en algunos casos: cuando el artefacto no da respuestao da una respuesta extraña. En nuestro estudio sobre la enseñanza y el aprendizaje de la optimización, nos centraremos en el criterio de la(s) segunda(s) derivada(s) parcial(es), especialmente en el caso donde el determinante de la matriz Hessiana es igual a cero.

Sin embargo, también es posible analizar la enseñanza institucional: ¿en la enseñanza del criterio de la segunda derivada es promovida la aparición del sentido? Si sólo se pide a los alumnos que utilicen un artefacto simbólico en una dimensión instrumental, sin reflexionar sobre él y sin hacer ningunaconexión con las otras dos dimensiones, consideramos que esta institución, no organiza la enseñanza para dar sentido a este artefacto simbólico. Cabe señalar, que el propósito de esta investigación no es definir qué es el "sentido" (para esto, véase, por ejemplo, Thompson, 2013), sino más bien considerar las condiciones que favorecen la emergencia del significado, donde es posible asociar este significado con la noción de conceptualización, que, para Vergnaud (1991), consiste en crear vínculos entre conceptos en un campo conceptual.

Paradigmas del análisis

La noción de paradigma es un elemento clave de la teoría del ETM que tiene por objeto comprender el trabajo realizado por un individuo, su orientación,las elecciones realizadas por una institución y, a continuación, caracterizar el trabajo aceptado por una comunidad o una institución. Dependen de un campomatemático, lo que permite tener en cuenta la especificidad del trabajo matemático en cada campo. Montoya y Vivier (2016) definieron los tresparadigmas del análisis:

AN1 que permite interpretaciones, de manera implícita, sobre la base de la geometría, el cálculo aritmético o el mundo real;

AN2 donde las reglas del cálculo se definen y aplican independientemente dela reflexión, y de la existencia y naturaleza de los objetos matemáticos involucrados;

AN3 se caracteriza por un trabajo, posiblemente topológico, sobre la aproximación (desigualdades, despreciabilidad, ...) y las vecindades; la

existencia y la naturaleza de los objetos matemáticos establecidos teóricamente.

Por ejemplo, cuando se utiliza el artefacto simbólico del criterio de la segunda derivada, se trabaja en el paradigma AN2. Al visualizar un gráfico, o una tablade valores, llegar a la conclusión de que la función tiene un punto mínimo es un trabajo en el paradigma AN1. En un caso donde el determinante de la matriz Hessiana es igual a cero, utilizar el hecho de que $f'''(a)$ es distinto de cero en una aproximación local para concluir que a no es un punto óptimo es un trabajo en el paradigma AN3 (aunque puede convertirse en un artefacto simbólico).

Por lo tanto, encontrar el significado también depende del cambio de paradigma, lo que implica una articulación entre los diferentes paradigmas.Sin embargo, la mayoría de las instituciones de enseñanza hacen hincapié enel paradigma AN2, ya que da valores precisos y es bastante fácil de evaluar; elAN1 se utiliza, pero a menudo sólo para ilustrar, por ejemplo, para mostrar la gráfica de un resultado, ya que se considera que no es lo suficientemente matemático o no es preciso; el AN3 suele ser difícil paralos estudiantes y se enseña en análisis avanzados.

Perspectivas de localización

Ampliando el trabajo de Vandebrouck sobre las funciones (Vandebrouck,2011), Montoya, Páez, Vandebrouck y Vivier (2018) afirman que la adopción de diferentes perspectivas en la visualización (no icónica) de objetos matemáticos es una actividad cognitiva crucial en el campo del análisis matemático. Destacan tres perspectivas de localización:

- *La perspectiva puntual (PP)* implica objetos y nociones vistos como números reales aislados. Ejemplos: el valor $f(x_0)$ de una función f, el punto $M_0(x_0, f(x_0))$ en su curva, [...]
- *La perspectiva global (PG)* se refiere a los objetos vistos como un todo, en su totalidad, o al menos una gran parte de ellos. [...]. Por ejemplo, podemos considerar una función cuadrática como una función cuya curva es una parábola. [...]
- *La perspectiva local (PL)* es crucial en el campo del Análisis Real, [...]. Se trata de propiedades que se definen a partir de vecindades [...]. La precisión que proporciona el registro o el artefacto en cuestión es importante porque puede determinar la precisión de la vecindad. Por ejemplo, con GeoGebra, el máximo acercamiento a una curva se consigue cuando, visualmente, percibimos una línea recta. (Montoya et al., 2018, p.151).

La noción de Deconstrucción con Perspectivas de Localización (DWLP[12]):

"DWLP se refiere a la actividad cognitiva que consiste en adoptar al menos una de las tres perspectivas de localización (puntual, local o global)" (Montoya et al., 2018, p.151).

La visualización de los signos matemáticos nunca es un proceso puramente semiótico, ya que se relaciona con los conocimientos y nociones de quedispone un sujeto. Por lo tanto, es un proceso importante en la adquisición de significado. Para desarrollar el significado en el campo del análisis matemático, es necesario adquirir flexibilidad entre diferentes perspectivas.

METODOLOGÍA

Esta investigación ha consistido, en primer lugar, en definir cómo se enseña la optimización. Nuestra hipótesis es que esta enseñanza se reduce al uso de artefactos simbólicos (dimensión instrumental), con el criterio de la segunda derivada para las funciones de **R** a **R** y el criterio de las segundas derivadas parciales para las funciones de $\mathbf{R}^2$ a **R**. Este trabajo matemático no considera los otros elementos que faltan en el plano epistemológico y cognitivo y se propone esencialmente en el paradigma AN2.

Para validar esta hipótesis, se analizaron los programas de estudio y libros de texto que se relacionan con la optimización de funciones utilizados por los estudiantes de ingeniería chilenos al inicio de la universidad. Luego, se analizó una prueba propuesta durante el segundo año de universidad para la optimización de funciones de dos variables reales.

Después de validar la hipótesis en tres universidades chilenas (dos públicas y una

[12] Por sus siglas en inglés Deconstruction with Localization Perspective in the Learning of Analysis (DWLP).

privada) que no promueven la aparición del sentido en este estudio, y dado que éste no aparece de manera espontánea, se diseña una secuencia de enseñanza considerando una DWLP con la visualización local en la gráfica de funciones utilizando un software (GeoGebra), y basándose matemáticamente en las aproximaciones de Taylor de primer y segundo orden. El propósito es realizar un trabajo matemático completo que articule los paradigmas AN1 y AN2 (y elementos de AN3). El objetivo es identificar en la enseñanza de la optimización de funciones lo que puede facilitar la aparición del sentido.

ETM institucional

Universidad: estudios de ingeniería

El ETM observado en los libros de texto de Budnick (2007), Haeussler y Paul (2003) no menciona el polinomio de Taylor, y el estudio de la optimización se reduce al uso de artefactos simbólicos, es decir, las derivadas, que se utilizan para clasificar los puntos críticos utilizando el criterio de la segunda derivada: el enfoque se centra esencialmente en el paradigma AN2.

En el segundo curso de cálculo universitario, se inicia la optimización de funciones de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}$. El trabajo es muy similar al del primer año para las funciones de **R** a **R**. A pesar de la complejidad de la optimización de funciones de dos variables, los libros de texto trataron de presentarla de la misma manera: en el caso de que el determinante del hessiano sea positivo, se utiliza el signo de la segunda derivada parcial $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ signo que no es un invariante de la matriz pero que es de gran interés ya que juega el mismo papel que la segunda derivada para las funciones de una variable (si es positivo es un mínimo, si es negativo es un máximo). Desgraciadamente, no se puede extender fácilmente a más variables. La justificación matemática presentada en ambos manuales no considera la perspectiva local; no hay ningún trabajo en el paradigma AN1. Sin embargo, en uno de los libros de texto se menciona el polinomio de Taylor de segundo orden: se afirma, sin ninguna justificación, que alrededor de un punto lafunción y el polinomio son similares, pero esto, sólo es cierto en el caso en que el determinante de la matriz Hessiana sea distinto de cero.

¿Qué significado tiene para los estudiantes?

Parece que cada vez se le da menos sentido a la optimización de funciones durante la experiencia de aprendizaje de los estudiantes, desde el colegio hasta la universidad. Por ello, se pidió a los estudiantes de ingeniería de segundo año de universidad que resolvieran problemas de optimización. No eran problemas estándar: se proporcionó la superficie que representaba las funciones y, en la mayoría de las tareas, los puntos críticos tenían el determinante de la hessiana igual a cero, pero había un óptimo (bastante) evidente, para $f(x,y)=2+x^2-2xy+y^2+x^4$. Se esperaba que los alumnos utilizaran la gráfica o identificaran el óptimo evidente después de intentar aplicar el teorema. Pero, aunque se presenta la gráfica de la función, los alumnos siempre recurren al registro algebraico y a los artefactos simbólicos para utilizar el criterio de las segundas derivadas parciales.

La visualización local

La visualización en el ámbito del análisis matemático (o cálculo) es específica (Kuzniak, Montoya y Vivier, 2016) y la noción de perspectiva local es fundamental. Por supuesto, un trabajo en el paradigma AN2, que abarca lo quecomúnmente se llama cálculo, se limita generalmente a perspectivas puntualesy globales. Pero este tipo de trabajo, o bien no permite comprender el trabajo realizado (¿por qué f es creciente cuando f' es positiva?), ya que se apoya esencialmente en artefactos simbólicos (cálculos de derivadas y resolución de inecuaciones, por ejemplo), o bien no se domina y comprende suficientementepara ampliar el abanico de problemas que se pueden resolver (¿existe un óptimo cuando $f'(a)=f''(a)=0$? ¿cómo se puede extender el teorema de optimización a las funciones de varias variables? ¿cómo se pueden tratar los casos degenerados?).

Una de las claves para acceder al significado es resaltar el carácter local de las nociones, que a menudo está contenido en los artefactos simbólicos. El ejemplo de la tangente, una aproximación de orden 1, que se presenta a continuación ha sido ampliamente tratado en la enseñanza de las matemáticas en este sentido, es decir, mediante el uso de un programa informático que permite ampliar un punto de una curva que representa una función hasta visualizar una línea recta que puede vincularse a la derivada en el punto considerado. La idea es utilizar un artefacto digital para visualizar los signos producidos en la pantalla y así desarrollar el conocimiento matemático, es decir, realizar un trabajo completo[13]. Este es el punto de vista desarrollado posteriormente en nuestra investigación para las aproximaciones de orden 2.

Un experimento con estudiantes de ingeniería

Se diseñó y probó una situación de aprendizaje con estudiantes de segundo año de ingeniería de la UVM (Universidad Viña del Mar), en un curso llamado "Cálculo en varias variables". Los estudiantes no tenían conocimientos previos sobre el polinomio de Taylor. Trabajaron en parejas, con GeoGebra, y la discusión entre grupos fue bastante fluída. La atención se centró en dos tareas sobre funciones de una variable: visualizaciones locales y optimización.

El objetivo de la primera tarea era obtener aproximaciones lineales y cuadráticas de una función f en la vecindad de un punto. Se diseñó un trabajo con dimensiones semióticas e instrumentales en el paradigma AN1, utilizando GeoGebra para desarrollar una Perspectiva Local (PL) para la aproximación de primer orden (tangente), y luego para la aproximación de segundo orden (parábola osculatriz).

En primer lugar, se pidió a los alumnos que dibujaran la curva de $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$ en

[13] En el ETM trabajo completo significa un trabajo que permita activar las tres génesis y planos de forma coordinada.

GeoGebra, y la tangente en $A(a, f(a))$ utilizando la herramienta GeoGebra, dond a es un deslizador. GeoGebra crea automáticamente una función afín g para la tangente en la ventana algebraica. A continuación, se pide a los alumnos que amplíen varias veces la imagen y expliquen lo que ocurre gráficamente entre la curva y la tangente en el punto A.

La segunda parte corresponde a una aproximación cuadrática: consistía primero en dibujar la curva de la función $h(x) = g(x) + b(x - a)^2$ (polinomio de Taylor de orden 2, *g(x)* es la parte lineal) donde b es un deslizador. Con los zooms y el deslizador b, se pidió entonces a los alumnos, para tres valores de a en la parte convexa de la curva, -1.6 (curva decreciente), 1.4 y 1.7 (curva creciente), que respondieran a la siguiente pregunta: "¿cuáles son los valores de b que dan la mejor aproximación local $h(x)$ de la función $f(x)$ alrededor del punto $(1{,}7, f(1{,}7))$?" Con esta pregunta, se esperaba que los alumnos obtuvieran los mejores valores de b para los que la parábola se pareciera visualmente a la curva de la función f. La comparación entre $f''(a)$ y b tenía como objetivo rechazar $b = f''(a)$ y conjeturar el valor $b = f''(a)/2$.

La visualización gráfica con aproximaciones de primer y segundo orden a escala local fue una novedad para los alumnos. En general, los resultados obtenidos para el primer orden muestran una PL bastante buena con la visualización de la propiedad de micro-linealidad[14] (Maschietto, 2002, 2004), apesar de que algunos estudiantes sólo tomaron una PP inadecuada.

La aproximación cuadrática fue más difícil de trabajar para los estudiantes: la mayoría de ellos adoptaron una Perspectiva Global (PG) para responder y, aunque hicieron algunos acercamientos para completar la tabla que se les dio (Fig. 2), lamentablemente no fue suficiente. Es posible rechazar el valor $b = f''(a)$, pero, aunque el valor de $f''(a)/2$ se encontraba generalmente en los intervalos dados por los alumnos, estaba cerca del borde de estos intervalos, a veces con una gran longitud, y es bastante difícil hacer una conjetura sobre este valor. Para cada intervalo $[b_1,b_2]$, se calcula $b/f''(a)$ y se compara con 0.5: los valores $0.5 – b_1/f''(a)$ y $b_2/f''(a) – 0.5$, se proporcionan en la Tabla 1. Un valor negativo significa que $f''(a)/2$ no está en el intervalo $[b_1,b_2]$. La conjetura $b \neq f''(a)$ es bastante clara, incluso con intervalos aproximados, en contraste con la conjetura $b=f''(a)/2$ que necesita valores $|0{,}5-b/f''(a)|$ inferiores a 0.1.

[14] Una recta es obtenida entre la función f y la tangente, después de varios zoom con un trabajo instrumental, vemos aparecer una recta, una propiedad de las curvas llamada *micro-linialidad* en Maschietto 2002, 2004, explotando las ideas de Tall (1985).

Completa la siguiente tabla:

a	-1.6	1.4	1.7
$f''(a)$	7,8232167	2,327536	18,528389.
b	3,4 - 5,2	1 - 1,2	7 - 14

Figura 2: Respuesta del Grupo 1

a	-1.6		1.4		1.7	
G2	0.07	0.05	0.07	0.10	0.09	0..01
G1	0.07	0.16	0.07	0.02	0.12	0.26
G7/G8	0.07	0.16	0.16	0.02	0.08	0.00
G4	0.09	0.22	0.20	0.02	0.18	-0.01
G5	0.14	-0.07	0.24	-0.07	0.10	-0.01
G6	0.49	-0.19	0.24	-0.07	0.49	-0.11
G3	0.50	-0.47	0.16	-0.07	0.50	-0.49

Tabla 1: desviaciones 0.5–*b/f”*(*a*) y *b/f”*(*a*)–0.5 para los intervalos dados por grupos, de los intervalos “mejores” a los “peores”

En la Tabla 1, podemos ver que sólo G2 tomó una PL completa. Para G1, G7y G8, la PL fue sólo parcial. Estos grupos parecen haber dado sentido a su trabajo, ya que, para todos, excepto G7, respondieron "no" a la pregunta "¿es $b=f''(a)$?". Sin embargo, sólo G2 conjeturó "$b=f''(a)/2$"; de hecho, los demás intervalos son demasiado grandes. El intervalo más grande de G1 para $a=1.7$ puede ser el resultado de demasiados zooms en el punto donde la tangente y lacurva coinciden en la pantalla.

Parece que los grupos G3, G4, G5 y G6 no dieron sentido a su trabajo. A pesardel posible descarte de $b=f''(a)$ por los intervalos dados, ninguno de los otros grupos hizo ninguna conjetura sobre la relación entre b y $f''(a)$, y esperaron a recibir la institucionalización por parte del profesor. Los intervalos encontrados por estos cuatro grupos estaban muy lejos de lo esperado, y muchos de los intervalos no contenían 0.5 (valor negativo en la Tabla 1).

Sin embargo, es bastante difícil entender con precisión el trabajo realizado porlos grupos, ya que cada uno posiblemente utilizó diferentes zooms y desplazamientos de pantalla, con diferentes visualizaciones de la relación entre la curva y la parábola.

Según los diferentes puntos a investigar, $a=1.4$ parece más fácil, $a=1.7$ es más difícil, y la visualización es mejor en el lado en el que la pendiente “baja” (a la derecha si $f'(a)<0$ y a la izquierda si $f'(a)>0$). También parece que cuanto mayor sea $|f'(a)|$, peor será la aproximación. Pero podemos esperar una influencia de segundo orden ($f''(a)$ y la curvatura) en la visualización. Estos puntos deberían ser explorados en futuras investigaciones.

La segunda tarea pretende estudiar y clasificar los puntos críticos de $f(x)=x^4/2-2x^3+8$, utilizando el trabajo basado en aproximaciones de Taylor de primer y segundo orden, con dimensiones principalmente semióticas y discursivas en el paradigma AN2. El paradigma AN1 fue favorecido por los estudiantes, que experimentaron muchas dificultades para activar la dimensióndiscursiva: 5 de los 9 grupos dieron una respuesta basada en lo que observarongráficamente, y ningún grupo escribió nada sobre los resultados obtenidos algebraicamente. Generalizar sus resultados de forma algebraica fue difícil y los grupos que contestaron lo hicieron de forma incorrecta. Por ejemplo, el grupo más avanzado, G9, escribió: "En el punto mínimo, el polinomio de Taylor forma una parábola cóncava hacia arriba", sin hacer ninguna conjetura algebraica.

CONCLUSIONES

El resultado más significativo de este estudio se refiere a la visualización local. El fenómeno de la competencia entre PL y PG pone de manifiesto la dificultad que tienen los estudiantes para entender qué es una aproximación local. Estos resultados apoyan los de Montoya et al. (2018) respecto a que la flexibilidad entre perspectivas de localización es importante para el análisis de la enseñanza y el aprendizaje. Este trabajo muestra queel uso de software como GeoGebra puede potencialmente tener un efecto en lavisualización, considerando la competencia entre PL y PG. Esta idea innovadora podría utilizarse para enseñar la aproximación de Taylor.

De hecho, los resultados de este estudio sugieren que el trabajo que se da a los estudiantes en la universidad sobre la aproximación de Taylor se realiza principalmente en un paradigma AN2 con el uso de artefactos simbólicos para calcular las derivadas. Por ejemplo, López (2018) analiza el trabajo propuesto a los alumnos de primer curso de matemáticas de la Universidad de París al estudiar el punto crítico de una cardioide: este trabajo se limita al uso del teorema de clasificación de los puntos críticos de las curvas planas parametrizadas, no es justificado ni explicado, utilizando el cálculo de dos aproximaciones de Taylor. Estas aproximaciones de Taylor sólo se utilizaron para determinar los dos enteros que entran en el enunciado del teorema. Sin embargo, estas aproximaciones locales podrían (al menos en este ejemplo) utilizarse para justificar el teorema de clasificación.

Por supuesto, cambiar los hábitos en la práctica pedagógica de los profesores universitarios y el trabajo tradicional en el paradigma AN2 sin tecnología sería un proceso a largo plazo.Por ejemplo, en esta investigación, no era habitual que el profesor dejara a los alumnos reflexionar sobre su trabajo, de manera que retrasara la institucionalización.

Es difícil saber si el experimento ha logrado su objetivo de permitir a los alumnos dar sentido a la optimización y al estudio local de las funciones. Se carece de datos, aunque se haya observado parcialmente el cambio de paradigmas y de representaciones, porque la actividad estaba estrechamente guiada para tener en cuenta el nivel matemático de los alumnos y también por el hecho de que se trataba de un nuevo tipo de trabajo. Es difícil saber si habrían sido capaces de activar las tres dimensiones y articular los planos del ETM solos, en particular la dimensión discursiva en el paradigma AN2. Aunque la visualización gráfica con aproximaciones locales no se logró del todo, los estudiantes lograron trabajar con el software, realizar todas las instrucciones con él como se esperaba, y observar los fenómenos generados. Este hallazgo es una contribución para apoyar futuras investigaciones y estáen línea con el trabajo de Kidron (2004), quien mostró que, en la enseñanza delpolinomio de Taylor, las ideas visuales intuitivas ayudan a la comprensión junto con el razonamiento analítico.

Al requerir el uso de la aproximación local, la tarea de optimización fue de gran dificultad para los estudiantes. Como mínimo, podemos concluir que hay que dedicar más tiempo a las aproximaciones locales de segundo orden de funciones de una variable (de hecho, se diseñó una nueva tarea con el profesor para trabajarlas funciones cuadráticas y las aproximaciones locales). Obviamente, la extensión a funciones de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}$ fue mucho más complejo para los estudiantes, enparticular debido a: la visualización en 3D, la consideración de dos variables en lugar de una, el nuevo trabajo sobre el polinomio de Taylor y la aproximación local, y el hecho de que los estudiantes no tenían conocimientosprevios de funciones cuadráticas de dos variables. Todos estos puntos deben ser considerados para futuras investigaciones.

REFERENCIAS

Budnick, f. (2007). *Matemáticas Aplicadas para Administración, Economíay Ciencias Sociales* (Mcgraw-Hill/Interamericana (éd.); Cuarta). Mac Graw Hill.

Duval, R. (1993). Registres de representation semiotique et fonctionnement cognitif de la pensee. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*, 37–65.

Haeussler, E., y PAUL, R. (2003). *Cálculo para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida* (A. E. Q. McDonald (éd.); Décima). Pearson Educación.

Kidron,I. (2004) Polynomial approximation of functions: historical perspective and newtools. *Int. J. Comput. Math. Learn.*, 8, 299–331.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, *48*, pp. 721–737.

López, S. (2018). La algebrización en un curso de curvas y superficies parametrizadas: una sesión de clase. In Montoya, E., Richard, P., Vivier, L., Gómez, I. M., Kuzniak, A., Maschietto, M., and Tanguay, D., editors, *Sixième Symposium sur le Travail Mathématique*, pp. 383–394, Valparaíso, Chili.

Maschietto, M. (2002). Quelques éléments de l'étude de la transition algèbreanalyse au lycée. In *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* 21-30 août 2001. La Pensée Sauvage éditions.

Maschietto, M. (2004). Le jeu entre point de vue local et point de vue globalen analyse: une ingénierie didactique à visée diagnostique au niveau première. In *Actes du colloque de Mulhouse* 8-9 mars 2002. IREM de Strasbourg.

Montoya, E., y Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM - Mathematics Education*, *48*(6), 739− 754. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0777-9.

Montoya Delgadillo, E., Páez Murrillo, R., Vandebrouck, F., y Vivier, L. (2018). Deconstruction with Localization Perspective in the Learning of Analysis. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4(1), pp. 139-160.

Tall,D. (1985) Chors, tangents and the Leibniz notation. *Math. Teach.*, 112, 48–52.

Thompson, P. W. (2013) In the absence of meaning. *Vital directions for research in mathematics education* (K. Leatham ed). NewYork, NY: Springer, pp. 57–93.

Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étudedes fonctions. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 16, pp. 149–185.

Vergnaud, G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Rech.Didactique Math*., 10, 133–170.

COORDINACIÓN DE LAS GÉNESIS SEMIÓTICA, INSTRUMENTAL Y DISCURSIVA EN EL ESTUDIO DE GRÁFICAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Daniela Soto-Henríquez[1], Romina Menares Espinoza[2]

[1]Instituto Profesional DUOC UC, [2]Universidad de Valparaíso

Este trabajo corresponde a una investigación sobre el rol de las gráficas y su relación con situaciones cotidianas para la construcción de la función exponencial. El objetivo principal es estudiar la coordinación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva en el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) personal de estudiantes de segundo año de secundaria, a partir de una tarea que demanda relacionar situaciones con gráficas y justificar las elecciones, y otra tarea que solicita formular funciones que se adecúen a una situación de la vida real. Las evidencias permiten concluir que el trabajo coordinado entre los elementos semióticos, instrumentales y discursivos permiten allanar el camino para la construcción del objeto función exponencial.

INTRODUCCIÓN

Según el currículum chileno, en el octavo año de escolaridad, los estudiantes comienzan a abordar funciones empezando por las algebraicas. En segundo año de Enseñanza Media (décimo nivel de escolaridad) comienzan el estudio de la función exponencial; la primera función no algebraica que se trabaja en la escuela (Ministerio de Educación [MINEDUC], 2012a). Una de las características de este objeto es que su tratamiento entrega una oportunidad para explorar propiedades del dominio del cálculo, como la propiedad de continuidad o el estudio del crecimiento.

En el campo de la Didáctica de la Matemática, investigaciones han abordado el problema de la función exponencial a nivel escolar y su gráfica. Sureda y Otero (2013), por ejemplo, muestran dificultades que existen en la transición desde lo lineal y lo algebraico, a lo exponencial, Mena–Lorca (2016) y Derouet et al. (2016) observan la dialéctica: concreto–denso–continuo en la enseñanza de este objeto. En relación a las gráficas, Tall y Vinner (1981) hacen la diferencia entre concept definition y concept image, abordando la continuidad observada en la gráfica de funciones, articulando ambos aspectos. A nivel universitario, estudios sugieren que "las gráficas son un soporte interesante para hacer emerger la cuestión de la continuidad" (Kuzniak et al., 2016a, p. 59) y proponen en su investigación una ingeniería didáctica para articular elementos que se encuentran parcelados en la enseñanza de la función exponencial, como la construcción de sucesiones o el estudio de la convergencia.

Nuestra investigación surge ante la necesidad de profundizar en el estudio de la función exponencial en la enseñanza secundaria. Así, planteamos como objetivo principal estudiar la coordinación entre las génesis semiótica, instrumental y discursiva en el ETM personal (Kuzniak et al., 2016b) de estudiantes de segundo año de Enseñanza Media, a partir de tareas basadas en gráficas, para la construcción de la función exponencial.

LA GRÁFICA COMO ELEMENTO DE ACTIVACIÓN DEL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO PERSONAL

En la investigación planteamos como soporte principal la observación y el análisis de gráficas por parte de los estudiantes. Así, intentamos que a través de significados que los estudiantes entregan a distintos elementos que se ponen a su disposición, sumado con sus propios recursos, ellos puedan plantear una construcción de la función exponencial.

En la primera tarea de este estudio participaron los 20 estudiantes de un curso, los cuales no habían estudiado previamente la función exponencial. En la segunda y tercera tarea participaron aquellos estudiantes escogidos de entre los 20, los que fueron organizados en grupos, según las cualidades de sus respuestas.

Los análisis se realizaron de acuerdo con la identificación de las génesis que se activan en el trabajo matemático (Kuzniak, 2011; Kuzniak et al., 2016b) y por cada génesis, se determinaron los elementos que permitieron su articulación. En particular, utilizamos la idea de planos verticales (Kuzniak y Richard, 2014) para describir la coordinación entre las génesis. Nos interesó encontrar las características del problema inicial y de las gráficas, que entregaron significados a los estudiantes para elaborar sus respuestas y que permitieron formular un ETM personal enriquecido.

Primera tarea: situaciones cotidianas versus gráficas adecuadas

Situación 1:	Crecimiento de bacterias “Las bacterias crecen hasta un tamaño fijo y luego se reproducen por fisión binaria (se dividen en 2), que corresponde a una forma de reproducción asexual. En condiciones óptimas, una bacteria puede crecer y reproducirse muy rápido tanto como cada 10 minutos.”
Situación 2:	Volumen de un tumor “Las células que forman algunos tumores tienen un ritmo de crecimiento acelerado, la detección temprana es un factor importante para el tratamiento exitoso de un paciente. Un tumor crece en un período de 5 meses en un 15% respecto de su volumen anterior, y cuando fue detectado tenía un volumen aproximado de $6mm^3$”
Situación 3:	Dinero recaudado por ventas de dulces: “Con el fin de recaudar dinero para comprar nuevos audífonos, Antonieta decide vender dulces en su curso, cada dulce tiene un valor de $30”
Situación 4:	Velocidad y tiempo de viaje “Juan vive en Viña del Mar y trabaja de lunes a viernes en Santiago. Todos los días se traslada en su vehículo para llegar al trabajo, en las mañanas, si logra salir de su casa a las 06:30 am, puede venirse tranquilamente manejando en carretera a 120 km/h, y así demora aproximadamente 1 hora y 15 minutos. Si sale más tarde de casa, como máximo puede alcanzar una velocidad de 90 km/h en carretera, por el alto tráfico, y en esas condiciones demora 1 hora y 40 minutos.”

Situación 5:	Cantidad de trabajadores vs días trabajados “Para un determinado proyecto inmobiliario, una empresa necesita contratar a 40 obreros para cumplir con la condición solicitada de terminar el trabajo en 20 días; si la empresa decide contratar 10 obreros para apoyar el trabajo, entonces el tiempo se reduce en 4 días.”

Tabla 1: Situaciones de la vida cotidiana presentadas a los estudiantes para el estudio de su ETM personal

El objetivo de la primera tarea fue potenciar el trabajo en la génesis semiótica, poniendo en juego diferentes elementos, en distintos registros. A partir de la actividad inicial, se propuso encontrar fundamentos, con el objetivo de que los estudiantes utilizaran el lenguaje y artefactos para justificar sus respuestas, logrando una coordinación con las otras génesis del ETM. La actividad se desarrolló de manera individual, y consistió en relacionar cinco situaciones de la vida cotidiana (Tabla 1), con gráficas dadas (Tabla 2), justificando cada elección.

Tabla 1: Situaciones de la vida cotidiana presentadas a los estudiantes para el estudio de su ETM personal

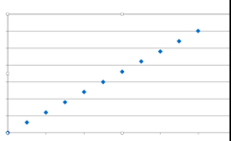
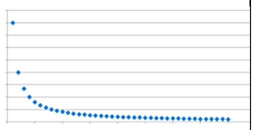
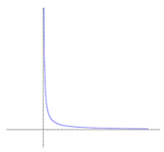
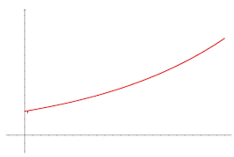
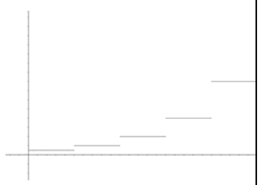
Gráfico 1	Gráfico 2	Gráfico 3	Gráfico 4	Gráfico 5
				

Tabla 2: Gráficas de funciones que los estudiantes debían relacionar con las situaciones mostradas en la Tabla 1

Segunda tarea: dominios y recorridos adecuados para cada función

La segunda tarea (Tabla 3), implementada al día siguiente, corresponde a determinar dominios y recorridos que se adecúan a cada situación. Para desarrollar esta tarea se conformaron equipos de trabajo escogidos por las investigadoras siguiendo criterios de selección según las respuestas que entregaron los alumnos en la primera tarea. . Para responder, cada estudiante tuvo a su disposición el desarrollo de la tarea anterior, lo que les permitió comparar y discutir sus respuestas con el resto del equipo.

Esta tarea demandaba que los estudiantes acordaran las relaciones de las diferentes gráficas con las situaciones planteadas, y determinaran el dominio y recorrido de la gráfica considerando la pertinencia de estos en el contexto de la situación. Esta etapa del estudio fue grabada, por lo que para los análisis se contó con los registros escritos y con las conversaciones de cada equipo.

Actividad 2:

En equipos, describan las situaciones, dominios y recorridos para cada representación gráfica.

Revisen nuevamente las asociaciones hechas en la actividad 1 y completen la siguiente tabla:

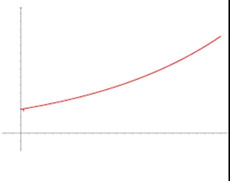
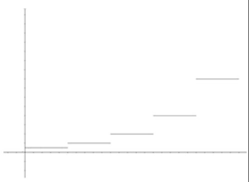
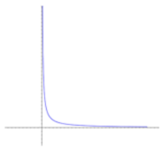
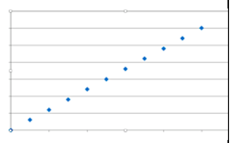
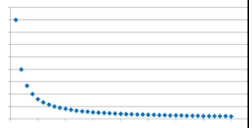
Gráfico 1	Gráfico 2	Gráfico 3	Gráfico 4	Gráfico 5
				
Situación	Situación	Situación	Situación	Situación
Dominio	Dominio	Dominio	Dominio	Dominio
Recorrido	Recorrido	Recorrido	Recorrido	Recorrido

Tabla 3: Enunciado de la segunda tarea

Tercera tarea: el paso de lo algebraico a lo no algebraico

Luego de que los estudiantes tomaran contacto con la función exponencial, relacionando gráficas con situaciones cotidianas y determinando dominio y recorrido –esto último promovía la necesidad de establecer una relación entre las variables–, se presentó la última tarea, basada en una propuesta ministerial (MINEDUC, 2012b) la cual demandaba que los estudiantes, en sus respectivos equipos, modelaran una situación de la vida real a través de una función exponencial (Figura 1). Como era la primera vez que los estudiantes del curso modelaban una situación utilizando tal función, la tarea consideró una serie de preguntas que guiaron el proceso (Tabla 4).

Situación:
Uno de los problemas en oceanografía es establecer la cantidad de luz que puede penetrar en distintas profundidades oceánicas. La ley de Beer-Lambert afirma que hay un modelo para este fenómeno, en el que están presentes las variables referentes a la cantidad de luz (se mide en [cal/cm2/s]), que llega a una profundidad de x metros y la intensidad de luz emitida desde un foco luminoso en la superficie.
Un buzo, registra la intensidad de luz y a x metros de profundidad en la siguiente tabla:

Profundidad en metros x	Intensidad de la luz y
0	20,00000
1	12,00000
2	7,20000
3	4,32000
4	2,59200
5	1,55520
6	0,93312

Figura 1: Situación planteada para la tercera tarea

Responde detalladamente a lo siguiente: 1) *¿Qué ocurre con la intensidad de la luz a medida que aumenta la profundidad?* 2) *¿De qué depende la intensidad de la luz registrada en el contexto del problema?* 3) *Identifica la variable dependiente y la independiente* 4) *¿Qué regularidad se encuentra presente en los datos que conforman la tabla?* 5) *Plantee un modelo algebraico que relacione ambas variables* 6) *¿Cuál será la intensidad de la luz a 8 metros de profundidad?* 7) *¿Qué valores puede tomar la variable x? , ¿Y cuáles podrá tomar la variable y?* 8) *Para tomar fotografías de buena calidad bajo el agua, sin flash y en las mismas condiciones en que se tomaron las medidas de la tabla, se necesita una intensidad de la luz de al menos 5 Cal/cm²/s. utilizando el modelo encontrado, determine la profundidad máxima para obtener estas fotografías.* 9) *Grafique la función obtenida que modela la situación (justifica la pertinencia de la gráfica utilizada) y verifica la respuesta a la pregunta anterior.*

Tabla 4: Secuencia de preguntas que guían la tercera tarea

PRINCIPALES RESULTADOS

Los resultados que mostramos en este trabajo tienen relación con el estudio de la coordinación de las distintas génesis que se activan en el ETM personal de los estudiantes. Presentaremos los análisis de las respuestas de dos estudiantes que participaron en la investigación (E13 y E20), por parecernos representativos en cuanto a la activación y coordinación de las génesis en sus ETM personales. En la segunda etapa, E13 y E20 conformaron un mismo equipo. Nos parece relevante observar cómo estos dos estudiantes se influencian para la resolución de la tarea en el trabajo en equipo.

Para la primera tarea, en la que los estudiantes eligen una gráfica y entregan justificaciones, se pueden identificar elementos articuladores de las tres génesis del ETM, pudiendo determinar así los planos que se activaron en cada respuesta dada por ellos.

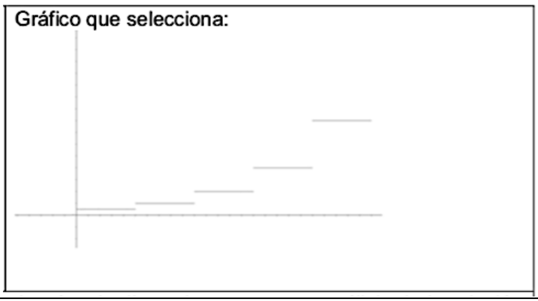
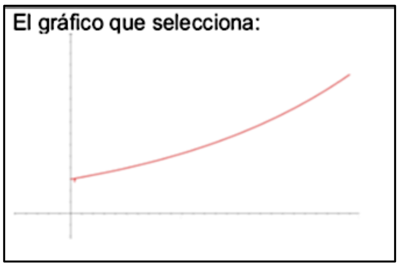
En la Tabla 5 mostramos un resumen de las respuestas de los estudiantes a la situación. Los recuadros oscuros corresponden a las respuestas correctas.

	Gráfico 1	Gráfico 2	Gráfico 3	Gráfico 4	Gráfico 5	No responde / no concluye
Situación 1	E1 - E4 – E7 – E9 – E12.		E6	E10 – E11 – E14 – E15 – E17 – E18 – E19 – E20.	E2 – E5 – E8 – E13 – E16.	E3
Situación 2	E3 – E5 – E6 – E8 – E10 – E11 – E14.		E12	E1 – E2 – E4 – E7 – E9 – E13 - E16 – E18.	E15 – E17 – E19 – E20.	
Situación 3	E13 – E16- E17- E18- E20.	E8	E2 – E6 – E7 – E9 – E14.	E5	E1 – E4 – E10 – E11 – E12.	E3 - E15 - E19
Situación 4		E2 - E6 E17	E1- E4 - E5 - E10- E11- E13- E15 - E16- E20	E8 - E12 - E18	E7 - E9 - E14	E3 - E19
Situación 5	E2 - E15	E1 - E3 -E4 - E5 - E7 - E9- E10 - E11 - E12 -E13 - E14 - E16 - E18 - E20	E8 - E17		E6	E19

Tabla 5: Resumen de respuestas a la primera tarea

Para la situación 1: "Crecimiento de bacterias", la mayoría de los estudiantes (8 estudiantes) escoge el gráfico 4 (por ejemplo, el estudiante E20, Figura 2B), lo cual era un error esperado. En la producción de E20 se observa que solo hace referencia al crecimiento de las bacterias, sin cuestionarse sobre el tipo de variable. E20 muestra un ETM con una génesis discursiva muy débil.

En esta misma situación, 5 estudiantes escogen el gráfico correcto (gráfico 5) (por ejemplo, el estudiante E13, Figura 2A). E13 hace referencia a las características de las variables aludiendo a "las bacterias no pueden pasar por un número decimal". Con esto entendemos que él comprende que la variable número de bacterias es una variable de tipo discreta. La frase "entre 20 y 25 minutos, seguirá habiendo 4 bacterias" da a entender que E13 comprende la continuidad de la variable tiempo y que la función se mantiene constante en cada intervalo, que es lo que observa en la gráfica. En este trabajo se muestra una coordinación entre las génesis semiótica y discursiva. Identificamos el plano [sem-dis] como el privilegiado en este ETM.

<table>
<tr>
<td>A 
</td>
<td>B 
</td>
</tr>
<tr>
<td>E13: “El 5, ya que es exponencial y además está solo limitado a ciertos números (2,4,8,16, etc.) como es el caso de las bacterias que no pueden pasar por un número decimal”

E13: “entre 20 y 25 minutos van a seguir habiendo 4 bacterias, por eso el grafico se salta espacios”</td>
<td>E20: “Porque va hacia arriba como la bacteria”</td>
</tr>
</table>

Figura 2 A y B: Producciones de los estudiantes E13 y E20 respectivamente, en respuesta a la situación 1: “Crecimiento de bacterias”

Para la situación 2: “Velocidad de un tumor”, la mayoría de los estudiantes (8 estudiantes) escoge la opción correcta (gráfico 4) (por ejemplo, E13, Figura 3A), aunque 7 estudiantes se inclinan por el gráfico 1. En el caso de E20 (Figura 3B), este, junto con 3 estudiantes más, seleccionan el gráfico 5. En la respuesta de E13 se pueden observar algunas confusiones en relación a la base de la función exponencial, sin embargo, la reconoce como tal y además observa un “crecimiento lento”. Identificamos una génesis semiótica muy nutrida, con distintos elementos que se visualizan, y también la coordinación con la génesis discursiva, al referirse a la función exponencial, según él, “en base a un porcentaje inicial, por eso aumenta lentamente”.

En el caso del estudiante E20, este muestra una confusión entre la representación de la función y “los días que crece el tumor”. No identifica variables y muestra desconexiones (Menares y Vivier, 2022). La génesis semiótica se identifica débilmente, y no habría otra génesis activada en este trabajo.

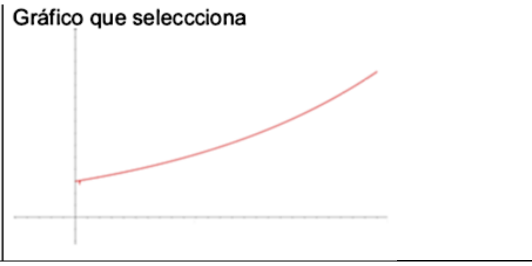
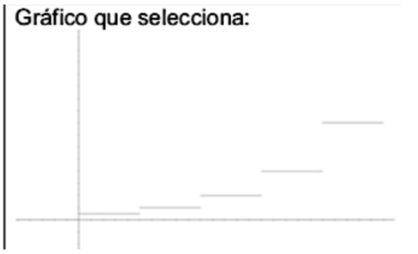
A 	**B** 
E13: “el 4, (refiriéndose al gráfico) ya que es exponencial, pero es menor ya que es un porcentaje (15%) del número entero, y el gráfico tiene una curva que va levemente aumentando” E13: “es exponencial, pero en base a un porcentaje del número original, por eso aumenta levemente”	E20: “porque aparecen 5 palitos, o sea los 5 días en que crece el tumor”

Figura 3 A y B: Producciones de los estudiantes E13 y E20 respectivamente, en respuesta a la situación 2: “Crecimiento de un tumor”

Para la situación 3: “Dinero recaudado por venta de dulces”, la mayor cantidad de respuestas estuvieron repartidas entre el gráfico 1, que era la respuesta correcta (5 estudiantes, entre ellos, E13 y E20, Figura 4), gráfico 3 (5 estudiantes) y gráfico 5 (5 estudiantes).

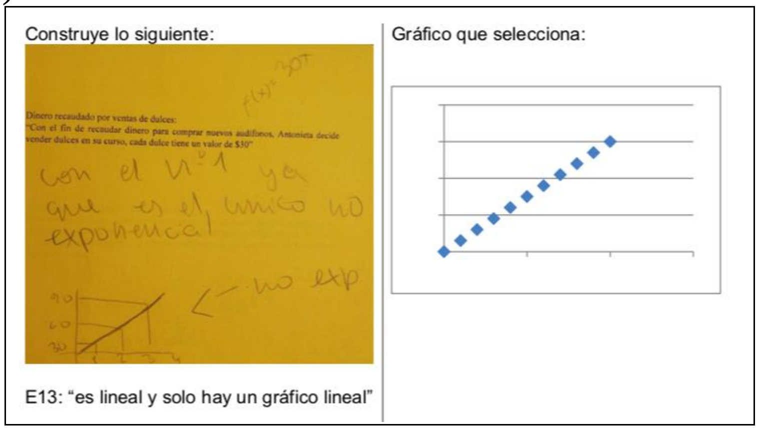


Figura 4: Producción del estudiante E13 en la situación 3: “Dinero recaudado por la venta de dulces”

La justificación que entrega E13 es que “es el único gráfico no exponencial”, y “es lineal y solo hay un gráfico lineal”. Acá observamos que la situación inicial no promovía la activación de algún plano vertical, por lo que en el ETM hay una coordinación entre las génesis semiótica y discursiva, pero el trabajo en ambas génesis es débil.

La situación 4: “Velocidad y tiempo de viaje” tuvo un porcentaje de éxito un poco mayor, pues 9 estudiantes la asociaron con el gráfico correcto (gráfico 3), y el resto la asoció de manera equitativa con los gráficos 2, 4 y 5.

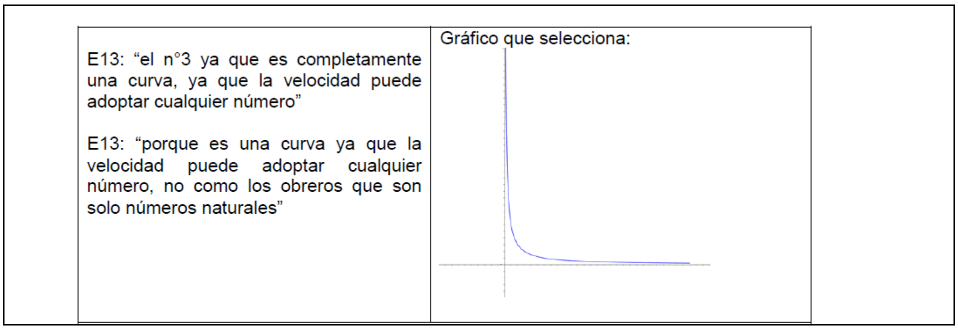


Figura 5: Producción del estudiante E13 en la situación 4: “Velocidad y tiempo de viaje”

La justificación de E13 (Figura 5) se basa en el argumento “la velocidad puede adoptar cualquier número”, dejando entrever el análisis que hace al tipo de variable. Para reforzar esta idea compara con la situación de los obreros donde solo se pueden considerar números naturales. Con esto podemos identificar la activación de las génesis semiótica y discursiva, y una coordinación entre ellas, por lo que se activa el plano [sem-dis].

La situación 5: “Cantidad de trabajadores vs días trabajados” fue la situación que tuvo el mayor porcentaje de éxito, con 14 estudiantes que la asociaron con el gráfico correcto (gráfico 2) y un número menor de estudiantes la asoció con el gráfico 1 y 3.

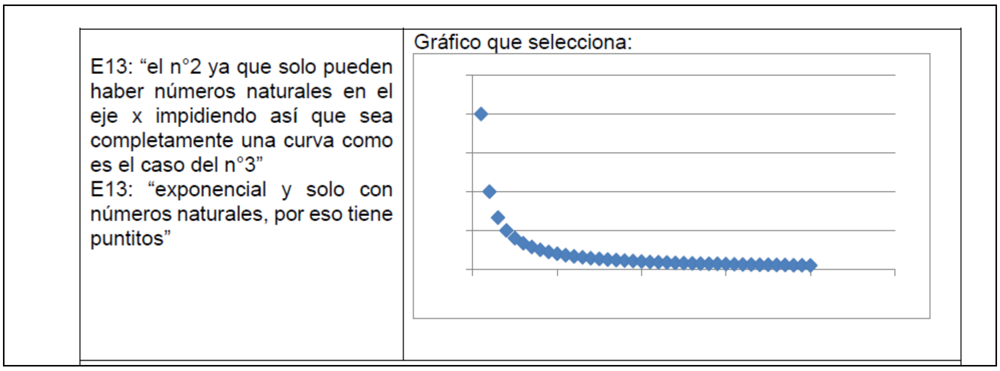


Figura 6: Producción del estudiante E13 en la situación 5: “Cantidad de trabajadores vs días trabajados”

Para esta situación E13 (Figura 6), considera el tipo de variable al mencionar los valores que esta puede tomar, argumentando incluso por qué esta gráfica tiene “puntitos”. Al igual que en la situación 4, observamos una activación del plano [sem-dis].

En la segunda etapa del estudio –donde los estudiantes trabajan en equipos– se les entrega lo presentado en la Tabla 3 (Tarea 2). Ellos deben justificar las elecciones de la tarea anterior a sus compañeros de equipo y para ello cuentan con el desarrollo que hicieron de manera individual en la Tarea 1. A continuación, mostraremos las partes que nos parecen más relevantes del trabajo del equipo 1, conformado por los estudiantes E13 y E20. Parte de su discusión se muestra en la Tabla 6.

[E13]: Entonces, el dominio debería ser Z, es que acá no puedo decir cuál es la variable x o cuál es la variable… porque aquí me dice del volumen de un tumor, pero la variable y ¿Cuál es? ¡Ah no! ¡Ya sé! ¡Es el tiempo!
[E20]: Pero estos números son más grandes!” (señalando los valores que aparecen en el gráfico)
[E13]: Esos números importan nada,”
[E20]: Del uno pa’ arriba…
[E13]: El recorrido, serían los racionales, porque los racionales son fracciones y el tamaño de un tumor, respecto del tiempo, sí puede tener números decimales.

Tabla 6: Transcripción del diálogo del equipo 1, en situación 1 de la tarea 2

En el diálogo se puede observar que los argumentos se basan principalmente en la identificación de las variables, lo que queda en evidencia en la frase: “el tamaño del tumor, respecto del tiempo, sí puede tener números decimales”. En la discusión del equipo, se identifica una génesis discursiva más robusta (principalmente, por parte de E13), al reflexionar sobre los conjuntos numéricos a los cuales pertenecen las variables. Sin embargo, los estudiantes no reconocen la continuidad en el conjunto de las variables, dejando fuera a los números irracionales.

[E13]: O sea, pasa por puntos específicos. Es como determinado
[E20]: Y esto, no es como determinado.
[E13]: Es una línea, o sea pasa por todas las velocidades, por todos los tiempos. En cambio, la situación que viene que es de los trabajadores, esa si tiene que ser con números determinados, porque no puede haber trabajadores y medios.

Tabla 7: Transcripción del diálogo del equipo 1, en la tarea 2 para el gráfico N°3

Para el gráfico N°2 y Nº3, nuevamente los cuestionamientos se centraron en el tipo de variables de acuerdo con el contexto. Particularmente, para el gráfico Nº3 (Tabla 7), se encuentra implícitamente la idea de continuidad, cuando E13 dice: “es una línea, o sea, pasa por todas las velocidades, por todos los tiempos”. Se observa una coordinación entre la génesis semiótica (lo que se interpreta en la gráfica) y la determinación del conjunto al cual pertenecen las variables.

En la tercera etapa del estudio, realizada al día siguiente, los estudiantes deben formular una función exponencial a partir de una situación relacionada con la intensidad de la luz emanada por una linterna en las profundidades del mar. De la serie de preguntas planteadas, particularmente la pregunta 5 es la que apunta a este objetivo, y la pregunta 9 pide graficar la función encontrada. En las respuestas a las tres primeras preguntas de esta tarea, se puede observar que los estudiantes del equipo 1 son capaces de reconocer la relación que existe entre las magnitudes que influyen en la tabla de valores presentada y de identificar la dependencia de tales magnitudes diferenciando entre variable dependiente e independiente.

En la pregunta donde deben formular la función exponencial, los estudiantes prueban con diferentes modelos para llegar a uno adecuado para la situación (Figura

7). Identificamos las expresiones como artefactos simbólicos, coordinados con elementos de la génesis discursiva, pues intentan buscar coeficientes para la función exponencial al concluir que se trata de ese tipo de funciones. Identificamos una activación del plano [ins-dis].

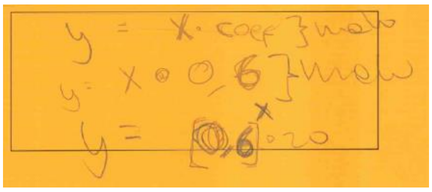
	Transcripción: $y = x \cdot coef$, malo $y = x \cdot 0{,}6$, malo $y = [0{,}6]^x \cdot 20$

Figura 7: Respuesta del equipo 1 a la pregunta 5, de la tarea N°3

Para la pregunta N°9, observamos que los estudiantes comienzan identificando puntos en la gráfica, para posteriormente unirlos con una línea continua (Figura 8). Dadas sus respuestas en preguntas anteriores, se evidencia que los estudiantes identifican las variables como continuas y desde ahí proviene su decisión por realizar una gráfica continua, lo que demuestra una activación del plano [sem-dis].

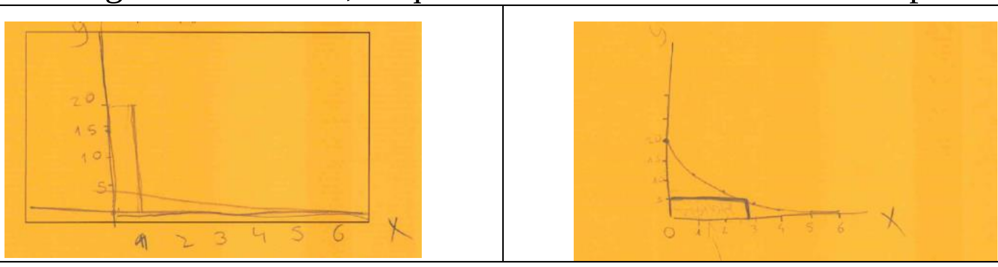


Figura 8: Respuesta del equipo 1 a la pregunta 9, de la tarea N°3

ALGUNAS CONCLUSIONES

Los resultados de este trabajo nos permiten concluir que el promover el trabajo con la función exponencial articulando los elementos que la componen, permite hacer emerger nuevos recursos que conducen a la comprensión del objeto, tal como se plantea en Kuzniak et al. (2016a). En nuestro caso, pudimos observar que aparecen elementos como el dominio de la función, las imágenes y las características de las imágenes, cuyo foco estaba en si la gráfica era discreta, densa o continua, y las características del crecimiento. Confirmamos en este trabajo que la coordinación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva permite construir un ETM enriquecido, en términos de permitir la articulación entre las distintas génesis, y hallar un camino más expedito hacia la construcción de la función exponencial.

Por el contrario, el trabajo desarticulado en la enseñanza de funciones desde la perspectiva del ETM, genera en los estudiantes un escenario deficiente al momento de enfrentarse con aquellas funciones que no son algebraicas, como en el caso de la función exponencial, ya que, al manipular elementos de forma parcelada, se desaprovecha la visión global del objeto matemático.

El diseño de este estudio nos permitió abordar el objetivo principal, pues al proponer tareas donde se analizaban gráficas relacionándolas con situaciones cotidianas, se pudo identificar no solo la activación de génesis, sino también cómo se coordinaban unas con otras para poder hallar una justificación. La última tarea, permitió activar principalmente la génesis instrumental, pues los estudiantes buscaron dentro de sus recursos una expresión que se adecuara a la situación, articulando los artefactos simbólicos y sus usos, con elementos discursivos. Como limitante de esta investigación podemos identificar la no utilización de entrevistas posteriores, como un medio para profundizar más en las respuestas de los y las estudiantes.

REFERENCES

Derouet, C., Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E., Páez Murillo, R. E., Rousse, S., Vandebrouck, F. Verdugo, P., & Vivier, L. (2016). *TD de la 18ème école d'été de didactique,* Brest, 19-26 août 2015.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16,* 9-24.

Kuzniak, A., Tanguay, D., Vivier, L., Mena-Lorca, J., Mena-Lorca, A., & Montoya-Delgadillo, E. (2016a). *Conectar los ETM del análisis: el caso de la función exponencial. V Simposio de Espacio de Trabajo Matemático,* Grecia, pp 49–61

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016b). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM, 48*(6), 721-737.

Mena Lorca, J. (2016). *Actas de la XXIX Jornada de Matemática de la Zona Sur. La función exponencial: entre lo discreto y lo continuo*. (pág. 55). Santa Cruz, VI Región, Chile: Universidad de Talca.

Menares, R. & Vivier, L. (2022). Personal Mathematical Work and Personal MWS. In Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. & Richard, P. (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context. The perspective of the theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 91–120). Gewerbestrasse: Springer.

MINEDUC (2012a). *Matemática, Programa de Segundo Año Medio*. Santiago de Chile.

Ministerio de Educación. (2012b). *Guías Didácticas para la Articulación de los Ejes Curriculares de Números, Álgebra, Geometría*. Maval Ltda.

Richard, P.R. & Kuzniak, A. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(3) (número especial).

Sureda, P. & Otero, M. (2013). Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial. *Educación Matemática, 25*(2), 89–118.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

APPRENTISSAGE DES NOMBRES COMPLEXES EN UTILISANT DIFFERENTS SYSTEMES DE CALCUL SYMBOLIQUE ET D'UN SYSTEME D'EVALUATION EN LIGNE DANS LA FORMATION INITIALE D'ENSEIGNANTS

Jorge GAONA[1], Soledad LOPEZ[2] et Elizabeth MONTOYA-DELGADILLO[3]

[1]Universidad de Playa Ancha, Valparaíso, Chile

[2]Universidad Viña del Mar, Viña del Mar, Chile

[3]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso Chile

Cet article étudie le travail mathématique personnel de 14 enseignants en formation initiale, en première année d'une université publique au Chili, à partir de deux tâches sur les nombres complexes. Ces tâches ont été définies dans un système d'évaluation en ligne ou CAA (Computer Aided Assessment System) et il a été proposé de les résoudre en utilisant différents calculatrices symbolique ou CAS (GeoGebra, Symbolab, ...). Dans les potentialités, on a observé que l'articulation de deux artefacts ou plus, permettaient aux élèves de donner un sens aux objets mathématiques impliqués. En cas de difficultés, il a été observé que les élèves avaient du mal à interpréter les informations fournies par les feedbacks CAS et CAA car leurs connaissances mathématiques antérieures n'étaient pas assez solides pour le faire.

INTRODUCTION

Les systèmes de calcul symbolique (CAS) ont évolué depuis 20 ans et étaient accessibles dans certains pays depuis la fin des années 2000 (Trouche, 2000, p.243). Les CAS interagissent avec d'autres artefacts numériques, notamment les systèmes d'évaluation en ligne (CAA), et fournissent désormais des solutions étape par étape et des environnements interactifs pour le raisonnement et la preuve automatisée (Artigue, 2002 ; Kieran & Drijvers, 2006 ; Lagrange, 2000 ; Barzel et al., 2019 ; Botana et al., 2015 ; Richard et al., 2019). Ils automatisent l'évaluation en validant les réponses équivalentes, différenciant les expressions et donnant un retour en fonction de l'énoncé ou de la réponse de l'élève (Gaona et al., 2018 ; Gaona & Menares, 2021 ; Gaona et al, 2022 ; Sangwin, 2015).

Des études ont utilisé des artefacts numériques pour améliorer la compréhension des nombres complexes (D'Azevedo & dos Santos, 2016 ; Caglayan, 2016). Caglayan (2016) a montré que l'environnement dynamique améliore la compétence mathématique, en particulier pour les représentations multiples. Dittman et al. (2017) ont utilisé un logiciel de géométrie dynamique pour enseigner les nombres complexes aux étudiants, améliorant leur compréhension des fonctions à variables complexes et de la géométrie. Ces études n'ont pas utilisé de CAS, mais des environnements contrôlés et conçus ad hoc.

En travaillant avec différentes représentations, les individus peuvent comprendre les structures mathématiques (Radford, 1998). Cependant, cela est difficile pour les élèves, car il faut des niveaux d'abstraction élevés et confronter les idées précédemment construites (Randolph & Parraguez, 2019).

Face à la complexité épistémologique de l'objet et à l'absence de travaux utilisant le CAS, une tâche est conçue dans un CAA. La question de recherche qui guide ce travail est alors la suivante : quel est le travail mathématique des élèves qui est produit à partir de l'articulation de différents artefacts numériques dans des tâches sur les nombres complexes proposées dans un CAA ?

Cette étude s'intéresse au travail mathématique des élèves sur les nombres complexes dans un CAA, en utilisant différents artefacts numériques. Nous examinerons les représentations (algébriques et géométriques) présentes dans l'étude des nombres complexes et mobilisées par des artefacts tels que GeoGebra, Wolfram Alpha et Symbolab.

CADRE THÉORIQUE

D'abord, nous abordons la théorie de l'espace de travail mathématique (ETM) et ses éléments (Kuzniak et al., 2022), puis la notion de tâche dans un CAA en ligne et sa relation avec l'ETM. La théorie des ETM permet d'analyser le travail mathématique à deux niveaux: épistémologique et cognitif, avec trois genèses:

- La *genèse sémiotique* : concerne la visualisation et l'interprétation des signes mathématiques.
- La *genèse instrumentale* : concerne la transformation d'un artefact en un instrument pour la construction cognitive.
- La *genèse discursive* : concerne l'utilisation de connaissances mathématiques pour justifier un processus.

La théorie des ETM étudie l'articulation entre ces genèses, notamment à travers trois plans: sémiotique-instrumental [Sem-Ins], instrumental-discursif [Ins-Dis] et sémiotique-discursif [Sem-Dis].

Les artefacts sont cruciaux dans cette étude, ils peuvent être :

- Matériels : non traités ici
- Numériques : comme GeoGebra, Photomath, Symbolab, Wolfram Alpha ou Calcme, importants pour notre étude.
- Symboliques : routines ou algorithmes utilisés dans la construction sans lien direct avec la genèse discursive.

Les *artefacts symboliques* sont utiles pour leur efficacité, mais nécessitent une réflexion de l'individu. Les *artefacts numériques* permettent d'obtenir différentes solutions pour une équation et de discuter de leurs similitudes et différences.

Tâches dans un CAA

Gaona (2018) identifie trois composantes didactiques d'une tâche : type, objets/notions mathématiques et contexte. Gaona (2020) décompose un artefact dans un CAA en quatre composantes : énoncé, système d'entrée, validation et rétroaction. Ces décompositions sont articulées avec le sujet répondant à une tâche (Figure 1).

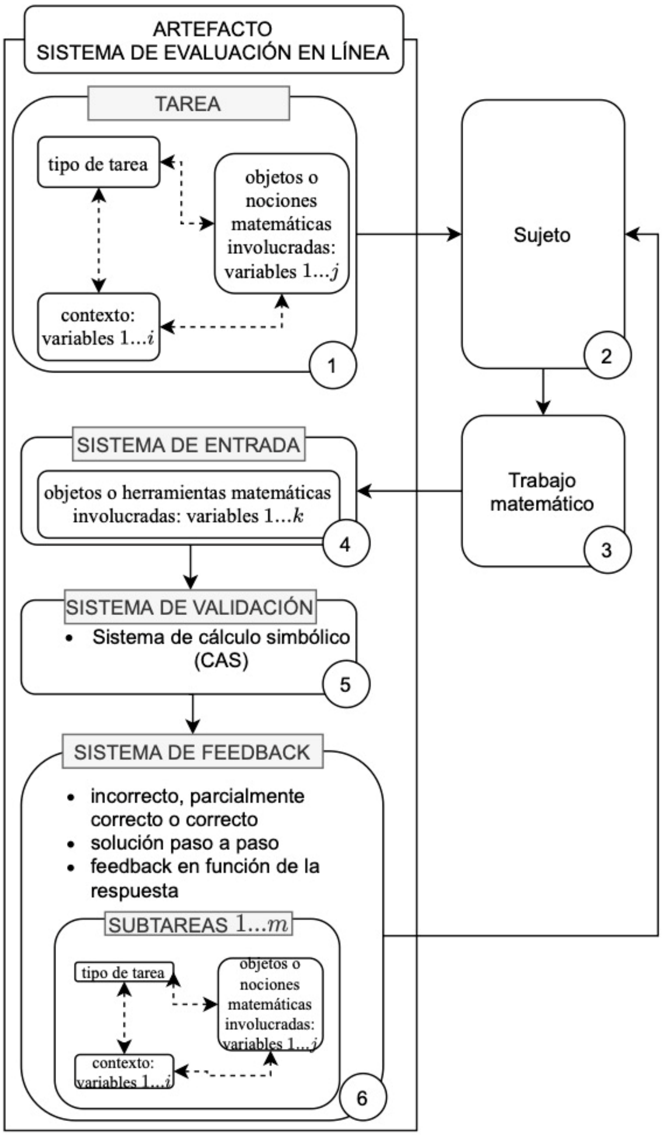


Figure 1: Articulation entre le artefact-tâche d'un CAA, les composantes didactiques de chacun de ses composants, le sujet face à la tâche, le travail mathématique qu'une personne effectue

Dans la tâche (1, Figure 1), on distingue trois composantes : type, objets/notions et contexte. Le type de tâche est défini par un verbe et une action précise (Chevallard, 1999). L'objet/notion permet de spécifier la tâche, observable grâce à sa représentation sémiotique (Duval, 1995). Le contexte donne du sens aux objets/notions impliqués.

Le sujet (2 et 3, Figure 1) effectue un travail mathématique en interaction avec la CAA ou en dehors. La décomposition conceptuelle de ce travail est faite dans le cadre théorique.

Le sujet utilise le système de saisie (4, Figure 1) pour entrer une réponse. Gaona (2020) identifie plusieurs systèmes d'entrée (espace blanc, éditeur d'équation, reconnaissance d'écriture, glisser-déposer, système géométrique, choix multiple). Le système de saisie dépend des objets/notions attendus et de leur représentation.

Après la saisie, le système valide la réponse (5, Figure 1). Les CAA en mathématiques doivent disposer de systèmes de calcul symbolique ou géométrique pour comparer la réponse avec celle définie comme correcte.

Après validation, le système fournit un retour d'information aux étudiants (6, Figure 1). Hattie (2008) indique que les types de feedback sont variés en interaction éducative, mais plus limités dans un CAA. Toutefois, un feedback peut informer l'étudiant si sa réponse est correcte, partiellement correcte ou incorrecte, donner un commentaire socio-émotionnel, une solution étape par étape, ou un feedback basé sur la réponse de l'élève.

Ces types de feedback peuvent aider ou entraver la création de significations mathématiques. Le sujet confronte le feedback à son travail mathématique, produisant des similitudes et différences entre ce qu'il a fait et ce qu'il devait faire (Gaona et Menares, 2021). Le feedback peut générer des difficultés si inadapté, mal interprété ou insuffisant (Cazes et al., 2006) et aider les étudiants à prendre conscience de leurs lacunes.

Dans ce feedback, on peut identifier des sous-tâches décomposées en type, objets/notions et contexte.

ÉLÉMENTS MÉTHODOLOGIQUES ET CONTEXTE DE L'EXPÉRIMENTATION

Cette recherche est de nature qualitative et elle sera menée à travers des études de cas, où chaque cas correspond à un cas instrumental (Bikner-Ahsbahs et al., 2015 ; Yin, 2009). L'ETM personnel des étudiants d'un cours de technologie est intervenu. Les unités d'analyse étaient 14 étudiants de première année en formation initiale d'enseignants de mathématique d'une université publique chilienne. L'expérimentation a été développée au cours du premier semestre 2021, dans trois sessions de cours de 135 min chacune, en ligne, en mode synchrone et via la plateforme Zoom. Il convient de noter que l'un des chercheurs était le professeur qui a mis en œuvre la situation d'apprentissage.

Les étudiants se sont engagés dans une situation didactique composée de deux tâches qui ont été présentées sur une plateforme Moodle/Wiris (ceci est décrit dans la description de la tâche, ci-dessous). Les étudiants ont été invités à travailler avec différents CAS (GeoGebra, Symbolab et Wolphram Alpha, entre autres).

Sur la base de la théorie des ETM, des catégories d'analyse ont été développées en tenant compte des aspects cognitifs et épistémologiques du travail mathématique qui sont pris en compte lors de la mise en œuvre de la situation d'apprentissage.

Les tâches

Le travail proposé a été développé autour de deux tâches principales, qui constituent la situation d'apprentissage. Il convient de noter qu'avant la mise en œuvre, il y a eu une partie d'évaluation initiale, où le professeur a déterminé l'état actuel des connaissances des étudiants sur les nombres complexes. Les tâches sont définies ci-dessous :

Tâche 1: Écrire, dans l'espace prévu à cet effet, le nombre complexe marqué en rouge de l'équation $z^3=2$ (Figure 2 à gauche) ou $z^3=-2$ (Figure 2 au milieu). Les valeurs 2 ou -2 auxquelles l'équation est assimilée, ainsi que le point marqué en rouge sont définis par un algorithme de manière aléatoire. La racine marquée qui apparaît sur le plan à la condition que la partie imaginaire soit non nulle, elle ne sera donc jamais sur l'axe réel.

Tâche 2: Écrire, dans l'espace prévu à cet effet, le nombre complexe marqué en rouge de l'équation $z^n=a$, où n peut prendre la valeur 3 ou 4 (Figure 2 à droite) et a peut prendre une valeur entière comprise entre -9 et 9, incluant les extrêmes et excluant zéro.

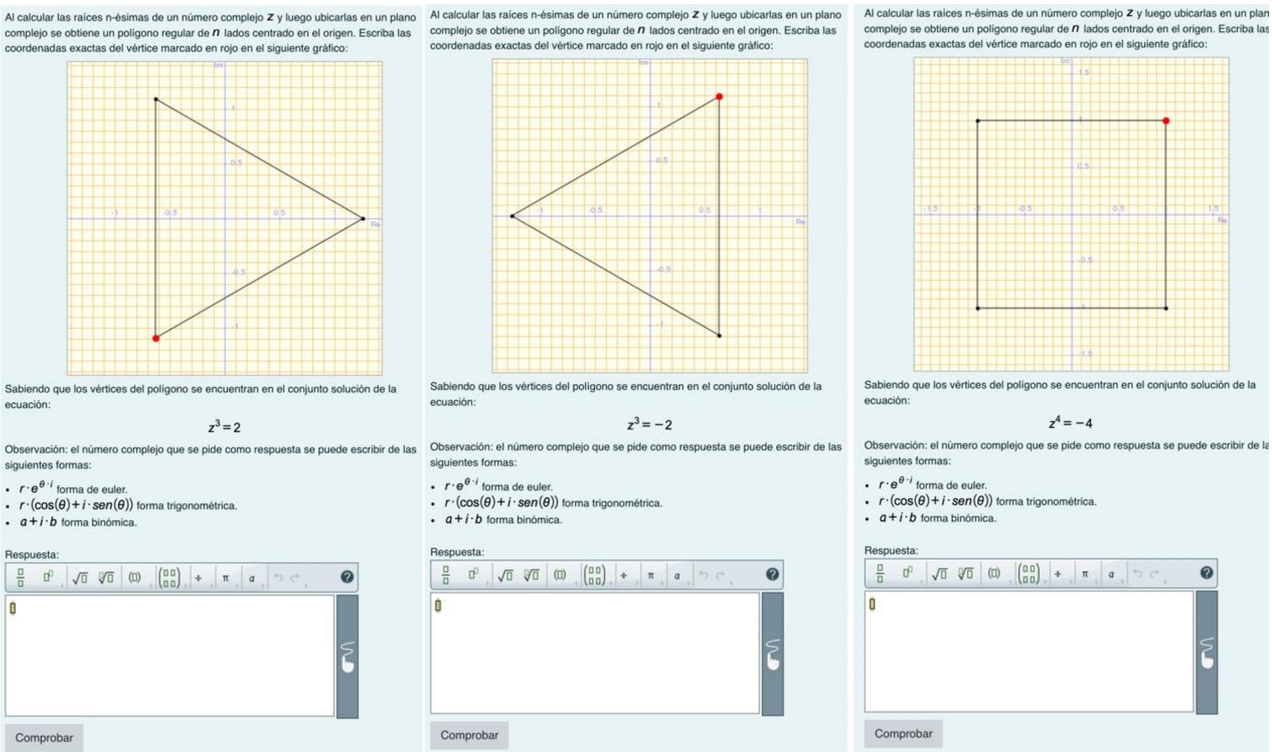


Figure 2 : Énoncés du devoir présentés aux étudiants dans Moodle/Wiris. Dans celui de gauche, on demande la solution du troisième quadrant de l'équation $z^3=2$. Dans celui du milieu, on demande la solution du deuxième quadrant de l'équation $z^3=-2$ et dans celui de droite, on demande la solution du premier quadrant de l'équation $z^4=-4$.

Dans les tâches 1 et 2, une fois que l'étudiant a saisi une réponse dans l'espace prévu à cet effet, le système donne un retour différent selon que la réponse est correcte, partiellement correcte ou incorrecte.

RÉSULTATS

Potentiel du travail mathématique guidé par des artefacts numériques

- Les contraintes *instrumentales* qui ont conduit à l'activation de la genèse *discursive*

Dans la tâche deux, après avoir obtenu les solutions de l'équation $z^4=-5$, nous avons sélectionné l'épisode de Sofia qui signale qu'elle ne comprend pas la tâche, en particulier la signification des solutions données par Symbolab (l'artefact numérique utilisé). Ensuite, le professeur lui demande d'ouvrir la calculatrice GeoGebra et, en parallèle, de partager l'écran avec Symbolab, pour montrer ce que l'*artefact numérique* donne comme solutions à l'équation (voir Figure 3).

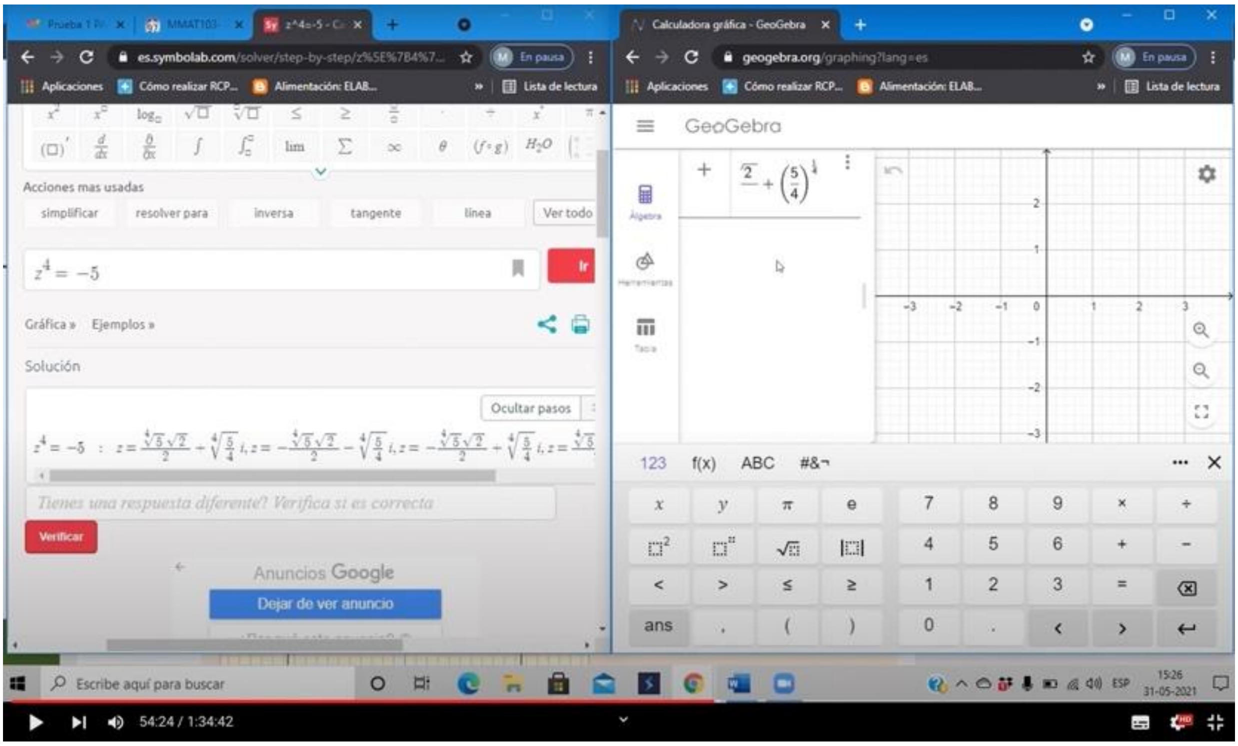


Figure 3 : Capture d'écran du travail de Sofia introduisant une puissance en tant que racine.

Ensuite, Sofia entre les solutions obtenues dans Symbolab dans GeoGebra pour les représenter graphiquement ; à ce stade, il y a des difficultés à utiliser l'*artefact* lors de l'écriture des racines, car GeoGebra ne dispose pas d'une commande permettant l'écriture directe de la racine avec un indice autre que 2. Sofia ne se rappelle pas comment entrer la solution $z=\sqrt[4]{5}\sqrt{2}+\sqrt[4]{\frac{5}{4}}i$, ses camarades de classe et le professeur donnent un feedback à Sofia, et lui font remarquer qu'elle devrait utiliser l'expression utilisant la notation de puissance pour entrer les racines dans GeoGebra. Grâce à ce feedback, Sofia parvient à entrer les racines en tant que puissances, activant non seulement une question de notation, mais aussi des connaissances associées aux notions de puissances et de radicaux.

En termes théoriques, nous pouvons observer que la genèse instrumentale est activée dans le cas de Sofia par l'utilisation de Symbolab. Les étudiants observent les solutions données par *l'artefact numérique*, mais il n'y a pas encore de visualisation de ces symboles, puisque jusqu'à ce moment le signe n'est pas articulé avec sa signification.

Grâce au feedback du professeur et des élèves, il est possible de surmonter les difficultés *instrumentales*, ce qui permet d'activer la *genèse discursive*, puisque l'élève comprend qu'il est nécessaire d'utiliser les propriétés des radicaux pour entrer les racines avec un indice différent de deux dans GeoGebra. On observe ensuite l'activation du plan [Ins-Dis], pour entrer les solutions données au moyen des propriétés des puissances.

- L'articulation de trois *artefacts numériques* permet de donner du sens aux solutions complexes de l'équation

Nous soulignons à nouveau l'épisode de Sofia, qui après avoir saisi les solutions dans GeoGebra, ce logiciel les représente dans le plan cartésien (il dessine un point). L'élève partage la fenêtre de Moodle/Wiris (la tâche) et GeoGebra (la solution) (voir Figure 4). À ce moment, elle *visualise* les racines de l'équation dans sa représentation graphique en parvenant à comprendre que le point rouge demandé dans la tâche est la solution correcte. Il nous semble que cet épisode est très significatif, car auparavant, les solutions fournies par Symbolab n'avaient pas de sens pour elle, puisqu'il n'y avait pas de relation entre l'équation donnée dans le registre algébrique et le carré présenté dans la tâche.

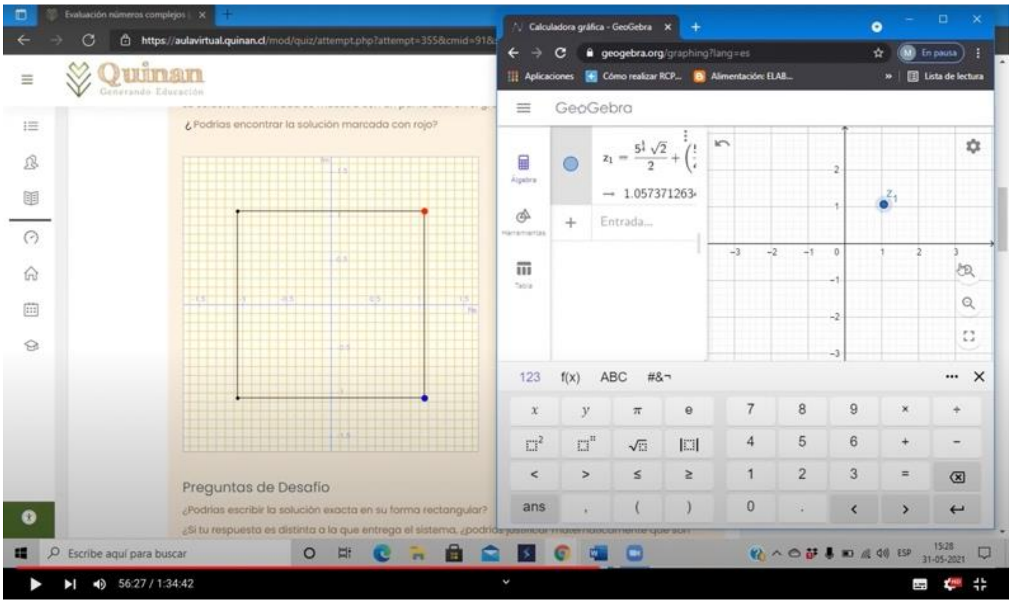


Figure 4 : Capture d'écran du travail de Sofia où elle compare les informations fournies par la tâche Moodle/Wiris et le point qu'elle a tracé dans GeoGebra.

Sur le plan théorique, dans cet épisode, le plan [Sem-Ins] est activé, puisqu'en utilisant GeoGebra pour *visualiser* les solutions de $z^4=-5$, préalablement obtenues par Symbolab, il est possible de donner du sens aux racines de l'équation par l'articulation des registres algébrique et graphique. Cela lui a permis de comprendre les réponses fournies par Symbolab. Ceci révèle que l'activation de la seule genèse instrumentale, n'est pas suffisante pour comprendre les objets mathématiques en jeu.

- Travailler avec *l'artefact numérique* guide le discursif du travail

Un autre cas choisi est l'épisode de Juan dans la tâche deux, qui partage un écran (et utilisant un tableau de notes Paint), démontre son travail mathématique en résolvant l'équation $z^4=-2$. Il explique que lorsqu'il utilise la commande « Racine complexe » de GeoGebra, il est nécessaire de réécrire l'équation sous forme polynomiale en l'égalisant à zéro : *Racine complexe* (z^4+2) au lieu de Racine complexe $(z^4=-2)$. GeoGebra affiche les quatre solutions approximatives (par exemple : $z_1=0.8408-0.8408i$, $z_2=\dots$), et au moyen d'une stratégie d'essais et d'erreurs, il évalue les solutions de l'équation pour vérifier si elles la satisfont (voir Figure 5, partie gauche).

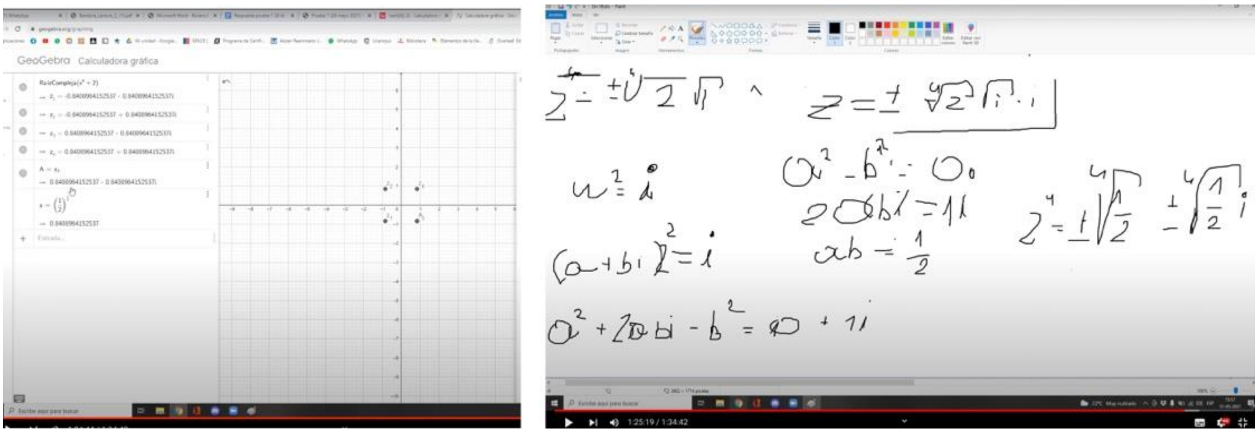


Figure 5: Captures d'écran de l'explication de Juan

Après cela, Juan change de stratégie et résout l'équation de manière algébrique. Cette stratégie consiste à appliquer de manière répétée la racine carrée à l'équation entière, obtenant $z = \pm\sqrt[4]{2}\sqrt{i} \cdot i$. Le professeur intervient en demandant la signification de $\sqrt{i}$, ce qui laisse la place à l'étudiant pour argumenter comment on peut écrire la racine de i canoniquement a+bi, qui est résolue par Wolfram Alpha sur recommandation du professeur. Enfin, Juan reprend les solutions approximatives fournies par GeoGebra, et les compare avec le travail algébrique qu'il a effectué pour argumenter la façon dont ces valeurs sont obtenues.

En termes théoriques, le plan [Sem-Ins] est activé car les solutions sont *visualisées* dans GeoGebra. Cela permet d'orienter le travail algébrique, laissant place à l'activation de la genèse discursive qui permet de justifier les résultats obtenus par *l'artefact numérique*. L'étudiant effectue tout le travail discursif que les *artefacts numériques* n'effectuent pas. Ceci, à son tour, est contrôlé au moyen du plan [Sem-Ins] de l'utilisation de *l'artefact numérique*, puisque GeoGebra vérifie et valide ce qui est obtenu algébriquement soutenu par ses solutions.

CONCLUSIONS

Validité épistémologique des différents CAS

Lorsque les étudiants ont commencé à travailler avec les différents CAS, ils ont pu constater que ces systèmes fournissent des solutions très différentes à la même entrée « résoudre $z^n=a$ ». Ce premier fait montre comment chaque système s'accompagne d'une intelligence historique particulière et d'une validité épistémologique relative (Salazar et al., 2022). Chaque *artefact numérique* montre des informations différentes, soit parce que les solutions peuvent être correctes, partiellement correctes ou avec quelques erreurs, soit parce qu'elles utilisent différents registres de *représentation sémiotique* (algébrique et/ou graphique), créant des moments d'opportunité pour améliorer les connaissances mathématiques *ou instrumentales*.

Potentialités du travail mathématique avec des artefacts numériques

Des potentialités pouvant être exploitées pour améliorer la compréhension par les étudiants des objets mathématiques impliqués ont été observées. L'une d'entre elles était l'articulation des *artefacts numériques*, l'un fournissant les solutions sous une forme algébrique, rectangulaire et exacte, et l'autre permettant une représentation graphique, qui avait du sens à la fois pour comprendre la tâche et les solutions fournies par les *artefacts*. Une comparaison de l'intelligence historique présente dans chaque *artefact*, permet la connexion de la genèse sémiotique et la genèse discursive pour résoudre la tâche. Notons que pour pallier l'impossibilité de saisir directement une racine non carrée, dans l'un de ces artefacts (GeoGebra), l'élève a réussi à mobiliser les propriétés de transformation des racines en puissances.

D'autres potentialités observées ont été la possibilité offerte par les *artefacts numériques* de diriger le processus de justification, permettant de guider la genèse discursive dans le cas de Juan, qui, connaissant les valeurs approximatives qu'il devait atteindre, a pu construire une justification algébrique des solutions. De plus, nous avons pu vérifier que l'activation du plan [Sem-Ins] a orienté la genèse discursive qui n'est pas expliqué par les *artefacts numériques*. L'étudiant a pu valider ses résultats à l'aide de GeoGebra et Wolfram Alpha. Ceci nous permet de conclure que travailler avec des tâches où différents artefacts sont mobilisés, peut être un moyen de faire face aux difficultés qui ont été rapportées dans différentes études, comme l'utilisation de techniques « boutons » qui invisibilisent divers processus mathématiques et encouragent des stratégies plus superficielles (Lagrange, 2005 ; Jankvist et al., 2019).

À partir du cadre théorique utilisé dans cette recherche, nous pouvons souligner que le fait de commencer le travail mathématique dans le plan [Sem-Ins], dans la première tâche, a aidé les étudiants à établir des relations pour identifier la solution demandée dans Moodle/Wiris au moyen des quadrants du plan complexe et du signe des solutions données par les *artefacts numériques*. Nous observons ainsi l'activation de la genèse sémiotique des représentations données par *l'artefact*, et du registre graphique et algébrique pour identifier la solution demandée. Ainsi, l'utilisation des artefacts numériques a amélioré la compétence mathématique, afin de penser dans diverses représentations (Caglayan, 2016). Il faut noter que tous les élèves ne parviennent pas à activer ces genèses par eux-mêmes, le travail instrumental associé à l'apport du professeur était fondamental pour donner du sens aux symboles délivrés par ces artefacts numériques.

REFERENCES

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(3), 245–274. https://doi.org/10.1023/A:1022103903080

Barzel, B., Ball, L., & Klinger, M. (2019). Students' Self-Awareness of Their Mathematical Thinking: Can Self-Assessment Be Supported Through CAS-Integrated Learning Apps on Smartphones? In G. Aldon & J. Trgalová (Eds.), *Technology in Mathematics Teaching, Mathematics Education in the Digital Era 13* (pp. 75–91). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-19741-4_4

Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C., & Presmeg, N. (2015). *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6

Botana, F., Hohenwarter, M., Janičić, P., Kovács, Z., Petrović, I., Recio, T., & Weitzhofer, S. (2015). Automated Theorem Proving in GeoGebra: Current Achievements. *Journal of Automated Reasoning, 55*(1), 39–59. https://doi.org/10.1007/s10817-015-9326-4

Caglayan, G. (2016). Mathematics Teachers' Visualization of Complex Number Multiplication and the Roots of Unity in a Dynamic Geometry Environment. *Computers in the Schools, 33*(3), 187–209. https://doi.org/10.1080/07380569.2016.1218217

Cazes, C., Gueudet, G., Hersant, M., & Vandebrouck, F. (2006). Using E-Exercise Bases in mathematics: case studies at university. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 11*(3), 327–350. https://doi.org/10.1007/s10758-006-0005-8

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques, 19*(2), 221–266. https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/

D'Azevedo, A. M., & Santos, J. M. dos. (2016). Complex functions with GeoGebra. *Teaching Mathematics and Its Applications, 35*(2), 102–110. https://doi.org/10.1093/teamat/hrw010

Dittman, M., Soto-Johnson, H., Dickinson, S., & Harr, T. (2017). Game building with Complex-Valued functions. *Primus, 27*(8–9), 869–879. https://doi.org/10.1080/10511970.2016.1234527

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Flores Salazar, J. V., Gaona, J., & Richard, P. R. (2022). Mathematical Work in the Digital Age. Variety of Tools and the Role of Geneses. Dans A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo & P. R. Richard (Éds.), *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Space*s (pp. 165-209). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_8

Gaona, J. (2018). *Elaboración de un sistema de evaluación en línea como proceso de formación de profesores de matemáticas* [Université Sorbonne Paris Cité - Université Paris Diderot]. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02458946/

Gaona, J. (2020). Panorama sobre los sistemas de evaluación automática en línea en matemáticas. *Revista Paradigma*, *16*, 53–81. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p53-80.id853

Gaona, J., Hernández, R., Guevara, F., & Bravo, V. (2022). Influence of a function's coefficients and feedback of the mathematical work when reading a graph in an online assessment system. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (IJET)*, *17*(20), 77–98. https://doi.org/10.3991/ijet.v17i20.32641

Gaona, J., & Menares, R. (2021). Argumentation of prospective mathematics teachers in fraction tasks mediated by an online assessment system with automatic feedback. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *17*, 1–18. https://doi.org/10.29333/ejmste/11425

Hattie, J. (2008). Visible Learning. In International *Review of Education*. https://doi.org/10.1007/s11159-011-9198-8

Jankvist, U. T., Misfeldt, M., & Aguilar, M. S. (2019). What happens when CAS procedures are objectified? —the case of "solve" and "desolve." *Educational Studies in Mathematics*, *694*. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09888-5

Kieran, C., & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of cas use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*(2), 205–263. https://doi.org/10.1007/s10758-006-0006-7

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. R. (Eds.). (2022). *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (1st ed., Mathematics Education in the Digital Era, Vol. 18). Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8.

Lagrange, J.-B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics*, *43*(1), 1–30.

Lagrange, J.-B. (2005). Curriculum, classroom practices, and tool design in the learning of functions through technology-aided experimental approaches. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 10*(2), 143–189. https://doi.org/10.1007/s10758-005-4850-7

Radford, L. (1998). On signs and representations a cultural account. *Scientia Paedagogica Experimentalis, 35*, 277–302.

Randolph, V. N., & Parraguez, M. (2019). Comprensión del Sistema de los Números Complejos : Un Estudio de Caso a Nivel Escolar y Universitario. *Formación Universitaria, 12*(6), 57–82.

Richard, P. R., Venant, F., & Gagnon, M. (2019). Issues and Challenges in Instrumental Proof. In G. Hanna, D. A. Reid, & M. de Villiers (Eds.), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching* (pp. 139-172). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1_7

Sangwin, C. (2015). Inequalities, assessment and computer algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46*(1), 76–93. https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.941424

Trouche, L. (2000). La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur: Étude des processus dapprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques. *Educational Studies in Mathematics, 41*(3), 239–264. https://doi.org/10.1023/A:1003939314034

Yin, R. K. (2009). *Case study research: Design and methods* (Vol. 5). Sage.

QUEL TRAVAIL MATHEMATIQUE POUR QUELLES VARIABLES DIDACTIQUES ? LE CAS DE TACHES DANS UNE BASE D'EXERCICES EN LIGNE

Jorge Gaona, Universidad de Playa Ancha, Valparaíso, Chile

Dans cette contribution, nous présenterons quelques résultats de deux cas sur la conception de tâches dans des systèmes d'évaluation en ligne et le travail mathématique déployé par des étudiants en pédagogie des mathématiques et des étudiants en ingénierie, tous dans des contextes virtuels en raison de la pandémie. Le travail mathématique a été étudié à partir du changement de certaines variables didactiques des tâches et sont proposés comme principes pouvant guider leur conception. Il est montré comment les registres de représentation sémiotique et les nombres qui définissent les objets mathématiques, l'ouverture des tâches et la rétroaction affectent le travail mathématique, activant différentes genèses et plans.

PROBLEMATIQUE

Les tâches mathématiques sont cruciales pour l'apprentissage (Mason & Johnston-Wilder, 2006). Sierpinska (2014) les définit comme des problèmes mathématiques solvables, tandis que Chevallard (1999) les voit comme des actions associées à un objet spécifique, tandis qu'en la théorie des espaces de travail mathématiques (ETM), on parle de tâches emblématiques.

Dans la littérature la conception des tâches est largement étudiée. Ainley et al. (2006) mentionnent le paradoxe de la planification où les objectifs pédagogiques s'opposent aux objectifs didactiques-mathématiques. Sangwin et al. (2010) discutent du potentiel des tâches dans les évaluations en ligne, mais ne montrent pas les résultats avec les élèves.

En 2015, l'ICMI étudie la conception de tâches pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Kieran et al. (2015) montrent la relation entre les cadres théoriques et la conception des tâches, et Leung et Bolite-Frant (2015) discutent du rôle des outils dans la conception des tâches.

La communauté de l'ETM (Kuzniak, 2022) aborde la recherche sur les tâches en analysant le travail mathématique effectif (Menares, 2018 ; Montoya-Delgadillo et al., 2016). Flores et al. (2022) adoptent une perspective instrumentale, tandis que la conception des tâches est un sujet émergent. Gómez-Chacón et al. (2019) posent des questions sur la conception des tâches dans l'ETM et cet article tente d'y répondre en se concentrant sur la conception des tâches dans une base d'exercices en ligne, en considérant le rôle de la rétroaction et les résultats récents (Gaona, Hernández, et al., 2021 ; Gaona, López, et al., 2021 ; Gaona & Menares, 2021).

CADRE THEORIQUE

Espaces de travail mathématiques et artefacts numériques

La théorie ETM vise à décrire, analyser, concevoir et comprendre le travail mathématique d'un individu (Kuzniak et al., 2022), en considérant les aspects épistémologiques et cognitifs.

Au niveau épistémologique, on distingue le representamen, les artefacts et le référentiel théorique. Un objet mathématique est au pôle representamen s'il est utilisé comme outil sémiotique. Les objets au pôle des artefacts incluent les outils matériels, numériques ou symboliques. Les artefacts numériques, un axe de ce travail, sont définis comme des propositions exécutées par une machine électronique ayant une intelligence historique et une validité épistémologique relative (Salazar et al., 2022). Le référentiel théorique englobe les propriétés, théorèmes et axiomes soutenant le discours mathématique.

Les plans épistémologique et cognitif s'articulent via trois genèses: sémiotique, instrumentale et discursive. La genèse sémiotique relie la visualisation au representamen; elle peut partir du signe interprété par le sujet ou du sujet qui produit un signe. La genèse instrumentale relie le processus de construction aux artefacts. La genèse discursive relie le processus de preuve au référentiel théorique et est liée au raisonnement déductif via théorèmes et propriétés.

Conception des tâches

L'ETM n'inclut pas les tâches, mais les active et permet d'étudier les circulations en découlant. L'ETM peut guider la conception des tâches en fonction des objectifs, en favorisant des plans de genèse, pour parler d'ETM potentiel. La conception des tâches est schématisée dans la figure 1. Les tâches peuvent être conçues sur divers supports, dont les artefacts numériques, impliquant une transposition informatique (Balacheff, 1994) et modifiant leur valeur épistémique (Artigue, 2002). L'ETM potentiel est confronté à l'ETM effectif lors de la mise en œuvre.

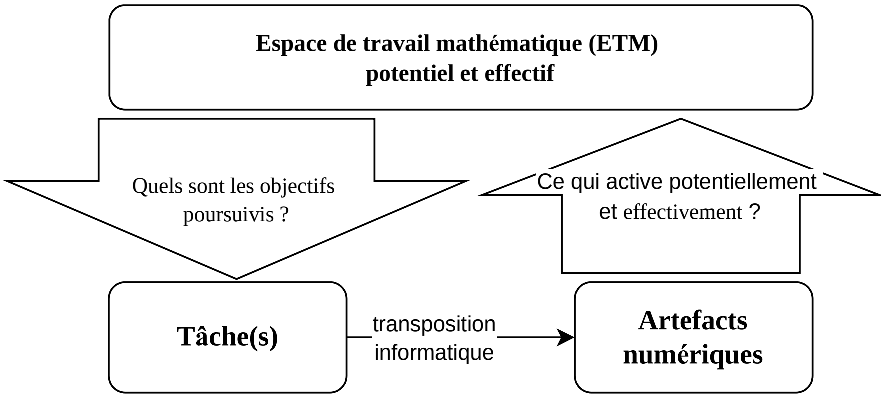


Figure 1 : Conception de la tâche à partir de l'ETM

La conception suit un processus d'« idonéité » (J. Flores et al., 2022), cyclique (conception-implémentation-redéfinition), visant à aligner le potentiel de la tâche avec l'activité effective du résolveur. Les objectifs s'ajustent en tenant compte des éléments de l'ETM.

Tâches dans un système d'évaluation en ligne

Gaona (2018) conceptualise les tâches selon trois composantes didactiques : le type de tâche, les objets/outils mathématiques impliqués et le contexte. Le type de tâche se distingue par un verbe et une action précise (Chevallard, 1999). Les objets/outils mathématiques spécifient la tâche et sont observables grâce à leur représentation sémiotique (Duval, 1995). Le contexte influence le type de tâche ou l'objet/outil mathématique utilisé.

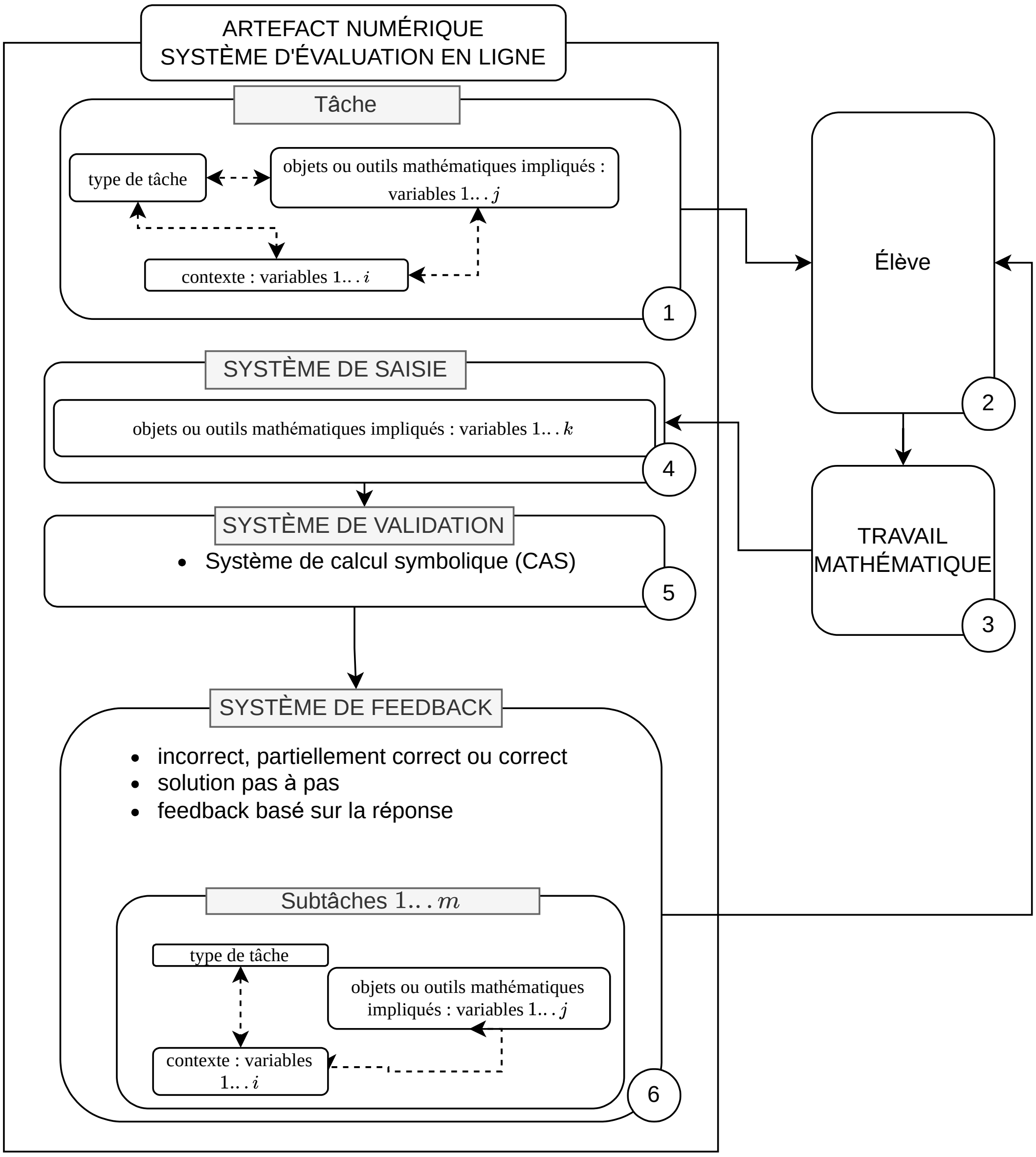


Figure 2 : Relation entre les composantes didactiques d'une tâche et les composantes techniques d'un artefact dans une base d'exercices en ligne. Extrait de Gaona, López, et al. (2022).

Concernant les exercices en ligne, Gaona (2020) et Gaona, Hernández, et al. (2021) décomposent l'artefact en quatre parties : énoncé, système d'entrée, système de validation et système de rétroaction, liés à l'artefact numérique. La capacité des systèmes d'évaluation en ligne à corriger automatiquement fait partie de leur valeur pragmatique, tandis que leur valeur épistémique (Artigue, 2002) dépend des composantes didactiques et du travail mathématique effectif des résolveurs.

En intégrant ces décompositions avec l'élève effectuant un travail mathématique spécifique, on peut étudier comment ces composantes interagissent : 1, 2 et 3 : L'élève effectue un travail mathématique en interaction avec la tâche ou en dehors de celle-ci. 4 : L'élève saisit une réponse avec le système de saisie des tâches. 5 : Le système de validation évalue les réponses comme correctes, partiellement correctes ou incorrectes. 6 : Le système fournit des retours aux étudiants, généralement limités à quelques types de retours (Gaona, 2020).

METHOLOGIE

Deux expérimentations ont été réalisées, toutes les deux ont été mis en œuvre dans une université publique chilienne de la région métropolitaine qui forme des enseignants.

Dans la première, il s'agit d'un devoir sur les nombres complexes proposé à 15 étudiants en première année de formation initiale des enseignants lors du premier semestre 2021. Les détails de la mise en œuvre peuvent être consultés dans Gaona et al. (2022).

La seconde concernait une tâche sur laquelle ont travaillé 12 étudiants en première année de formation initiale des enseignants de mathématiques lors du second semestre de 2020. Les détails de cette mise en œuvre peuvent être consultés dans Gaona et Menares (2021).

Les deux expérimentations ont été réalisées à distance et de manière synchrone pendant la pandémie

La collecte des données s'est faite en enregistrant les classes virtuelles. L'analyse a été une analyse de contenu qualitative (Mayring, 2015), en utilisant la genèse et les projets de l'ETM comme catégories d'analyse.

Ces deux cas ont été choisis parce qu'ils montrent différentes caractéristiques des tâches dans un système d'évaluation en ligne et parce que, en outre, dans les données collectées, on peut voir des différences dans le travail mathématique des étudiants et l'influence de la rétroaction conçue.

Cas 1 : tâche sur les nombres complexes

On a présenté aux élèves 3 tâches ayant la même structure dans l'énoncé, mais des paramètres différents : écrire une des racines complexes de l'équation $z^n=a$, où a prend les valeurs -2 ou 2 dans la tâche 1 et les entiers entre -9 et 9 dans les tâches 2 et 3. L'exposant n par contre, dans la question 1 est toujours 3 (voir figure 3) et dans les tâches 2 et 3 il varie entre n=3 ou n=4. Dans la partie de gauche de la figure 3, on demande la solution du quatrième quadrant de l'équation z^3= -4. L'élève entre une réponse, écrite en coordonnées cartésiennes avec les racines factorisées. Le système lui donne plusieurs types de rétroaction : 1) il l'évalue comme correcte, 2) il indique pourquoi elle est correcte, 3) il demande si la solution pourrait être écrite différemment et lui donne une solution étape par étape par la factorisation.

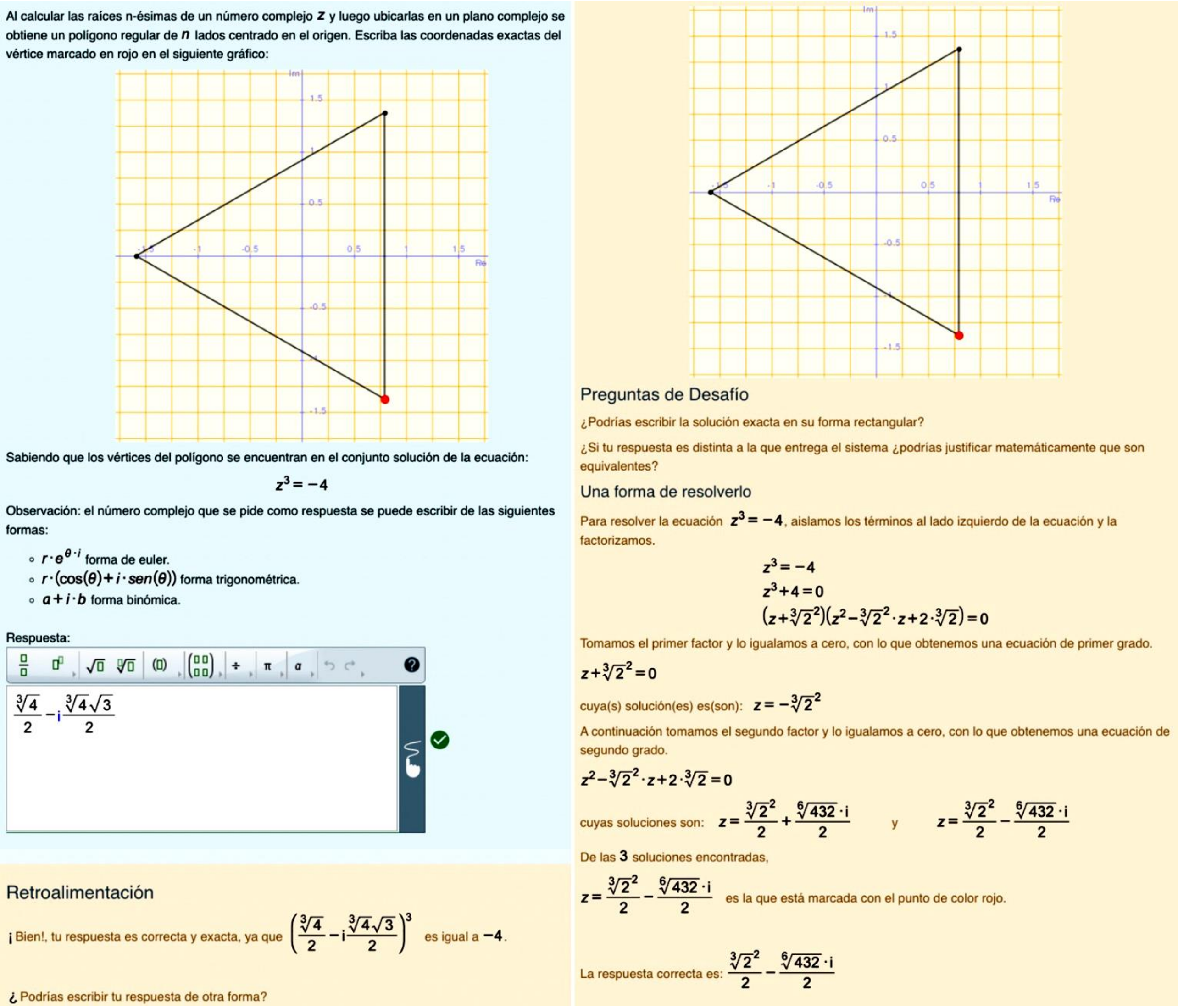


Figure 3 : Captures d'écran de l'une des tâches proposées dans la plateforme sur les nombres complexes.

En plus de l'équation, un plan complexe est présenté, dans lequel les trois racines ont été marquées. Les segments joignant les points représentant les racines forme un triangle équilatéral ou un carré selon la tâche proposée à l'étudiant. La taille du point représentant la racine est légèrement plus grande que le reste des racines de l'équation marquées sur le plan cartésien et il est marqué en rouge.

Le *système de saisie* est un éditeur d'équations permettant d'écrire des nombres complexes sous forme rectangulaire, polaire ou d'Euler. Le *système de validation* évalue les réponses mathématiquement équivalentes, la différence entre une réponse approximative et une réponse exacte, et la différence entre les solutions de l'équation saisie. Le *système de rétroaction* (figure 3(b)) donne d'information en fonction de la réponse de l'élève, ainsi qu'un retour d'information pas à pas en fonction des paramètres de la tâche.

Lorsqu'on leur a demandé s'ils avaient étudié les nombres complexes au lycée, la plupart des élèves ont répondu non et ceux qui ont répondu oui n'avaient que quelques souvenirs vagues et isolés. Par exemple, ils ont indiqué qu'ils provenaient de la solution de l'équation $x^2+1=0$. L'objectif de cette tâche est de permettre aux élèves d'utiliser différents artefacts numériques [1], tels que Photomath, Wolfram Alpha, Symbolab, Geogebra et Calcme, pour analyser et comparer les différentes réponses qu'ils fournissent, c'est-à-dire que les élèves doivent choisir les solutions les plus appropriées à saisir sur la plateforme Moodle/Wiris. Ils ont ensuite discuté en classe des résultats qu'ils ont obtenus sur chaque artefact numérique en résolvant les équations proposées dans les tâches.

Cas 2 : tâche sur les fractions

La tâche proposée était la suivante : écrire une fraction qui se situe entre 1/4 et 1/2. En plus de la représentation fractionnaire de ¼ et ½, leur représentation sur la droite numérique est proposée. Cette tâche a été conçue pour discuter des stratégies qui émergent, de leurs justifications et de la possibilité de les généraliser puis les démontrer.

Dans *l'énoncé,* on demande de saisir une fraction de la forme a/b, avec a et b entiers, qui est comprise entre 1/2 et 1/4 et on montre une partie de la droite réelle où se trouvent ces nombres. *Le système de saisie* est un éditeur d'équation pour écrire les réponses. Le *système de validation* classe les réponses comme incorrectes, partiellement correctes ou correctes. Il évalue la réponse entrée dans la figure 4(a) comme partiellement correcte puisque l'élève a choisi un décimal dans numérateur alors que les instructions demandaient que la fraction ait un nombre entier dans le numérateur et le dénominateur. La réponse saisie dans la figure 4(b) est considérée comme correcte, car elle répond à toutes les exigences.

Le système de rétroaction permet de savoir si la réponse saisie est correcte ou non et indique également pourquoi les réponses sont considérées comme correctes, partiellement correctes ou incorrectes. Pour ce faire, il place la valeur saisie sur la ligne numérique et indique si elle remplit les autres conditions, c'est-à-dire que la rétroaction ne donne pas la réponse et ne suggère pas de stratégie pour la résoudre. De plus, dans le cas où elle est correcte, il invite l'utilisateur à chercher une valeur différente de celle saisie, par exemple, dans la figure 4(a), il demande à l'utilisateur de saisir une valeur plus proche de 1/4.

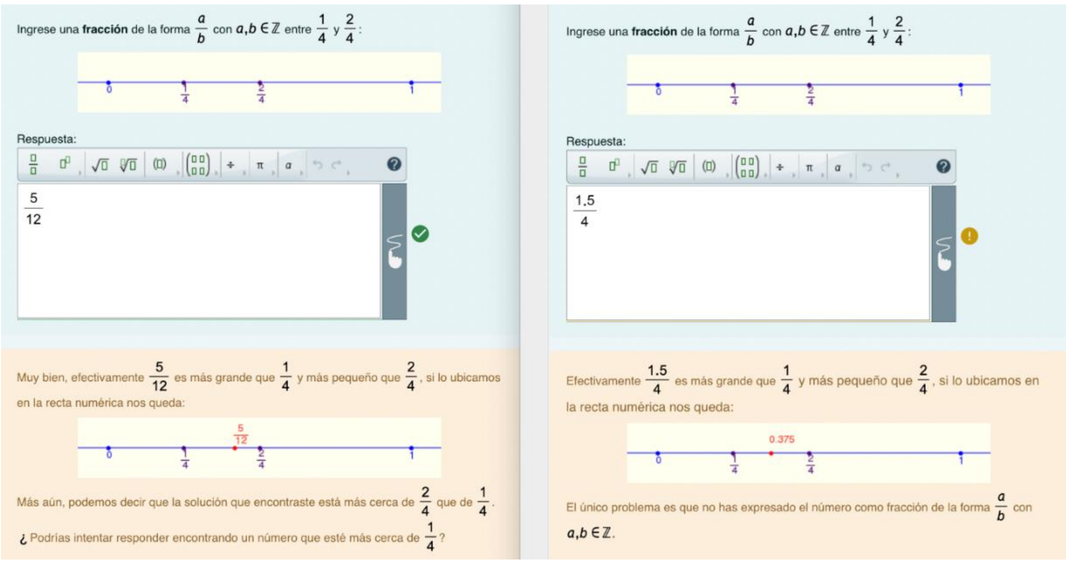


Figure 4 : Captures d'écran des tâches proposées dans la plateforme d'évaluation en ligne sur les fractions.

Concernant la mise en œuvre de cette tâche, un travail individuel de 10 minutes sur la plateforme a été accordé aux étudiants pour trouver une fraction comprise entre 1/4 et 1/2. Puis un débat de classe a été organisé pour échanger sur les stratégies trouvées, leur généralisation et leur démonstration.

RESULTATS ET CONCLUSIONS

Les résultats sont organisés en trois parties. Dans la première partie, le rôle des registres de représentation et des nombres qui composent ces représentations et leur influence sur le travail mathématique des élèves sont analysés. Dans la deuxième partie, la formulation de la question est étudiée : la question ouverte et son influence sur le travail mathématique. Dans la troisième et dernière partie, le rôle du retour d'information dans le travail mathématique est questionné.

Les représentations d'objets dans l'énoncé peuvent activer la visualisation

Nous allons prendre une des tâches du cas 1 sur les nombres complexes, il y a deux registres, le registre algébrique de l'équation et le registre graphique des solutions de l'équation. Puisqu'aucun des deux registres ne peut à lui seul résoudre la tâche - car avec le registre algébrique, je peux obtenir les solutions, mais le graphique m'indique laquelle des deux est nécessaire - les élèves ont nécessairement besoin de visualiser les solutions pour savoir laquelle choisir.

D'autre part, en utilisant différents artefacts numériques, ils se rendent compte que les solutions présentées sont différentes. Par exemple, Symbolab donne quatre solutions symboliques exprimées avec des racines, alors que dans GeoGebra, avec la commande Resuelve(z^4=-5) une solution vide apparaît et avec la commande Raízcompleja(z^4+5) quatre solutions complexes approximatives sont obtenues. Face à ce résultat, Sofía, l'une des élèves qui a travaillé sur ces tâches, indique qu'elle ne comprend pas la tâche ni ce qu'elle doit faire. L'enseignant lui demande de partager l'écran puis de saisir une des solutions obtenues avec Symbolab. Au début, il y a des problèmes pour saisir les symboles (un épisode qui n'est pas analysé ici et qui se produit entre 49:46 min et 55:10, mais qui est analysé dans Gaona, López, et al. (2022)). Une fois cet obstacle surmonté, il y a une interaction entre l'élève et les artefacts, ainsi qu'un dialogue entre l'élève et le professeur qui montre le passage d'une genèse instrumentale à un plan sémiotique-instrumental qui l'aide à comprendre les objets concernés.

En analysant le travail de Sofía, on constate qu'elle parvient à donner un sens aux objets lorsqu'elle triangule ce que demande la plateforme Moodle/Wiris avec ce que Symbolab fournit et avec la représentation graphique obtenue dans GeoGebra. On en conclut qu'un travail exclusivement instrumental (par exemple, l'utilisation de Symbolab) ne suffit pas pour interpréter les solutions ; il est nécessaire de le relier à la genèse sémiotique afin de comprendre de quel type d'objet il s'agit et de savoir comment choisir la solution qui le sert et donne un sens aux objets impliqués. Ce travail est motivé par l'articulation de différents artefacts numériques, ainsi que par la présence de deux registres dans l'énoncé.

Les questions ouvertes

Le cas 2 présente une question ouverte. Les élèves doivent y trouver une fraction comprise entre deux fractions données. Comme la question a une infinité de solutions, différentes stratégies apparaissent naturellement. Dans les informations recueillies sur le travail des élèves, trois stratégies ont été identifiées : par essai et erreur avec les décimaux, par la multiplication du numérateur et du dénominateur par le même nombre et par transformation en décimaux. Après d'âpres discussions, ces stratégies ont abouti à un certain nombre de conjectures de la part des étudiants. L'une d'elles était que, dans une fraction, en amplifiant le numérateur et le dénominateur par n, on obtient n-1 fractions entre les deux fractions.

La démonstration a été faite par Juan, un des étudiants qui a partagé son résultat à l'écran et expliqué son travail. Il fait une séquence de termes entre n/4n et 2n/4n, c'est-à-dire : n/4n, (n+1)/4n, (n+2)/4n,…, (2n-1)/4n, 2n/4n, après il a obtenu le total en soustrayant l'avant-dernier terme du premier terme dans le numérateur : 2n-1-n=n-1.

Le travail initial des élèves décrivant les stratégies et les justifications était principalement instrumental, mais dans le dialogue, les élèves ont évolué vers une genèse discursive donnée par la justification des stratégies en tant que démonstrations des conjectures et soutenue par certains artefacts symboliques de l'algèbre.

La rétroaction

Enfin, nous examinons le rôle de la rétroaction. Dans les deux cas, elle présente des aspects particuliers qui sont examinés ci-dessous.

Dans le premier cas, qui concerne les tâches avec des nombres complexes, il y a trois types de rétroaction. Le premier indique si la réponse est correcte ou non. La seconde indique algébriquement (elle évalue la solution de l'équation et vérifie si l'égalité est satisfaite) et graphiquement (elle marque sur le plan la solution proposée) pourquoi elle est correcte ou incorrecte. Par exemple, si les élèves saisissent une des solutions de l'équation, mais autre que celle marquée en rouge, la vérification algébrique indique que l'égalité est remplie, mais la représentation graphique montre que ce qui est saisi ne correspond pas à la solution demandée pour la tâche. Si, par exemple, une réponse approximative est saisie, la vérification algébrique indique que la solution est proche mais pas exacte et le graphique ne montre pas cette différence. Le troisième et dernier type de rétroaction donne une solution étape par étape d'une stratégie de solution par factorisation algébrique.

La rétroaction apparemment la moins utile pour les étudiants était la dernière, parce que les étudiants n'ont pas réussi à la comprendre et qu'elle a généré plus de doutes que de certitudes. Cependant, cette mauvaise compréhension de la rétroaction a permis à l'enseignant de sonder des questionnements spécifiques concernant le processus de résolution étape par étape, mais peut avoir inhibé certaines stratégies différentes, par exemple, certaines avec une perspective géométrique.

En revanche, la rétroaction fondée sur les réponses aide à comprendre la signification des objets en cause, mais, de par sa nature, elle ne donne pas d'indications sur la façon de résoudre les tâches.

Dans le deuxième cas, sur les fractions, la rétroaction ne dit pas comment résoudre la tâche, elle indique seulement pourquoi elle est correcte ou partiellement correcte. Comme il s'agit d'une question ouverte, elle ne conditionne pas les stratégies des élèves.

CONCLUSION

Dans ces deux cas, nous pouvons voir comment certaines des variables didactiques affectent le travail mathématique, telles que : les objets mathématiques impliqués ou les représentations sémiotiques utilisées, les questions ouvertes et le feedback. Chacun de ces éléments impacte différemment le travail mathématique et montre à quel point la conception d'une tâche peut être complexe. Il a été observé que l'utilisation spécifique de différentes représentations peut activer la genèse sémiotique. En revanche, dans les données observées, la genèse discursive a été activée principalement par le travail avec l'enseignant. Le rôle de l'enseignant est fondamental, car il permet, par la discussion, aux élèves de circuler à travers différentes genèses et plans, enrichissant ainsi leur travail mathématique.

Cet article ne traite pas de tous les aspects de la conception des tâches, mais cherche à fournir quelques indices et principes pour guider la conception, en tenant compte des éléments épistémologiques, instrumentaux et didactiques dans la base d’exercices ou d’évaluation en ligne. En ce qui concerne les énoncés de tâches, un enrichissement de l'ETM personnelle peut être observé lorsque l'on travaille avec a) des tâches ouvertes et 2) des tâches qui ne peuvent être résolues en utilisant un seul type de représentation sémiotiques des objets mathématiques. En ce qui concerne les systèmes de validation et de saisie, doivent être prises en compte des difficultés instrumentales. Quant au retour d'information, un retour d'information qui indique pourquoi une tâche est correcte ou incorrecte, mais ne donne pas nécessairement une stratégie de solution étape par étape, peut aider à ne pas restreindre la diversification du travail mathématique. Enfin, en ce qui concerne les travaux mathématiques instrumentés par différents artefacts numériques, il est important de tenir compte de la validité épistémologique relative des solutions fournies et de pouvoir accompagner le travail des élèves.

NOTE

[1] Les artefacts numériques proposés étaient : photomath, qui est une application pour les appareils mobiles. Calcme, qui est une application disponible via le web : www.calcme.com et les autres sont des applications disponibles dans des applications mobiles et via le web : https://www.wolframalpha.com/, https://es.symbolab.com/ et https://www.geogebra.org/graphing.

REFERENCES

Ainley, J., Pratt, D., & Hansen, A. (2006). Connecting engagement and focus in pedagogic task design. *British Educational Research Journal*, *32*(1), 23–38. https://doi.org/10.1080/01411920500401971

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245–274. https://doi.org/10.1023/A:1022103903080

Balacheff, N. (1994). La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique. In A. Michèle, G. Régis, L. Colette, T. Patricia, & B. Nicolas (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. *Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud* (pp. 364–370). La Pensée Sauvage Éditions.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *19*(2), 221–266. https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Gaona, J. (2018). *Elaboración de un sistema de evaluación en línea como proceso de formación de profesores de matemáticas*. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02458946/

Gaona, J., Hernández, R., Guevara, F., & Bravo, V. (2022). Influence of a function's coefficients and feedback of the mathematical work when reading a graph in an online assessment system. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (IJET)*, *17*(20), 77–98. https://doi.org/10.3991/ijet.v17i20.32641

Gaona, J., López, S., & Montoya-Delgadillo, E. (2022). Prospective mathematics teachers learning complex numbers using technology. International Journal of Mathematical *Education in Science and Technology*, 1–30. https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2133021

Gaona, J., & Menares, R. (2021). Argumentation of prospective mathematics teachers in fraction tasks mediated by an online assessment system with automatic feedback. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *17*. https://doi.org/10.29333/ejmste/11425

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., Maschietto, M., Montoya-Delgadillo, E., Richard, P., Tanguay, D., & Vivier, L. (2019). Actas sexto simposio sobre el Trabajo Matemático (ETM6, 13-18 de diciembre 2018). In I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto, E. Montoya, P. Richard, D. Tanguay, & L. Vivier (Eds.), *Actas Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. https://www.pucv.cl/uuaa/site/docs/20200102/20200102160133/actes_etm6.pdf

Kieran, C., Doorman, M., & Ohtani, M. (2015). Frameworks and principles for task design. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task Design In Mathematics Education. New ICMI Study Series* (pp. 19–81). Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_2

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. R. (Eds.). (2022). *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (1st ed., Mathematics Education in the Digital Era, Vol. 18). Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Vivier, L. (2018). La visualización en análisis. In C. A. Cuevas Vallejo, M. Martínez Reyes, & R. G. Cruz Flores (Eds.), *Tendencias actuales en enseñanza de las ciencias, una perspectiva para investigadores y docentes* (pp. 1–18). Pearson Educación de México.

Leung, A., & Bolite-Frant, J. (2015). Designing mathematics tasks: The role of tools. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task Design In Mathematics Education. New ICMI Study Series* (pp. 191–225). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_6

Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. Tarquin Publications.

Mayring, P. (2015). Qualitative Content Analysis: Theoretical Background and Procedures. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 365–380). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_13

Menares, R. (2018). Planos dirigidos en el ETM personal de profesores en formación: una herramienta metodológica. In I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto, E. Montoya, P. Richard, D. Tanguay, & L. Vivier (Eds.), *Actas Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático* (pp. 245–256). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. https://www.pucv.cl/uuaa/site/docs/20200102/20200102160133/actes_etm6.pdf

Montoya-Delgadillo, E., Mena-Lorca, J., & Mena-Lorca, A. (2016). Estabilidad epistemológica del profesor debutante y espacio de trabajo matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(54), 188–203. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a09

Salazar, J. V. F., Gaona, J., & Richard, P. (2022). Mathematical work in the digital age: variety of tools and the role of geneses. In A. Kuzniak, E. Montoya, & P. Richard (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context - the Mathematical Working Space Theory perspective* (pp. 165–209). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_8

Sangwin, C., Cazes, C., Lee, A., & Wong, K. (2010). Micro-level automatic assessment supported by digital technologies. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (pp. 227–250). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_10

Sierpinska, A. (2004). Research in mathematics keyhole : education through a task. *For the Learning of Mathematics*, *24*(2), 7–15. https://www.jstor.org/stable/40248450%0A

Vandebrouck, F. (2013). *Mathematics classrooms students' activities and teachers' practices*. Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6209-281-5

ETUDE DU TRAVAIL GEOMETRIQUE AUTOUR DES ELLIPSES AVEC LE PLANETAIRE HUMAIN

Emmanuel Rollinde, Assia Nechache, Maha Abboud

CY Cergy Paris Université, LDAR, 75013 PARIS, France

Le planétaire humain est une représentation matérielle plane du Système Solaire sur laquelle apprenants et enseignants peuvent se déplacer. Etabli par des calculs et des considérations astronomiques, le planétaire humain offre aux enseignants la possibilité d'une approche interdisciplinaire de concepts scientifiques (mathématiques et physiques). Nous proposons d'analyser une séquence menée par deux enseignantes de mathématiques avec des élèves de 3^e^ SEGPA et de 3^e^ générale. L'objectif final est la construction des orbites planétaires de forme elliptique. Les élèves construisent un ovale puis une ellipse dans le micro espace, enfin reproduisent une ellipse par une homothétie dans le méso-espace. Nous analysons le travail géométrique des élèves dans les deux espaces et les liens qu'ils arrivent à construire.

INTRODUCTION

Le planétaire humain est une carte du Système Solaire dessinée au sol ou sur une bâche (Figure 1), qui représente les mouvements de plusieurs objets célestes en orbite autour du Soleil. Il a été décrit en détails selon le point de vue de la cinématique par Rollinde et al. (2017) et des mathématiques par Abboud et Rollinde (2021). Les corps célestes, réels mais inatteignables, imperceptibles, prennent corps sur le planétaire humain qui permet la mise en contexte des objets physiques et mathématiques par l'astronomie et une approche incarnée. Les apprenants, en jouant le rôle des planètes, créent une analogie entre les corps humains et les corps célestes dans le système solaire, entre le mouvement du corps et le mouvement des planètes. L'enseignant comme les apprenants découvrent alors la présence d'un corps enseignant et d'un corps apprenant (Lapaire, 2019) qui permettent de rejouer et d'amplifier les situations astronomiques associées à des concepts de physique et de mathématiques.

Les positions des planètes le long de leur orbite sont représentées à intervalle de temps constant de 16 jours. Pour la comète Encke, dont l'excentricité est grande, elles sont éloignées de trois fois 16 jours afin d'éviter des positions trop proches autour de l'aphélie (point le plus éloigné du Soleil). Les apprenants vont alors entrer directement dans l'expérience. Ils vont se déplacer le long de chaque orbite, en écoutant l'animateur taper régulièrement dans ses mains. Ils font un pas entre deux sons en posant leur pied à chaque son sur le chiffre suivant.

Dans cette communication, nous nous intéresserons à la construction d'un planétaire humain dans la cour d'un collège sur l'année 2021-2022 par deux enseignantes de mathématiques [1], avec les élèves de leurs classes de 3$^{\text{ème}}$ générale et SEGPA (les élèves de ce collège sont considérés d'un bon niveau par rapport à la moyenne nationale). Si le mouvement des objets était circulaire uniforme, les positions successives pourraient être déterminées en mesurant uniquement des angles sur des cercles. Cependant, la vitesse des planètes et surtout de la comète n'est pas constante, et l'orbite est elliptique. A partir des données astronomiques, les élèves peuvent reconstruire les orbites elliptiques, en revanche, ils ne peuvent pas retrouver les positions au cours du temps. Ils ont donc à leur disposition le dessin complet du planétaire avec les positions. L'objectif est alors de construire un agrandissement du dessin pour obtenir la même échelle que le planétaire humain (Figure 1), un mètre correspondant à une Unité Astronomique (distance Terre-Soleil).

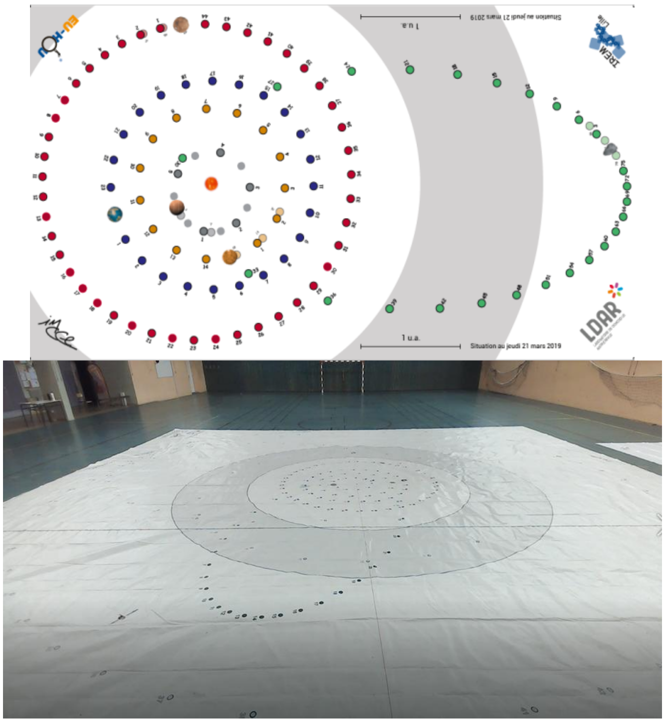


Figure 1 : Le planétaire humain dans le gymnase du collège Bercé

La construction du planétaire humain dans la cour du collège met en jeu les notions mathématiques d'alignement, d'homothétie, et de formes géométriques – du cercle à l'ellipse. La séquence de construction est conçue de telle manière à mettre en œuvre le jeu entre le méso-espace et le micro-espace, entre les perceptions des corps apprenant et les propriétés mathématiques. A travers la nature du travail mathématique mis en œuvre dans cette séquence d'apprentissage, nous identifierons les genèses (sémiotique, instrumentale et discursive) privilégiées dans la réalisation des tâches prescrites et leurs interactions.

LA SEQUENCE DE CONSTRUCTION DU PLANETAIRE

De septembre à novembre 2021, les élèves ont renforcé leur connaissance du Système Solaire, à travers les types d'objets (une étoile, planètes, astéroïdes, comètes) et la comparaison des tailles et des distances au Soleil. A travers ces exercices, les enseignants ont pu vérifier que les notions d'échelle et de proportionnalité étaient suffisamment acquises pour la construction. Nous n'analysons pas plus loin cette phase préliminaire dans cette contribution. La construction du planétaire s'est déroulée selon quatre séances mises en œuvre entre novembre 2021 et mars 2022. Les élèves ont découvert le planétaire humain imprimé en novembre 2021, permettant une première approche dans le méso-espace (Figure 1). Ils ont ensuite travaillé la figure de l'ellipse dans le micro-espace en février 2022. La construction d'ellipse par homothétie et par le tracé d'ellipse a eu lieu en mars 2022.

Nous allons maintenant analyser chaque séance en menant une analyse a priori des attendus et des difficultés, et une analyse a posteriori à partir d'interview des enseignantes et des traces obtenues (vidéos et photos des élèves).

Séance 1. La découverte du planétaire humain et des ellipses

En novembre 2021, les élèves ont découvert les orbites planétaires au cours d'une séance d'une durée d'une heure trente environ sur le planétaire humain. Cette séance a été menée par deux d'entre nous en présence des enseignantes. Elle a eu lieu sur un planétaire imprimé sur une bâche de 12 mètres sur 12 mètres, que nous avons déployée dans le gymnase du collège (Figure 1, droite). Ils ont ainsi travaillé dans le méso-espace. L'objectif de cette étape est une mise en contexte de la construction du planétaire. Les élèves ont pu se déplacer sur le planétaire afin de comprendre son utilisation avant d'aborder sa construction. Cinq groupes de 16 à 20 élèves ont suivi cette séance sur deux journées.

Phase 1. Identification des objets

Les élèves commencent par identifier les différents éléments présents sur le planétaire humain. Les activités menées en amont de cette séance permettent une identification rapide des objets du Système Solaire, Soleil, planètes et comètes, ainsi que de leur orbite.

Phase 2. La chorégraphie des planètes

Les élèves se déplacent par petits groupes sur les différentes orbites. Nous ne revenons pas ici sur les aspects cinétiques des déplacements qui ne sont pas le sujet de cette communication (voir Rollinde, 2017 pour une analyse de ces aspects). Chaque élève va successivement se déplacer sur une orbite et observer d'autres élèves se déplacer sur le planétaire. Chaque élève doit également se déplacer sur une orbite planétaire quasi-circulaire (excentricité inférieure à 0.1 sauf pour Mercure avec e=0.2) et sur l'orbite d'une comète dont l'excentricité est proche de 1 (0.6 ou 0.8 pour les deux comètes représentées sur le planétaire humain). Pour des considérations énergétiques, la vitesse est quasi-constante sur les orbites planétaires et très variables sur les orbites des comètes. Au cours de leur déplacement, les élèves marchent sur des points discrets (les positions des objets célestes à des instants successifs) le long de figures géométriques continues (les orbites). Leur mouvement trace ainsi des figures continues, tandis que leur attention est portée sur les points discrets. Au contraire, les élèves qui observent assis autour du planétaire portent leur attention sur les élèves qui marchent et peuvent comparer les différentes figures suivies. Nous faisons l'hypothèse a priori que ces deux tâches (en tant qu'acteur ou observateur) permet une connaissance-en-acte (ou un schème, considéré comme « ce qui relie le geste à la pensée » par Trouche, 2002 ; cité par

Nogry, 2020, p. 31 ; Rollinde, 2022) des figures géométriques et de la distinction entre une représentation discrète et une représentation continue. Ceci sera confirmé dans la phase suivante.

Phase 3. Proposition et vérification d'hypothèses

Les élèves se regroupent ensuite en petit groupe pour émettre des hypothèses sur les mouvements qu'ils viennent de vivre. Chaque groupe va alors proposer une hypothèse et un autre groupe proposera une méthode pour valider ou infirmer cette hypothèse en utilisant le planétaire humain.

Les hypothèses portant sur la forme des orbites vont toujours montrer que les élèves reconnaissent le representamen de la figure géométrique du cercle dans le cas des orbites planétaires et qu'ils le comparent à l'orbite des comètes qui ne correspond pas à ce representamen. La première approche proposée pour vérifier leur hypothèse est basée sur un processus de visualisation du signe « cercle ». Les auteurs ont remarqué (avec d'autres collèges ou en formation initiale de professeur des écoles) que ce processus de visualisation devait parfois être renforcé par l'utilisation d'une corde mise autour du cercle, retrouvant ainsi le representamen continu de la figure du cercle. Les élèves proposent ensuite d'utiliser des cordes et des décamètres (des artefacts matériels) pour vérifier si l'orbite est un cercle (representamen). En utilisant la propriété d'un cercle dont le centre est connu (les rayons sont tous de même longueurs), ils comparent directement sur le planétaire la longueur de deux rayons ou de deux diamètres (representamen). Plus précisément, ils commencent par mesurer à l'aide du décamètre plusieurs rayons en prenant le Soleil comme centre, ou à mesurer un diamètre en passant par le Soleil. Ici, les élèves mobilisent donc les propriétés du cercle en supposant connu le centre. La conclusion de cette démarche de vérification est montrée sur la Figure 2 (gauche) dans le cas de l'orbite de la Terre. La mesure effectuée sur quelques diamètres n'est pas assez précise et reste cohérente avec un cercle centré sur le Soleil. Au contraire, en utilisant une corde de longueur fixe (maintenue tendue par deux élèves) avec un point fixe sur le Soleil et l'autre point se déplaçant le long de l'orbite, un groupe a pu constater que l'orbite de la Terre n'était pas un cercle centré sur le Soleil. Ils ont ainsi comparé deux signes représentant le cercle : dans le cas continu par le mouvement de la corde et dans le cas discret avec l'ensemble des points discrets visibles sur le planétaire. Le groupe qui a travaillé sur l'orbite de Mercure (la planète la plus proche du Soleil) a pu conclure directement que le Soleil n'était pas le centre. En effet, la forme de son orbite est visuellement circulaire, mais le Soleil est décalé par rapport à un centre qui peut être déterminé visuellement.

Les élèves ont donc démontré que les orbites n'étaient pas des cercles centrés sur le Soleil. Une intervention de l'enseignante a été nécessaire pour faire l'hypothèse que le Soleil n'est pas nécessairement le centre. Le diamètre d'un tel cercle est alors construit d'un point à un autre. Ainsi, la définition du diamètre est appliquée (par les élèves) comme une « corde reliant deux points » (référentiel théorique) avec une longueur « visuellement plus grande ». Cependant, le diamètre ne relie pas deux points représentés le long de l'orbite et il faudrait alors utiliser une visualisation du cercle entre les points, ce qui n'est pas fait de façon autonome par les élèves. Seul un groupe a proposé une méthode mathématique plus complexe en utilisant un triangle dont les sommets sont trois points de l'orbite afin d'en déterminer les bissectrices (Figure 2, droite). Cette procédure est restée délicate dans le méso-espace car nous n'avions pas des règles et des équerres de taille suffisante pour aboutir à la construction du centre.

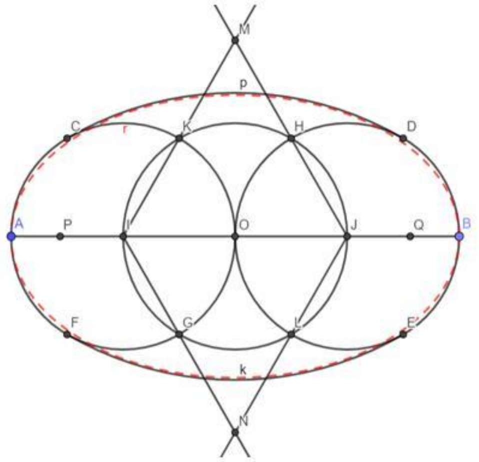
Figure 2 : deux méthodes pour vérifier l'hypothèse de circularité des orbites sans supposer que le Soleil doit être un centre.

A travers cette démarche de vérification d'une hypothèse de circularité, les élèves ont pu avoir une première approche géométrique du Système Solaire à partir du principal (seul) schème à leur disposition, la figure du cercle associé à son centre, dont les propriétés (rayons et diamètres) sont définies par les points de l'orbite et par le Soleil. La recherche du centre du cercle par l'intersection de diamètres puis de l'extrémité du diamètre en dehors des points visibles est effectuée seulement après l'incitation de l'enseignante.

Dans cette première séance, la genèse sémiotique joue un rôle important dans le processus du travail. Elle a été mobilisée pour interpréter des signes (points sur l'orbite, la position du soleil, diamètre, rayon, etc.) et mettre en relation les signes interprétés. L'interprétation et la mise en relation des signes est effectuée à l'aide des propriétés du référentiel théorique (ici celles du cercle). Par ailleurs, la genèse instrumentale est également mobilisée, avec l'usage d'un ensemble d'artefacts matériels (décamètre, corde, etc.) pour construire, reporter ou mesurer des longueurs dans le micro espace. Ces genèses ont initié une première compréhension de l'ellipse comme une « forme allongée d'un cercle » par comparaison entre les orbites planétaires et celles des comètes. On a donc ici un nouvel representamen qui est introduit dans l'Espace de Travail Géométrique (ETG).

Séance 2 : la construction d'une ellipse dans le micro espace

Soulignons que la notion d'ellipse n'est pas au programme de la classe de 3$^{\text{ème}}$. C'est pourquoi, les enseignantes ont fourni directement aux élèves un programme de construction d'un ovale (Reisz, 2011), figure approchée de celle de l'ellipse (Figure 3, gauche, et annexe 1). Tel qu'il est conçu, le programme met l'accent sur l'importance du centre d'un cercle et du milieu d'un segment dans le processus de visualisation que peuvent exercer les élèves sur les objets : cercle et diamètre, segment (référentiel théorique). Les deux foyers de l'ellipse apparaissent au cours du protocole de construction et permettent alors de construire la forme exacte de l'ellipse par la « méthode du jardinier » qui fait appel à une ficelle (artefact matériel) attachée aux deux foyers de l'ellipse (Figure 3, droite).



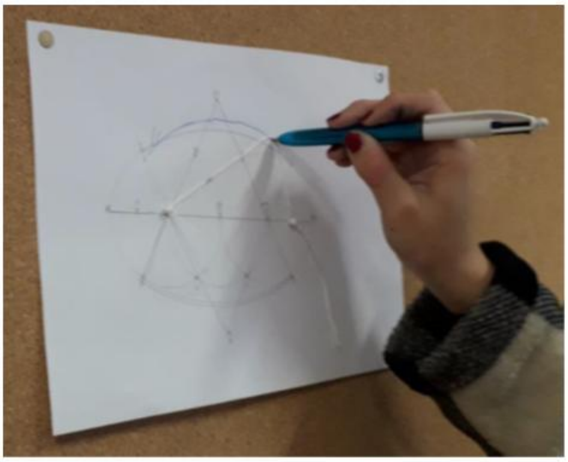


Figure 3 : Construction géométrique (gauche) et « méthode du jardinier » (droite) pour faire ressortir la forme d'une ellipse réalisée sur GeoGebra (gauche) et par un élève (droite).

L'analyse a posteriori est basée sur l'interview de l'enseignante qui a mené ces séances. La séance commence en groupe entier. Les élèves rappellent les formes des orbites observées (séance 1) sur le planétaire humain en utilisant les termes : « rond / cercle / ovale ». L'enseignante donne le nom mathématique d'ellipse pour l'ovale puis explique qu'au cours de cette séance, ils vont apprendre à tracer une ellipse.

Le programme est fourni dès le début. Tous les élèves ont pu finaliser la construction géométrique et le tracé avec la corde. La construction de l'ellipse par la méthode du jardinier a été effectuée en plaçant la feuille sur une plaque de liège mise au mur (Figure 3), permettant ainsi un « tracé vertical ». Cette position est plus simple pour que les élèves soient à l'aise avec les deux mains. Deux épingles sont plantées sur les foyers, et un nœud est fait sur la ficelle (artefact) aux deux extrémités. Les élèves ont rencontré des difficultés pour faire glisser la corde sur les épingles, mais le résultat est assez convaincant.

Au cours de cette séance, la méthode de construction de l'ellipse a nécessité la mobilisation de la genèse instrumentale pour exécuter le programme de construction à l'aide d'artefacts matériels (compas, règle, ficelle, etc.) pour construire la configuration donnant lieu à une ellipse. Le travail mathématique a donc été élaboré dans le plan [Sem-Ins]. Or l'exécution du programme de construction nécessite également la mobilisation du référentiel théorique (en lien avec les notions de cercle, milieu d'un segment). Ces tâches de construction ont permis d'introduire un nouveau signe, celui de l'ellipse, dans l'ETG personnel des élèves.

Séance 3 : la construction dans la cour

L'enseignante avait laissé le choix à ses élèves entre le tracé d'une ellipse (réalisée lors de la séance 2) ou une homothétie/agrandissement du dessin en format A3 (donc point par point). Les élèves ont considéré que la construction de l'ellipse sur le liège avec des cordes était réalisable mais qu'elle serait moins naturelle dans la cour. Cette méthode d'agrandissement a nécessité un travail préparatoire pour calculer le coefficient d'agrandissement du dessin en A3 vers l'échelle spatiale de 1 mètre pour une Unité Astronomique dans la cour. Les élèves ont utilisé la proportionnalité pour calculer les distances finales de chaque point sur les différentes orbites (ces aspects n'ont pas posé de problèmes aux élèves de 3^{e} et ne sont pas traités ici). La construction a été menée sur 3 semaines en février 2022 par groupes de 14 élèves.

Protocole de construction

Pour chaque point, quatre élèves font l'agrandissement tandis que les autres observent et doivent être attentifs pour vérifier que la procédure est bien menée. Le protocole suivi est le même pour tous les points de toutes les orbites (Figure 4). La représentation en A3 est positionnée au sol. Pour s'assurer de la position, les élèves ont percé la feuille pour placer le Soleil au centre du planétaire. L'axe vernal sur le dessin A3 est placé le long de l'axe vernal dessiné au préalable sur la cour. Les élèves sont d'accord pour convenir qu'un point et un axe suffisent pour assurer la position d'un repère.

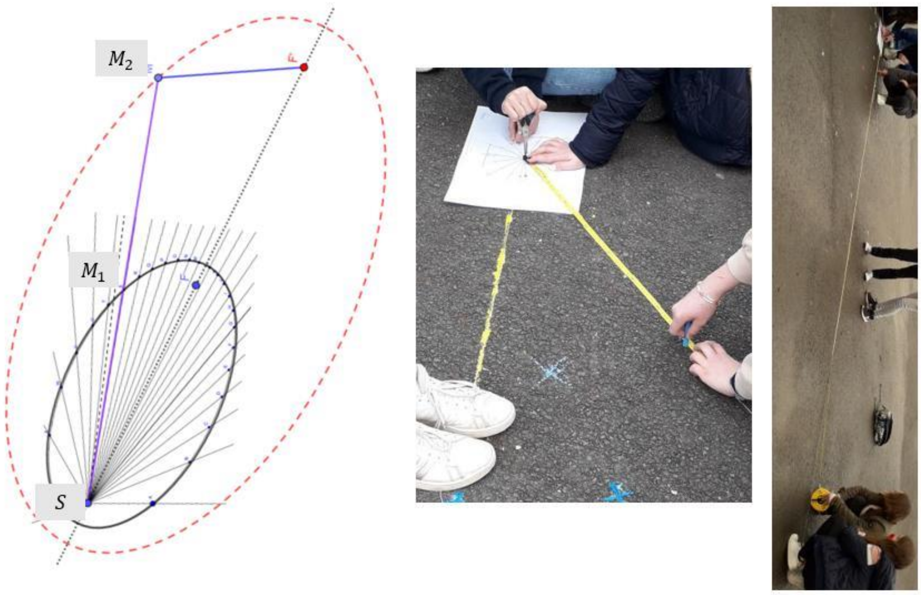


Figure 4 : Protocole de construction par homothétie (gauche) suivi par les élèves pour Mercure (centre) et Encke (droite)

Un élève maintient le dessin A3 et va tenir plusieurs ficelles au niveau du Soleil.

Un second élève maintient le bout d'une ficelle sur l'axe vernal au sol pour vérifier qu'il reste aligné avec celui du dessin A3, et donc que la feuille ne bouge pas au cours de la manipulation. Un troisième élève fait passer une seconde ficelle sur un des points de l'orbite et la maintient bien droite au-delà. Un quatrième élève va alors placer un décamètre sur le Soleil et le long de cette seconde ficelle jusqu'à atteindre la distance voulue pour l'agrandissement à échelle « humaine ». Le décamètre aurait pu être utilisé seul, à la place de la seconde ficelle. Les élèves ont cependant considéré que l'usage d'une ficelle permettrait d'obtenir un meilleur alignement que le décamètre. Dans le travail produit dans ce groupe, on constate un jeu entre les genèses sémiotique et instrumentale, avec l'identification des points clés (centre, le point antécédent et la direction du point image) et l'utilisation des artefacts adéquats pour mener à bien l'agrandissement voulu. Ce jeu a fait appel aux propriétés du référentiel théorique, telles que l'alignement et l'homothétie.

L'alignement de trois points avec une corde

Nous notons ici une difficulté rencontrée dans des expériences de construction du planétaire dans d'autres collèges. Pour placer le point sur l'orbite à « échelle humaine », noté ici M2, la corde doit être tenue au Soleil, S, maintenue tendue et déplacée par rotation jusqu'à ce qu'elle passe par le point sur l'orbite à « échelle imprimée », noté ici M1 (Figure 4, gauche). Dans le travail en classe, avec le passage du A4 au A3, une règle peut être utilisée. Elle est alors placée directement sur le segment [SM1] et le point M2 sera sur l'autre extrémité de la règle à la distance calculée avec le coefficient d'agrandissement. Dans le contexte du tracé dans la cour, la corde n'est pas rigide. Or, très souvent, les élèves commencent par placer la corde sur S, la déplace pour passer environ sur M1. Puis, pour s'assurer que la corde passe par M1, ils la maintiennent avec leurs mains sur M1, comme ils le feraient avec la règle. Mais dans le cas de la corde non rigide, cela crée deux segments [SM1] et [M1M2] qui ne sont plus parallèles. Les élèves du collège de Bercé n'ont pas fait cette erreur et ont procédé autrement pour s'assurer de l'alignement. Ils ont commencé par un alignement en maintenant la ficelle proche du dessin (Figure 4, centre) pour avoir une direction « raisonnable », puis ils ont lâché la ficelle et vérifier à nouveau l'alignement mais en maintenant la ficelle à la position finale de M2 (Figure 4, droite).

Tracé de l'orbite elliptique de la comète Encke

Les orbites des planètes jusqu'à Mars n'ont pas posé de difficulté particulière car l'agrandissement depuis le format A3 n'était pas trop grand. Le cas de l'orbite de la comète Encke est plus intéressant car il fait apparaître clairement le signe de l'ellipse. La distance maximale de Encke au Soleil est de 4 UA tandis que les points sur l'orbite de Mars sont environ à 1,5 UA du Soleil. Ainsi l'agrandissement pour Encke est près de 2,5 fois plus grand que pour Mars. Ceci accentue la difficulté pour obtenir des points précisément positionnés (Figure 4, droite).

Les élèves visualisent l'ellipse en train de se tracer de point en point. Lorsqu'ils tracent l'orbite sur les positions éloignées du Soleil, celles-ci sont très proches les unes des autres car la comète va très lentement à cet endroit. Ainsi, un des élèves qui tenait le bout de la ficelle peut faire une prédiction sur la position du point suivant : « moi je dis c'est par là parce qu'il est tout le temps-là » (propos rapportés par l'enseignante de la classe). Il prend la mesure avec le décamètre, trace le point à la craie et confirme en affirmant « voilà, t'as vu comment je devine » (propos rapportés par l'enseignante de la classe). Il n'utilise probablement pas ici le representamen de l'ellipse, mais seulement la visualisation de la régularité des points successifs.

Pour ce tracé, les élèves « observateurs » ont eu un rôle plus important, en se remémorant leur propre déplacement sur le planétaire humain. La comète va moins vite lorsqu'elle est éloignée du Soleil ce qui conduit à des points successifs très proches par rapport aux positions proches du Soleil (la durée entre deux points étant la même). Lorsqu'ils constatent un écart trop grand entre deux points, ils disent à leurs camarades que « là ce n'est pas possible qu'ils soient plus espacés ». Ces élèves ont à leur disposition un schème relié à la forme géométrique de l'ellipse (positions proches et éloignées du foyer) et à l'aspect cinématique du mouvement de la comète.

Confirmation par la "méthode du jardinier"

Lorsque tous les points de l'orbite de la comète Encke ont été placés, les enseignantes ont souhaité faire vérifier la forme elliptique de la construction à l'aide d'une corde, en reprenant ce qui avait été fait en classe (Figure 5).

Il a fallu tout d'abord placer le second foyer en utilisant les informations astronomiques de la distance entre le Soleil et le second foyer, ainsi que l'angle entre cet axe (le grand axe de l'ellipse) et l'axe vernal. Cette activité a permis aux élèves d'utiliser un rapporteur dans le meso-espace. Ensuite, ils ont pu tracer l'ellipse par la méthode du jardiner. Le tracé de l'ellipse ayant été très satisfaisant, la plupart des points obtenus par homothétie se trouvaient sur l'ellipse ! Par cette dernière tâche, les élèves ont pu associer une visualisation continue et discrète du signe « ellipse ».

Figure 5 : Tracé de l’orbite elliptique de la comète Encke par la méthode du jardinier. Gauche : Positionnement du second foyer. Droite : tracé de l’orbite avec une corde tendue entre les deux foyers (haut), et résultat final (bas)

SYNTHESE ET CONCLUSION

Dans le cadre de cette communication, nous avons présenté le travail géométrique mené au cours de la construction d’un planétaire humain dans trois espaces : le gymnase du collège (méso-espace), en classe (micro-espace) puis dans la cour (retour au méso-espace). Les mouvements de Mercure, Vénus, Terre et Mars et de Encke sur leur orbite ont ainsi été représentés à échelle humaine en partant d’une représentation imprimée sur un format A3. Plusieurs compétences ont été mobilisées tout au long de cette construction : calcul de coefficient d’agrandissement et tracé d’homothétie, tracé de cercles et tracé d’ellipse. L’agrandissement et l’homothétie sont des compétences acquises par les 3^{e} (en particulier à travers l’utilisation répétée du théorème de Thalès depuis le début de l’année). Il s’agit donc plus d’un réinvestissement avec un travail sur des échelles différentes (A4-A3, A4-cour).

Au cours de cette construction, les élèves ont construit un nouveau signe (l’ellipse) qui n’était pas disponible dans leur ETG personnel et qui prolonge celui du cercle. Enfin, le lien entre une description discrète et continu des signes géométriques a été vécu dans une perception statique et visuelle d’une part (à travers les différentes représentations des orbites, par point ou avec une corde), et dynamique et kinesthésique d’autre part (le mouvement des élèves, le tracé point par point). Ces différentes représentations semblent avoir été activées particulièrement dans les remarques des observateurs de la construction de l’orbite de Encke.

NOTES

[1] Mme Keradennec et Mme Aubert, enseignantes de mathématiques au collège de Bercé (Montval-sur-Loire).

REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient Mme Keradennec et Mme Aubert pour tout le travail de préparation de la séquence qui fait l'objet de cette communication, et pour le temps consacré aux entretiens faisant suite aux différentes séances.

REFERENCES

Abboud, M. & Rollinde, E. (2021) Les mathématiques du Système Solaire en plein air. Le planétaire humain au collège. *Repères IREM*, 27-52. ⟨HAL- 03293334⟩.

Lapaire, JR. (2019). *Mental action as visible bodily performance: An Educational Perspective*. Benedek, Andras, Nyiri, Kristof Vision Fulfilled. The Pictorial Turn, Hungarian Academy of Sciences. Budapest University of Technology and Economics, 27-37. <HAL-02091834>.

Nogry, S. (2020). *Des objets pour apprendre. Articulation entre dynamiques d'appropriation en situation d'apprentissage et développement*. Habilitation à diriger des recherches. Université de Paris 8.

Reisz, D. (2011). Ovale, bel ovale. *Bulletin de l'APMEP, 479*, 716-731.

Rollinde, E., Decamp, N., & Derniaux, C. (2021). Should frames of reference be enacted en astronomy instruction? *Physical Rewiew Physics Education Research, 17*(1), 013105. HTTPS://DOI.ORG/10.1103/PHYSREVPHYSEDUCRES.17.013105

Rollinde, E., (2017). Learning science through enacted astronomy. International *Journal of Science and Mathematics Education, 17*(2), 237-252. HTTPS://DOI.ORG/10.1007/S10763-017-9865-8.

Rollinde, E. (2022). Vivre les Corps célestes avec le Corps Apprenant. In Duval, H.,Raymond, C. & Odier-Guedj, D. (dir.), *Engager le corps pour enseigner et apprendre*. *Diversité de perspectives*. Québec: PUL, collection FRéA.

ANNEXE 1
PROTOCOLE DE CONSTRUCTION D’UNE ELLIPSE

Les éléments indiqués entre crochets sont des commentaires ajoutés au protocole par les auteurs pour illustrer l’importance du centre et du milieu dans ce protocole. Ils n’étaient pas présents dans le protocole fourni aux élèves.

1) Sur une feuille blanche, réalise la construction suivante:

Trace un segment [AB] de longueur 16 cm.

Sur le segment [AB], place les points I, O et J tels que : AI = IO = OJ = JB.

Trace les cercles de centre I, O et J et de rayon AI. [*le cercle est défini par son centre et son rayon*]

Les cercles de centres I et O se coupent en K et G. Les segments [CG] et [KF] sont des diamètres du cercle de centre I. [*le diamètre est construit comme le segment reliant deux points du cercle et passant par le centre*]

Les cercles de centres J et O se coupent en H et L. Les segments [DL] et [HE] sont des diamètres du cercle de centre J.

Les droites (IG) et (JL) se coupent en N. Les droites (IK) et (JH) se coupent en M.

Dans le sens des aiguilles d’une montre: l’arc de cercle de centre M a pour extrémités E et F ; l’arc de cercle de centre N a pour extrémités C et D.

2) L’ellipse est une courbe possédant des propriétés géométriques étonnantes. Grâce à l’une d’elle, on peut la tracer en fixant une ficelle de longueur constante à deux points donnés: c’est la méthode du jardinier. [*L’ellipse peut être définie par une méthode de construction au-delà de son aspect visuel*]

Sur la construction précédente, place les points P et Q tels que O soit le milieu de [PQ] et PQ = 12,5 cm.

En prenant une ficelle de longueur AB, vérifie que tes tracés précédents permettent d’obtenir une ellipse.

À TRAVERS LES PARADIGMES GÉOMÉTRIQUES. LES ESPACES DE TRAVAIL DU DÉCORATEUR ANTIQUE ET DU CHERCHEUR ACTUEL

Bernard Parzysz

Laboratoire de Didactique André-Revuz & Université d'Orléans

Cet article a pour objectif d'identifier et de préciser les espaces de travail géométriques, d'une part des artisans antiques qui ont produit des décors « géométriques », et d'autre part des chercheurs actuels qui cherchent à identifier les modèles implémentés par ces artisans, ainsi que leurs connaissances et les gestes techniques mis en œuvre. Cette démarche nécessite une circulation entre plusieurs paradigmes géométriques, incluant ceux qui sont associés aux logiciels de géométrie dynamique. Elle peut aussi être adaptée à l'enseignement secondaire : son articulation en phases bien différenciées, l'absence de recours à la mesure et le statut de la précision étant susceptibles de mettre en évidence chez les élèves la distinction entre les paradigmes en jeu, tant au niveau des objets et des artefacts que des validations.

INTRODUCTION

Cet article a pour objet de faire le point sur une réflexion personnelle amorcée il y a quelques années (Parzysz, 2009) et qui s'est poursuivie à la fois au sein du LDAR et du groupe Géométrie de l'IREM de Paris (Perrin et al., 2021). Ce travail concerne des institutions qu'on peut qualifier de « fossiles », puisqu'il s'agit en l'occurrence de communautés d'artisans du décor antique : mosaïstes, fresquistes et stucateurs. Plus précisément, il s'intéresse :

- d'une part, aux modèles de référence des artisans de l'Empire romain spécialisés dans la réalisation des décors dits « géométriques », à leur connaissances professionnelles et à leurs gestes techniques ;
- d'autre part, à la démarche du chercheur d'aujourd'hui qui entreprend d'identifier ces modèles, ces connaissances et ces savoir-faire à partir des œuvres conservées – seules données disponibles −, avec pour objectif de déterminer l'ensemble des procédures ayant abouti à leur production.

La situation est bien sûr différente de celle que nous connaissons de nos jours dans les institutions scolaires. Elle ressortit peu ou prou à l'ethnomathématique (Ascher, 1991), discipline qui « *porte sur la production, l'organisation et la diffusion des savoirs d'une culture à l'intérieur de sa propre manière de voir le monde* » (Radford, 2017, p. 169). Dans le cas présent, pour la société dans − et pour − laquelle elles furent produites, les œuvres dont il s'agit n'étaient pas considérées comme mathématiques, mais comme décoratives (ou, au mieux, artistiques), et ceux qui les réalisaient ne se considéraient pas comme des géomètres mais comme des artisans. Cependant, du point de vue des espaces de travail géométrique (ETG), on peut a priori rattacher leur corpus de connaissances à un paradigme de type G1 (Houdement-Kuzniak, 2006) qui, comme on le verra, est d'un type particulier puisqu'il ne prend pas en compte la mesure (Mathé et al., 2020). Cette particularité, associée à l'aspect esthétique des objets en jeu, nous a paru susceptible de pouvoir jouer un rôle dans le cheminement intellectuel des élèves du cycle 3 (9-12 ans) vers une géométrie théorique de type G2, enjeu majeur de l'enseignement de la géométrie au cycle 4 (12-15 ans).

LES ESPACES DE TRAVAIL GÉOMÉTRIQUES EN JEU

1) La géométrie de l'artisan qui réalise un décor sur un mur ou un sol fait usage d'instruments de tracé matériels. Il s'agit donc d'une géométrie de type G1. Dans le cas présent, comme dans le cas de la géométrie scolaire au début de la scolarité, les objets de l'espace de travail sont des tracés obtenus à l'aide des artefacts que sont les instruments de dessin traditionnels : règle, compas, équerre ; son horizon est de nature technologique, car « *la déduction s'exerce prioritairement sur des objets matériels à l'aide de la perception et de la manipulation d'instruments*. » (Kuzniak, 2006, p. 172). Il en résulte une validation de nature perceptive, pure ou instrumentée. On se situe donc dans une problématique de la précision, qui ne distingue pas une construction approchée d'une construction exacte dès qu'elle en est suffisamment voisine.

Notons toutefois qu'il s'agit chez l'artisan antique d'une géométrie *sans unité de mesure fixe*, en raison de la complexité, tant du système de mesures romain que du système de numération non positionnel. Il en résulte qu'un individu n'ayant pas eu accès, lors de sa formation, à l'utilisation de l'abaque, était incapable de pratiquer certaines opérations. L'instrument « règle » dont il est ici question est donc une règle non graduée.

Comme dans une géométrie G1 scolaire, les opérations possibles sur les longueurs sont des additions et des soustractions, ainsi que des multiplications et des divisions par des nombres entiers. La seule qui pose problème est la division : pour diviser une longueur par une puissance de 2, il suffit de replier un cordeau une ou plusieurs fois sur lui-même. Pour les autres entiers, la technique était très probablement du type « balancement » (Bouillon, 1839, Parzysz, 2020), suite raisonnée d'approximations qu'on peut décrire ainsi :

> Soit à partager une longueur L en n parties égales. On détermine à l'estime une longueur de cordeau x égale à L/*n*, que l'on reporte *n* fois le long d'un segment de longueur L. On considère ensuite l'écart entre nx et L, et on estime sa n^{e} partie, soit ε. On prend une longueur de cordeau égale à $x+\varepsilon$ ou x-ε (selon le sens de l'écart observé) et on réitère la même opération [1].

Un artefact important lié à cet espace de travail était donc le cordeau, instrument fondamental en ce sens qu'il pouvait suppléer les autres instruments. Il servait en particulier à reporter des longueurs, ce qui était peut-être son utilisation principale.

La question générale de l'agrandissement-réduction, c'est-à-dire de la mise en place du décor à partir d'un dessin réalisé à une échelle différente, mérite également d'être posée. Plus précisément : de quels moyens l'artisan disposait-il pour le faire ? Nous avons déjà vu que la multiplication d'une longueur par un nombre non entier était impraticable. Il aurait donc fallu que le rapport de similitude entre le dessin et le panneau à réaliser fût entier, ce qui, dans le cas général, n'était pas le cas puisque l'artisan n'était généralement pas maître de la taille du décor à produire, celui-ci devant le plus souvent s'insérer dans un espace prédéterminé.

Sur le plan épistémologique (Kuzniak, 2011), l'espace de travail de l'artisan antique (*pictor*) était constitué d'objets matériels (support, tracés, matériaux), d'artefacts (instruments usuels) et d'un ensemble de référence constitué des savoirs et des savoir-faire régissant la production des œuvres. Sur le plan cognitif lui étaient associés des processus de visualisation, de construction et de discours (lié aux échanges interpersonnels et à la transmission des savoirs). Plus précisément, les validations étaient d'ordre perceptif : c'est en effet l'œil, éventuellement assisté par les instruments usuels, qui décidera si telle propriété est vérifiée ou non. Il en résulte qu'une construction « exacte » et une construction « approchée » (au sens de G2) n'étaient pas forcément distinguées et pouvaient, le cas échéant, être considérées comme équivalentes (i.e. produisant des résultats jugés identiques).

Comme on le voit, c'est essentiellement le plan sémiotique-instrumental de l'espace de travail qui est essentiellement sollicité, le plan instrumental-discursif n'intervenant en principe qu'en cas de litige.

2) Le chercheur actuel qui étudie la géométrie d'un décor antique dispose, de par son cursus, d'une géométrie axiomatique de type G2, voire G3. Notons qu'on peut généralement exclure G3 et se limiter à la géométrie euclidienne, dans laquelle

> la relation avec la réalité subsiste encore dans cette Géométrie, dans la mesure où elle s'est constituée pour organiser les connaissances géométriques issues de problèmes spatiaux. » (Houdement-Kuzniak, 2006, p. 181).

En effet, maintenir un rapport aussi étroit que possible avec la réalité de l'artisan antique paraît essentiel pour qui souhaite approcher au mieux sa mentalité.

Les objets de G2 sont immatériels, définis par des textes (les définitions) ; ses artefacts sont des mises en relation de certains objets (les propositions : axiomes et théorèmes), et l'horizon est de type axiomatique. La validation se fonde sur des lois hypothético-déductives appliquées aux définitions et aux propositions ; on se situe donc dans une problématique de la rigueur (= conformité à la théorie).

Concernant G1 et G2, Kuzniak note que « la relation étroite de ces deux premières géométries avec l'espace permet de classer ces géométries dans les sciences de la nature » (Kuzniak, 2006, p. 173). C'est ainsi qu'aux objets matériels de G1 correspondent canoniquement des objets théoriques de G2 (comme par exemple : tracé rectiligne → droite infinie sans épaisseur), et qu'aux actions matérielles réalisées à l'aide des artefacts de G1 correspondent des actions théoriques de G2 (comme par exemple : utiliser l'équerre → mener par un point la perpendiculaire à une droite).

Le chercheur d'aujourd'hui dispose également d'outils technologiques, et parmi ceux-ci les logiciels de géométrie dynamique se révèlent extrêmement utiles. Dans sa thèse, J.-J. Dahan, qui a plus spécialement travaillé sur Cabri-Géomètre, a distingué les paradigmes G1 et G2 en environnement papier-crayon et en environnement informatique. Dans les deux paradigmes, une différence fondamentale est que, contrairement à la géométrie classique, la géométrie du logiciel est une géométrie discrète, portant sur des pixels dans une partie finie du plan. Comme dans la géométrie classique, on peut y distinguer deux paradigmes différents.

En premier lieu un « G2 informatique » où les objets sont définis par leurs coordonnées (ou leurs équations) dans un repère orthonormé et où les artefacts sont des transformations sur ces coordonnées. Il s'agit donc d'une géométrie métrique. La validation s'effectue, soit via une démonstration, soit via un testeur de propriété qui répond à quelques questions formatées [2].

Ensuite, un « G1 informatique » où les objets considérés sont les traces affichées sur l'écran et où les artefacts sont les mêmes que précédemment. La validation peut être purement perceptive, avoir recours à la mesure ou encore au testeur de propriété.

Toutefois, ce testeur n'est pas infaillible comme le serait une démonstration (correcte) dans G2. Dahan indique que, même si la précision de Cabri est de beaucoup supérieure à celle de l'environnement papier-crayon, « *les oracles de Cabri peuvent se tromper dans un sens comme dans l'autre*. » (Dahan, 2005, p. 90). Il en va de même pour GeoGebra :

> le logiciel se contente (…) de vérifier si les objets semblent être dans la « bonne » configuration ou non, ce qui peut parfois aboutir à des résultats inexacts (Commission inter-IREM TICE 2016, p. 257).

Notons cependant que ce dernier logiciel possède également une fonction « Prouver » « *qui, elle, repose sur une vérification formelle de la figure construite*. » (ibid.).

Dans sa thèse, Dahan considère en fait G1 informatique comme un « super G1 », essentiellement à cause de sa précision beaucoup plus grande qu'en environnement papier-crayon :

> G1 informatique est G1 à cause des techniques associées aux instruments de Cabri qui généralisent celles de l'environnement papier-crayon (…). G1 informatique est informatique (…) surtout à cause des modes de validation qui, même s'ils reposent sur des constatations visuelles de superposition, sont plus performants que dans G1 (Dahan, 2005, p. 105).

Parallèlement, il considère en quelque sorte G2 informatique comme un « sous G2 » en raison de la nature discrète et finie de son ensemble de points :

> G2 informatique est G2 à cause du niveau déductif présent chez l'expérimentateur et dans l'outil lui-même, et G2 informatique est informatique à cause de l'échantillon discret du plan sur lequel Cabri travaille (calcule). » (op. cit. p. 106). Et il précise : « il ne s'agit pas d'un super G1 mais bien d'un niveau connexe à G2 en raison de la forte

connexion des calculs réalisés par Cabri et de l'axiomatique qui est derrière les modèles manipulés (ibid.).

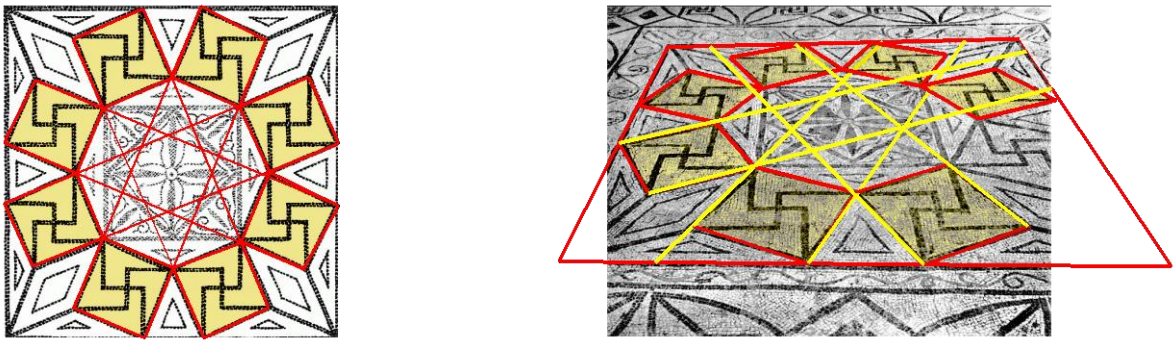
La démarche du chercheur part en principe de l'objet archéologique : mosaïque, fresque ou décor de stuc, remplacé le plus souvent par un document considéré comme fiable (photographie ou relevé précis). Ce premier point pose déjà question car il peut être source d'erreurs, involontaires certes mais néanmoins indésirables. Voici par exemple un panneau de mosaïque d'Itálica (Espagne) daté du 2e siècle, dont nous possédons à la fois une photographie, hélas partielle et non orthogonale (fig. 1 A) et un relevé, réalisé d'après celle-ci (fig. 1 B).

A- Freijeiro, 1978, pl. 48

B- Balmelle et al., 2002, pl. 373c

Figure 1. Panneau de mosaïque d'Itálica

Le relevé incite à considérer que les quadrilatères construits sur l'octogone central sont des carrés. Peut-on considérer l'octogone comme régulier ? Si tel est le cas, G2 affirme que les côtés des carrés diamétralement opposés sont dans le prolongement les uns des autres. Une vérification sur le relevé montre qu'on peut l'accepter, tandis qu'inversement le document photographique conduit à le rejeter (fig. 2, A et B).

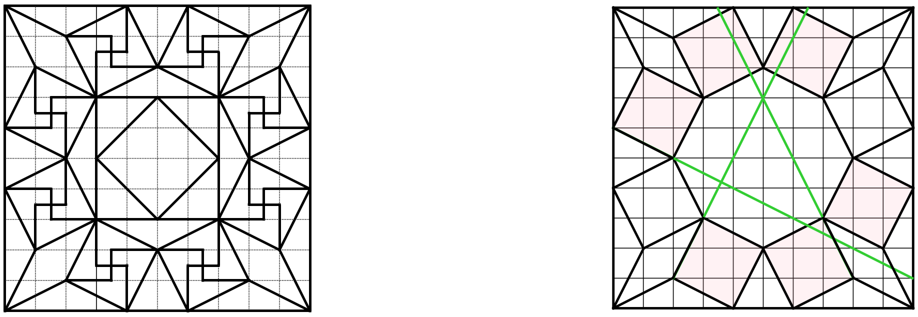


A

B

Figure 2. Itálica : recherche d'alignements

Comme nous savons, toujours grâce à G2, que la perspective linéaire conserve l'alignement, nous concluons en faveur de la photographie. De fait, ce motif, appelé « octogone développé » n'est pas rare, et dans la totalité des cas étudiés où il apparaît isolé il est entièrement construit sur une grille carrée de 10 sur 10 (Parzysz, 2012). On constate que les non-alignements observés à Itálica ne sont pas dus aux aléas de la construction, mais qu'ils sont inhérents à ce modèle à réseau (fig. 3). Dans le cas présent, comme souvent, on peut penser que l'auteur du dessin a reproduit, non pas ce qu'il observait, mais la représentation mentale qu'il se faisait du décor.



A B

Figure 3. Itálica : modèle non régulier à réseau

En raison de l'importance des conséquences possibles, on comprend la nécessité absolue de ne travailler qu'à partir d'une documentation fiable.

Une fois cette question résolue, il s'agit pour le chercheur de produire une première abstraction du décor qui ne conservera que les traits – segments de droites et/ou arcs de cercles – qu'il juge signifiants (flèche 1 de la figure 4 ci-après). Il peut se situer à ce moment dans un G1 papier-crayon (avec mesure) ou, de préférence, dans un G1 informatique. Il se positionne ainsi dans le plan sémiotique-instrumental

Ayant obtenu un schéma du décor, il se dirige ensuite vers une géométrie G2 en considérant le dessin comme une représentation d'une configuration théorique (un modèle). Toujours dans G1 ou G1 informatique, et en se fondant sur des observations visuelles et des mesures, il énonce un certain nombre de conjectures concernant les propriétés du modèle : alignement, cocyclicité, concours, orthogonalité, etc. [3]

L'objectif est alors de définir dans G2 un modèle théorique du décor. Les conjectures faites sont maintenant prises comme des données [4] et, après avoir éliminé les éventuelles contradictions, le chercheur élabore un algorithme de construction de la configuration ne faisant intervenir que des droites et des cercles (flèche 2). Il se situe ainsi dans le plan instrumental-discursif.

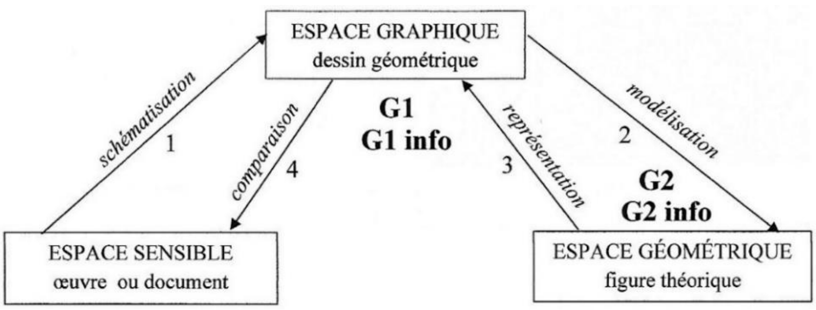


Figure 4. Schéma de la démarche du chercheur

Il repasse ensuite dans G1 : l'algorithme sera traduit mutatis mutandis en une procédure de construction à la règle et au compas, qui conduira elle-même à un dessin ou – dans le cas de G1 informatique – à une image sur l'écran de l'ordinateur (flèche 3). La procédure sera ensuite validée ou invalidée par la confrontation de ce dessin avec le document initial (flèche 4) [5]. C'est ici le plan sémiotique - instrumental qui est en jeu.

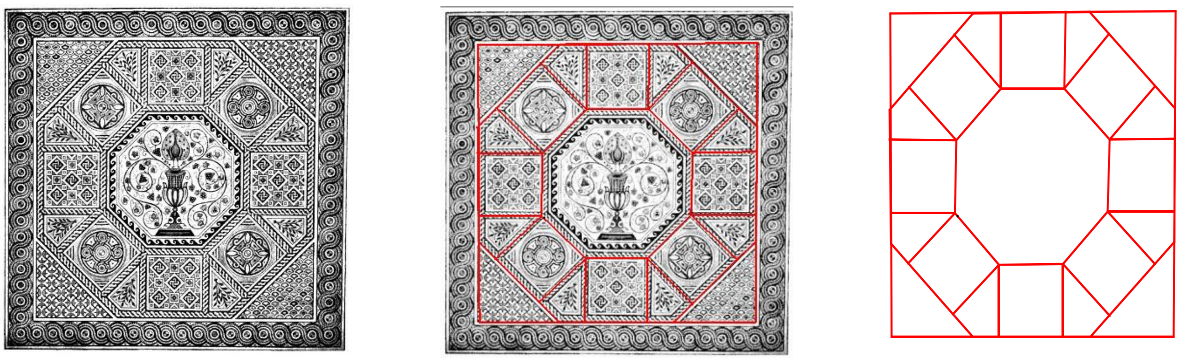
Le modèle une fois validé, il reste à en élaborer au moins une construction susceptible d'avoir été mise en œuvre par l'artisan antique, en se plaçant cette fois dans un G1 sans mesure. Il convient ici de privilégier − si possible – la construction centripète par rapport à la construction centrifuge. Les raisons en ont été données plus haut : étant donné la quasi-impossibilité du recours au changement d'échelle et la nécessité d'insérer le panneau dans une surface prédéterminée, c'est en conséquence le contour de celle-ci qui sera au départ de la procédure de mise en place.

D'autre part, contrairement à l'artisan antique, le chercheur a besoin de savoir si la construction qu'il a imaginée est exacte ou approchée (au sens de G2) ; il revient ainsi dans le plan instrumental-discursif de l'espace de travail.

Comme on le voit, la démarche du chercheur le fait circuler dans plusieurs paradigmes géométriques et utiliser plusieurs médiations successives : il passe d'abord du document à un dessin (dans G1), puis à un modèle théorique (dans G2) qui l'amène à un nouveau dessin (dans G1), pour lequel il cherchera finalement une procédure de construction centripète.

ÉTUDE D'UN EXEMPLE

Un exemple personnel récent − non sans rapport avec le précédent −va nous servir à illustrer la démarche qui vient d'être décrite de façon générale. Le support (fig. 5 A) en est un panneau de mosaïque carré de Ravenne (Asemakopoulos-Atzaka, 1998, fig. 169). L'introduction du document dans le logiciel et le tracé de traits signifiants (fig. 5 B) [6] fournissent un schéma de G1 informatique (fig. 5 C) que l'on peut à son tour étudier isolément.



A- Vue d'ensemble **B- Traits signifiants** **C- Schéma résultant**

Figure 5. Panneau de mosaïque de Ravenne

L’observation de ce schéma, complétée par des mesures fournies par le logiciel, conduit à faire les hypothèses suivantes :

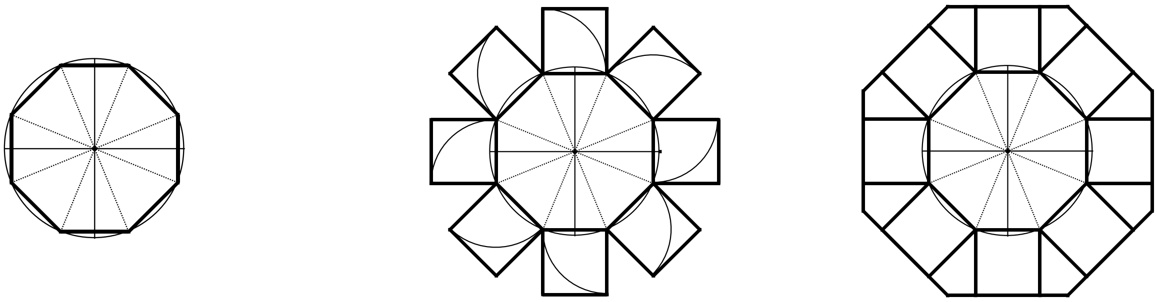
- les octogones extérieur et intérieur sont réguliers ;
- les quadrilatères intermédiaires sont des carrés égaux.

En prenant ces hypothèses comme données, on peut envisager dans G2 l’algorithme de construction suivant (figure. 6) :

1° Inscrire un octogone convexe régulier dans un cercle.

2° Sur chaque côté, construire un carré extérieur.

3° Prolonger les côtés extérieurs des carrés jusqu’à leurs points d’intersection deux à deux.



A B C

Figure 6. Ravenne : construction de la configuration

Cette procédure, rapportée dans G1 informatique, produit un nouveau dessin, représentation du modèle. Sa superposition au document support de l’étude conduit, compte tenu des aléas de la réalisation matérielle, à accepter ou à invalider les hypothèses initiales. Ici, on les accepte (fig. 7).

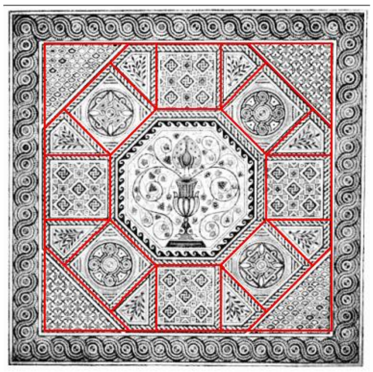


Figure 7. Ravenne : validation du modèle par confrontation

Cette construction n’est cependant pas totalement satisfaisante, puisqu’elle est centrifuge. Il s’agit donc, en travaillant toujours dans G2, de trouver un algorithme partant du carré extérieur. Puisque la configuration possède les symétries de l’octogone régulier (intérieur), l’octogone extérieur est lui aussi un octogone régulier. Un carré, dans lequel on a inscrit un octogone régulier, étant donné (fig. 8 A), cherchons donc comment construire les carrés intérieurs.

En raison des symétries, ces carrés ont pour axes médians les médiatrices des côtés de l’octogone. Le problème revient donc à déterminer leur taille pour que deux d’entre eux, consécutifs, aient un sommet commun (fig. 8 B). En fait, si on se limite à un seul côté de l’octogone, on est ramené au problème connu de l’inscription d’un carré dans un triangle, ici isocèle (fig. 8 C), qui se résout au collège à l’aide de l’homothétie par la méthode d’abandon de contrainte : un premier carré de taille quelconque, MNPQ, est construit sur la base du triangle ABC, symétriquement par rapport à la hauteur [AI]. Le point X, intersection de [IQ) avec [AB], est un sommet du carré cherché. Les autres sommets s’obtiennent alors sans problème.

On en déduit sans difficulté une construction centripète de la configuration (fig. 8 D) : il suffit par exemple de construire un carré intérieur sur l’un des côtés de l’octogone pour se trouver dans la situation précédente [7].

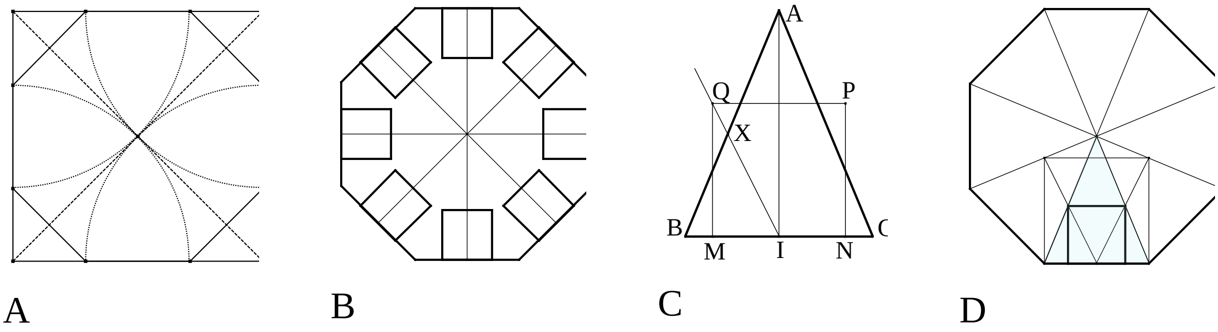


Figure 8. Ravenne : construction centripète

CONCLUSIONS

Dans cet article nous avons pu voir que l’artisan du décor antique se situait dans un ETG de type « G1 sans mesure », ce qui ne l’empêchait pas de mener à bien des constructions géométriques parfois complexes avec une précision souvent étonnante. Le chercheur actuel qui s’intéresse à ces productions doit bien sûr prendre en compte cet ETG comme référence, mais il dispose en outre d’aides appréciables. Il s’agit, d’une part de ses propres connaissances de G2 (voire de G3), et d’autre part des logiciels de géométrie dynamique, associés à des ETG qui, tout en leur étant étroitement liés, se distinguent des G1 et G2 « classiques ».

La démarche du chercheur se démarque de celle qui est habituellement mise en œuvre dans la résolution des problèmes de géométrie au collège. En premier lieu, on ne part pas d’un énoncé (dans lequel la nature des objets en jeu n’est pas toujours bien définie), mais d’un objet matériel, sur lequel on opère plusieurs niveaux d’abstraction dans le but de parvenir, d’abord à un modèle de G1, puis à un second modèle de G2, modèle dont on étudie les propriétés − en s’aidant d’une représentation − dans le but d’en tirer une construction géométrique soumise à un certain nombre de contraintes.

Cette démarche peut bien sûr être étendue à d’autres époques et à d’autres formes artistiques (*zelliges* arabes, rosaces gothiques, etc.). Elle peut aussi, sans doute, être entreprise en classe dès la fin du cycle 3 et tout au long du cycle 4, avec des supports adaptés, dans le but de faire prendre conscience aux élèves de l’existence de plusieurs « géométries » dans lesquelles les objets et les validations ne sont pas de même nature (Mathé et al., 2020). En effet, le passage dans G1 nécessitera une première modélisation du décor, à base de droites et de cercles, et la comparaison des résultats entre élèves − ou groupes − permettra de constater que la perception, même instrumentée, est parfois insuffisante à produire un consensus. D'où la nécessité d'associer au décor un corpus de propriétés géométriques permettant une validation théorique. Ce passage dans G2, plus ou moins implicite, nécessitera – éventuellement via des négociations en cas de désaccord − la transformation des conjectures en données qui serviront de socle à la recherche d'un algorithme de construction. Puis la transposition de cet algorithme en dessin instrumenté (retour dans G1) et sa comparaison avec le document initial permettront de tester la plausibilité de la procédure trouvée. Dans cette démarche − qui présente des analogies avec la restauration de figure (Perrin-Glorian et al., 2013) −, les trois genèses de l'ETG (Kuzniak, 2011) entrent en jeu et s'articulent les unes aux autres. En raison même de sa structuration en phases distinctes, mettant clairement en jeu des paradigmes géométriques différents, elle me paraît constituer un terrain propre à favoriser l'évolution des élèves vers G2. Notons enfin qu'elle peut en outre mener la classe à des activités collectives, en reproduisant en vraie grandeur sur le terrain les gestes des artisans antiques (Parzysz, 2020).

NOTES

[1] Avec un peu de pratique, il suffit d'un ou deux essais pour déterminer (approximer) la longueur L/n de façon satisfaisante.

[2] Elles concernent par exemple, pour GeoGebra : l'égalité, la perpendicularité, le parallélisme, l'alignement, le concours et la cocyclicité.

[3] Notons que, dans le cas d'un décor à motif répété, le fait de disposer de plusieurs exemplaires de celui-ci confère davantage de plausibilité aux conjectures qui sont faites.

[4] On notera l'ambiguïté du mot « hypothèse » qui peut, selon le cas, avoir le sens de « conjecture » ou de « donnée ».

[5] L'utilisation de papier calque ou du logiciel permet de superposer l'un à l'autre.

[6] Le choix des traits jugés les plus pertinents se fonde sur une « logique » du décor qui tient compte de propriétés de G1 ; ce sont notamment ici des concours (tresses), des alignements (carré du pourtour et octogone extérieur) et des symétries.

[7] Il existe bien entendu d'autres solutions, mais celle-ci semble la plus « naturelle ».

RÉFÉRENCES

Ascher, M. (1991). *Ethnomathematics. A multicultural view of mathematical ideas*. Pacific Grove : Brooks & Cole.

Ασημακορουλου-Atzaka, Π. (1998). Τα ψηφιδωτα δαπεδα Της Τεσσαλονικησ. Θεσσαλονίκη: Κέντρο Βυζαντινών.

Balmelle, C., Blanchard-Lemée, M., Darmon, J.-P., Gozlan, S., Raynaud, M.-P. (2002). *Le décor géométrique de la mosaïque romaine. II. Répertoire graphique et descriptif des décors centrés*. Paris : Picard.

Bouillon, A. (1839), Principes du dessin linéaire. Paris : Hachette.

Commission inter-IREM TICE (2016). *Créer avec GeoGebra* (G. Deleuze & P. Padilla, éd.). Paris : Cassini.

Dahan, J.-J. (2005). *La démarche de découverte expérimentalement médiée par Cabri-Géomètre en mathématiques : un essai de formalisation à partir de l'analyse des démarches de résolution de problèmes de boîte noire*. Grenoble : Thèse de l'Université Joseph-Fourier.

Freijeiro, A.B. (1978). *Mosaicos romanos de Itálica*. Madrid : Instituto Español de Arqueologia.

Houdement, C., Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives* 11, 175-195.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Eléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, 6-2, 167-187.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 16, 9-24.

Mathé, A.-C., Barrier, T., Perrin-Glorian, M.-J. (2020). *Enseigner la géométrie élémentaire. Enjeux, ruptures et continuités*. Louvain-la-Neuve : Academia – L'Harmattan.

Parzysz, B. (2009). À la recherche des espaces de travail géométrique des mosaïstes antiques, Chypre et France. *Recherche en didactique des mathématiques* (A. Gagatsis, A. Kuzniak, E. Deliyanni & L. Vivier, eds), 287-305. Nicosia : University of Cyprus.

Parzysz, B. (2012). Une grande famille de décors géométriques. *Proceedings of the 11th International Colloquium on Ancient Mosaic*, 735-748. Istanbul: Zerobooks.

Parzysz, B. (2020) .Géométrie de bout de ficelle dans la cour de récré. *Au Fil des Maths* 538, 29-35. Paris : APMEP.

Perrin, D., Perrin-Glorian, M.-J., Parzysz, B., Bühler, M., Didier, G., Pinvidic, A., Piot, C., Planchenault, S. (2021). *Enseigner la géométrie au cycle 4*. Paris : IREM, Université de Paris.

Perrin-Glorian, M.-J., Mathé, A.-C., Leclercq, R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? *Repères-IREM*, 90, 5-41.

Radford, L. (2017). Réflexions sur l'ethnomathématique. *Actes du Colloque du Groupe de Didactique des mathématiques du Québec* 2016 (J. Adibou, A. Giroux, D. Guillemette, C. Lajoie, K. Mai Huy, éd.). Ottawa.

ASPECTS TECHNIQUES ET PÉDAGOGIQUES DE VIDÉOS D'ENSEIGNEMENT

Arij Bouzelmate* et Benoît Rittaud°

*LaR2A, Faculté des Sciences de Tétouan, Université Abdelmalek Essaâdi,
°LAGA (UMR CNRS 7539), Institut Galilée, Université Sorbonne Paris Nord

Cet article étudie l'articulation entre aspects formels et aspects pédagogiques de l'outil vidéo dans l'enseignement supérieur des mathématiques. S'appuyant sur des vidéos réalisées par les auteurs sur les équations différentielles ordinaires, il s'intéresse à l'outil en tant qu'élément d'un Espace de Travail Mathématique.

INTRODUCTION

Le développement de l'enseignement à distance consécutif à la crise du covid-19 a montré le potentiel pédagogique considérable des vidéos. Pour l'instant toutefois, il semble que, s'agissant de celles traitant des mathématiques de niveau universitaire, les études portent plus volontiers sur leur contenu que sur leur forme (Allard et al. 2016), (Bridoux et al. 2016).

Il ne manque certes pas d'initiatives pionnières, telles que la chaîne Exo7 [1] dont le nombre de vues considérable témoigne d'une utilité importante depuis dix ans. Il n'est toutefois pas possible d'en rester là, pour de multiples raisons.

- Le déploiement du marché de l'enseignement en ligne et/ou numérique doit conduire les acteurs du monde universitaire à se positionner.
- L'immense développement des chaînes vidéos sur tous les sujets et aux qualités formelles de plus en plus grandes oblige la communauté éducative à réviser à la hausse ses standards d'attractivité et d'efficacité dans la conception de vidéos pédagogiques.
- L'évolution des goûts et préférences des utilisateurs force à une adaptation régulière de l'offre. Par exemple, le fond classiquement blanc des diaporamas (ordinaires ou intégrés à une vidéo) cède aujourd'hui du terrain face à la tendance du Dark Mode (arrières-plans sombres) qui est celui des nouvelles versions de certains systèmes d'exploitation et de certaines applications. (L'argument d'une fatigue oculaire moindre avec ces fonds sombres est parfois avancé, bien qu'il soit contesté.)
- L'accès de plus en plus facile et bon marché (voire gratuit) à des outils modernes d'enregistrement et de montage autrefois réservés aux professionnels ouvre des perspectives nouvelles pour l'élaboration de vidéos, qui n'ont plus à se réduire à un simple cours lu à voix haute.

Ce dernier point est sans doute le plus stimulant, car c'est celui qui ouvre le mieux la porte à des vidéos d'enseignement des mathématiques qui constitueraient un outil véritablement nouveau, avec un intérêt et un rôle propres.

Notre hypothèse est que l'outil vidéo n'est pas la simple intersection des deux grands outils traditionnels de l'enseignement que sont le cours (au sens large de séance mettant en présence l'enseignant et ses élèves) et le manuel (également au sens large, c'est-à-dire incluant des supports écrits de toute nature : ouvrage, polycopié, fiches d'exercices, etc.). Nous posons que les vidéos pédagogiques sont des films autant que des cours, et qu'à ce titre elles doivent être pensées comme constituant un outil spécifique. Les règles propres de celui-ci induisent des choix pédagogiques particuliers, qui se superposent aux choix scientifiques nécessaires, notamment entre la rigueur mathématique et les attentes du public visé par l'outil.

LES VIDEOS PEDAGOGIQUES DANS LE CADRE DES ETM

Dans le cadre de la théorie des ETM (Kuzniak, 2011), les vidéos prennent naturellement place au sein des ETM idoines (Kuzniak et al., 2016), c'est-à-dire de l'ensemble des ressources conçues pour l'élève ou l'étudiant et éventuellement utilisées effectivement par la suite dans le cadre d'un cours. (Plus précisément on doit parler ici d'ETM idoine potentiel.)

Une caractéristique particulière de l'outil vidéo est sa place extrême dans la catégorisation des tâches mathématiques proposée dans (Nechache, 2017). Dans celle-ci, une tâche est simple, standard ou riche, conférant à celui qui la mène une position de tâcheron, de technicien ou d'ingénieur. Or s'il est légitime de considérer que regarder une vidéo d'enseignement constitue une « tâche », le caractère particulièrement passif de celle-ci réduit l'élève ou l'étudiant à une position en un certain sens inférieure encore à celle de tâcheron. Les moyens d'action sur l'outil sont en effet réduits :

- mettre la diffusion sur pause pour noter quelque chose ou répondre à une question (un point auquel il peut être invité par la vidéo elle-même dans le but de le rendre actif) ;
- accélérer ou ralentir la vitesse de lecture ;
- avancer ou reculer dans le déroulement.

Ces leviers sont certes importants mais, mis à part éventuellement le premier (qui présente le risque de hacher le contenu), aucun d'eux ne rend l'étudiant à proprement parler actif sur le savoir lui-même. Cette limitation de l'outil conduit à une réflexion selon deux axes. Le premier porte sur les outils périphériques qui, complétant la vidéo, pourraient favoriser la mise en activité de l'étudiant. Par exemple, pour une vidéo sur une équation différentielle, on peut imaginer en parallèle, sur un site internet dédié, un fichier de géométrie dynamique sur lequel l'étudiant peut interagir en actionnant des curseurs lui permettant de visualiser les solutions, tout en continuant à visionner la vidéo. Une telle articulation entre manipulation et visionnage devrait être soigneusement réfléchie.

Le second axe consiste à prendre acte de la passivité de l'étudiant durant son visionnage. On ne peut pas éviter complètement celle-ci car, par exemple lors de l'énoncé d'un théorème ou d'une définition, on ne voit guère comment faire autrement que de se contenter de solliciter l'attention. Ces parties-là d'une vidéo doivent donc faire l'objet d'un soin particulier pour éviter que la passivité ne se change en désengagement au fil du visionnage. Un travail important reste à mener dans cette direction pour réfléchir aux moyens de faire de ces parties intrinsèquement passives des éléments de stimulation. Le traitement de cette question passera probablement par des interactions suivies avec des professionnels (spécialistes de l'attention, réalisateurs de vidéos type documentaires...).

ETM DE VIDEOS SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Nous nous appuyons ici sur l'expérience acquise lors de la réalisation d'une série de vidéos publiées sur une chaîne YouTube dédiée, réalisées dans le cadre d'un projet soutenu par l'ambassade de France au Maroc [2]. Ces vidéos traitent des équations différentielles du premier ordre selon le programme courant du début des cursus universitaires scientifiques. Loin d'un modèle parfait ne serait-ce qu'en raison des moyens limités disponibles lors de leur élaboration, leur intérêt pour nous tient aux questions, aux objectifs et aux choix pédagogiques qu'elles permettent d'illustrer.

Le domaine de l'ETM concerné par ces vidéos est celui du calcul différentiel et intégral, mais sans doute est-il utile ici d'endosser plutôt la notion de sous-domaine, voire d'ETM local, proposées par (Montoya-Delgadillo et al., 2014). L'intérêt d'un tel resserrement tient à l'usage auquel les vidéos se destinent le plus volontiers, à savoir celui de la *consommation immédiate* :

- La *consommation* relève d'une façon devenue extrêmement courante de regarder des vidéos de toutes sortes permettant d'apprendre quelque chose. Le format est celui du tutoriel, qui permet d'apprendre à changer une roue aussi bien que de prononcer correctement un mot en japonais ou d'apprendre à imiter le chant des oiseaux.
- L'*immédiateté* tient à l'objectif en général très concret de l'utilisateur, qui vient pour une question précise à laquelle il attend une réponse aussi rapide que possible, sans digression ni prolongement (si ce n'est l'incitation à regarder d'autres vidéos sur des thèmes voisins).

Il est raisonnable de penser que l'ETM dans lequel s'inscrit une vidéo (ou une série de vidéos) doit être d'une taille réduite correspondant à l'usage très circonscrit qui sera fait de l'outil. On parlera donc ici de l'ETM local qui serait celui des équations différentielles ordinaires.

SPECIFICITES DE L'OUTIL

Pour en faire autre chose qu'un gadget dans l'air du temps, la vidéo doit être acceptée pour ce qu'elle est : un outil nouveau. En tant qu'outil elle doit être comprise comme une aide parmi d'autres à l'apprentissage. En tant que nouveauté, elle demande qu'on lui reconnaisse des règles de conception irréductibles aux autres grands outils existants que sont le cours classique et le manuel.

Par exemple, une vidéo permet de délivrer une quantité maximale d'information en un temps minimal. C'est ainsi que l'ensemble du chapitre sur les équations différentielles, qui demande en principe plusieurs séances de cours, tient sur nos 12 vidéos qui, mises bout à bout, ne totalisent qu'une heure. Aucun cours ne saurait aller à une telle vitesse, aucun manuel ne pourrait être lu si vite. Cela prouve non pas que la vidéo serait meilleure que ces deux autres outils, mais que son fonctionnement est véritablement spécifique.

Réduire la vidéo à un simple cours enregistré au tableau offre certes déjà quelques possibilités nouvelles (pouvoir suivre sans limitation d'horaire, ou faire des pauses et des réécoutes à volonté), mais conduit à perdre aussi plusieurs des avantages cruciaux du cours traditionnel : déshumanisation induite par le virtuel, impossibilité de poser des questions, petitesse de l'écran. De plus, lors du visionnage d'une vidéo le seuil de tolérance aux hésitations, corrections et superfluités qui émaillent toute présentation orale est moindre, surtout pour un public étudiant beaucoup moins captif que dans une salle de cours et habitué à des vidéos au rythme enlevé.

D'autre part, vouloir faire de la vidéo un simple manuel oral rend vite l'écoute insupportable de lenteur, la rigidité par rapport à l'écrit se révélant rapidement irrémédiable. Un texte permet des va-et-vient oculaires à une vitesse impossible à reproduire sur une vidéo qui n'en serait que l'oralisation, et dont la vitesse contrainte ne pourrait s'adapter aux différents étudiants. Enfin, une telle manière de faire conduit à des vidéos qui se font vite très longues.

Une richesse supplémentaire des vidéos par rapport au manuel ou au cours est plus spécifique aux mathématiques : c'est celle des animations, comme il a été relevé notamment par (Kuzniak, 2011) :

> Ainsi des petits films montrent des découpages pour effectuer des preuves du théorème de Pythagore ou permettent des réalisations d'expériences très complexes sans l'outil informatique comme le retournement d'une sphère. Cette mise en œuvre dynamique crée un « discours » explicatif complémentaire du seul texte écrit longtemps privilégié, au moins dans la tradition occidentale.

CONTENU SCIENTIFIQUE

Le contenu des vidéos ici considérées est celui d'un cours qui présente la théorie et les méthodes de résolution classiques des équations différentielles du premier ordre, traditionnellement enseignées dans les cursus de première année universitaire scientifique. Ce choix a résulté d'un compromis qui tenait compte des délais serrés de l'appel à projet et de l'objectif d'être utile à un maximum d'étudiants.

La première des 12 vidéos constitue une introduction générale à la notion d'équation différentielle. Les 5 suivantes traitent du cas linéaire, selon un découpage courant : quelques généralités, ici présentées au travers du problème de De Beaune (vidéo 1.1), le théorème usuel permettant de traiter le cas résolu sans second membre (1.2), le cas avec second membre avec le principe de superposition, la recherche d'une solution particulière et la méthode de variation de la constante (1.3), le cas non résolu et la question des intervalles de définition (1.4), et enfin un bilan global suivi d'un exemple complet (1.5). Les 6 dernières vidéos s'intéressent aux autres types classiques d'équations différentielles du premier ordre couramment enseignées en première ou deuxième année de cursus universitaire scientifique : équations autonomes (2.1), à variables séparées (2.2), homogène (2.3), de Bernoulli (2.4) et de Riccati (2.5). Enfin, la dernière vidéo (2.6) traite la question de la condition initiale.

Dans la suite, le propos se centrera sur la vidéo 1.2 (cas résolu sans second membre). Plus longue de la série (8'17''), cette vidéo est ainsi découpée : les 50 premières secondes sont dédiées à l'énoncé du théorème donnant les solutions des équations de la forme $y'+by = 0$ (où b est une fonction continue). Pendant 2'10'' est ensuite proposée une démonstration complète de ce résultat (présentée comme facultative), découpée en 45'' pour vérifier que les fonctions de la forme $y(x) = Ce^{-F(x)}$ sont solutions (où F est une primitive de b) et en 1'20'' pour démontrer, par la méthode du facteur intégrant, que ces fonctions sont les seules solutions possibles. L'exemple de l'équation différentielle $y'+2\cos(2x)y = 0$ est ensuite intégralement traité (environ 35''). Une incise d'une minute est l'occasion d'exprimer l'ensemble des solutions sous la forme d'un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions (le sous-espace engendré par la fonction qui à tout réel x associe $e^{-\sin(2x)}$). Cette forme est utilisée pour justifier l'emploi du qualificatif de linéaire attaché aux équations différentielles concernées par le théorème initial. Quelques secondes sont ensuite consacrées à la visualisation des solutions trouvées de l'équation $y'+2\cos(2x)y = 0$, à l'aide d'une animation montrant le graphe de la fonction en faisant varier C. Ensuite, pendant une durée de 1'20'' est présentée la forme de résolution alternative parfois employée et qui permet de s'affranchir du théorème (en réécrivant l'équation sous la forme $y'/y = -2\cos(2x)$ et en intégrant des deux côtés de l'égalité). Un peu moins d'une minute est alors consacrée à l'exposé des défauts théoriques de cette dernière méthode (entre autres le fait qu'écrire y'/y suppose y non nul), tout en expliquant qu'en pratique ces défauts ne sont pas problématiques (et en renvoyant à la vidéo 2.6 pour les questions liées au théorème de Cauchy-Lipschitz). La dernière minute de la vidéo est consacrée à la vérification des résultats obtenus dans l'exemple, ce qui donne l'occasion d'insister sur l'importance de contrôler ses résultats.

ANALYSE DES PRINCIPAUX CHOIX DIDACTIQUES

Dans le formalisme des ETM, les séquences de la vidéo 1.2 relèvent presque toutes du plan sémiotique-discursif ([Sem-Dis]). Ainsi, comme la plupart des autres de la série, la vidéo commence par poser son référentiel théorique (qui prend ici la forme de l'énoncé du théorème général donnant les solutions des équations différentielles linéaires du premier ordre sans second membre), avant d'en proposer la démonstration classique, elle-même suivie du traitement complet de l'exemple de $y'+2\cos(2x)y = 0$. Cet exemple a été choisi pour être à la fois représentatif de la façon dont le théorème s'emploie et suffisamment simple pour ne pas que l'attention soit distraite de l'essentiel (choix d'un coefficient de y non trivial mais très facile à intégrer, fonctions toutes définies sur **R**).

Le caractère très classique d'une telle architecture tient à la nature de la cible visée par les vidéos. Il est raisonnable de penser que la plupart des étudiants qui les visionneront auront déjà suivi un cours sur le sujet, et disposeront aussi de documentation écrite. Le choix a donc été fait d'envisager les vidéos comme une sorte de récapitulatif destiné à permettre à l'étudiant de mettre de l'ordre dans ses idées sur un sujet qu'il a déjà commencé à étudier. De plus, l'objectif ayant été de s'adresser à un public de niveaux variés (les équations différentielles sont étudiées avec un niveau de rigueur variable selon les filières suivies), un choix de compromis a dû être fait entre un formalisme mathématique irréprochable et une présentation exclusivement tournée vers la simple résolution d'exercices. Le premier choix aurait plaidé, par exemple, pour une explication de la nécessité que les fonctions soient définies sur un intervalle, alors que le second se serait affranchi du référentiel théorique au profit de la seule technique proposée en fin de vidéo consistant à isoler l'expression y'/y et à intégrer des deux côtés de l'égalité ainsi obtenue. (On parlera ci-après de « technique y'/y ».)

Cette dernière technique présente l'intérêt d'être le seul passage de la vidéo relevant d'une genèse instrumentale. Elle constitue un artefact symbolique dont même certains enseignants n'ont pas conscience des limites théoriques. C'est l'un des choix de la vidéo que de mettre en évidence la nécessité d'attribuer à cette technique le statut qui doit être le sien et qui, en un sens, relève presque d'un moyen mnémotechnique : il s'agit d'une technique qui permet de retrouver le résultat cherché sans avoir à apprendre l'énoncé du théorème qui la sous-tend, et ce à l'aide de divers raccourcis non justifiés. Dans ce passage de la vidéo se déploie ainsi une forte tension entre des éléments apparemment contradictoires. En effet, alors que, dans un premier temps, la technique y'/y semble « fonctionner toute seule » (et donc rendre inutile le théorème initial et sa démonstration fort longue), un second temps en déroule la liste des défauts théoriques qui en invalident l'usage. Un troisième temps met alors en lumière ce paradoxe que, même incorrecte du point de vue théorique, la technique est tout de même toujours acceptable en pratique, à condition de commettre volontairement une erreur : celle qui consiste à dire, lors du remplacement du $\pm e^{C0}$ de $y(x) = \pm e^{C0}\exp(- \sin(2x))$ par un C pour obtenir $y(x) = C \exp(-\sin(2x))$, que « C est n'importe quelle constante réelle » alors que, selon sa définition, C n'est en réalité qu'une constante réelle non nulle.

Face à cette réalité complexe d'une méthode partiellement fausse du pont de vue théorique mais qui, en pratique, produit toujours la réponse correcte (et ce pour des raisons qui ne peuvent être comprises qu'après de longs détours par un résultat encore plus profond qui est le théorème de Cauchy-Lipszchitz), le choix de la vidéo est celui de la rigueur (c'est le « vrai » théorème qui est énoncé, démontré et illustré) tempérée par une dose de réalisme devant le très large emploi persistant de la technique y'/y. C'est pour ne pas risquer de couper les étudiants de cette dernière, qui a de bonnes chances de leur être enseignée, que la vidéo l'intègre, à nouveau dans l'idée que l'étudiant dispose en principe d'un cours auquel confronter la vidéo et qu'entre les deux il faut l'aider à trouver une cohérence. La présentation de la technique y'/y se fait un peu à reculons, certes, et il y a à cela une autre raison, qui tient elle aussi à un point de vue tout ce qu'il y a de concret : force est de constater que les manipulations algébriques auxquelles la technique y'/y nous expose sont finalement bien plus longues que l'emploi direct de la formule du théorème.

Un même esprit de compromis a guidé l'élaboration de la brève séquence autour du lien entre le théorème fondamental et l'algèbre linéaire. Du point de vue pédagogique il aurait été risqué d'énoncer le théorème initial en présentant l'ensemble des solutions sous la forme d'un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de I dans **R**. Il était cependant tout aussi délicat de s'affranchir complètement de ce formalisme, à la fois parce que certains étudiants ont à le connaître et parce qu'il devient vite incontournable dans des cas à peine plus généraux (tels que celui des équations différentielles du second ordre à coefficients constants, en général également étudiés dans la plupart des filières scientifiques universitaires). Le lien épistémologique crucial qu'il permet par ailleurs entre ces deux grands chapitres des mathématiques du début de l'enseignement supérieur que sont le calcul différentiel élémentaire et l'algèbre linéaire était bien sûr un argument en soi, illustrant le choix fait pour ces vidéos de tâcher de s'élever un peu des seules questions de résolutions pratiques d'exercices. Le choix a donc finalement été de présenter le formalisme de l'algèbre linéaire au travers du seul exemple de l'ensemble des solutions de $y'+2\cos(2x)y=0$ obtenu précédemment, et réécrit sous forme d'un sous-espace vectoriel. L'exemple ayant valeur générale, il permet de reformuler indirectement le théorème initial sans devoir redonner tout un énoncé.

LES INCRUSTATIONS : ENTRE ECRIT ET ORAL

Comme on l'a vu, la première séquence de la vidéo concerne l'énoncé du théorème de résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre. Le contenu de l'énoncé est celui d'un cours standard, qui, dans un manuel, pourrait prendre la forme suivante :

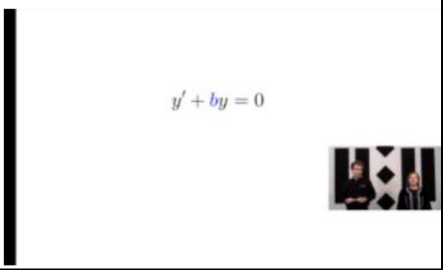
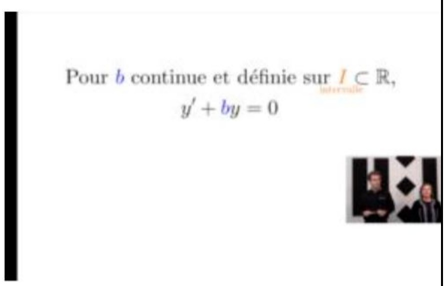
Théorème. Soit b une fonction continue définie sur un intervalle I de **R**, soit F une primitive de b. Les fonctions y solutions de $y'+by = 0$ sont les fonctions définies sur I par $y(x) = Ce^{-F(x)}$, où C est une constante réelle quelconque.

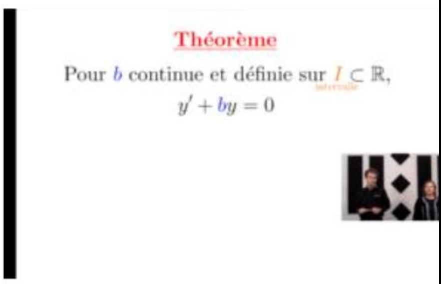
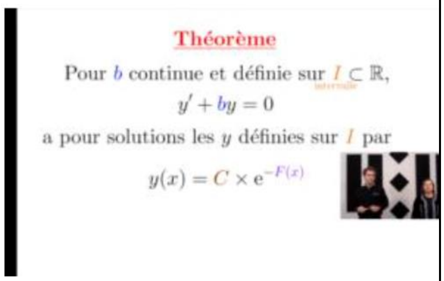
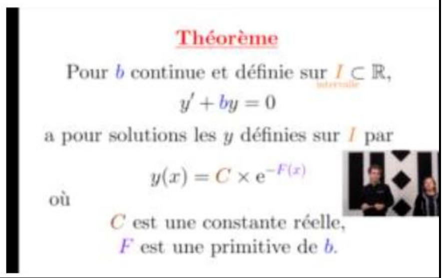
On peut bien sûr envisager de multiples autres manières de donner ce résultat, mais l'ordre des différents éléments du discours écrit préservera toujours quelques caractéristiques invariantes : d'abord l'intitulé indiquant le statut de l'énoncé (ici : un théorème), puis éventuellement quelques hypothèses (sur b, éventuellement sur F comme il est fait ci-dessus), ensuite ce sur quoi porte l'énoncé (les solutions de $y'+by=0$), suivie de «la formule à apprendre» ($y(x)= Ce^{-F(x)}$), et enfin des précisions sur son contenu (C est une constante ; les hypothèses sur b et F peuvent éventuellement trouver leur place ici aussi). Toute rédaction qui, par souci de lisibilité, tenterait de s'affranchir de tel ou tel élément ne peut le faire qu'en sacrifiant à la rigueur, par exemple en ne mentionnant pas l'intervalle de définition.

Le discours oral, lui, n'est pas limité par ces contraintes et peut donc, sans trop d'inconvénient, s'autoriser une liberté dans sa structure de sorte à privilégier un ordre découlant de l'importance relative des différents éléments. C'est ainsi qu'une présentation orale du résultat précédent peut prendre, lors d'un cours, une forme telle que celle-ci : « Pour résoudre l'équation $y'+by = 0$, avec b continue sur I, on dispose d’un théorème qui dit que les solutions sont de la forme de la forme $y(x) = Ce^{-F(x)}$, définies sur I, avec C une constante quelconque et F une primitive de b. »

Dans la théorie des ETM, ces nuances entre discours écrit et oral trouvent leur place dans la genèse sémiotique, et en particulier dans le pôle « visualisation » du plan cognitif, à ceci près que cette « visualisation » du théorème ne concerne pas la perception d’un sens mathématique, mais de la façon dont l’énoncé s’organise. Il s’agit ici de se poser la question non pas de la « chair » du théorème (son sens mathématique profond), mais de son « squelette », c’est-à-dire de l’ordre dans lequel, le plus souvent, ses différents éléments constitutifs auront vocation à être exploités dans un exercice. Un tel squelette tourné vers l’utilisation pratique directe est surtout du ressort du discours oral, qui permet de façon plus directe à un étudiant de « voir comment faire », sans avoir à donner dès le départ un sens mathématique à ce qu’il fait. Pour résoudre un exercice d’application directe, il peut en effet identifier la forme de l’équation, puis se souvenir de l’existence d’un théorème associé, qui donne la forme de la solution. Aux détails près des diverses hypothèses, tel est bien l’ordre de l'oral. En revanche, la structuration plus stricte relève davantage de l’écrit, qui organise les choses d'une façon plus rigoureuse (ne serait-ce qu’en définissant les objets avant de les utiliser).

La vidéo, elle, permet une forme de synthèse entre les deux discours, joignant l’écrit et l’oral tout en préservant les deux structures. Le procédé pour cela est celui de l’incrustation, qui peut suivre le développement oral tout en constituant progressivement un énoncé aux normes de l’écrit. Voici la succession d’incrustations durant lesquelles le théorème est énoncé, ainsi que le texte oralisé :

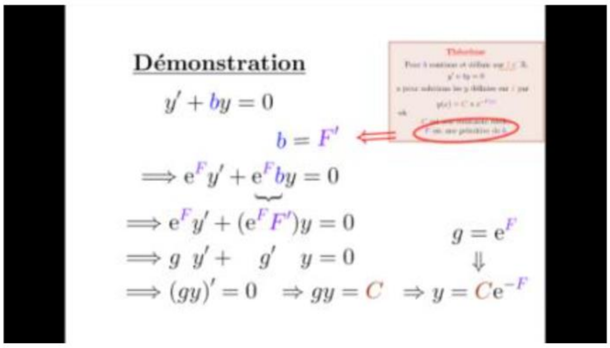
<table>
<tr>
<td>Le premier type d’équations différentielles qu’on va apprendre à résoudre est celui des équations linéaires d’ordre 1 sans second membre et sous forme résolue, c’est-à-dire de la forme y’+by = 0</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>où b est une fonction continue définie sur un intervalle I.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Les solutions de cette équation s’obtiennent à l’aide d’un théorème général:	
ces solutions sont les fonctions y définies sur I et qui s’écrivent y(x) = C × exp(-F(x)),	
où C est une constante réelle quelconque et F une primitive de b.	

L’OBLIGATOIRE MINIMALISME

Le procédé précédent peut donc être compris comme une tentative de réunir les avantages de l’oral et de l’écrit. Il n’est toutefois pas toujours possible de le faire, ni même nécessairement souhaitable, notamment parce qu’il est souvent superflu de faire figurer dans une incrustation la totalité des éléments techniques des énoncés. D’une part, il faut tenir compte de l’impératif d’accessibilité : beaucoup d’étudiants n’ayant accès à des vidéos qu’au travers du petit écran d’un smartphone (et non d’un écran d’ordinateur), seuls de gros caractères peuvent être utilisés, réduisant d’autant la possibilité de textes écrits un tant soit peu longs. D’autre part, l’efficacité d’une vidéo tenant aussi à une certaine immédiateté de l’information, il convient que les incrustations soient faites de façon quelque peu minimaliste. Avec peu ou pas de véritables phrases, les incrustations sont le plus souvent réduites à quelques mots ou expressions mathématiques, si bien qu’il n’est pas toujours possible de restaurer entièrement un contenu écrit.

Ce point se révèle notamment dans les incrustations qui donnent une démonstration. Ainsi de celle du sens réciproque du théorème sur les solutions d’équations linéaires du premier ordre, à l’aide de la méthode du facteur intégrant.



Comme on le voit, cette démonstration ne contient que les éléments les plus essentiels, avec leurs indispensables liens logiques. L'absence de texte est compensée par une explication orale détaillée. De plus, l'incrustation n'apparaît pas d'un coup à l'écran (ce qui la rendrait quelque peu indigeste), mais se dévoile ligne à ligne au fil des explications (à l'image d'un enseignant écrivant au tableau), focalisant l'attention sur chaque étape dans le déroulement du raisonnement. Bien que le résultat soit un « squelette » bien détaillé de la démonstration, il présente l'inconvénient sur une démonstration écrite ordinaire de ne pas offrir une véritable rédaction mais une simple juxtaposition d'expressions mathématiques, alors qu'il est souvent reproché aux étudiants leurs difficultés à concevoir que les mathématiques s'écrivent à l'aide de phrases et non à l'aide de seuls symboles...

Dans cette incrustation, également tirée de la vidéo 1.2, le théorème à démontrer est rappelé dans un encadré en haut à droite, dans l'idée de matérialiser un « souvenir » (une reproduction en plus petit d'une incrustation vue précédemment dans la vidéo). Il s'agit là d'une autre spécificité de l'outil vidéo, qui s'intègre à la question plus large des effets spéciaux auxquels il est possible d'avoir recours et sur lesquels d'autres études seront nécessaires.

CONCLUSION

La compréhension des mécanismes spécifiques de l'outil vidéo dans la constitution de documents pédagogiques est encore très parcellaire. Bien qu'ouvrant des horizons nouveaux tels que la possibilité de synthèses partielles entre l'oral et l'écrit, l'outil reste tributaire de choix scientifiques classiques tels que celui entre la rigueur et la clarté. La liberté dans les incrustations autant que la variété des animations permises par les logiciels de géométrie dynamique ouvrent des champs d'investigation qui devront sans doute, plus que par le passé, se poser la question des risques que font courir le caractère potentiellement distractif d'effets qui, sous couvert de visualisation, dériveraient vers le spectaculaire. Mais c'est aussi l'articulation de l'outil vidéo avec les autres outils (manuels, cours) qui devra être pensée, pour que chacun d'eux puisse trouver sa meilleure place dans l'organisation d'un enseignement et la mise en activité des élèves et des étudiants.

NOTES

[1] http://exo7.emath.fr/

[2] « Cours universitaire franco marocain mathématiques », https://www.youtube.com/channel/UCBX61CbCw7_r8m5rOpe-bUw (NB : Le « de » manquant est dû à la limite en nombre de caractères imposée par YouTube. Le nom de la chaîne a été choisi pour contenir un maximum de mots-clés pour le référencement.)

REFERENCES

Allard, C. et al. (2016). Quand le professeur de mathématiques est sur YouTube... *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz*, 16, http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/IP16002.pdf.

Bridoux, S. et al. (2016). Les moments d'exposition des connaissances : analyses et exemples. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 21, 187-233.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.

Kuzniak, A. & Nechache, A. (2016). Tâches emblématiques dans l'étude des ETM idoines : existence et usages. *Cinquième symposium des Espaces de Travail Mathématique*, Florina, Grèce.

Montoya-Delgadillo, E. & Vivier, L. (2014). Les changements de domaine dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 19, 73-101.

Nechache, A. (2017). La catégorisation des tâches et du travailleur-sujet : un outil méthodologique pour l'étude du travail mathématique dans le domaine des probabilités. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 22, 67-90

INSTRUMENTED COVARIATION UNDER TWO THEORETICAL LENSES

Sara Bagossi[1] and Ferdinando Arzarello[2]

[1]Ben-Gurion University of the Negev, Israel, [2]University of Turin, Italy

The theoretical framework of the Mathematical Working Space and the analytical model of the Semiotic Bundle are adopted to analyse two episodes from a teaching experiment on the modelling of a real phenomenon. Based on them, we will use an analysis tool, the Timeline, to highlight the instrumentation of covariational reasoning processes, both of first- and second-order, with a particular focus on the students' semiotic productions and the role of tools in students' mathematical work.

INTRODUCTION

Covariational reasoning is an essential form of reasoning that strongly supports a deep understanding of several mathematical concepts (e.g., functions of one and more variables, proportionality, rate of change) and appears to be an essential ability when dealing with tasks of mathematical modelling (Passaro, 2020; Thompson & Carlson, 2017), especially about situations involving motion and dynamicity (Carlson et al., 2002). According to Thompson and Carlson (2017), covariation as a theoretical construct is characterised by cognitive levels, i.e., "class[es] of behaviors or characteristic[s] of a person's capacity to reason covariationally" (p. 435). Levels of covariational reasoning involve different mental actions about concurrent changes in two quantities (Passaro, 2020). New perspectives about covariational reasoning have been explored in the last years. Arzarello (2017, 2019) has introduced the term *instrumented covariation* to describe how tools can support students' covariational reasoning processes. Recently, Bagossi (2022) has proposed an enlargement of the existing theoretical framework elaborating on the construct of *second-order covariation* (COV 2). Already mentioned in Arzarello (2019), second-order covariational reasoning is the ability to suitably envision a family of functions and its characteristic parameters varying simultaneously (Bagossi, 2022). This construct differs from covariational reasoning in the sense by Thompson and Carlson (2017), referred to as *first-order covariation* (COV 1), since it emphasises how parameters allow representing classes of real phenomena and how these characteristic parameters determine the peculiarities of the mathematical model. A few recent studies have also dealt with the role of digital tools in enhancing second-order covariation (Bagossi, 2021; Swidan et al., 2022).

In this contribution, we will base on the theoretical framework of the Mathematical Working Space (MWS) and the analytical lens of the Semiotic Bundle (SB), a joint approach already adopted by Panero et al. (2016), to analyse the semiotic and instrumental features of some data from a teaching experiment concerning the modelling of a real phenomenon. We will use the two lenses to highlight the instrumentation of covariational reasoning processes, focusing on the students' semiotic productions and the role of tools in the students' mathematical work.

Our research question can be formulated as follows: *How can tools help to guide students in the identification of invariant relationships and in the representation of covariation between quantities?*

THEORETICAL FRAMEWORK

Mathematical Working Space. The MWS is a theoretical model "for the specific study of the mathematical work in which students and teachers are effectively engaged during mathematics sessions" (Kuzniak et al., 2016, p. 7). This model is distributed on two levels: an epistemological plane, focusing on the mathematical content, and a cognitive plane related to students' reasoning while facing the mathematical activity. According to the structure of the MWS first theorised by Kuzniak (2011), we will focus on two of the three vertical axes. The semiotic axis enables us to describe how the activity on the signs leads to visualising and defining the mathematical function describing the real phenomenon under investigation. The instrumental axis instead is focused on the activity with the tools and how they contribute to the construction of the mental image of the mathematical model itself. These two axes delineate one of the three vertical planes in which mathematical knowledge can circulate; it is called Semiotic-Instrumental plane [Sem-Ins], and in the following, we will base on it for our analysis. The third axis is that of the discursive genesis associated with the theoretical references enabling to prove the mathematical properties of the model.

The mathematical object of the mathematical work we analyse in this contribution is covariational reasoning processes supported by the use of suitable tools, i.e., instrumented covariation (Arzarello, 2019). Given the relevance attributed to the role of tools for our mathematical object, a remark concerning the meaning of this term seems necessary. We will adopt the same perspective presented in Kuzniak et al. (2016) that we now recall briefly. The term *artifact* refers to material "constructing tools that may produce representations such as drawing, graphs or calculations" (p. 863). The word *tool* has a more general meaning: it includes artifacts like drawing tools or calculators, the so-called technological tools, but also conceptual tools as semiotic tools for operating on semiotic representations and theoretical tools for mathematical reasoning. Hence, tools are "the components of the epistemological plane that have a potential use to solve a given problem" (Kuzniak et al., 2016, p. 864). The term *instrument* is used instead whenever a subject interacts with a tool, and it refers to the cognitive plane.

Semiotic Bundle. This analytical lens introduced by Arzarello (2006) is particularly suitable for grasping the interplay within the semiotic resources, productions, and interactions involved in a mathematical activity. The SB embraces all the semiotic resources produced or acted on to think and communicate in the classroom environment, language (utterances, written texts, etc.), extra-linguistic modes of expression (gestures and glances), and different types of inscriptions (drawings, sketches, graphs, etc.). The SB, constituted by a collection of semiotic components and their mutual relations, has a dynamic structure that changes in time because of the semiotic activities of the subjects, and allows one to describe these multimodal activities with a global approach. Moreover, the SB dynamics can be analysed in two different and complementary modalities: a synchronic analysis, which considers the relationships among the various semiotic resources simultaneously in a specific moment in time; a diachronic analysis, focusing on the evolution of signs and of their relationships over time.

Concerning possible interactions with tools, we base on the Saada-Robert microgenesis model (1989), as elaborated by Arzarello et al. (2002), and we distinguish two main modalities of their use: *ascending*, when the students, not having yet any hypothesis about what happens in a given situation, use a tool to elaborate some conjecture about it; *descending*, when, having such a conjecture in mind, they use the tool for testing it.

Gestures are another main component of the SB. McNeill (1992) proposed four dimensions for gestures: *deictic*, used in concrete or abstract pointing; *iconic*, arm or hand movements with a perceptual relation to the concrete object that is represented; *metaphoric,* similar to iconic gestures but referring to abstract objects, and *beats*, up and down flicks of the hand or tapping motions. In addition to these four, we consider another dimension, *writing gestures* (Shein, 2012) generating indelible marks on figural representations. Gestures may assume different functions (Roth, 2001): *interactive* when coordinating speaking turns or regulating the rhythm of the speech, *narrative* when an iconic or metaphoric gesture imitates the pictorial background, and *grounding* when connecting verbal and gestural narratives to an object.

METHOD

The Timeline

To properly analyse the classroom mathematical activity focused on covariational reasoning processes, we adopt the Timeline, a tool already introduced by Arzarello et al. (2010), consisting of a table with many rows and columns that allows one to collect all the information concerning the various semiotic resources and tools interactions active during a classroom activity. Specifically, the Timeline contains information about the following items:

- *Utterances*, integrally reported (here only their English translation is given);
- *Gestures*, analysed according to the dimensions (deictic, iconic, metaphoric, beats, writing) and functions (interactive, narrative, and grounding) as introduced above: the details are reported within rectangular boxes;
- *Inscriptions,* i.e., drawings, sketches, and writings produced by the teacher and the students;
- *Tools interactions*, distinguishing between an ascending (X $\rightarrow$) or descending ($\rightarrow$ X) control with respect to tool X;

- *Time evolution* and *interactions* between the different components of the Semiotic Bundle.

The context of the teaching experiment

The two episodes analysed in this contribution belong to a teaching experiment (Steffe & Thompson, 2000) conducted in a 10th grade classroom in a scientific-oriented school in Italy (school year 2019-2020). The focus of the teaching experiment was the mathematical modelling of a real phenomenon. The aim of the activities was to elaborate on the law of the motion of a ball rolling along an inclined plane and, in particular: (a) to obtain the formula describing the motion of the ball, $s = k \cdot t^2$ (s = distance traversed, t = time, k = parameter depending on the angle of inclination of the plane); (b) to explore the relationship between the angle of inclination of the plane and the distance-time graph. The tasks were specifically designed to enhance both first- and second-order covariational reasoning; they widely adopted digital tools, and the several representations involved can be considered as multiple external representations of the same phenomenon (Ainsworth, 1999). In task 1, students, divided into small working groups, watched on their computers a video reproducing the Galileo experiment on the motion of a ball along an inclined plane (Figure 1, on the left). Such a video was the first encounter of the students with Galileo's experiment. After the vision of the video, students were asked to elaborate on some observations about the motion of the ball. In task 2, students had to explore a GeoGebra applet (G) showing on the left the ball running along an inclined plane, with the angle of inclination of the plane highlighted in green colour, and on the right a table (T) of numerical values, of time and distance traversed by the ball (Figure 1, centre). In particular, time intervals were equal to 1 second. It was possible to change the inclination of the plane by moving the blue point at the end of it. By resetting the simulation and making it run again different values of time and distance were provided by the software. Hence students could explore how those values change when the inclination of the plane varies. Before moving to the following tasks, the teacher coached a mathematical discussion (Discussion 1) focused on tasks 1 and 2. The main purpose was to share and comment on the possible conjectures and formulas elaborated by the groups. During task 3, students were asked to justify their previous conjectures, comparing them with the extra information provided by a new GeoGebra file (Figure 1, on the right). The table on the right of the applet presented an additional column containing the numerical values of the first finite differences (FDs) of distance, and in the middle of the screen, there was a cartesian plane showing a discrete distance-time graph. By changing the inclination of the plane shown on the left, students could observe how the shape of the graph and the finite differences are related to the angle of inclination of the plane. This activity was followed by a teacher-led discussion (Discussion 2) aiming to investigate the relationship between the distance-time graph and the angle of inclination of the plane, so enhancing second-order covariational reasoning.

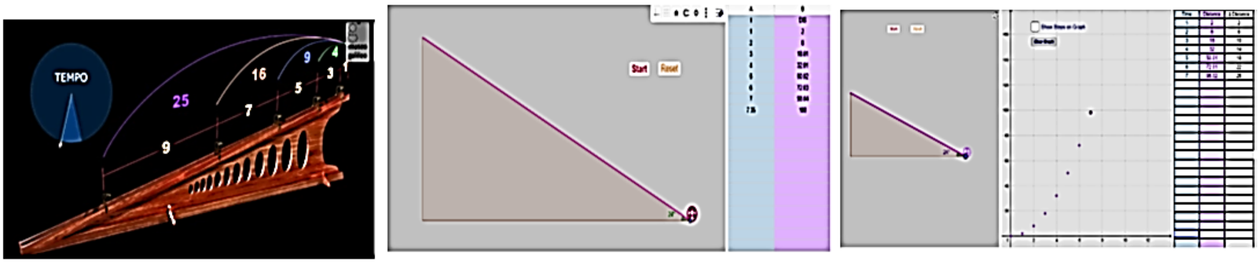


Figure 1: Digital tools used during tasks 1, 2 and 3, respectively: a video reproducing the experiment and two GeoGebra applets

Data collection and data analysis

All the classroom activities conducted during the teaching experiment were video-recorded and transcribed. The analysed data consist of two episodes that reveal the emergence of covariation. Using the Timeline both diachronically and synchronically, we will focus on the roles of tools, of the other involved semiotic resources, of their evolution and intertwining in time and, consequently, on how they contribute to the circulation of the mathematical knowledge in the Sem-Ins plane.

RESULTS

Episode 1. This episode is an excerpt from Discussion 1, and its analysis has been partially presented in Bagossi (2021). The teacher is concluding the roundup during which she asked the working groups about their observations on the motion of the ball. Toward the end of the discussion, Valeria takes the word to share the considerations of her group.

1 Valeria: Hence, we noticed that first finite differences of time were always of 1 second, except for the last one, while in one second the first finite differences of distance increased more and more so we noticed that there was an acceleration.

2 Teacher: Ok, in one second it covered more distance and so there was acceleration. And then you noticed that the second finite differences of distance…

3 Valeria: They were constant and the third were equal to 0.

4 Teacher: The second were constant and the third, always of distance, were null.

5 Valeria: Then, we thought that the graph could be of second degree since second finite differences are constant and also because we knew that the formula of the acceleration is s/t^2. […]

6 Teacher: And you assumed that the graph could be…

7 Valeria: A curve that before had an inclination almost horizontal and then became always more vertical.

8 Teacher: Could you draw it?

9 Valeria: We divided the horizontal axis that was the one of time in various sections representing one second and then we noticed that in the time of one second the inclination was always more vertical. *[She draws the graph on the interactive whiteboard.]*

10 Teacher: Ok, because in one second it covered always more distance. And if the angle changes, what happens according to you?

11 Valeria :If the angle changes, the uphill is faster.

12 Teacher: And if you should make another graph changing the angle?

13 Valeria: *[She draws another curve, more inclined.]*

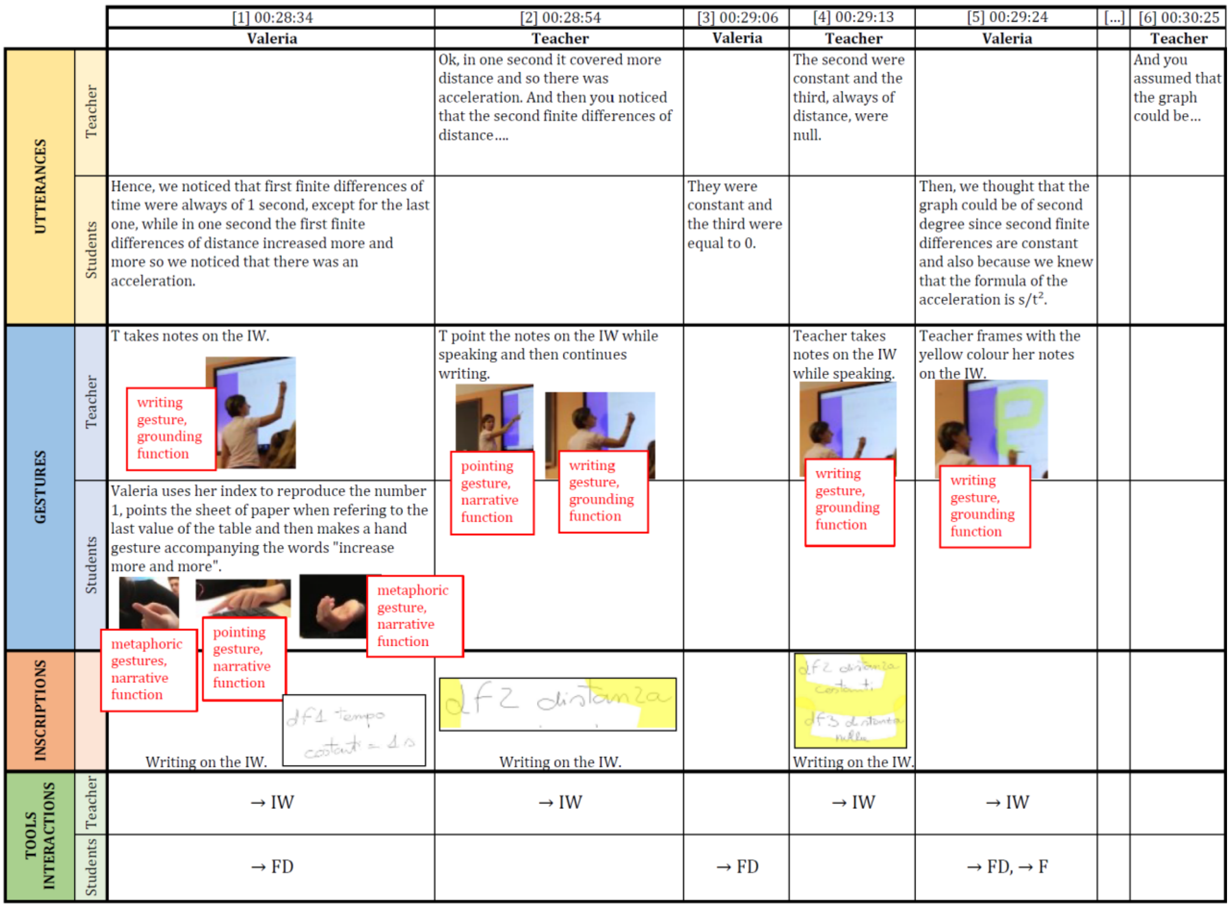


Figure 2: Timeline of episode 1 (part I)

Valeria immediately starts to expose how they worked with finite differences (FDs): they noticed that first FDs of time are always one second while first FDs of distance increase more and more, and they relate this increase to acceleration [1]. The teacher does not focus on the misconceptions emerging during the mathematical discussion, but instead starts taking notes about FDs on the interactive whiteboard (IW). While pointing with the pen to the IW [2] (Figure 2 – gesture row), the teacher revoices Valeria's word and asks for the order of FDs. The student claims that the second FDs of distance are constant and the third are null [3]. Whilst writing on the IW, the teacher repeats Valeria's words [4] again. Then Valeria continues by saying that "the graph could be of second degree because second finite differences are constant and also because we knew the formula of acceleration is s/t2" [5] (they probably made this assumption about the formula (F) seen in the video as a generalisation of the formula about speed). The teacher continues taking notes on the IW, revealing to students the relevance of those conjectures. If until this moment students strongly relied on finite differences, now something different appears: FDs are related to the degree of the graph, and as a consequence to its shape, and the argumentation is also supported by the presumed formula of acceleration containing time to the second power. The adopted language addresses elements of the various representations (algebraic, numerical, and graphical) that are now related coherently. At [6], the teacher asks for more details about the graph; Valeria replies by describing what they elaborated on not only with her words but also by adopting some metaphoric gestures (Figure 3 – gesture row): "a curve that before had an inclination almost horizontal and then became always more vertical" [7].

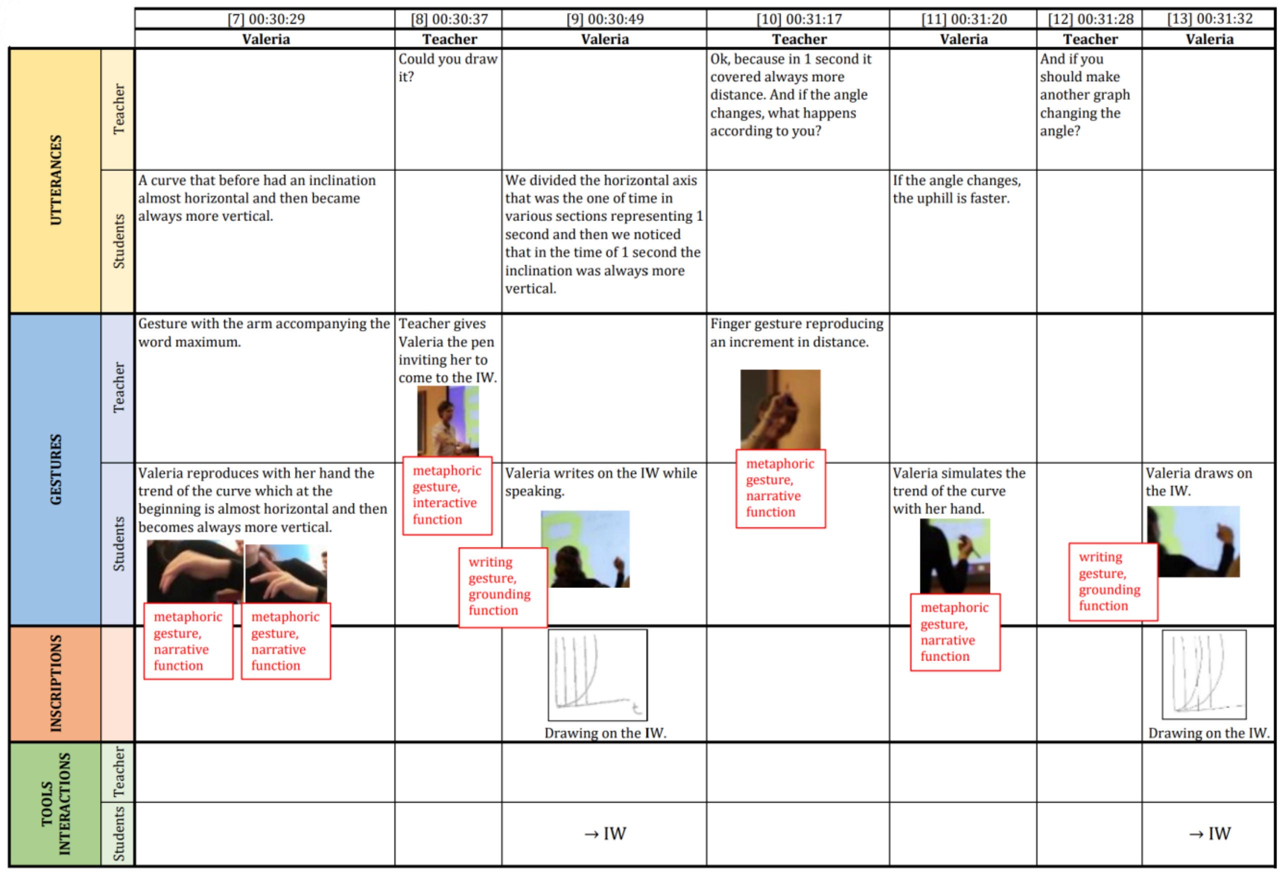


Figure 3: Timeline of episode 1 (part II)

The teacher invites Valeria to draw the curve on the IW [8]: the student starts outlining how they elaborated on the shape of the graph reasoning in terms of fixed intervals of time [9] (Figure 3 – inscription row). The teacher revoices Valeria's words and then asks what happens when the angle changes [10]. This question represents the opportunity to enhance second-order covariational reasoning, modifying the angle, i.e., the parameter, and observing how it affects the graph globally. At [11], Valeria answers that "[i]f the angle changes, the uphill [of the graph] is faster" and then, under the request of the teacher, she draws on the IW a second curve, more inclined (Figure 3 – inscription row).

In the last part of this episode, the student succeeds in envisioning the distance-time relationship in a smooth continuous way and representing it in a graphical form. Finite differences of time and distance constitute the algebraic tool used by students as an instrument to infer the properties of the distance-time relationship [1; 3], not only algebraically but also graphically: this is a process of instrumental genesis. Moreover, the possibility of changing the inclination of the plane, offered by the GeoGebra applet, is used by students as an instrument to explore the dependence on the inclination angle. Second-order covariational reasoning manifests in a qualitative form: students grasp the distance-time relationship and express it in a graphical form [9; 13] through a process of semiotic genesis. The dependence on the inclination angle manifests in the properties of the graph function and specifically in a change of the graph slope.

Episode 2. This episode happens at the beginning of Discussion 2: the teacher opens the discussion by asking for clarifications about the answers written by students on their worksheets. Her aim seems to relate the increase in traversed distance to the first FDs provided in the table. Students initially refer to the graphical representation, but then the teacher succeeds in directing their attention elsewhere.

14 Teacher: What does it mean that in equal times the distances that we have increase?

15 Chiara: The ball to cover a larger distance must accelerate.

16 Teacher: The ball must change its speed, increase its speed. In some way it has to accelerate. How do we know from here that our ball in equal times does not traverse equal distances?

17 Giulia: The curve starts slower and then goes higher and higher.

18 Teacher: Ok, for sure it starts slow and then it goes up and up.

19 Fabio: From the first finite differences equal…in the table.

20 Teacher: There would be equal first finite differences if…

21 Fabio: If it always goes at the same speed.

22 Teacher: Ok, if we had first finite differences equal, it would have always the same speed, but she [Giulia] says that at a certain point it drives up so… what does it mean?

24 Giulia: It goes faster.

25 Teacher: It goes faster.

The teacher asks the whole classroom what it means that "in equal times the distances that we have increase" [14]. Chiara replies that it is due to acceleration [15]; the teacher revoices her words [16] and introduces some metaphoric gestures indicating a variation in speed (gesture row – Figure 4). Immediately after, she asks where they can deduct that information from the GeoGebra applet [16] (she points at the IW displaying it; inscriptions row – Figure 4). Giulia answers by referring to the trend of the graph: "The curve starts slower and then goes higher and higher" [17] (see also her metaphoric gesture in Figure 4). The teacher repeats Giulia's sentence underlining its correctness [18], but the tone of her voice reveals that she expected a different answer. Indeed, Fabio grasps that and adds "[f]rom the first finite differences… equal in the table" [19]. Fabio's sentence is not well formulated in the context of that discussion, but the teacher helps him to explain his thoughts better. She initiates a sentence and invites Fabio to complete it. As a result, they conclude that "there would be first finite differences equal if it [the ball] goes always at the same speed" [20-21]. Then the teacher reconnects to the utterance initially elaborated by Giulia [17] asking what it means that a certain point "it [the curve] drives up" [22]. This time Giulia replies with a physical interpretation, "it goes faster" [23]. The teacher repeats her words while nodding [24] (gesture row – Figure 4). The tools appearing in this episode, the GeoGebra applet and the table of numerical values, are used by the students with a descending control to answer the teacher's questions (tools interactions row – Figure 4). An overview of the episode reveals that Giulia's reasoning is based on a process of semiotic genesis that starts from the discrete distance-time graph [17] provided in the GeoGebra applet and leads her to attribute a physical interpretation of the phenomenon described by the curve [23]. Fabio's approach instead relies on the FDs in the table of numerical values [19] that he uses as an instrument to elaborate on the variation in the speed of the ball [21].

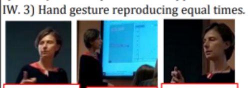
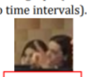
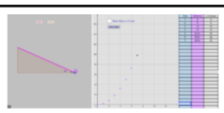
		[16] 00:07:50	[17] 00:08:11	[18] 00:08:22	[19]00:08:28	[20] 00:08:32	[21] 00:08:38	[22] 00:08:45	[23] 00:08:48	[24] 00:08:50
		Teacher	**Giulia**	**Teacher**	**Fabio**	**Teacher**	**Fabio**	**Teacher**	**Giulia**	**Teacher**
UTTERANCES	Teacher	The ball must change its speed, increase its speed. In some way it has to accelerate. How do we know from here that our ball in equal times does not traverse equal distances?		Ok, for sure it starts slow and then it goes up and up.		There would be equal first finite differences if…		Ok, if we had first finite differences equal, it would have always the same speed, but she [Giulia] says that at a certain point it drives up so… what does it mean?		It goes faster.
	Students		The curve starts slower and then goes higher and higher.		From the first finite differences equal…in the table.		If it always goes at the same speed.		It goes faster.	
GESTURES	Teacher	1) Hand gesture reproducing a variation in speed. 2) Teacher points at the applet on the IW. 3) Hand gesture reproducing equal times.  metaphoric gesture, narrative function; pointing gesture, narrative function; metaphoric gesture, narrative function						1) Finger gesture accompanying the words "equal". 2) Pointing gesture addressed to Giulia. 3) Gesture performed with the pen to ask clarification.  metaphoric gesture, narrative function; pointing gesture, interactive function; metaphoric gesture, interactive function		Teacher nods. 
	Students		Finger gesture reproducing the shape of the graph (referring to time intervals).  metaphoric gesture, narrative function							
INSCRIPTIONS		 Teacher points the applet shown on the IW.								
TOOLS INTERACTIONS	Teacher									
	Students		→ G		→ T			→ T		

Figure 4: Timeline of episode 2

DISCUSSION

The paper focuses on the processes of instrumental and semiotic genesis in the MWS to frame two classroom episodes from a teaching experiment in grade 10, aimed at the mathematical modelling of the Galileo experiment about the motion of a ball along an inclined plane. To do that, we used the Timeline, an analysis tool that makes apparent which semiotic resources (utterances, gestures, inscriptions) are activated, used, and interpreted by the students and the teacher, as well as which are their interactions with the different tools (GeoGebra applets, table of numerical values, finite differences, interactive whiteboard), and their evolution in time. In fact, the diachronic and synchronic analysis of actions, productions, and communications in the two episodes shows how they all happen within a compact semiotic space, the Semiotic Bundle. In it, different representations, algebraic, numerical, and graphical, are reciprocally active because of the effect of both the instrumental and semiotic genesis generated by the different tools, mediated by the interventions of the teacher, who addresses her students towards the right stream of thought. The functionality of changing the angle in the GeoGebra applet and the FDs are used by students as instruments to deduce properties concerning the degree, the shape and the physical meaning of the distance-time relationship. The various components of the GeoGebra applet also support students' semiotic processes: they contribute to the visualisation of COV 2, i.e., how the angle of inclination affects the trend of the graph and the motion of the ball. Eventually, we elaborate on the essential role of the teacher. In episode 1, the 'revoicing technique' used by the teacher supports students in looking at finite differences of time and distance and at their graphical representation to infer the properties of the distance-time relationship and in exploring its dependence on the inclination angle. In episode 2, the questions of the teacher and her use of voice tones in revoicing Giulia's and Fabio's answers and in nodding trigger the evolution of the two students' reasoning: of the former from the distance-time graph to the motion of the ball, of the latter from the table of numerical values to an interpretation of the physical phenomenon.

These two aspects put forward an interesting meaning of activities that develop in the Sem-Ins plane of the MWS. The Semiotic Bundle construct and the derived analysis tool of the Timeline have described the dynamic activities, which happen along that epistemological plane and have highlighted the deep interlacing with the cognitive plane. These descriptions are a concrete answer to the research question posed at the beginning: it is the dynamic interlacing of relationships between the semiotic resources and the co-produced effect of interactions with tools, all within the Sem-Ins plane, that guides students in the identification of invariant relationships and in the representation of covariation between the quantities involved in the motion ball: distance/time, and angle of inclination/distance-time graph.

A consequent question could now be raised about the relationship between what happens in the Sem-Ins plane and the discursive genesis of the MWS. As it appears in our description, this last component is less present. Indeed, we can find only some of its traces that could be classified as discursive in the MWS framework, all within the epistemological plane. For example, there are some references to physical knowledge (not always correct) reduced to the simple appearance of the words 'acceleration' [1-5-15] and 'speed' [21] in students' discourse. On the contrary, a more metaphoric language is used for mathematical terms, e.g., for referring to the graphs of functions in the distance-time plane, e.g., "[t]he curve starts slower and then goes higher and higher" [17]. For this reason, we hypothesise that the third axis of the MWS model is less developed in the examined activities.

This is reasonable: indeed, second-order covariation in modelling activities is not an easy goal that can be completely achieved from the very beginning. Moreover, students are required is to grasp how the angle quantity as a parameter can change the way according to which the motion law is represented because of the measured values. Any proof of the formula based on physical principles is beyond the aims of the teaching experiment and is outside the knowledge of students at that school level.

REFERENCES

Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computers & education*, *33*(2–3), 131–152. https://doi.org/10.1016/S0360-1315(99)00029-9

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, *9* (Extraordinario 1), 267–299.

Arzarello, F. (2017). Analyse des processus d'apprentissage en mathématiques avec des outils sémiotiques: la covariation instrumentée, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2017*, 6–25.

Arzarello, F. (2019). La covariación instrumentada: Un fenómeno de mediación semiótica y epistemológica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *18*, 11–29.

Arzarello, F., Bazzini, L., Politano, L., & Sabena, C. (2010). Multimodal processes in teaching and learning mathematics: A case study in primary school. In G. Pérez-Bustamante, K. Phusavat, & F. Ferreira (Eds.) *Proceedings of the IASK International Conference* (pp. 286–292). IASK.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34*, 66–72. https://doi.org/10.1007/BF02655708

Bagossi, S. (2021, April 8-12). *Toward second order covariation: Comparing two case studies on the modelling of a physical phenomenon* [Paper presentation]. American Educational Research Association Annual Meeting, online.

Bagossi, S. (2022). Second-order covariation: it is all about standpoints. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of European Research in Mathematics Education* (CERME12) (pp. 4228–4235). Free University of Bozen-Bolzano and ERME.

Carlson, M. P., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*, 352–378. https://doi.org/10.2307/4149958

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 16, 9–24.

Kuzniak, A., Tanguai, D, & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. *48*(6), 721–737. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x

McNeill, D. (1992). *Hand and mind: What gestures reveal about thought*. University of Chicago press.

Panero, M., Arzarello, F., & Sabena, C. (2016). The mathematical work with the derivative of a function: Teachers' practices with the idea of "generic". *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(54), 265–286. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a13

Passaro, V. (2020). Analyse du déploiement d'un raisonnement covariationnel en situation chez des élèves de 15 à 18 ans. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *20*(3), 462–484. https://doi.org/10.1007/s42330-020-00101-x

Roth, W.-M. (2001). Gestures: Their role in teaching and learning. *Review of Educational Research*, *71*, 365–392. https://doi.org/10.3102%2F00346543071003365

Saada-Robert, M. (1989). La microgenèse de la représentation d'un problème. *Psychologie française*, *34*(2-3), 193–206.

Shein, P. P. (2012). Seeing with two eyes: A teacher's use of gestures in questioning and revoicing to engage English language learners in the repair of mathematical errors. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(2), 182–222. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.2.0182

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. *Handbook of research design in mathematics and science education*, 267–306.

Swidan, O., Bagossi, S., Beltramino, S., & Arzarello, F. (2022). Adaptive Instruction Strategies to Foster Covariational Reasoning in a Digital Rich Environment. *The Journal of Mathematical Behavior, 66*. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100961

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education*, National Council of Teachers of Mathematics, 421–456.

THÈME 3 : GENÈSE ET DÉVELOPPEMENT DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE : RÔLE DE L'ENSEIGNANT, DU FORMATEUR, DU COLLECTIF ET DES INTERACTIONS

Inés M. Gómez-Chacón, Universidad Complutense de Madrid, (España)

Laurent Vivier, LDAR, Université Paris Cité, (France)

DESCRIPTEUR INITIAL DU THÈME

Le troisième thème s'attache à faire avancer la réflexion sur le rôle des enseignants et des interactions dans la construction, ou la formation, d'un travail mathématique adapté et efficace. Cette réflexion a été initiée et développée dans les colloques précédents (Gómez-Chacón, Kuzniak et Vivier, 2016, Gómez-Chacón, 2022).

L'objectif est de faire progresser les connaissances didactiques sur les aspects suivants :

- La conception et la mise en œuvre de situations didactiques pour développer le travail mathématique en classe relèvent de la responsabilité de l'enseignant. Quels sont les choix didactiques effectués par l'enseignant dans la conception de ces situations ?
- La mise en œuvre effective de ces situations en classe nécessite la mise en place d'interactions entre les élèves et l'enseignant pour développer le travail mathématique. Ces interactions peuvent se produire pendant les phases collectives ou des phases de groupes. Comment l'enseignant anticipe-t-il et gère-t-il ces interactions ? Comment organise-t-il les différentes phases, individuelles, collectives ou de groupe ?
- L'analyse des interactions produites en classe devient nécessaire pour comprendre la manière dont s'élabore le travail mathématique. Comment ces analyses sont-elles prises en compte dans les différentes dimensions interdépendantes que sont les dimensions épistémologique, cognitive, didactique, technique, affective et culturelle ?
- Pour concevoir et mettre en œuvre son enseignement, l'enseignant s'appuie également sur ses connaissances, notamment mathématiques et didactiques. A cet égard, de nombreuses questions peuvent être soulevées, telles que : comment identifier les différents types de connaissances sur lesquelles l'enseignant s'appuie. Ces connaissances permettent-elles à l'enseignant de concevoir un enseignement cohérent et efficace ?
- Les questions ci-dessus mettent en évidence l'importance des connaissances des enseignants pour l'enseignement et interrogent donc la formation des enseignants. Comment prendre en compte et développer ces connaissances dans le cadre de la formation initiale et continue des enseignants ? Quelles sont les modalités de formation, notamment à distance et en groupe ? Quel est le rôle du formateur ? Quelle est la place des interactions dans la formation ?

PRESENTATIONS

Dans le cadre de ce thème, 13 présentations ont été proposées, articulées en deux pôles : un pôle en présentiel à Strasbourg (France) et un pôle à distance centré à Valparaíso (Chili), avec l'organisation de la plateforme technique de transmission par Romina Menares et Pedro Vidal (Figure 1). Des chercheurs du Canada, Espagne, Mexique, Pérou, ont participé au pôle à distance.

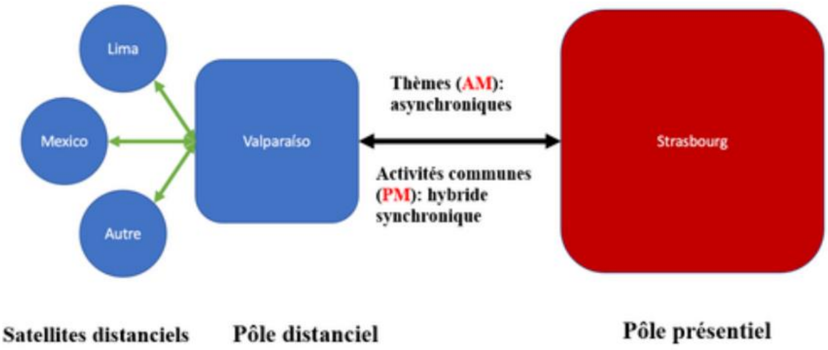


Figure 1 : Organisation des deux pôles

Les présentations dans les deux pôles ont été réalisées de manière asynchrone, notamment pour tenir compte du décalage horaire de 6 heures entre Strasbourg et Valparaíso : le thème 3 a travaillé le matin à Strasbourg, l'après-midi (le matin en Amérique latine) a été consacré aux sessions plénières (en mode hybride) puis aux sessions du pôle à distance du thème 3.

Afin de maintenir l'unité du thème 3, chaque contribution a été évaluée par deux évaluateurs, un de chaque pôle, en plus des coordinateurs du thème. En fin de symposium, une session de discussion commune du thème 3 a eu lieu sur les contributions présentées par les participants des deux pôles (figure 2).

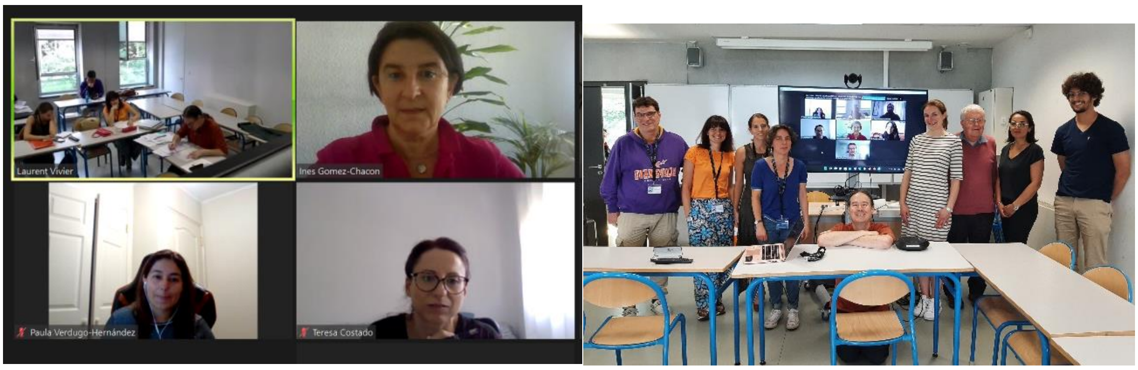


Figure 2 : Participants de la session commune

Pôle en présence (par ordre de présentation) :

Titre de la communication	Auteur	Institution	Pays	Spécificités
Enseigner l'algèbre élémentaire : de quel point de vue et quelles activités ?	Rauscher, J.-C. Schoenenberger, S.	IREM de Strasbourg	France	Fonctionnement sémio-cognitif de l'algèbre élémentaire, opération de désignation fonctionnelle et de condensation
Analyse d'une tâche de description et de reproduction de figures géométriques dans une classe de 3e année primaire au Québec	Michot, S.	Université de Montréal	Québec	ETM de la géométrie, plan [Sem-Ins], tâches sur des quadrilatères et des triangles, papier blanc et quadrillé.
Contrats fortement didactique et ETM idoines. Le cas des tâches de modélisation en contexte technologique	Masselin, B. Kuzniak, A.	LDAR	France	Itinéraires dans les ETM idoines pour caractériser les contrats didactiques, phases de la TSD et plans verticaux de l'ETM.
El espacio idóneo del profesor. El predominio de lo didáctico	Gonzalez[15], G.		Mexique	ETM idoine de la géométrie, classe multiniveau de primaire.
The capturing of Vygotskyan perezhivanie as radical Erlebnis, through the analysis of a prospective teachers'learning episode	Zagorianakos, A.	National and Kapodistrian University of Athens	Grèce	Le concept de *perezhivanie* de Vygotsky, analyse le travail d'une étudiante qui dépasse ses difficultés après avoir atteint un paroxysme.
Petit détour par le système *sécimal*	Peteers, F. Vivier, L.	LDAR	France	ETM des nombres en base six et ETM de la géométrie ; stratégie de formation de professeur des écoles.

[15] L'auteur n'a pas souhaité publier dans les actes du symposium.

Educators' documentation work for the building of an inquiry community with teachers	Pocalana, G. Robutti, O.	Università degli Studi di Torino	Italie	Approche documentaire, communauté de recherche, formation d'enseignants, tâches sur des triangles.

Pôle à distance :

Titre de la communication	Auteur	Institution	Pays	Spécificités
Epistemologías prácticas y acción didáctica en profesores universitarios de matemáticas	Gómez-Chacón, I.	Universidad Complutense de Madrid	España	Théorie ETM, plans cognitif et épistémologique, Professeur universitaire (mathématiciens), *Inquiry based mathematics education*
Emociones epistémicas y trabajo geométrico con futuros profesores de primaria	Costado, M.T. y Gómez-Chacón, I.	Universidad de Cádiz Universidad Complutense de Madrid	España	Théorie ETM, dimension émotionnelle, émotions épistémiques, Professeurs du premier degré
La influencia del conocimiento especializado de una maestra en el trabajo matemático de sus estudiantes de educación infantil	García- Cuéllar, D.J., Martín-Díaz, JP., Flores, J., Climent, N.	Pontificia Universidad Católica del Perú Universidad de Huelva	Perú España	Modèle MTSK et théorie ETM Connaissances mathématiques, éducation maternelle
El cambio de dominio en la enseñanza del teorema de tales: una mirada desde la relación ETM-MTSK	Espinoza-Vásquez, G., Henríquez-Rivas, C., Climent, N., Ponce, R. y Verdugo-Hernández, P.	Universidad Alberto Hurtado, Universidad Católica del Maule, Universidad de Huelva, Universidad de Talca	Chile España	Modèle MTSK et théorie ETM

Diseño de tareas en la conformación del ETM idóneo del futuro profesor centradas en las funciones	Verdugo-Hernández, P. y Henríquez-Rivas, C.	Universidad Católica del Maule Universidad de Talca	Chile	ETM idoine Futurs enseignants
Tareas, definiciones y ejemplos que propone un futuro profesor en su práctica profesional	Espinoza-Vásquez, G., Verdugo-Hernández, P. y Henríquez-Rivas, C.	Universidad Alberto Hurtado, Universidad de Talca Universidad Católica del Maule	Chile	ETM Futurs enseignants, Connaissance mathématiques

CONTRIBUTIONS ET THEMES DE RECHERCHE

Les contributions au thème 3 ne se sont pas uniquement appuyées sur la théorie ETM, mais ont également utilisé d'autres modèles théoriques pour comprendre les connaissances des enseignants et le rôle de l'enseignant dans la salle de classe. Parmi les modèles les plus utilisés figure le modèle théorique *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) qui, grâce à l'établissement de catégories, a été utilisé pour approfondir la connaissance des mathématiques, la connaissance didactique du contenu (*Pedagogical content knowledge*) (voir les communications du pôle à distance). Le cadre de l'*Inquiry Based Mathematics Education* a également été utilisé pour se concentrer sur la conception et la mise en œuvre de tâches mathématiques (Gómez-Chacón et Pocalana).

Les questions spécifiques et les lignes de recherche des articles publiés dans les actes sont les suivantes :

- En suivant un élève de début de lycée en France qui avait des difficultés en algèbre, et en adoptant, au-delà des techniques enseignées, un point de vue sur le fonctionnement sémio-cognitif de l'algèbre élémentaire, il a été mis en évidence l'importance des opérations de désignation fonctionnelle et de condensation dans le travail algébrique. Il est proposé des tâches spécifiques, notamment sur le remplissage de tableaux, permettant de travailler ces opérations (Rauscher, et Bauerle-Schoenenberger).
- Il a été étudié le rôle de l'institutionnalisation dans la description et la reproduction de figures géométriques complexes (superpositions de figures élémentaires, triangles et quadrilatères particuliers) en primaire au Québec. Après deux séances de travail conclues par une institutionnalisation, il a été relevé un travail de descriptions et de reproductions de meilleure qualité à la troisième séance que l'on peut attribuer, entre autres, aux phases d'institutionnalisation (Michot).

- Les ETM idoines potentiels et les ETM idoines effectifs de trois enseignants ont été comparés sur une tâche de probabilité en début de lycée à l'aide d'un outil d'analyse permettant l'identification d'itinéraires. Ces itinéraires dans les ETM idoines permettent de caractériser des contrats fortement didactiques proposés par Brousseau (Masselin et Kuzniak).
- La notion vygotskienne de *perezhivanie* a permis de comprendre le changement radical d'une étudiante, affectant la personnalité, à la suite d'un travail sur une tâche d'algèbre consistant à identifier les orbites d'un système dynamique simple (doubler un entier modulo *n*). Elle était en grande difficulté d'incompréhension, contrairement aux autres étudiants qui ont produit des réponses correctes et esthétiques, et l'enseignant a refusé de l'aider. L'étudiante a été poussée jusqu'à un paroxysme avant de pouvoir, finalement, réaliser la tâche ce qui a constitué une expérience cruciale (Zagorianakos).
- Une séquence longue permettant de développer l'ETM des nombres en base six a été proposé à des enseignantes en formation initiale dans le but de mieux comprendre la complexité du système décimal, pour aller au-delà de la simple maîtrise des techniques. Partant des nombres entiers, l'extension aux nombres rationnels et réels s'effectue par un travail géométrique de calculs et de mesures de longueurs et d'aires. L'émergence de écritures à virgules en base six en lien avec les sous-unités du mètre et la difficulté à produire une droite graduée adaptée sont développés plus spécifiquement (Peteers et Vivier).
- Pour des formations qui portent spécifiquement sur le développement professionnel d'enseignants de mathématiques afin de promouvoir les mathématiques aux élèves de lycée en leur proposant des séances supplémentaires avec des tâches de recherche, il a été mis en évidence une influence de l'approche documentaire des formateurs selon leur objectif de mettre en place une communauté de recherche dans la formation (Pocalana et Robutti).
- Une contribution est apportée à la formation des nouveaux enseignants universitaires de mathématiques (mathématiciens), un aspect nouveau abordé dans ce symposium pour l'application de la théorie ETM. Basée sur les données d'un projet européen PLATINUM, l'approche méthodologique est décrite et la contribution que les outils didactiques inspirés par la théorie des ETM pourraient apporter à la conception et à la mise en œuvre de tâches mathématiques dans le cadre d'une approche *Inquiry Based Mathematics Education* est discutée (Gómez-Chacón).
- De nouvelles articulations entre les dimensions cognitives et affectives de l'espace de travail mathématique sont illustrées. Une réflexion sur la spécificité des relations entre les croyances et les émotions épistémiques et les conflits cognitifs dans le travail géométrique a été menée. Des éléments

sont fournis qui pourraient enrichir les dimensions de la constitution de l'ETM personnel du futur enseignant (Costado et Gómez-Chacón).

- Approfondissant le niveau méthodologique, il a été exploré les relations entre les connaissances spécialisées d'une enseignante et le travail mathématique de ses élèves en éducation maternelle. Les références théoriques utilisées sont le modèle des MTSK, pour l'analyse des connaissances de l'enseignant, et la théorie des ETM, pour l'analyse du travail développé par les élèves (García-Cuéllar, Martín-Díaz, Flores, Climent).
- Le changement de domaines et la compréhension de la pratique de l'enseignant sont analysés à la lumière de la relation ETM-MTSK. Elle est illustrée par l'enseignement du théorème de Thalès à partir de la complémentarité entre la théorie ETM et les MTSK. Une proposition d'enseignement est analysée dans laquelle les changements géométrique-numérique et géométrique-algébrique sont observés, ce qui permet de mettre en évidence les connaissances mobilisées par l'enseignant (Espinoza-Vásquez, Henríquez-Rivas, Climent, Ponce et Verdugo-Hernández).
- Les résultats présentés illustrent les difficultés associées à l'ETM idoine potentiel et offrent aux futurs enseignants des possibilités d'améliorer leur ETM idoine effectif pour la salle de classe. Les données proviennent d'une étude de cas qui caractérise le travail mathématique sur une tâche conçue par de futurs enseignants pour des élèves entre 13 et 14 ans, centrée sur la notion de fonction et qui favorise la capacité de représentation énoncée dans le programme de l'école secondaire chilienne (Verdugo-Hernández et Henríquez-Rivas).
- En se focalisant sur le contenu mathématique des équations, le travail mathématique que le futur enseignant promeut dans son ETM idoine effectif est caractérisé à la lumière des connaissances qu'il mobilise pour cette conception, notamment à partir de définitions, d'exemples et de tâches, du point de vue de la complémentarité des ETM et des MTSK. Les résultats fournis mettent en évidence les aspects sémiotiques des équations et la connaissance des définitions du sujet dans la conception de l'ETM idoine (Espinoza-Vásquez, Verdugo-Hernández y Henríquez-Rivas).

AVANCEES ET NOUVELLES QUESTIONS

Dans la monographie sur la théorie des ETM, il a été examiné différentes avancées et questions liées aux composantes des deux modèles théoriques, MTSK et ETM (voir le chapitre 10 de Gómez-Chacón (2022) et le chapitre 12 de Flores, Kuzniak, et al. (2022)), ainsi qu'à l'ETM personnel (Menares et Vivier, 2022). Dans cette optique, dans le thème 3, nous reprenons les aspects suivants qui sont abordés et discutés afin de promouvoir des avancées :

- La constitution de l'ETM idoine dans le processus d'enseignement-apprentissage.

- La conceptualisation de la théorie des ETM fournit à ce thème 3 une analyse détaillée des différents types de travaux mathématiques que l'enseignant a l'intention de réaliser en classe (ETM idoines potentiels) et de ceux qui ont lieu effectivement (ETM idoines effectifs), en particulier dans la genèse discursive.
- Caractérisation des situations de formation initiale des enseignants (primaire ou secondaire).

La session conjointe des deux pôles a été déterminante pour cette prospective. Sur la base des contributions au symposium ETM7, nous avons cherché à répondre à des questions telles que :

- Quelle est la contribution mutuelle entre la théorie des ETM et les autres modèles ?
- Quels concepts et phénomènes la théorie des ETM met-elle en évidence ?
- Quelles tensions apparaissent lorsque l'on tente de faire dialoguer deux théories ou modèles ? Exemples.

Suite au dialogue, de nouvelles questions émergent et sont soutenues par les contributions, elles sont précisées ci-dessous :

- Exemplifications d'articulations réalisées à partir de différentes théories ou modèles :
- Théorie des situations didactiques et ETM.
- L'enseignement des mathématiques basé sur l'investigation et l'ETM.
- Fondements sémiotiques cognitifs de la théorie de Duval et l'ETM.
- Les MTSK et l'ETM.
- La théorie de Vygotsky et l'ETM.
- La figure du formateur, les contributions et les avancées réalisées par les communications qui ont été abordées à partir de l'approche de l'enseignement des mathématiques basé sur l'investigation/l'apprentissage basé sur l'investigation, l'étude du formateur.
- Des points plus affirmés avec des propositions centrées sur l'articulation des niveaux épistémologique et cognitif et sur l'ETM personnel (émotions épistémiques, formation des enseignants).

REFERENCES

Flores Salazar, J.V., Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., Nechache, A., Richard, P.R., Vivier, L. (2022). Mathematical Work and Beyond. In: Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., Richard, P.R. (eds) *Mathematical Work in Educational Context*. Mathematics Education in the Digital Era, vol 18. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_12

Gómez-Chacón, I.M, Kuzniak. A, & Vivier, L. (2016). The Teacher's role from the perspective of Mathematical Working Spaces. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(54), 1-22. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a01

Gómez-Chacón I. M. (2022). Mathematics teachers' knowledge and professional development: a cross-case comparison study, In A. Kuzniak, E. Montoya and P. Richard (Ed). *Mathematical Work in Educational Context. The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*, 229-246. Switzerland: Springer.

Kuzniak, A. (2022). The theory of Mathematical Working Spaces-Theoretical Characteristics, En A. Kuzniak, E. Montoya and P. Richard (Ed). *Mathematical Work in Educational Context. The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*, 3-56. Switzerland: Springer.

Menares-Espinosa, R. y Vivier, L. (2022). Personal Mathematical Work and Personal MWS, In A. Kuzniak, E. Montoya & P. Richard (Ed). *Mathematical Work in Educational Context. The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*, 91-120. Switzerland: Springer.

TEMA 3: GÉNESIS Y DESARROLLO DEL TRABAJO MATEMÁTICO: PAPEL DEL PROFESOR, DEL FORMADOR, DEL GRUPO Y DE LAS INTERACCIONES

Inés M. Gómez-Chacón, Universidad Complutense de Madrid, (España)

Laurent Vivier, LDAR, Université Paris Cité, (France)

DESCRIPTOR INICIAL DEL TEMA

El tercer tema se centra en el avance de la reflexión sobre el papel de los profesores y las interacciones en la construcción, o la formación, de un trabajo matemático adaptado y eficaz. Esta reflexión se inició y desarrolló en simposios anteriores (Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier, 2016, Gómez-Chacón, 2022).

Se busca avanzar en el conocimiento didáctico en los siguientes aspectos:

- La concepción y la implementación de situaciones didácticas para desarrollar el trabajo matemático en clase son responsabilidad del profesor. ¿Cuáles son las elecciones didácticas hechas por el profesor en la concepción de estas situaciones?
- La aplicación efectiva de estas situaciones en el aula requiere el establecimiento de interacciones entre los estudiantes y el profesor para desarrollar el trabajo matemático. Estas interacciones pueden producirse durante las fases colectivas o durante el trabajo en grupo. ¿Cómo el profesor anticipa y gestiona estas interacciones? ¿Cómo el profesor organiza las diferentes fases, individual, grupal, o colectiva?
- El análisis de las interacciones producidas en clase se hace necesario para comprender la forma en que se desarrolla el trabajo matemático. ¿Cómo se tienen en cuenta estos análisis en las diferentes dimensiones interdependientes, tales como, epistemológica, cognitiva, didáctica, técnica, afectiva y cultural?
- Para diseñar y poner en práctica su enseñanza, los profesores también se basan en sus conocimientos, sobre todo los matemáticos y didácticos. Al respecto, muchas preguntas se pueden plantear, tales como: ¿cómo identificar los distintos tipos de conocimientos en los que se apoya el profesor? ¿Estos conocimientos permiten al profesor concebir una enseñanza coherente y eficaz?
- Las preguntas anteriores destacan la importancia de los conocimientos de los profesores para la enseñanza y, por tanto, se cuestiona la formación de los profesores. ¿Cómo se pueden tener en cuenta y desarrollar estos conocimientos en el marco de la formación inicial y continua de los profesores? ¿Qué modalidades de formación, sobre todo a distancia y colectivas, deben utilizarse? ¿Cuál es el papel del formador? ¿Qué lugar ocupa las interacciones en la formación?

PRESENTACIONES

En el marco de este tema fueron realizadas las siguientes presentaciones articuladas en dos nodos, nodo presencial en Estrasburgo (Francia) y nodo a distancia con punto central en Valparaíso (Chile), con la preparación de la plataforma técnica de transmisión por Romina Menares y Pedro Vidal (Figura 1). En el nodo a distancia participó investigadores de Canadá, España, México, Perú.

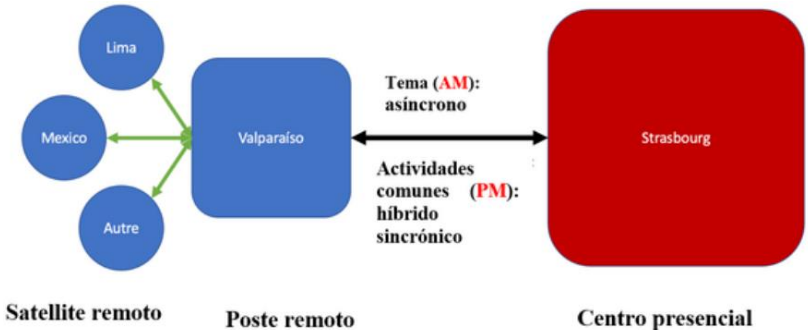


Figura 1: Organización de los dos polos

Las presentaciones en los dos nodos se hicieron de forma asincrónica, en particular para tener en cuenta la diferencia horaria de 6 horas entre Estrasburgo y Valparaíso: el tema 3 trabajó por la mañana en Estrasburgo y la tarde en (mañana en América Latina) se dedicó a las sesiones plenarias (en modo híbrido) y a las sesiones del nudo remoto del tema 3.

Con el fin de mantener la unidad del tema 3, cada contribución además de por los coordinadores fue revisada por dos revisores, uno de cada nodo. En la parte final del simposio, tuvo lugar una sesión conjunta de discusión con las contribuciones expuestas por los participantes de ambos nodos (Figura 2).

Figura 2: Participantes sesión conjunta

Nodo presencial (por orden de presentación):

Título de la contribución	**Autor**	**Institución**	**País**	**Especificidades**
Enseigner l'algèbre élémentaire : de quel point de vue et quelles activités ?	Rauscher, J.-C. Schoenenberger, S.	IREM de Strasbourg	France	Funcionamiento semiótico-cognitivo del álgebra elemental, la operación de designación funcional y la condensación
Analyse d'une tâche de description et de reproduction de figures géométriques dans une classe de 3e année primaire au Québec	Michot, S.	Université de Montréal	Québec	ETM de la geometría, plan [Sem-Ins], tareas sobre cuadriláteros y triángulos, hoja en blanco y cuadriculada.
Contrats fortement didactique et ETM idoines. Le cas des tâches de modélisation en contexte technologique	Masselin, B. Kuzniak, A.	LDAR	France	Itinerarios en los ETM idóneos para caracterizar los contratos didácticos, fases de la TSD y planos verticales del ETM.
El espacio idóneo del profesor. El predominio de lo didáctico	Gonzalez[16], G.		Mexique	ETM idóneo de geometría, clase multinivel de primaria.

[16] La autora ha preferido no publicar su comunicación en las actas del simposio.

The capturing of Vygotskyan perezhivanie as radical Erlebnis, through the analysis of a prospective teachers'learning episode	Zagorianakos, A.	National and Kapodistrian University of Athens	Grèce	El concepto de *perezhivanie* de Vygotsky, analisis del trabajo del estudiante que supera las dificultades.
Petit détour par le système sécimal	Peteers, F. Vivier, L.	LDAR	France	ETM de los números en base 6 y ETM de la geometría ; estrategias de formación de profesores en la escuela.
Educators' documentation work for the building of an inquiry community with teachers	Pocalana, G. Robutti, O.	Università degli Studi di Torino	Italie	Aproximación documental, comunidad de indagación, formación de docentes, tareas sobre triángulos

Nodo a distancia:

Título de la contribución	**Autor**	**Institución**	**País**	**Especificidades**
Epistemologías prácticas y acción didáctica en profesores universitarios de matemáticas	Gómez-Chacón, I.	Universidad Complutense de Madrid	España	Teoría ETM planos cognitivos y epistemológico Profesor Universitario (matemáticos) *Inquiry based mathematics education*

Emociones epistémicas y trabajo geométrico con futuros profesores de primaria	Costado, M.T. y Gómez-Chacón, I.	Universidad de Cádiz Universidad Complutense de Madrid	España	Teoría ETM Dimensión emocional Emociones epistémicas Profesores de Primaria
La influencia del conocimiento especializado de una maestra en el trabajo matemático de sus estudiantes de educación infantil	García- Cuéllar, D.J., Martín-Díaz, JP., Flores, J., Climent, N.	Pontificia Universidad Católica del Perú Universidad de Huelva	Perú España	Modelo MTSK y teoría ETM Conocimiento matemático Educación Infantil
El cambio de dominio en la enseñanza del teorema de tales: una mirada desde la relación ETM-MTSK	Espinoza-Vásquez, G., Henríquez-Rivas, C., Climent, N., Ponce, R. y Verdugo-Hernández, P.	Universidad Alberto Hurtado, Universidad Católica del Maule, Universidad de Huelva, Universidad de Talca	Chile España	Modelo MTSK y teoría ETM
Diseño de tareas en la conformación del ETM idóneo del futuro profesor centradas en las funciones	Verdugo-Hernández, P. y Henríquez-Rivas, C.	Universidad Católica del Maule Universidad de Talca	Chile	ETM idóneo Futuros profesores
Tareas, definiciones y ejemplos que propone un futuro profesor en su práctica profesional	Espinoza-Vásquez, G., Verdugo-Hernández, P. y Henríquez-Rivas, C.	Universidad Alberto Hurtado, Universidad de Talca Universidad Católica del Maule	Chile	ETM Futuros profesores Conocimiento matemático

CONTRIBUCIONES Y TEMAS DE INVESTIGACIÓN

Las contribuciones a este tema no sólo han tenido como modelo la teoría ETM, sino que se han utilizado otros modelos teóricos de comprensión del conocimiento del profesor y del rol del profesor en el aula. Entre los modelos más utilizados se encuentra el modelo teórico *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK), que, a través del establecimiento de categorías, ha sido utilizado para profundizar en el conocimiento de la matemática, en el conocimiento didáctico del contenido (*Pedagogical content knowledge*) (ver comunicaciones preferentemente del nodo a distancia). También se ha utilizado el enfoque en el diseño y la implementación de tareas matemáticas bajo un enfoque de *Inquiry Based Mathematics Education* (Gómez-Chacón y Pocalana).

Las cuestiones y líneas específicas formuladas según los artículos publicados en las actas se exponen a continuación:

- Se sigue a un alumno de primeros años de secundaria en Francia que tenía dificultades con el álgebra, y adoptando, más allá de las técnicas enseñadas, un punto de vista sobre el funcionamiento semiótico- cognitivo del álgebra elemental, se pone de relieve la importancia de las operaciones de designación funcional y de condensación en el trabajo algebraico. Se proponen tareas específicas, en particular de cumplimentación de tablas, para trabajar estas operaciones. (Rauscher y Bauerle-Schoenenberger).
- Se estudia el papel de la institucionalización en la descripción y reproducción de figuras geométricas complejas (superposiciones de figuras elementales, triángulos y cuadriláteros particulares) en el nivel de Primaria en Quebec. Tras dos sesiones de trabajo finalizadas con institucionalización, se observa que las descripciones y reproducciones eran de mejor calidad en la tercera sesión, lo que puede atribuirse, entre otras cosas, a las fases de institucionalización. (Michot).
- Los ETM idóneos potenciales y los ETM idóneos efectivos de tres profesores en una tarea de probabilidad al principio de la enseñanza secundaria y utilizando una herramienta de análisis para identificar itinerarios. Estos itinerarios en los ETM idóneos permiten caracterizar los contratos fuertemente didácticos propuestos por Brousseau. (Masselin y Kuzniak).
- La noción vygotskienne de perezhivanie ayuda a comprender el cambio radical en la personalidad de una alumna tras trabajar en una tarea de álgebra, consistente en identificar las órbitas de un sistema dinámico sencillo (duplicar un número entero módulo n). Tuvo grandes dificultades para comprender la tarea, a diferencia de los demás alumnos, que dieron respuestas correctas y estéticamente agradables, y el profesor se negó a ayudarla. La alumna fue llevada al límite antes de poder finalmente completar la tarea, lo que constituyó una experiencia crucial. (Zagorianakos).

- Se ofrece a los profesores en formación una larga secuencia para desarrollar el ETM de los números de base seis con el objetivo de comprender mejor la complejidad del sistema decimal e ir más allá del simple dominio de las técnicas. Partiendo de los números enteros, la extensión a los números racionales y reales se consigue mediante trabajos geométricos que implican cálculos y mediciones de longitudes y áreas. La aparición de la escritura de coma en base seis en relación con las subunidades del metro y la dificultad de realizar una línea graduada adecuada se desarrollan de forma más específica. (Peteers y Vivier).
- Se estudia los cursos de formación especializados en el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas con el fin de promover las matemáticas entre los alumnos de secundaria, ofreciéndoles sesiones adicionales con tareas de investigación, se observó que el enfoque documental de los formadores influía en su objetivo de crear una comunidad de investigación en el curso de formación. (Pocalana y Robutti).
- Se contribuye a la formación del profesorado novel universitario de matemáticas (matemáticos), un aspecto novedoso tratado en este simposio para la aplicación de la teoría ETM. Se describe apoyados en datos de un proyecto europeo PLATINUM el enfoque metodológico y se somete a discusión qué contribución podrían hacer herramientas didácticas inspiradas en la teoría ETM en el diseño y la implementación de tareas matemáticas bajo un enfoque de *Inquiry Based Mathematics Education* (Gómez-Chacón).
- Se ejemplifican nuevas articulaciones entre la dimensión cognitiva y afectiva en el espacio de trabajo matemático. Se reflexiona sobre la especificidad de las relaciones entre creencias y emociones epistémicas y conflictos cognitivos en el trabajo geométrico. Se aportan elementos que podrían enriquecer dimensiones en la constitución del ETM personal del futuro profesor (Costado y Gómez-Chacón).
- Se profundiza a nivel metodológico, se exploran relaciones entre el conocimiento especializado de una maestra y el trabajo matemático de sus estudiantes de educación infantil. Se utilizaron como referentes teóricos el modelo MTSK, para el análisis del conocimiento de la maestra, y el ETM, para el análisis del trabajo que desarrollan los estudiantes (García- Cuéllar, Martín-Díaz, Flores, Climent).
- Se analiza el tránsito entre dominios y sobre la comprensión de la práctica del profesor a la luz de la relación ETM-MTSK. Se ejemplifica con enseñanza del Teorema de Tales desde la complementariedad entre el ETM y el MTSK. Se analiza una propuesta de enseñanza donde se observan los cambios geométrico-numérico y geométrico-algebraico, lo que permite evidenciar el conocimiento movilizado del profesor (Espinoza-Vásquez, Henríquez-Rivas, Climent, Ponce y Verdugo-Hernández).

- Se muestran resultados que permiten ilustrar dificultades asociadas con el ETM *idóneo potencial y se* ofrecen posibilidades de mejora para los futuros profesores en la conformación de su ETM *idóneo actual* para el aula. Los datos proceden de un estudio de caso que caracteriza el trabajo matemático sobre una tarea diseñada por futuros profesores para estudiantes entre 13 y 14 años, centrada en la noción de función y que favorece la habilidad representar declarada en el currículo escolar de secundaria chileno (Verdugo-Hernández y Henriquez-Rivas).
- Centrados en el contenido matemático de ecuaciones, se caracteriza el trabajo matemático que promueve el futuro profesor en su ETM idóneo actual a la luz del conocimiento que moviliza para dicho diseño, especialmente a partir de definiciones, ejemplos y tareas desde el punto de vista de la complementariedad del ETM y el MTSK. Se aportan resultados que evidencian en el diseño del ETM idóneo aspectos semióticos de las ecuaciones y del conocimiento de las definiciones del tema (Espinoza-Vásquez, Verdugo-Hernández y Henríquez-Rivas).

AVANCES Y NUEVAS CUESTIONES

En el libro monográfico sobre la teoría ETM se reseñaron distintos temas de avance y cuestiones relativas a los componentes de los dos modelos teóricos, MTSK y ETM (ver capítulo 10 de Gómez-Chacón (2022) y capítulo 12 de Flores, Kuzniak, et. al (2022)), así como del ETM personal (Menares y Vivier, 2022). En esta línea en el Tema 3 los aspectos que retomados y sometidos a discusión para propiciar un avance son los siguientes:

- La constitución del ETM idóneo en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- La conceptualización de la teoría ETM aporta a este Tema 3 un análisis detallado tanto de los distintos tipos de trabajo matemático que el profesor pretendía realizar en el aula (ETM idóneos potencial), como de los que realmente tenían lugar (ETM idóneos actuales), de forma específica en la génesis discursiva.
- Caracterización de situaciones de formación inicial del profesorado (en Primaria o Secundaria).

La sesión conjunta de los dos nodos fue clave para esta prospectiva. A partir de las contribuciones en el Simposio ETM7 nos propusimos responder a preguntas como:

- ¿Cuál es la contribución mutua que puede hacerse entre la teoría ETM y otros Modelos?
- ¿Qué conceptos y fenómenos subraya la teoría ETM?
- ¿Qué tensiones surgen al querer poner en diálogo dos teorías o modelos? Ejemplos.

Tras el diálogo las cuestiones nuevas surgidas y avalas por las contribuciones se especifican seguidamente:

- Ejemplificaciones de articulaciones realizadas desde distintas teorías o modelos:
- Teoría de situaciones didácticas y espacio de trabajo matemático (ETM).
- La educación matemática basada en la indagación y el espacio de trabajo matemático (ETM).
- Fundamentos semióticos cognitivos de la teoría de Duval y el espacio de trabajo matemático (ETM).
- El conocimiento especializado de los profesores de matemáticas (MTSK) y el espacio de trabajo matemático (ETM).
- La teoría de Vygotsky y el espacio de trabajo matemático (ETM).
- La figura del formador, contribuciones y avances aportados por las comunicaciones que habían sido abordadas desde el enfoque de Educación matemática basada en la indagación/aprendizaje basado en la indagación, el estudio del formador.
- Puntos más asertivos con propuestas centrados en la articulación del nivel epistemológico y cognitivo y en le ETM personal (emociones epistémicas, formación de profesores).

REFERENCIAS

Flores Salazar, J.V., Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., Nechache, A., Richard, P.R., Vivier, L. (2022). Mathematical Work and Beyond. In: Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., Richard, P.R. (eds) *Mathematical Work in Educational Context*. Mathematics Education in the Digital Era, vol 18. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_12

Gómez-Chacón, I.M, Kuzniak. A, & Vivier, L. (2016). The Teacher's role from the perspective of Mathematical Working Spaces. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(54), 1-22. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a01

Gómez-Chacón I. M. (2022). Mathematics teachers' knowledge and professional development: a cross-case comparison study, In A. Kuzniak, E. Montoya and P. Richard (Ed). *Mathematical Work in Educational Context. The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*, 229-246. Switzerland: Springer.

Kuzniak, A. (2022). The theory of Mathematical Working Spaces-Theoretical Characteristics, En A. Kuzniak, E. Montoya and P. Richard (Ed). Mathematical Work in Educational Context. *The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*, 3-56. Switzerland: Springer.

Menares-Espinosa, R. y Vivier, L. (2022). Personal Mathematical Work and Personal MWS, In A. Kuzniak, E. Montoya & P. Richard (Ed). *Mathematical Work in Educational Context. The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*, 91-120. Switzerland: Springer.

ENSEIGNER L'ALGEBRE ELEMENTAIRE : DE QUEL POINT DE VUE ET QUELLES ACTIVITES ?

Jean-Claude Rauscher, Sophie Bauerle-Schoenenberger

IREM de Strasbourg

L'introduction de l'algèbre élémentaire au Collège soulève des difficultés qui ne sont pas d'abord mathématiques ou conceptuelles. Elles viennent du fonctionnement sémio-cognitif sous-jacent à l'écriture purement symbolique des équations. Ce renversement de perspective s'est imposé en suivant durant trois ans un élève en difficulté. Et il a conduit à élaborer des tâches spécifiques pour faire prendre conscience du fonctionnement sémio-cognitif en jeu. D'une part nous présentons ici des activités qui ont permis à cet élève de comprendre les opérations indispensables pour amorcer la mise en équation d'un problème. Il s'agit des opérations de condensation et de désignation fonctionnelle que permettent les lettres. D'autre part nous analysons les conditions qui ont permis de transposer cette expérience dans des classes entières de la 6ème à la 3ème. Notre approche ouvre la question de l'épistémologie des professeurs et de leur formation.

INTRODUCTION

Les équations du premier et du second degré et les méthodes de résolution d'équations constituent l'outil mathématique de « l'algèbre élémentaire » enseignée au Collège (Duperret et Fenice, 1999, p.29). L'objectif est que les élèves puissent s'en servir pour résoudre des problèmes de la vie réelle ou de domaines scientifiques. Or l'utilisation d'équations requiert la compréhension des différentes manières de transformer un problème en utilisant uniquement des chiffres, des lettres, des symboles d'opération et le symbole « = » qui permettent des calculs (Duval et Pluvinage, 2016, p.138). Comment faire entrer tous les élèves dans ces jeux de transformations et de calculs ?

Cette question s'est imposée dans l'accompagnement individuel d'un élève en difficulté, Jonathan, durant deux ans au collège puis un an au lycée (Rauscher, 2020). En référence à l'article de Duval & Pluvinage (2016) et en concertation avec les auteurs, les obstacles sémio-cognitifs auxquels se heurtait Jonathan ont pu être analysés et des activités spécifiquement cognitives lui être proposées. Ces activités étaient détachées des obligations scolaires immédiates. Elles étaient élaborées avec l'hypothèse suivante : un problème didactique majeur posé par l'introduction de l'algèbre est celui même qui se pose déjà dans l'emploi de la langue naturelle : *la prise de conscience par les élèves de la diversité complexe des procédures discursives pour désigner les objets* (Duval, 2002, p.68).

Comme beaucoup d'élèves en début de seconde, Jonathan était paralysé devant tout problème qui demandait le recours à l'algèbre. Ses réactions montraient sa compréhension limitée des opérations de désignation que permettent les lettres.

Nous centrerons ici notre propos sur l'exemple d'activités de tableaux à remplir. Elles mettaient en jeu un travail d'interaction entre la langue naturelle et des registres numériques et algébriques. Nous en analyserons les caractéristiques et verrons qu'elles ont permis à Jonathan de comprendre des opérations de désignation indispensables pour amorcer la mise en équation d'un problème. Jonathan a ainsi pu faire ses premiers pas en algèbre.

Les progrès importants constatés ont soulevé la question de la transposition de ces activités en classes. Et depuis 2018, nous avons pu commencer à étudier cette question avec un groupe d'enseignants de collège à l'IREM de Strasbourg. Nous verrons donc à quelles conditions, du côté de l'épistémologie des professeurs et de la gestion des interactions entre les élèves et le professeur, cette expérience menée avec un élève particulier a pu être transposée avec succès dans des classes entières de la 6ème à la 3ème.

LA PRISE DE CONSCIENCE PAR JONATHAN DES OPERATIONS DE DESIGNATION QUE PERMETTENT LES LETTRES

Une conception initiale paralysante

Pour présenter la compréhension de Jonathan du rôle des lettres, nous reprenons les passages significatifs de certains entretiens avec Jonathan (Rauscher, 2020, p. 472 et 473), à propos de l'énoncé suivant :

Une bouteille et son bouchon pèsent ensemble 110 grammes. La bouteille pèse 100 grammes de plus que le bouchon. Combien pèsent respectivement la bouteille et le bouchon ?

Cette proposition faisait suite à des échecs répétés de résolutions de problèmes où il lui était demandé en classe une résolution algébrique. « *Je ne me souvenais plus comment faire. Tu m'as expliqué mais en interro, je ne me rappelais plus rien*. » disait -il.

Ici, sa réaction spontanée fut de dire : « *La bouteille pèse 100g et le bouchon 10g* »

Une relecture phrase par phrase de l'énoncé lui a permis de comprendre que sa réponse était fausse et prendre conscience de la complexité de l'énoncé. Cela le laissait pantois. Devant sa paralysie et pour avancer, la proposition suivante lui fut faite :

T (tutoring) : « Et si on appelait x le poids de la bouteille ? »

Cette proposition ne l'étonna guère puisqu'il la rencontrait dans son cours. Il réagit :

Jonathan : « Non, x c'est le poids du bouchon, j'aime mieux… »

Sa proposition fut acceptée et accompagnée d'une question :

T : « D'accord appelons x le poids du bouchon ; quel est alors le poids de la bouteille en fonction de x ? »

Jonathan : « On ne peut pas savoir car on ne sait pas le poids du bouchon… ! »

La compréhension de Jonathan de ce que peut désigner une lettre se limitait donc à la fonction de désignation directe : *une lettre est associée à un nombre ou une grandeur*. Mais il était dans l'impossibilité de saisir l'opération de désignation fonctionnelle nécessaire pour avancer. En l'occurrence, on voit que Jonathan acceptait bien de désigner le poids d'un des deux objets évoqués dans l'énoncé par une lettre. En revanche, il n'envisageait pas du tout, même après incitation, d'utiliser cette première lettre pour exprimer le poids du deuxième objet à l'aide de la même lettre. C'était là pour lui une opération inimaginable. D'autre part, si la lettre choisie désignait bien le poids de la bouteille, il considérait que cette valeur était fixée. Il ne pouvait alors pas avoir la souplesse de penser qu'il fallait transitoirement considérer cette lettre comme libre de toute affectation prédéterminée. Or considérer que cette lettre désignant une donnée représente ou condense a priori un ensemble de nombres possibles est nécessaire pour pouvoir exprimer sa relation avec une autre donnée, indépendamment de toutes affectations numériques préalables.

La prise de conscience des opérations de condensation et de désignation fonctionnelle à l'aide d'une lettre

L'analyse des réactions initiales de Jonathan nous a conduit à considérer qu'avant d'envisager de traduire les phrases d'un énoncé en expressions algébriques, il est nécessaire d'avoir pris conscience des opérations de condensation et de désignation fonctionnelle à l'aide d'une lettre à l'intérieur du registre des écritures algébriques. C'est une condition indispensable pour comprendre ensuite la possibilité d'utiliser une lettre pour désigner fonctionnellement une donnée du problème par rapport à une autre.

Quelle activité spécifiquement cognitive élaborer alors qui puisse véritablement aider à prendre conscience de ces opérations ? La proposition qui a été faite à Jonathan se présentait sous forme de tableaux à compléter :

Tableau A

Deux nombres entiers successifs	
1	*2*
2	*3*
3	*4*
4	…
5	…
…	…
107	…
Une lettre ?	*Et alors quoi écrire ici ?*

Tableau B

Nombre choisi	*Double du nombre choisi*	……………………….
1	2	4
3	6	36
2	4	16
4	……	64
5	……	…..
……	……	……
……	……	……
……	16	…..
……	……	324
x	$2\,x$	…….

Table 1. Tableaux A et B proposés à Jonathan.

Le tableau A met en parallèle deux listes de nombres entiers entre lesquelles existe une relation. C'est le travail sur ce tableau qui a permis à Jonathan de prendre conscience des opérations de désignation possibles à l'aide d'une lettre.

Le tableau comporte 3 parties :

- la partie « numérique » où sont amorcées deux listes de nombres
- la partie « algébrique » appelant à l'utilisation d'une lettre
- la partie désignant le lien entre les deux listes par une expression langagière

La consigne donnée est de compléter le tableau, sachant qu'il y a une relation entre les deux listes de nombres.

Il est attendu de l'élève qu'il commence par une exploration en parallèle des deux listes de nombres pour trouver la relation qui existe entre les deux, puis qu'il les prolonge avec une perspective de remplissage infinie. Pour éviter d'en rester à cette perspective sans fin, il lui est ensuite proposé de recourir à une lettre pour désigner la première ligne et de désigner la deuxième liste avec la même lettre. En tête de tableau, il y a aussi la possibilité de désigner la relation entre les listes par un syntagme nominal. Dans le premier exemple (tableau A) ce syntagme (« *Deux nombres entiers consécutifs* ») était indiqué. Ce ne fut pas le cas par la suite (comme par exemple dans le tableau B), où la désignation par un syntagme nominal est parfois à la charge de l'élève.

Le tableau B croise des parties numériques, des expressions algébriques et des syntagmes nominaux. Il met en jeu les opérations du tableau A à partir de n'importe quel registre d'entrée. C'est dans le travail sur ce type de tableaux que Jonathan confirma très vite sa maîtrise des opérations de condensation et de désignation fonctionnelle.

Premières réactions de Jonathan face au tableau A

Jonathan, un sourire : « Tu veux m'apprendre à compter ? »

Après un rappel de ce que signifie « *nombres entiers successifs* », il remplit la partie numérique en regardant alternativement verticalement les deux listes indépendamment l'une de l'autre et horizontalement les correspondances entre les deux listes.

Pour remplir la partie littérale du tableau il proposa spontanément deux lettres différentes : pour « *Une lettre ?* » il proposa « *x* » et pour « *Alors quoi écrire ici ?* » il dit, en souriant, « *y* »

Jonathan prend conscience de ce qu'on peut faire avec une lettre….

Il lui fut alors proposé d'utiliser pour la deuxième colonne la même lettre que pour la première. Cette fois-ci, un peu étonné et après un moment de réflexion, il écrivit « 1x ». Pourquoi ?

Jonathan : « 1x veut dire qu'on a ajouté 1 à x »

T : « En algèbre 1x veut dire 1 multiplié par x »

Jonathan : « Je me comprends »

Il accepta d'écrire « *x+1* » pour se plier à l'usage.

Jonathan avait donc fabriqué un code personnel. Il n'avait pas intégré le code commun en usage. Mais, malgré cette difficulté d'expression, Jonathan avait bien réussi *à effectuer une désignation de la deuxième colonne* avec la lettre utilisée pour désigner la première.

Ainsi cette première activité mettait Jonathan sur la voie de la prise de conscience de l'opération de condensation et de l'opération de désignation fonctionnelle avec une lettre. Ce sont là des opérations qu'il reproduira sans hésitation et sans nécessité d'explications dans toutes les autres situations du même type (double, carré, etc.).

Les premiers pas de Jonathan en algèbre.

Sur des tableaux de type du tableau B (table 1), Jonathan confirma sa prise de conscience. Il se lançait avec une certaine jubilation dans l'aventure : à partir des cases remplies au départ, il essayait des contenus pour des cases vides, les contrôlait par des confrontations de lignes et de colonnes, revenait en arrière, etc. Et cela surtout *sans demande, ni besoin d'explications* (explications qui, auparavant, étaient toujours sollicitées de façon récurrente par Jonathan : « *Explique-moi, je ne me souviens plus...* »). C'était là un changement d'attitude correspondant à un véritable premier pas dans des activités algébriques. Pour la première fois Jonathan ne restait pas paralysé devant des expressions du monde algébrique. Ceci grâce à ce type d'activités radicalement autres que celles qu'il avait rencontré jusque-là dans sa scolarité. En l'occurrence, elles prennent en compte l'aspect caché des activités mathématiques, à savoir les opérations sémio-cognitives sous-jacentes de désignations possibles à l'aide de lettres dans le registre des écritures algébriques symboliques.

DISTINCTION ENTRE ACTIVITES COGNITIVES ET ACTIVITES MATHEMATIQUES POUR INTRODUIRE L'USAGE DE LETTRES

Nous avons vu dans le cas de Jonathan que la compréhension de l'usage de lettres en algèbre ne pouvait pas dépasser la fonction de désignation directe où une lettre est associée à un nombre. Cela peut suffire lorsqu'il s'agit de procéder à l'instanciation de lettres par des nombres lorsqu'on applique une formule. Le travail sur les tableaux lui a permis de prendre conscience de l'opération de condensation d'une liste ouverte de nombres et de l'opération de désignation fonctionnelle d'une liste corrélée à la première avec une seule lettre. Quand nous la présentons à des enseignants ou à des chercheurs, cette activité est assimilée dans un premier temps aux activités de généralisation qu'impliquent des problèmes de pattern, des activités de programmes de calcul, activités s'appuyant ou pas sur l'utilisation de tableurs. Or ces activités de généralisation sont différentes des activités qui visent ici exclusivement la prise de conscience des deux opérations sémio-cognitives de condensation d'une liste illimitée de nombres et de désignation fonctionnelle d'une autre liste de nombres.

Les activités de généralisation portent en premier lieu sur l'exploration d'une relation ou d'une régularité à trouver, en général adossée à une situation réelle. Puis à généraliser cette situation par une formule littérale dans *laquelle la lettre peut prendre par la suite, une à une, différentes valeurs numériques* pour permettre par exemple de trouver la valeur d'une suite à un rang quelconque, 3, 10, 152 ou n.

C'est pour cela qu'il leur est prêté un pouvoir d'initiation à l'algèbre. L'idée, incontestable, est qu'ils illustrent l'utilité des formules littérales pour prévoir des résultats lorsqu'on passe déjà du rang 3 à quelques rangs plus loin.

Dans **les activités de condensation et de désignation fonctionnelle** proposées à Jonathan, la recherche de l'élève porte sur la façon de désigner un ensemble de nombres par une lettre et avec la même lettre, sur un exemple très simple, deux listes corrélées. Cela est réalisé hors de toute activité de résolution de problème. Dans l'articulation des ces deux opérations, une lettre remplace un ensemble de nombres et cette lettre permet de désigner l'ensemble de nombres corrélé avec le premier ensemble. « $x+x$ », « $2x$ », « $2x+1$ » ou « x^2 » sont ainsi des désignations fonctionnelles où la lettre peut condenser divers ensembles de nombres. Par exemple, dans le contexte des entiers naturels « $2x$ » désigne l'ensemble des nombres pairs. Le contexte des nombres relatifs peut, lui, ouvrir sur de véritables questions algébriques. Par exemple permettre à un élève de concevoir que si « x » représente l'ensemble des nombres entiers relatifs, l'équation « $x^2=4$ » peut avoir plus d'une solution. Ceci est moins concevable spontanément par un élève qui considère « x^2 » comme une expression dans laquelle on remplace « x » par une valeur numérique et qu'il voit que l'égalité est vérifiée pour « $x=2$ ».

En tout cas, par ces activités, Jonathan a pu commencer à dépasser sa paralysie devant des expressions du monde algébrique en jonglant de façon autonome entre registres de la langue naturelle, registre des nombres, et expressions algébriques symboliques.

LA PRISE DE CONSCIENCE DES OPERATIONS DE DESIGNATION DANS LE CADRE DES CLASSES. LE RÔLE DU PROFESSEUR

Les progrès importants de Jonathan se sont faits dans le cadre d'un accompagnement individuel en tête à tête. Mais quelles interactions entre élèves et le professeur permettent les mêmes prises de conscience individuelles dans des classes de 24 à 30 élèves ? Comment le professeur peut-il organiser et gérer ces interactions et avec quelle organisation de la classe ?

Dans le cadre du groupe IREM composé de professeurs de collège, les expériences ont été menées de la 6ème à la 3ème, dans plusieurs établissements, dont l'un faisait partie d'un dispositif REP[17]. Dans ce dernier, notre étude a porté sur une classe de 5ème et une de 4ème. La base commune de départ pour les enseignants de ce groupe était la connaissance de l'expérience menée avec Jonathan et le désir de voir comment on peut la transposer dans les classes. La première observation, surprenante peut-être, est que les réactions des élèves qui ont ponctué les déroulements des séances dans les différentes classes étaient similaires indépendamment de la catégorie de collège et même indépendamment du niveau de classe (et en particulier du travail déjà effectué ou pas en algèbre). C'est ce

[17]Réseaux d'éducation prioritaire renforcée pour les établissements qui connaissent les plus grandes concentrations de difficultés sociales ayant des incidences fortes sur la réussite scolaire.

constat qui nous permet de rendre compte du déroulement réussi des séances menées par les différents professeurs[18] dans différentes classes.

Les tâches proposées aux élèves.

Tableau 1

1	4
2	5
3	6
4	....
.....	.....
6	9
......	.....
......	.....

....	......
....	......
50	53
51	....
....	....

....	....
....	......
107	110
108	....
......	......

Une lettre ?	*Et alors quoi écrire ici en utilisant la même lettre ?*

Tableau C

Tableau 4

Nombre choisi	....
0	0
1	2
2	4
3	6
4	.....
......	.....
......	.....

....	.....
50	100
51	.....

....	......
107	214
108	....

Une lettre ?	*Et alors quoi écrire ici en utilisant la même lettre ?*

Tableau 5

Nombre choisi	....
0	0
1	1
2	4
3	9
4	.....
......	.....
......	.....

....	......
50	2500
....	......

106	......
107	11449
....	....

Une lettre ?	*Et alors quoi écrire ici en utilisant la même lettre ?*

Tableaux D

Table 2. Tableaux C et D. Proposés dans les classes de collège

Le tableau C présenté en classes est l'équivalent du tableau A (table1) proposé à Jonathan. Il est celui qui permet la prise de conscience des opérations de condensations et de désignations fonctionnelles. A remarquer, à la suite des observations faites avec Jonathan, un changement minime mais néanmoins important : dans la deuxième case de la partie littérale nous avons écrit d'emblée « Et alors quoi écrire ici avec la même lettre ? ». Ce tableau faisait en général l'objet d'un travail sur une séance.

Les tableaux D sont des exemples de tableaux proposés aux élèves lorsqu'ils ont pris conscience des opérations de désignation en jeu dans le premier tableau C. Ils ouvrent sur des activités où, pour la partie numérique, des tâches exploratoires et des raisonnements de type inductif seront sollicités. Des tableaux mis en parallèle permettent alors de différencier ou d'apparier différentes désignations fonctionnelles : différence entre « le double et le carré d'un nombre », ou équivalence entre des expressions que les élèves produisent spontanément comme « a+a », « a×2 » et « 2a ».

Premières réactions des élèves lors du premier tableau rencontré et conduite des échanges avec les élèves pour permettre des prises de conscience individuelles.

Devant le tableau C (Table 2), les élèves commencent par compléter la partie

[18] Sophie Bauerle-Schoenenberger, Julie Benoit, Audrey Candeloro, Hélène Chilles Brix, Sandrine Bass, Mikhaela Amzallag, Claire Padoin, Anne Schultz, Pauline Wiederhold

numérique. Tout comme Jonathan, ils alternent l'exploration entre logiques horizontales et verticales. Le moment le plus important de la séance pour chaque élève est celui où l'élève doit remplir la partie littérale du tableau. Arrivé à ce moment, la plupart des élèves s'arrêtent. Ils appellent le professeur pour demander de l'aide : « Que faut-il faire ? » ou parfois « C'est juste ce que j'ai fait ? ». Les réactions sont similaires de la 6ème à la 3ème.

Devant ces demandes d'explications immédiates, il faut résister. Si par exemple l'enseignant réagit en disant « Si on désigne par « x » la colonne de gauche, qu'écrirait-on alors avec x pour désigner la colonne de droite ? », il empêchera la possibilité de la prise de conscience visée chez l'élève. Alors qu'en laissant la question ouverte on laisse ouverte cette possibilité. L'objectif ici n'est pas de faciliter la tâche des élèves pour obtenir un tableau rempli correctement le plus rapidement possible mais de leur laisser l'initiative pour choisir une lettre pour désigner la première colonne et l'utiliser pour désigner la 2ème colonne. Nos expériences montrent, qu'à ce moment-là, pour relancer leur travail de réflexion individuel, il suffit de leur rappeler la consigne, à savoir qu'il s'agit de remplir cette partie du tableau de façon à ce que la logique du rapport entre les listes de nombres soit respectée ou encore de dire : « S'il y avait, non pas des nombres, mais une lettre au lieu d'un nombre, qu'écrirait-on en face ? ». L'important est de laisser l'initiative de la désignation par une lettre à l'élève. Exceptionnellement il faut parfois une deuxième séance pour certains élèves. Ainsi, une élève dans un collège REP est revenue au début d'une deuxième séance consacrée à ce tableau en disant au professeur : « J'espère qu'on aura les réponses ! J'y ai pensé toute la semaine ».

De nombreux élèves écrivent d'abord l'opérateur « +3 » dans la case qui fait face à la lettre. Mais, de façon plus surprenante à première vue, nous avons souvent rencontré, à tous niveaux de collège, les propositions qui consistent à choisir une lettre pour la première case et la lettre située trois rangs plus loin dans l'ordre alphabétique. Un élève de 4ème en REP qui avait choisi « z » parce que c'était l'initiale de son nom, était bien embêté. Ce sont des propositions vraisemblablement induites par le fait que la première liste est celle des nombres entiers et par une focalisation sur le mot « lettre » qui réfère pour les élèves à l'ordre des lettres dans l'alphabet. C'est une fausse piste bien sûr mais qui, par une relance habile de la part des enseignants, permet alors d'enclencher la prise de conscience des élèves sur ce que peuvent désigner des lettres en mathématiques, de passer de l'univers des lettres qu'on utilise pour écrire en langue naturelle à l'univers des lettres utilisées spécifiquement en algèbre. À ce moment-là, le rappel de la consigne avec un accent sur le fait qu'il faut utiliser la même lettre dans les deux cases, suffit pour relancer la réflexion des élèves. Regards perplexes pour certains, regards pétillants pour d'autres, la compréhension des opérations de désignation en jeu ne se fait pas en même temps pour tous. Parfois ce sont des explications entre élèves qui permettent la prise de conscience visée. D'autres fois un échange de l'élève avec l'enseignant est en fin de compte nécessaire. Par exemple en lui demandant comment il a rempli la partie numérique pour passer d'une colonne à l'autre : « Ben, j'ai pris le premier nombre et je lui ai ajouté 3 » « Et si le premier nombre est désigné par la lettre que tu as choisie qu'écris-tu ? » Certains élèvent disent et écrivent alors d'emblée : « a + 3 » et ajoutent alors, l'air surpris mais convaincu, « Ah oui, c'est ça ! » et d'autres avec une expression interrogative « Ah oui, c'est ça ? », l'air de dire « Ce n'est que ça ? ». Pour certains élèves il s'agit alors d'une reconnaissance qui témoigne d'une véritable prise de conscience. Un élève de 4ème s'est écrié : « Ah oui, maintenant je comprends à quoi servent les lettres ! ». D'autres passent par une étape intermédiaire et écrivent « J'ajoute 3 à a » puis arrivent à « a + 3 ».

La prise de conscience des opérations de condensation et de désignation fonctionnelle dans le registre des écritures symboliques est réalisée par l'ensemble des élèves. Dans certains cas elle se fait rapidement, dans d'autres plus lentement. Comme nous avons pu le constater, cette prise de conscience se révèle principalement par les déclarations de surprises et de constats ou de reconnaissances émises par les élèves au moment où elle se fait. Et comme avec Jonathan, elle est irréversible : la possibilité de recourir à une lettre unique pour désigner deux listes de nombres ouvertes et leur relation est immédiatement et sans besoin d'explication mise en œuvre dans les séances suivantes (tableaux « D » table 2) dès lors que la relation entre les deux listes est trouvée.

UN CHANGEMENT DE POINT DE VUE SUR L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGEBRE ELEMENTAIRE

Le travail proposé aux élèves présenté ici ne vise pas immédiatement des connaissances mathématiques comme les opérations sur les nombres, la notion de proportionnalité, les fonctions linéaires ou affines, etc. Il s'inscrit dans un véritable travail d'alphabétisation mathématique qui concerne la face généralement cachée ou implicite des activités mathématiques, celle des opérations sémio-cognitives, c'est-à-dire des gestes intellectuels propres à toute activité mathématique. L'appropriation de ces opérations sémio-cognitives est la condition pour que tout langage ne reste pas muet, que toute écriture de formules ou d'équations ne reste pas statique ou inerte comme c'était le cas au départ pour Jonathan.

On voit là l'opposition et les interactions entre une face apparente et une face cachée des activités mathématiques, face cachée pour laquelle il faut envisager des activités sémio-cognitives spécifiques. Elles ne sont pas nécessairement liées à une progression de contenus indiquée par les programmes : notre expérience montre qu'il est aussi judicieux et nécessaire de proposer le travail sur les opérations de désignation à l'aide d'une lettre en début ou en fin de collège quand les élèves « ont déjà fait de l'algèbre » ou ont été confrontés à des programmes de calcul ou des exercices sur tableur. Une autre caractéristique de ces activités est qu'elles visent toujours des prises de conscience individuelles sur le mode de celle que nous avons présentée dans la partie précédente de notre communication.

De manière générale, dans l'utilisation de l'outil algébrique pour résoudre des problèmes, deux types d'opérations sémio-cognitives exigent des activités permettant des prises de conscience distinctes (Duval R., Pluvinage F., 2016, pp.145-146). D’un côté il y a celles concernant **la mise en équation** des données d’un problème (pratique, physique ou mathématique). Pour avoir un aperçu des opérations sémio-cognitives en jeu dans la mise en équation d’un problème on peut se reporter à (Rauscher, 2020, p474-478). De l’autre, celles concernant les traitements liés à **la résolution des équations** obtenues. Dans les premières, les lettres sont liées à des désignations des objets évoqués dans l’énoncé. Dans les deuxièmes, elles sont sans référence à la situation et seules leurs occurrences sont à prendre en compte.

L’utilisation de lettres comme moyen de désignation dans le registre des écritures symbolique à partir de tableaux de paires de listes ouvertes de nombres, bien que d’apparence formelle, appartient au premier type. En effet, dans la suite des travaux du groupe IREM elle a servi de référence aux élèves pour engager des activités cognitives qui mettaient en jeu le rapport entre expressions algébriques symboliques complètes ou incomplètes et expressions complètes ou incomplètes de la langue naturelle. Comme par exemple l’élaboration d’énoncés de problèmes utilisant des syntagmes comme « …de plus que… » ou « … fois plus que… ». Cet aspect fera l’objet d’une autre communication ou d’un article à venir.

Dans les activités liées à l’initiation aux calculs formels permettant de résoudre les équations obtenues, les traitements en jeu sont des substitutions :

- substitution d’un membre d’une équation (expression dite incomplète dans le sens où elle n’a pas de valeur de vérité) par une autre (salva denonatione). Par exemple 3(x+2) par 3x+6 ou x^2–4 par (x–2)(x+4).
- substitution d’une équation, expression complète (dans le sens où la question des conditions de sa vérité s’y pose), par une autre. Par exemple 4x+2 = x+11 à remplacer finalement, (salva veritate) par 3x =9.

La difficulté pour les élèves est que dans les deux cas on utilise le symbole « = ». « Ils sont fous en math. Ils ne savent pas ce qu’ils veulent… » constatait Jonathan (Rauscher, 2020, p.468). Cette distinction entre types de substitutions est cruciale parce que résoudre une équation conduit à jouer tour à tour sur la transformation d’une expression incomplète en une autre expression incomplète et sur celle de l’expression complète en une autre expression complète de même domaine de vérité.

EN CONCLUSION : LA QUESTION DE L'EPISTEMOLOGIE DES PROFESSEURS ET LA QUESTION DE LA FORMATION

La possibilité de mettre en place les conditions qui permettent de provoquer les prises de conscience individuelles des opérations sémio-cognitives nécessite que les professeurs soient attentifs au rapport entre le point de vue mathématique et le point de vue sémio cognitif sur les activités mathématiques. Or cette question n'est en général jamais réellement envisagée, tant elle paraît ne pas poser de problème ou est ignorée parce que transparente.

Dans notre groupe IREM, composé de professeurs de collège, il a fallu un certain temps de tâtonnement et de remises en question pour comprendre que les activités à élaborer étaient spécifiques et se distinguaient des activités mathématiques habituelles. Cette difficulté nous est apparue aussi lorsque nous avons eu l'occasion de présenter notre travail à d'autres collègues, experts en didactique ou pas.

Ainsi, le travail qui se centre sur la prise de conscience des opérations de désignation à l'aide d'une lettre à partir d'un travail sur un tableau à remplir est souvent confondu avec des travaux concernant certaines notions mathématiques (fonctions, proportionnalité etc.), ou encore avec des activités d'exploration et de généralisation.

Il est donc nécessaire pour les professeurs d'avoir compris que nous ne sommes ni dans la perspective de travaux portant directement sur des contenus mathématiques indiqués par une progression décrite dans les programmes, ni sur des considérations cognitives détachées des disciplines. Tout au contraire, il s'agit de la considération de la spécificité de la discipline mathématique où la relation de référence entre les signes et les objets n'est pas directe mais passe par des actes d'expressions qui mobilisent et articulent des registres de représentation sémiotique comme ceux de la langue naturelle ou de langues dites « formelles » (Duval, 2017).

Il nous apparait que prendre explicitement en considération dans l'enseignement ces actes d'expressions constitue une révolution du regard qu'il n'est pas facile de partager d'emblée avec les professeurs. Cette difficulté ouvre donc sur la question complexe des formations à envisager. Sur quoi les appuyer en premier pour réussir une prise de conscience rapide chez les professeurs ? Notre réflexion dans ce domaine reste à développer mais il nous semble primordial d'arriver à sensibiliser très rapidement les professeurs à l'analyse des difficultés sémio-cognitives en jeu dans les activités mathématiques utilisant l'algèbre. Pour cela nous pensons leur demander d'observer les réactions de leurs élèves devant des activités mathématiques choisies parce que nécessitant certaines opérations sémio-cognitives. Cela constitue une porte d'entrée plus efficace qu'un exposé ou une référence immédiate à des écrits théoriques.

REFERENCES

Duperret, J.-C., Fenice, J.-C. (1999). L'accès au littéral et à l'algébrique : un enjeu au collège. *Repères-Irem, 34*, 29-54.

Duval, R., (2002). L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets. Drouhard JPh., Maure M. (eds.) *Actes du SFIDA ; IV n°13*-16, IREM de Nice, 67-94.

Duval, R., Pluvinage, F. (2016). Apprentissages algébriques. I. Points de vue sur l'algèbre élémentaire et son enseignement. *Annales de Didactique et de sciences cognitives, 21*, 117-152.

Duval R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking –The Registers of Semiotic Representations*. Springer Nature.

Rauscher, J.-C. (2020). Le cas Jonathan. Le complexe de l'algèbre. Dans Mériclès T. Moretti & Celia Finck Brandt (Orgs.) *Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval* (p.456- 485). (Revemat/UFSC, 2020-07-22). Educação Matemática - Repositório Institucional da UFSC

ANALYSE D'UNE TÂCHE DE DESCRIPTION ET DE REPRODUCTION DE FIGURES GÉOMÉTRIQUES D'UNE CLASSE DE 3^E ANNÉE PRIMAIRE AU QUÉBEC

Sandrine Michot

Université du Québec à Montréal, Canada; michot.sandrine@courrier.uqam.ca

Cette étude a cherché à approfondir la question du rôle de la description de figures dans des tâches de reproductions de figures. Une analyse qualitative des productions d'élèves d'une classe de 3e année primaire a été réalisée selon le cadre des ETM$_G$ en se focalisant sur le plan [SEM-INS] et il semble qu'une institutionnalisation entre les différentes séances fasse évoluer rapidement les élèves.

LA PROBLÉMATIQUE ET LE CADRE THÉORIQUE

La combinaison de la description et de la reproduction de figures semble avoir une incidence sur l'analyse des figures géométriques réalisée par les élèves et sur le développement de leurs connaissances des propriétés des figures (Barrier et al., 2014 ; Keskessa et al., 2007 ; Offre et al., 2006). La description de figures géométriques et leur production (reproduction, construction) sont très liées (Michot, 2018 ; Pierrard, 2004). De fait, Pierrard (2004) rapporte que pour rédiger un programme de construction (description injonctive d'une figure), l'élève doit être en mesure de se faire une image mentale des étapes à réaliser pour construire la figure. Par ailleurs, Mathé (2012) a montré que les interactions langagières et, plus particulièrement, la verbalisation seraient essentielles pour l'analyse d'objets géométriques, analyse qui est fondamentale dans des tâches de construction et de reproduction de figures.

À cette fin, nous avons voulu étudier davantage le rôle que peut jouer la description dans les tâches de reproduction et de construction de figures géométriques : la description préalable est-elle une aide à la reproduction ? En termes des espaces de travail mathématique (ETM$_G$), en se focalisant sur le plan [SEM-INS] la description permet-elle à l'élève de se donner une meilleure visualisation de la figure (activation de la genèse sémiotique) et, par le fait même, de réussir la construction (activation plus efficace de la genèse instrumentale) ?

Pour répondre à cette interrogation, nous avons repris les hypothèses proposées par Michot (2018), présentée au symposium d'ETM6 (Michot, 2019), où elle a étudié dans quelles mesures la description avait une incidence sur la réussite dans la reproduction de figures complexes[19]. Les résultats de l'expérimentation semblent indiquer que si la description de la figure est demandée à l'élève avant qu'il ne la reproduise, d'une part, la description de la figure est plus précise et, d'autre part, la reproduction est plus fidèle au modèle, alors qu'il n'y a pas eu

[19] Une figure complexe est une figure composée de plusieurs figures élémentaires telles que le carré, le rectangle, le triangle, etc. Dans le cas de cette recherche, les figures complexes sont composées de deux figures élémentaires.

d'institutionnalisation entre les séances (Brousseau, 2010). Il a aussi été constaté que, sans initiation, les élèves ont eu de la difficulté à comprendre le texte d'un programme de construction.

Pour la création des figures complexes, nous nous sommes appuyés sur la déconstruction dimensionnelle de Duval et Godin (2005). En effet, l'analyse des figures est une tâche difficile pour les élèves, du fait qu'ils ont tendance à les percevoir et à les interpréter comme des formes en deux dimensions (2D) et ont de la difficulté à se détacher de leurs perceptions en termes de surfaces. Duval et Godin (2005) proposent d'amener les élèves à changer de regard sur les figures par le biais d'activités où ils seront contraints de passer de 2D à 1D (ou à 0D). Ce changement de regard sur les figures peut être provoqué en jouant sur les conditions de travail, le choix de la figure ou celui des instruments (Duval et Godin, 2005 ; Offre, Perrin-Glorian et Verbaere, 2006).

Pour étudier les relations entre la description de la figure et de sa reproduction, nous nous sommes appuyés sur le cadre théorique des ETM_G où le plan sémiotique-instrumental [SEM-INS] permet de décrire les liens entre l'objet géométrique (*representamen*), les instruments *(artefact)*, la visualisation que l'élève a de cet objet géométrique et la construction qu'il fait (Kuzniak et al., 2016).

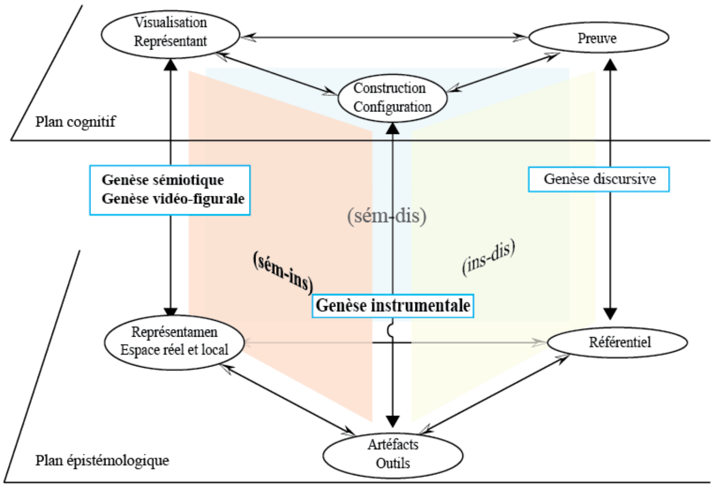


Figure 1: le schéma des ETM_G revisité pour cette étude

En termes d'ETM_G, les genèses sémiotique et instrumentale sont activées successivement puisque la description préalable semble favoriser la reproduction de la figure. Compte tenu des conditions d'expérimentation, la description rédigée par les élèves a été considérée comme la manifestation accessible de l'activation de la genèse sémiotique. Le cadre des ETM_G peut alors être une aide à l'enseignant qui veut analyser le travail mathématique de ces élèves.

À la lumière de ces résultats, nous avons voulu infirmer ou confirmer le fait que la description préalable peut être une aide à la reproduction. Pour ce faire, nous nous sommes adressés à une classe de 3e année primaire où nous avons observé comment l'institutionnalisation (Brousseau, 2010) et/ou l'intervention de l'enseignant entre les différentes tâches pouvaient avoir une influence sur le travail mathématique des élèves. L'institutionnalisation a eu lieu à la fin de chaque séance. Nous nous sommes donc interrogés sur les points suivants : Quelles sont les conséquences du choix didactique d'une institutionnalisation gérée par l'enseignant ? Permet-elle de mettre en évidence l'activation des genèses sémiotique et instrumentale dans le travail des élèves ?

Une institutionnalisation portant sur la description et la reproduction de figures après chaque séance permet-elle aux élèves de : Préciser le vocabulaire géométrique nécessaire, la façon de décrire les relations spatiales entre les différentes figures ou les éléments de la figure complexe : la visualisation est-elle plus précise ? Envisager plusieurs descriptions liées à différentes déconstructions dimensionnelles (Duval et Godin, 2005) ? D'utiliser le papier quadrillé comme un instrument de géométrie et de mieux comprendre leurs erreurs ou leurs réussites dans leurs reproductions : la genèse instrumentale est-elle mieux activée ? S'approprier la compréhension de programmes de construction (texte injonctif), où l'on utilise à la fois le vocabulaire géométrique pour parler des figures et le vocabulaire courant pour décrire les relations spatiales entre les objets géométriques : une genèse sémiotique activée, donc plus efficace, permet-elle une meilleure visualisation de la figure à construire ? D'activer ou non les genèses instrumentale ou sémiotique dans le plan [SEM-INS] des ETM_G ?

MÉTHODOLOGIE

Les trois séances et les six figures (scénarios 2 et 3 de l'expérimentation)

Il a été proposé aux élèves d'une classe de 3^e année du primaire (8-9 ans) du Québec d'un milieu socioéconomique très hétérogène et majoritairement allophone de reproduire quatre figures complexes (composées de deux figures élémentaires) après en avoir fait une description (2 séances) puis de construire deux figures complexes d'après un programme de construction qui leur a été donné.

Ces figures complexes respectent les critères de Duval et Godin (2005) en termes de juxtaposition ou de superposition de figures élémentaires. En effet, les **Figure 7** et **Figure 11** sont des assemblages de deux figures par juxtaposition. Les **Figure 6**, **Figure 8**, **Figure 9** et **Figure 10** sont des assemblages de figures qui peuvent être perçues par superposition. Mais les **Figure 6** et **Figure 10** sont composés d'une figure qui coupe l'autre alors que dans le cas des **Figure 8** et **Figure 9**, une figure se trouve à l'intérieur de l'autre. La position des figures élémentaires dans la figure complexe est une première variable didactique.

À chaque séance, l'élève a ainsi réalisé deux tâches de reproduction de figures : la première sur papier quadrillé au centimètre (figures E, A et C), la seconde sur papier blanc[20] (figures F, B et D). Le choix du support papier est également une variable didactique. Le papier quadrillé est un instrument en soi qui prend en charge les mesures de longueur et les angles droits. Pour travailler sur du papier blanc, l'élève

[20] Les mesures de longueur n'étaient pas indiquées sur les figures modèles remises aux élèves. Ils avaient la responsabilité de les repérer à l'aide de leurs instruments de géométrie.

doit utiliser ses instruments de géométrie pour réaliser la tâche.

Les six figures ont été soumises deux par deux comme il est illustré dans le Tableau **1**.

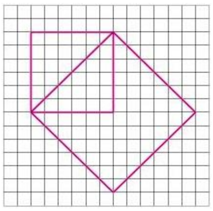
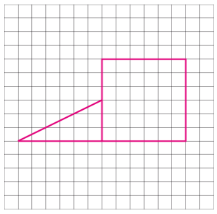
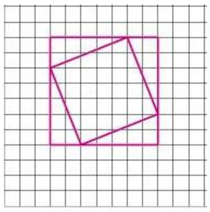
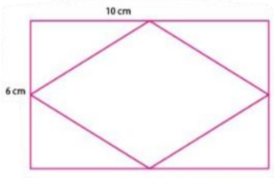
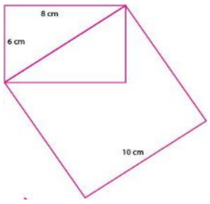
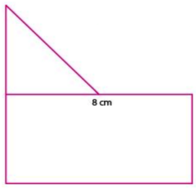
Séance 1	**Séance 2**	**Séance 3**
 **Figure 6 : figure E**	 **Figure 7 : figure A**	 **Figure 8 : figure C**
 **Figure 9 : figure F**	 **Figure 10 : figure B**	 **Figure 11 : figure D**

Tableau 1 : Les figures utilisées

Ainsi, quatre variables didactiques ont été identifiées: l'utilisation de deux figures élémentaires par figure complexe, la disposition des figures élémentaires dans les figures complexes, le choix des instruments et du support papier et la non-mention des mesures de longueur sur les figures modèles.

Séance 1	Séance 2	Séance 3
Figures modèles E et F ; Description écrite ; Reproduction ; Contrôle de la construction par superposition au calque ; Institutionnalisation de la description et des étapes de construction.	Figures modèles A et B ; Description écrite ; Reproduction ; Contrôle de la construction par superposition au calque ; Institutionnalisation de la description et des étapes de construction. L'institutionnalisation vise aussi à initier les élèves au programme de construction (texte injonctif).	Programmes de construction des figures C et D ; Construction ; Contrôle des constructions par superposition au calque de la figure modèle et interventions individualisées par l'enseignant.

Tableau 2 : Le déroulement des trois séances

Aux séances 1 et 2, une figure modèle dessinée à l'échelle 1 a été remise aux élèves. Ces derniers ont rédigé une description, individuellement, pendant une quinzaine de minutes. Puis ils l'ont reproduite sur une feuille quadrillée ou blanche selon la tâche, alors qu’ils avaient toujours la figure modèle sous les yeux. Les élèves avaient accès à leurs instruments de géométrie (règle graduée et équerre), si nécessaire. Après chaque séance, les élèves ont vérifié leur construction en la superposant à un calque de la figure modèle.

À la fin des séances 1 et 2, une institutionnalisation a été effectuée en s’appuyant sur les productions des élèves. Cette institutionnalisation, guidée par l’enseignante, a été prise en charge par les élèves qui ont verbalisé leurs observations. L’enseignante a choisi des descriptions proposées par les élèves et les a projetées au tableau interactif. L’objectif était d’amener les élèves à établir des critères pour une description « complète[21] » d’une figure. Une description modèle, mais aussi « complète » a ainsi été composée collectivement à partir des constats et des idées des élèves. À propos de la construction, au cours de l’institutionnalisation, le retour en grand groupe a porté sur les étapes à respecter plutôt que sur l’usage des instruments : l’organisation matérielle, l’usage du papier quadrillé, etc. L’institutionnalisation à la séance 2 a eu aussi comme objectif l’initiation des élèves au programme de construction dans l’intention de les préparer à la séance 3. Les élèves ont alors été sensibilisés aux conventions de rédactions spécifiques des programmes de constructions, qu’ils ont pu réutiliser (ou non) dans les séances subséquentes.

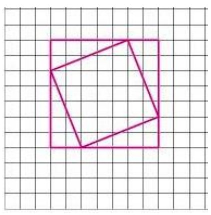
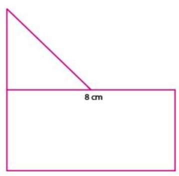
Programmes de construction de la séance 3	
 **Figure 12 : figure C**	Construis un carré de 7 cm de côté. Sur un côté du carré, marque un point à 2 centimètres d’un sommet. En tournant toujours dans le même sens, marque un nouveau point à 2 cm du sommet sur chaque côté du carré. Relie ces quatre points entre eux pour former un nouveau carré. Tu dois obtenir un nouveau carré qui a des côtés qui mesurent environ 5,4 cm.
 **Figure 13 : figure D**	Construis un rectangle de 8 cm de longueur par 4 cm de largeur. Prolonge une largeur du rectangle d’une longueur de 4 cm. Repère le milieu d’une longueur du rectangle. Ce point milieu sera le 3e sommet d’un triangle isocèle rectangle. Le triangle isocèle rectangle est collé à l’extérieur du rectangle. Le 3e côté du triangle isocèle rectangle mesure environ 5,7 cm.

Tableau 3: Les programmes de construction de la séance 3

[21] Une description est considérée comme « complète » quand elle contient un nombre suffisant d’informations pour la reproduction de la figure complexe. Pour chaque figure, plusieurs descriptions « complètes » sont possibles. Seules celles produites par les élèves ont été retenues.

À la séance 3, l'enseignante a remis aux élèves un programme de construction et ils ont construit la figure décrite dans ce programme. La dernière phrase de chaque programme de construction, qui est superflue, a pour fonction de permettre aux élèves de contrôler leur travail. Ils ont disposé d'une vingtaine de minutes pour réaliser la tâche. Contrairement aux autres séances, il n'y a pas eu d'institutionnalisation en grand groupe : la construction a été validée à l'aide d'un calque. En cas d'erreurs, une rétroaction individualisée a été effectuée par l'enseignante afin de mettre en évidence, auprès de l'élève, les liens entre sa production et l'énoncé du programme de construction.

Pour donner un aperçu de l'institutionnalisation des séances 1 et 2, nous présentons ici le cas de la figure F : à partir de la production d'élève, choisie et présentée par l'enseignante, la description « modèle » rédigée en grand groupe et les conseils donnés par rapport aux étapes de construction et de l'usage du papier quadrillé.

La description

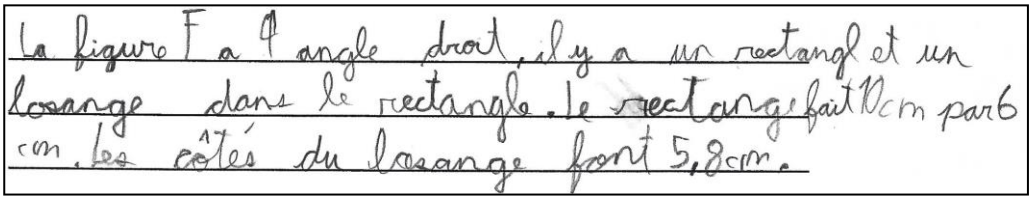

La figure F a 4 angle droit, il y a un rectangl et un losange dans le rectangle. le rectangle fait 10cm par 6 cm. les côtés du losange font 5,8cm.

Figure 10: Figure F, proposition d'un élève

Cette description est « complète » : l'élève a nommé les deux figures élémentaires (2D), le rectangle et le losange, il a indiqué les mesures de longueur des côtés et il a établi la relation spatiale entre le rectangle et losange.

Les retours en grand groupe ont permis aux élèves de remarquer que les descriptions sans redondance étaient plus simples à comprendre et plus efficaces. En effet, les termes « il y a 4 angles droits » sont pertinents à repérer pour la construction, mais sont répétitifs dans la description, car le terme « rectangle » est porteur de cette propriété. Les redondances éventuelles n'ont pas été prises en compte dans l'analyse des résultats : ce facteur ne gêne ni compréhension ni entrave la construction.

La description modèle, enregistrée au tableau numérique, a été la suivante :

> « Dans cette figure, il y a un rectangle de 6 cm par 10 cm. À l'intérieur du rectangle il y a un losange. Les sommets du losange sont les milieux des côtés du rectangle. »

La reproduction

- Conseils par rapport à l'organisation à privilégier pour la construction
- Il est préférable de reproduire le rectangle puis on repère les milieux des côtés pour construire le losange ;
- Commencer par le losange est « très risqué » surtout s'il n'est pas construit à partir des diagonales.

ANALYSE DES RÉSULTATS

Les productions des élèves ont été analysées selon la complétude des descriptions et la précision des reproductions, afin d'observer si une activation efficace des genèses sémiotique et instrumentale avait eu lieu.

Les descriptions aux séances 1 et 2

Une description est considérée comme « complète » lorsque sont présents le nom des figures élémentaires, les mesures de longueurs et une indication à propos des relations spatiales entre ces figures élémentaires, indications nécessaires et suffisantes pour une reproduction isométrique de la figure initiale. Le nombre de descriptions complètes et incomplètes est indiqué dans le Tableau 4 ci-dessous.

	Séance 1	**Séance 2**
Descriptions complètes	11	21
Descriptions incomplètes	31	22
Total de descriptions	42	42

Tableau 4 : Le nombre de descriptions complètes et incomplètes aux séances 1 et 2

En dépit d'un effectif réduit, on constate une certaine évolution entre les deux séances : on passe de 11 à 21 descriptions complètes et de 31 à 22 descriptions incomplètes.

Par ailleurs, nous avons analysé finement les descriptions « incomplètes », afin de préciser sur quels éléments l'évolution était la plus marquée : nom des figures, mesures de longueurs, relations spatiales. Dans le ***Tableau 5***, on y présente le nombre de descriptions pour lesquelles les éléments nommés dans les colonnes sont absents ou maladroits. On appelle « absence » lorsqu'il n'y a aucune mention dans la description. On appelle « maladresse » une mention inexacte dans la description. Par exemple, parmi les 31 descriptions incomplètes, dans 7 cas, l'une des figures élémentaires n'est pas mentionnée.

À la lecture du ***Tableau 5***, on remarque que la mention ou la description des relations spatiales reste une vraie difficulté pour un tiers voire la moitié des élèves de l'échantillon. En revanche on constate une évolution très nette à propos des mentions des mesures : seulement 9 élèves ont encore des difficultés à ce propos.

Incomplètes Par absence ou maladresse	**Nom des figures élémentaires**	**Mesures**	**Relations spatiales**
Séance 1 31 sur 42	7	23	16
Séance 2 22 sur 42	3	9	19

Tableau 5 : Analyse des descriptions incomplètes des séances 1 et 2

Si on continue l'analyse en faisant la distinction entre « absence » – aucune mention de l'objet – et « maladresse » – mention incomplète ou dans un français maladroit, à propos des relations spatiales on obtient le Tableau 6 suivant :

Descriptions incomplètes	**Absences/Manques Relations spatiales**	
Séance 1 31 sur 42	16	
	Absences	Maladresses
	12	4
Séance 2 **22 sur 42**	19	
	Absences	Maladresses
	9	10

Tableau 6 : Analyse des descriptions incomplètes à propos des absences ou des manques des relations spatiales

Nous interprétons ces résultats de la manière suivante : à la séance 2, les élèves ont tenté de décrire la relation spatiale avec le vocabulaire courant qu'ils maîtrisaient. Ils ont pris conscience que la relation spatiale entre les figures élémentaires doit être précisée et ils ont tenté de le faire avec le plus de finesse possible.

Comparativement à l'étude de Michot (2018) où il n'y avait eu aucune institutionnalisation d'une séance à l'autre, on constate une amélioration dans les descriptions : les mesures de longueurs, les figures élémentaires et des relations spatiales sont davantage mentionnées. Elles deviennent plus efficaces : aucune description de la séance 2 n'a d'éléments superflus comme « lignes parallèles », « le carré a 4 côtés… ». De plus, les élèves reprennent les structures de phrase présentées lors de l'institutionnalisation. On peut dire que ces descriptions de meilleure qualité témoignent de l'activation des genèses sémiotique et instrumentale, et d'une visualisation plus fine du *representamen*.

Par ailleurs, il est intéressant de mentionner qu'un élève a rédigé deux descriptions qui s'apparentent au programme de construction. Elles ont donc été réutilisées pour introduire la spécificité du programme de construction lors de l'institutionnalisation de la séance 2.

Les constructions des séances 1 et 2

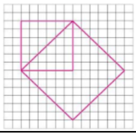
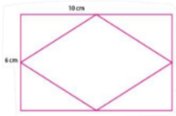
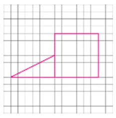
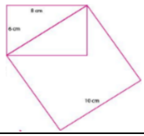
	Séance 1		**Séance 2**	
	Figure E 	Figure F 	Figure A 	Figure B 
Réussie	13	11	19	10
Non réussie	8	10	2	11
Total	21	21	21	21

Tableau 7 : Réussites des reproductions des figures E, F, A et B lors des séances 1 et 2

À propos des constructions, l'évolution la plus marquée se situe dans l'usage du papier quadrillé : les élèves suivent les lignes, respectent les nœuds du quadrillage contrairement à l'expérimentation de Michot (2018) où, rappelons-le, il n'y avait pas eu d'institutionnalisation. De plus, les mesures de longueur sont globalement davantage respectées.

Par ailleurs, les élèves de 3e année, tout comme les élèves de l'étude de Michot (2018), ont eu plus de difficultés à reproduire les figures E, F et B. Ces résultats semblent indiquer que les figures disposées en position non prototypique sont plus difficiles à reproduire.

Comme l'institutionnalisation a uniquement porté sur les étapes de construction et non sur l'usage des instruments, il n'est pas étonnant que le nombre de reproductions réussies soit relativement stable d'une séance à l'autre.

L'application d'un programme de construction à la séance 3

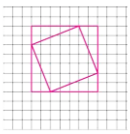
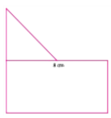
Séance 3	**Figure C** 	**Figure D** 
Réussie	14	13
Non réussie	6	7
Total	20	20

Tableau 8 : Les réussites des constructions de figures C et D lors de la séance 3

Le taux de réussite est remarquable si l'on considère que les élèves n'avaient jamais eu accès à un programme de construction[22] et qu'ils n'avaient pas de figure modèle à laquelle se référer. Ils ont donc dû se donner une image mentale de la figure autrement dit activer la genèse sémiotique et la genèse instrumentale pour bien visualiser le *representamen*.

Si nous comparons le nombre de réussites pour la figure D (Tableau 8) au nombre de réussites pour les deux autres figures reproduites sur du papier blanc (Tableau 7), nous constatons qu'elles sont légèrement plus nombreuses. En effet, 13 constructions ont été réussies pour la figure D, tandis qu'il n'y en a eu que 11 pour la figure F et 10 pour la figure B. Une interprétation serait que le programme de construction a pu guider les élèves dans la déconstruction de la figure et à changer leur regard sur celle-ci. Les expressions « repère les points milieux », « prolonge une largeur » ont, sans doute, permis aux élèves de décomposer la figure en éléments 1D et 0D. La comparaison des résultats de cette étude avec celle de Michot (2018) suggère fortement que l'institutionnalisation réalisée à la séance 2 où le programme de construction a été abordé avec les élèves, leur a permis de s'approprier le format de ce texte injonctif et d'associer chaque phrase a une étape de construction. L'analyse des traces des constructions des figures C et D montre la compréhension du programme de construction par les élèves. En effet, pour la figure C, tous les élèves ont construit des figures avec deux carrés de bonnes dimensions (ou presque). L'élément qui a posé un problème est la relation spatiale entre les deux carrés indiquée par « les points à 2 cm » (voir figure 16 et figure 17) les élèves semblent avoir été gênés par le fait qu'il y ait deux solutions possibles : l'un a essayé de composer avec ces deux solutions, l'autre a utilisé le milieu du côté, étant de ce fait à égale distance des sommets du 1er carré.

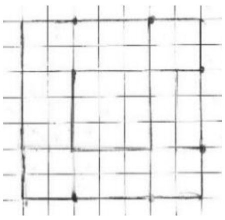


Figure 14 : Figure C erronée

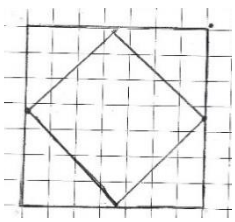


Figure 15 :

Figure Cerronée

Les élèves connaissaient les figures élémentaires évoquées dans le programme de construction de la figure D : ils ont tous construit un triangle (rectangle) et un rectangle. Encore une fois, les termes utilisés et les structures de phrase pour décrire la relation spatiale entre ces deux figures élémentaires « prolonge une largeur… », « Ce point milieu sera le 3e sommet », « Collé à l'extérieur » n'ont pas été compris par tous les élèves. Des difficultés de lecture ou de compréhension des implicites

[22] Sans apprentissage préalable, les élèves échouent les tâches associées au programme de construction : elles sont trop éloignées de leur habitudes de travail en géométrie (Michot, 2018).

dans la description des relations spatiales peuvent expliquer les productions des figures (Figure , Figure 16, Figure 17) où les élèves n'ont pas su comment disposer le triangle par rapport au rectangle. Il ne faut sans doute pas négliger le fait que l'expérimentation a eu lieu dans une classe où, pour bon nombre d'élèves, le français est la langue seconde voire 3^{e} ou 4^{e}!

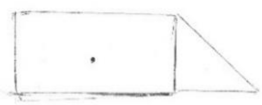
Figures erronées	 **Figure 13: Figure D**	 **Figure 16 : Figure D**	 **Figure 17 : Figure D**

Tableau 9 : Exemples de construction de la figure D lors de la séance 3

En résumé, les productions réalisées à partir des programmes de construction ont été particulièrement réussies, ce qui met en l'avant que les mots de vocabulaire (géométrique et courant) sont connus. Ceci met aussi en évidence que l'activation de la genèse sémiotique a permis aux élèves de se donner une meilleure visualisation de la figure à construire (representamen), et a été une aide à la construction : l'élève doit avoir une image mentale de la figure (representamen) avant de pouvoir la construire.

CONCLUSION

Cette recherche avait comme objectif de mettre à l'épreuve l'hypothèse selon laquelle une institutionnalisation entre les différentes séances ferait progresser les élèves d'une séance à l'autre. Nous voulions voir si un retour en grand groupe aiderait les élèves à produire des descriptions de meilleure qualité : précision du vocabulaire, utilisation adéquate du papier quadrillé, meilleure compréhension des réussites de leur reproduction et appropriation du format d'un programme de construction. La réponse à ces questions est clairement positive.

L'analyse des productions des élèves a été réalisée selon la complétude des descriptions et la précision des reproductions. Les descriptions de figures ont nettement évolué entre les séances 1 et 2. Elles tendent à être de meilleure qualité : il y a davantage mention des longueurs, des figures élémentaires et des relations spatiales. De surcroît, les structures de phrase présentées lors de l'institutionnalisation sont reprises par les élèves, leurs descriptions sont moins redondantes et se révèlent plus efficaces.

À propos des constructions, même si à première vue le nombre de reproductions réussies est relativement stable, elles sont de « meilleure qualité ». Le respect des mesures de longueur et l'utilisation du papier quadrillé à la séance 2 témoignent d'un certain apprentissage chez les élèves. De plus, le nombre important des constructions réussies à partir des programmes de construction montre que les mots de vocabulaire (géométrique et courant) sont maîtrisés. Malgré ces constats, l'usage des instruments est toujours à travailler : c'est encore difficile pour certains élèves. Ces résultats semblent montrer que la description d'une figure avant sa reproduction aide les élèves à activer adéquatement les genèses sémiotique et instrumentale.

Malgré ces constats, il serait intéressant de croiser les données quantitatives de réussites des élèves avec la difficulté des figures proposées (en fonction des variables didactiques) ; ce travail pourra être fait dans un prochain article.

Enfin, au-delà l'activité de recherche en didactique, il importe de souligner l'enthousiasme et l'intérêt des élèves à toutes les étapes de l'expérimentation. Ils ont été très appliqués lors de la description et de la reproduction de figures. Ils ont aussi été très attentifs et participatifs lors de l'institutionnalisation. Par ailleurs, les résultats montrent que les deux institutionnalisations effectuées à la fin des séances 1 et 2 à partir des traces des élèves les ont aidés à progresser dans leurs apprentissages. Ce type d'activité semble être pertinent pour permettre aux élèves de progresser rapidement.

Ainsi, à la lumière des résultats de cette expérimentation menée à toute petite échelle, les activités de descriptions et de reproductions de figures sont viables en classe et permettent aux élèves de progresser en géométrie plane : ces activités sont riches et favorisent les apprentissages géométriques des élèves. En effet, cette expérimentation a eu lieu dans une classe au contexte socio-économique plutôt défavorisé. Qu'en serait-il en milieu francophone ? D'autres recherches, à plus grande échelle, doivent être menées pour consolider ces résultats.

REFERENCES

Barrier, T., Chesnais, A., et Hache, C. (2014). Décrire les activités des élèves en géométrie et leur articulation avec celle de l'enseignant, *Spiral*e, 54, 175-193.

Brousseau, G. (2010) Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques (1998). Guy Brousseau, Didactique des mathématiques. Repéré à http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf.

Duval, R. et Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N*, 76, 7-27.

Keskessa, B., Perrin-Glorian, M.-J., et Deplace, J.-R. (2007). Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie, *Grand N*, 79, 33-60.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). *Mathematical Working Spaces in Schooling: An introduction*. Dans A. Kuzniak, D. Tanguay et I. Elia (Dir.), *Mathematical Working Spaces in Schooling, chap. 1. ZDM Mathematics Education*, (vol. *48(6)*, pp. 721-737). New-York, Heidelberg.

Mathé, A.-C. (2012). Jeux et enjeux de langage dans la construction de références partagées en classe de géométrie. Recherches en Didactiques des Mathématiques, *RDM*, 32(2), 195 - 228.

Michot, S. (2018). *Étude exploratoire de la description et de la reproduction de figures géométriques chez des élèves du 2e cycle du primaire* [mémoire de maîtrise, Université de Montréal, Montréal] Papyrus. HTTP://HDL.HANDLE.NET/1866/21335.

Michot, S. et Braconne-Michoux, A. (2019). Analyse d'une tâche de géométrie au 2e cycle du primaire au québec. Dans Vivier, L., Montoya Delgadillo, E., Richard, P. R., Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., Maschietto, M. & Tanguay, D. (dir). [Symposium] *Actes du Sixième Symposium sur le Travail Mathématique (ETM6, 13-18 décembre 2018)*. Valparaíso, Chile : Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, p. 347-358.

Offre, B., Perrin-Glorian, M.-J., et Verbaere, O. (2006). Usage des instruments et propriétés géométriques en fin de CM2. *Grand N*, 77, 7-34.

Pierrard, A. (2004). Des écrits pour présenter des dessins géométriques, *Grand N*, 74, 7-30.

CONTRATS FORTEMENT DIDACTIQUE ET ETM IDOINES. LE CAS D'UNE TÂCHE EN PROBABILITÉ

Alain Kuzniak et Blandine Masselin

LDAR, Université Paris Cité

Dans cette communication, nous reprenons, dans le cadre de la théorie des ETM, la notion de contrat fortement didactique esquissée par Brousseau. Nous utilisons nos observations d'une séance de classe sur une tâche en probabilité qui a été implémentée par plusieurs enseignants en relation avec une action de formation. Nous introduisons différents outils qui permettent de visualiser les itinéraires prévus et les chemins réalisés dans les ETM idoines potentiels et effectifs. Nous identifions ainsi un certain nombre de contrats fortement didactique et montrent clairement une différence entre les contrats potentiels (proche de ceux identifiés par Brousseau) et les contrats effectifs que nous avons pu observer.

INTRODUCTION

Dans sa conférence de Montréal (1997), Brousseau introduit ce que nous appellerons des contrats fortement didactiques. Il les décrit et les définit a priori en s'appuyant sur des caractéristiques psychologiques, philosophiques ou encore empiriques. Ces contrats peuvent ensuite être reconnus a posteriori grâce à l'observation du déroulement de situations didactiques dans les classes. Dans la théorie des ETM, le déroulement effectif d'une séance de classe est pris en compte à partir d'ETM idoines constitués autour d'une tâche et de son implémentation (Kuzniak et al., 2016, Kuzniak & Masselin, 2022). Dans ces conditions, l'observation et la définition des contrats didactiques s'effectuent a posteriori à partir de la description et de la caractérisation du travail mathématique.

Dans cette communication, nous nous proposons d'étudier le sens de la notion de contrat fortement didactique dans le cadre de la ThETM. Quelles sont les caractéristiques de ces contrats et comment les décrit-on dans la ThETM ? Quel est leur lien avec les contrats introduits par Brousseau ?

Nous analyserons ces types de contrat didactique à partir d'une tâche de modélisation en probabilité, le lièvre et la tortue. Cette tâche a été proposée à des enseignants en formation qui l'ont ensuite mise en œuvre lors d'une préparation commune. Notre étude identifie les contrats didactiques et s'appuie sur le développement du travail mathématique et la circulation du travail dans l'ETM. Elle s'appuie sur les ETM idoines mis en place par trois enseignants.

PRESENTATION DE LA TACHE ET DU CONTEXTE D'ETUDE

La tâche du lièvre et de la tortue

La tâche de probabilité considérée pour l'étude est le lièvre et de la tortue. Présente dans les documents d'accompagnement des programmes officiels français (grade 9), nous la considérons comme emblématique. Voici l'énoncé proposé en formation des enseignants (Masselin, 2019).

Une course se passe entre un lièvre et une tortue. On dispose d'un parcours à 6 cases en ligne. On lance un dé équilibré à 6 faces. Si le 6 sort, alors le lièvre gagne, sinon la tortue avance d'une case. La tortue gagne quand elle arrive sur la $6^{\text{ème}}$ *case. Qui a le plus de chances de gagner?*

Les programmes français recommandent de résoudre cette tâche en utilisant une simulation de l'expérience aléatoire pour avoir une approximation de la solution. La simulation peut s'appuyer sur deux modèles de la situation.

Le premier modèle[23] est congruent sémantiquement à la situation dont il décrit fidèlement les différentes phases. Il peut être représenté avec un arbre.

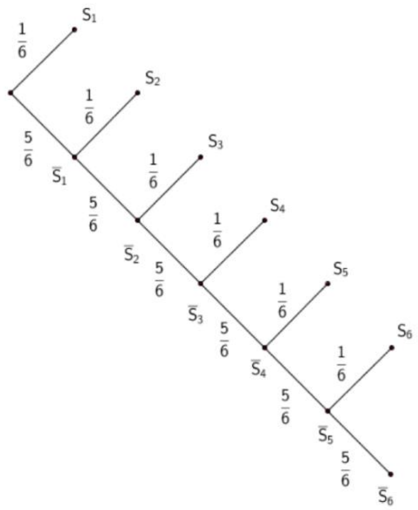


Figure. 1 Arbre associé au modèle de la loi géométrique tronquée[24]

La loi binomiale sert d'appui à un second type de modèles et ceci de deux façons. La première consiste à rechercher les possibilités de gain de la tortue qui correspondent à six lancers consécutifs sans le 6. La deuxième manière, assez peu naturelle, consiste à effectuer six lancers de dés et à décider, ensuite, qui de la tortue ou du lièvre a gagné. Cette méthode est non congruente à la situation : en effet, pourquoi continuer à lancer le dé, si l'on sait que le lièvre a gagné ! Elle a cependant l'avantage de se programmer aisément.

La situation didactique du lièvre et de la tortue: une étude a priori

Dans le tableau 1, nous explicitons l'itinéraire complet attendu dans le cadre de l'ETM de référence. Il comporte trois grandes phases, avec des sous-phases, qui peuvent être envisagées comme des éléments constitutifs de la situation didactique associée à la tâche. Une phase de simulation est présente car, comme nous l'avons vu, elle est recommandée dans le curriculum français.

Expl. : Exploration et	Expl.1 : La découverte du problème

[23] Ce premier modèle suit la loi géométrique tronquée.

[24] S_i est l'évènement "*le 6 sort au* $i^{\text{ème}}$ *lancer*" pour *i* nombre entier allant de 1 à 6 et la partie s'arrête.

explicitation de la situation aléatoire	Expl.2 : Une mise au point sur les règles du jeu Expl.3 : L'explicitation de l'expérience aléatoire
Sim. : La simulation	Sim. 1 : Justification du recours à la simulation Sim. 2 : La simulation effective Sim. 3 : L'exploitation de la simulation
Preuv. : L'élaboration d'une preuve	Preuv.1 : Une preuve expérimentale Preuv.2 : Une preuve sans simulation Preuv.3 : Institutionnalisation autour de la preuve

Tableau 1. Phases de l'ETM de référence définies par le chercheur (Masselin, 2019)

Cette analyse servira d'appui pour décrire les itinéraires prévus et les chemins réalisés par les enseignants et leurs élèves dans le cadre des ETM idoines (Section 2, la méthodologie de l'étude). Par ailleurs, l'énoncé de la tâche est susceptible de variations pour sa mise en œuvre en classe, comme en témoignent les choix (annexes 2, 4 et 5) des enseignants observés dans notre étude.

QUESTIONS DE RECHERCHE, CADRES THEORIQUES ET METHODOLOGIE DE L'ETUDE

Les questions de recherche

Nous énonçons nos questions de recherche avant de les préciser dans les cadres théoriques qui servent de référence à l'étude, à savoir la TSD et la ThETM

Comment accéder aux contrats fortement didactiques lors de la mise en œuvre de la tâche de modélisation ? Peut-on les décrire et les caractériser dans le cadre de la ThETM ? Quels sont les types de contrats fortement didactiques identifiés ?

Mise en place théorique

Brousseau (1988) introduit la notion de contrat didactique pour rendre compte des engagement réciproques, implicites ou non, qui relient enseignant et élèves autour d'un projet d'enseignement. Brousseau (1997) introduit ensuite des stratégies fortement didactiques qu'il décrit grâce à des formes de contrats didactiques spécifiques. Nous appelons contrat fortement didactique les formes de contrats associées à des stratégies où apparaît clairement la volonté d'enseigner les mathématiques de la part du professeur. Dans son exposé, Brousseau n'explicite pas les différents paramètres qui lui permettent de caractériser ces contrats didactiques. Il insiste cependant sur deux phases de l'enseignement dont il est indispensable de tenir compte pour avancer dans leur connaissance : la dévolution et l'institutionnalisation. Brousseau énonce une série de six contrats didactiques qu'il décrit, de manière plus ou moins explicite, en mentionnant différents cadres de référence (psychologique, philosophique, etc.). Parmi ceux-ci, on peut noter le contrat constructiviste, le contrat d'imitation, le contrat d'ostension ou encore le contrat maïeutique socratique.

Dans la théorie des Espaces de Travail Mathématique, l'appréhension des phénomènes de contrat passe par l'étude des ETM idoines. En particulier, nous utiliserons les deux ETM idoine retenus par Masselin dans son travail de thèse : l'ETM idoine potentiel et l'ETM idoine effectif (Masselin, 2019 ; Henríquez, Kuzniak & Masselin, 2022). Les outils théoriques de la ThETM, permettent de décrire les plans privilégiés lors du développement du travail mathématique, et de dégager des rétroactions avec l'enseignant ou le milieu.

Données de l'étude

Pour notre étude, nous nous appuyons sur un ensemble de données issues d'une formation d'enseignants en probabilité. Sur notre suggestion, une enseignante (Lucie) a mis en œuvre la situation du lièvre et de la tortue dans une classe pour préparer la formation d'enseignants dont elle était une des formatrices. Dans le cadre de cette formation, deux enseignants (Emma et Augustin), répartis dans deux groupes de formation différents, ont implémenté la situation, après une préparation collective. Enfin, un enseignant, Christian, ayant suivi cette formation fera également objet de notre étude pour avoir testé la tâche dans sa propre classe après la formation.

Le tableau 2 précise les données des ETM idoines potentiels et effectifs des enseignants de notre étude.

	Lucie	Emma	Augustin	Christian
Données sur l'ETM idoine potentiel	Préparation individuelle	Préparation collective en formation (groupe 1)	Préparation collective en formation (groupe 2 dont Christian)	Préparation individuelle post formation (groupe 2)
Données sur l'ETM idoine effectif	Lucie enseignante, dans sa classe de 3^{e}	Emma est l'enseignante expérimentatrice dans une classe de 3^{e} prêtée en formation. Lucie est formatrice dans le groupe 1	Augustin est l'enseignant expérimentateur dans une classe de 3^{e} prêtée en formation Christian est observateur d'un groupe d'élèves	Christian est enseignant dans sa classe de 3^{e}

Tableau 2. Tableau récapitulatif des mises en œuvre étudiées

Dans cet article, nous nous concentrons sur les contrats didactiques de trois des enseignants (Lucie, Emma et Christian). Les classes ne sont pas toujours celles des enseignants observés (Cas d'Emma) car nous avons suivi pour la formation un dispositif inspiré des Lesson Studies (Masselin et Hartmann, 2020).

Méthodologie

La description de l'ETM idoine potentiel des enseignants observés permet d'obtenir les itinéraires qu'ils ont envisagés a priori. Leur ETM idoine potentiel est ensuite comparé à l'ETM idoine effectif, mis en œuvre en classe, qui est décrit grâce aux chemins réalisés. Ces derniers rendent compte de l'avancée du travail en classe en précisant les interventions de l'enseignant et ses interactions avec des élèves mis en groupe pour résoudre la tâche du lièvre et de la tortue. Les chronogrammes des séances de classe ont permis de réaliser ces chemins (Masselin 2020).

Pour représenter les itinéraires prévus et les chemins empruntés, nous avons utilisé des graphes orientés. La lecture de ces graphes se réalise de gauche à droite, les événements se produisant suivant la chronologie que nous avons pu repérer pendant la séance de classe ou dans les préparations de séances. Les arêtes rendent compte des interactions entre professeurs et élèves et les sommets colorés des divers choix opérés en fonction des genèses et plans verticaux privilégiés. Nous avons été particulièrement attentifs à l'usage des outils technologiques (artefacts matériels ou numériques) mais aussi aux modèles probabilistes qui ont été convoqués pour résoudre la tâche. Pour aider à la mise en place de ces graphes, nous retenons les types de contrôles prévus par les professeurs, la nature et l'orientation des interactions entre le professeur, les groupes d'élèves ou l'ensemble de la classe. Les symboles utilisés pour décrire les itinéraires prévus et chemins empruntés sont résumés dans la figure 3 :

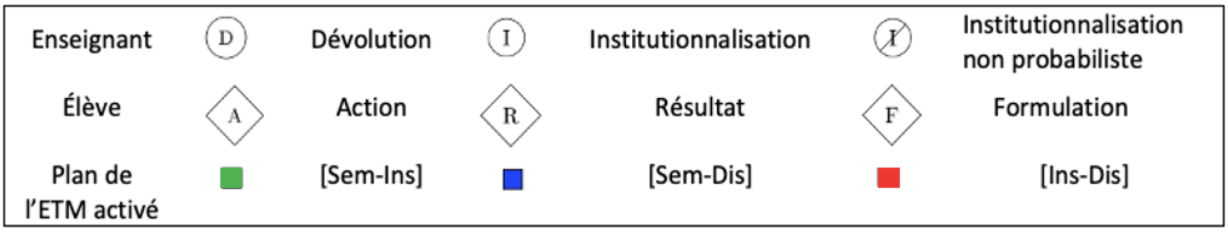


Figure. 2 Codages employés pour les graphes des itinéraires et chemins

Les interventions spécifiques de l'enseignant sont représentées dans un disque : D étant employé pour une dévolution, I pour une institutionnalisation, et I barré pour une institutionnalisation sans rapport avec les enjeux probabilistes de la situation. Tout ce qui relève des élèves est représenté dans un losange. Leur travail est mentionné par un A s'il correspond à une action. Cette action peut produire des résultats R.

Des formulations F peuvent être demandées par le professeur à ses élèves, il s'agit pour eux d'expliciter à la fois leurs résultats s'ils existent et les procédures mises en œuvre pour les obtenir. La phase d'institutionnalisation I permet à l'enseignant d'expliciter le travail attendu des élèves. Le sens des mots *formulation* et *action* sont différents de ceux que leur attribue Brousseau dans son étude a priori de situations a-didactiques basées des situations d'action et des situations de formulation.

Les plans de l'ETM idoine activés ([Sem-Ins], [Ins-Dis] ou encore [Sem-Dis]) sont identifiés grâce à trois couleurs distinctes rouge, verte et bleue.

DESCRIPTION ET CARACTERISATION DES CONTRATS FORTEMENT DIDACTIQUE

Entre contrat potentiel socio-constructiviste et contrat effectif constructif monitoré : le cas de Lucie

Dans le cas de Lucie, nous avons pu observer le contrat potentiel de l'enseignante et constaté qu'il est différent de celui réellement mis en place dans la classe.

L'ETM idoine potentiel : un contrat potentiel socio-constructiviste

L'enseignante a prévu les itinéraires suivants dans l'ETM $_{\text{idoine potentiel}}$.

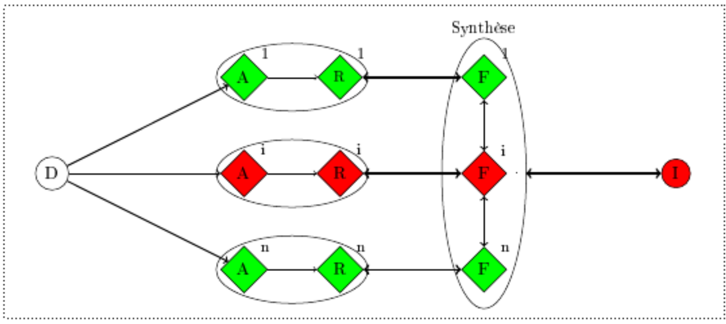


Figure. 3 Itinéraires prévus dans l'ETM$_{\text{idoine potentiel}}$, (Classe de Lucie)

Une première dévolution de la tâche est prévue. Le disque blanc autour de D indique l'intention de Lucie de ne pas orienter le travail vers une forme de travail déterminée : la dévolution est très ouverte. Des dés sont disponibles et posés sur son bureau et les élèves ont la possibilité d'utiliser des ordinateurs. Par groupe, les élèves pourront entamer une phase d'action A et obtenir des premiers résultats R. À partir d'une formulation de leurs résultats, l'enseignante proposera une synthèse collective. Les objectifs et buts du travail effectué feront l'objet d'une institutionnalisation autour d'une preuve de type expérimentale, dans le plan [Sem-Ins].

L'ETM idoine effectif: un contrat effectif constructif monitoré

Le contrat socio-contructiviste est transformé lors de la mise en œuvre : la diversité des modèles probabilistes initialement possible est restreinte à un unique modèle basé sur l'utilisation du tableur. A la suite de la dévolution, les groupes 1 et 4 ont tenté des calculs de probabilités en se situant dans le plan [Sem-Dis] ce qui n'avait pas été prévu par l'enseignant. D'autres ont réalisé des lancers de dé, groupes 2, 3 et 5, en se situant dans le plan [Sem-Ins]. Des groupes, comme les groupes 6 et 8 ont envisagé un travail dans le plan [Sem-Ins] en tentant de réaliser une simulation au tableur. Cette variété se traduit par trois branches représentées avec une phase d'action située dans les trois plans de l'ETM après la première dévolution.

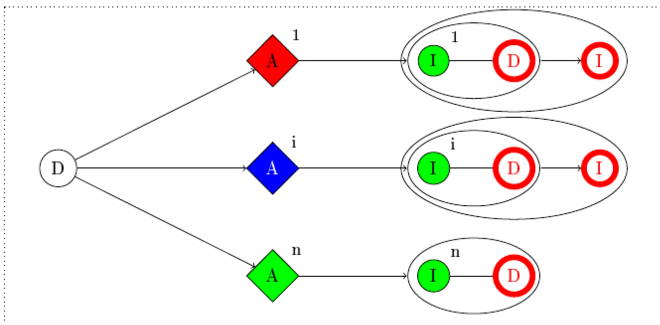


Figure. 4. Chemins empruntés dans l'ETM idoine effectif, Lucie

En nous basant sur le chronogramme de la séance, nous avons pu observer la répétition d'une même intervention du professeur en relation avec des groupes d'élèves différents.

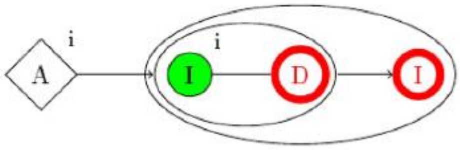


Figure. 5. Extrait du chemin emprunté, ETMidoine effectif

Le gros-plan (Figure 4) montre que le groupe 6 a tenté d'emblée d'élaborer une simulation du lancer de dé sur le tableur, avec un travail initié dans le plan [Sem-Ins]. Après une première simulation d'un lancer, le groupe est bloqué pour relancer de manière conditionnelle un second dé (pour des détails, voir annexe 3). Lors de ce blocage du travail du groupe dans l'élaboration d'une simulation d'une course sur le tableur, l'enseignante intervient dans le groupe et fait abandonner le modèle de la loi géométrique tronquée pour favoriser un modèle basé sur la loi binomiale. Elle impose systématiquement six lancers pour une course au tableur. Elle opère une dévolution basée sur la loi binomiale dans le plan [Ins-Dis] mais les élèves ne sont pas conscients du modèle probabiliste nouvellement impliqué. Cette nouvelle dévolution est représentée par un D vert entouré de vert.

Le chronogramme de la séance révèle une répétition de ce schéma avec d'autres groupes ce qui lui permet de monitorer la propagation du changement de modèle repéré par un blocage initial du groupe 6. Ainsi, pour un autre groupe qui avait commencé à dessiner un arbre comme des choix est invité à utiliser le modèle de la loi binomiale.

L'ETM idoine effectif comporte ainsi des chemins rendus homogènes au fil de la mise en œuvre de la situation dans les différents groupes. Nous considérons que seul un demi-plan [Ins-Ref] est activé ici car il n'y a pas de construction d'un raisonnement discursif, l'enseignant a donné les éléments du modèle sans justification aux élèves. Dans une partie des groupes, Lucie réalise une institutionnalisation finale dans le plan [Ins-Ref] avec une preuve exclusivement expérimentale (stabilisation de fréquences observée avec la simulation tableur pour un grand nombre de lancers).

Nous qualifions le contrat didactique effectif rencontré comme un contrat constructif monitoré par un jeu sur les modèles imposé par l'enseignante au fil de ses interventions dans la séance. En effet, tous les groupes avec lesquels Lucie a interagi ont progressivement utilisé un tableur et ont créé une simulation à partir d'un fichier vierge. Le lancer de six dés a systématiquement été imposé pour une course, rendant homogène le modèle probabiliste.

Contrats potentiels et effectifs de type maïeutique multivoque : le cas d'Emma

Nous allons voir que dans le cas d'Emma, il y a identité entre le contrat potentiel et le contrat effectif. Cette identité s'appuie sur une répétition de patterns dans lesquels une une sous-tâche précise et limitée est donnée aux élèves.

ETM idoine potentiel : un contrat maïeutique multivoque

Les itinéraires prévus par Emma ont été développés au cours d'un travail en commun avec d'autres professeurs pendant la formation. De manière globale, le groupe d'enseignants a prévu d'imposer une phase d'exploration avec cinq parties jouées avec un dé par chacun des groupes. Il s'agit de justifier l'introduction d'un fichier de simulation fourni par l'enseignant (Fig.1-Sim.1). L'enseignante doit ensuite faire un point sur les règles du jeu en plénière avec un gros dé en mousse pour s'assurer de sa compréhension par tous (Fig1-Expl.2), se situant dans le plan [Sem-Ins]. Le travail en groupe doit se poursuivre par une phase d'exploration de la simulation : les groupes relanceront plusieurs fois le fichier de simulation Scratch, rempliront le tableau avec un nombre de parties imposé et calculeront les fréquences correspondantes. Enfin, les groupes d'élèves réaliseront une représentation graphique des points (n, f_n) avec un repère imposé (annexe 4).

Une succession de patterns similaires rythme ainsi les différentes phases de l'ETM idoine potentiel. Ces patterns sont constitués d'une dévolution initiale (1), d'une phase d'action des élèves dans le plan [Sem-Ins] aboutissant à des résultats toujours situés dans le même plan (2). Une institutionnalisation (3) est opérée sur un point précis (la règle du jeu, les résultats des cinq parties imposées par groupe, ...) afin de faire avancer le travail de tous les élèves de manière quasi simultanée. Cette dévolution est suivie d'une nouvelle dévolution qui relance le travail et rythme la séance.

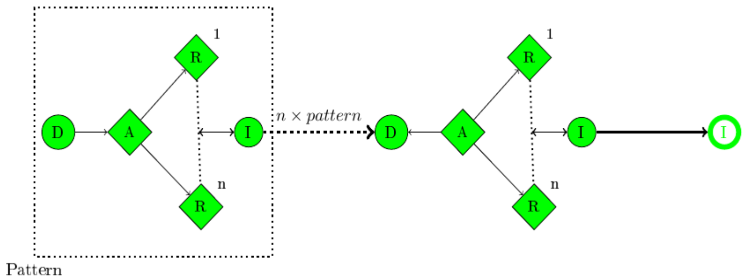


Figure. 6. Itinéraires prévus et chemins empruntés dans l'ETM idoine effectif, Emma

ETM idoine effectif : un contrat didactique inchangé

Lors de la séance, Emma suit fidèlement ces itinéraires. Elle intervient à plusieurs reprises en s'adressant à toute la classe, rendant les phases de travail en groupe assez courtes. Le modèle probabiliste est imposé aux élève grâce à un fichier de simulation préparé par le groupe d'enseignants associé à la préparation de la séance. Lors des retours en plénière, Emma tente d'exercer un contrôle sur le travail mathématique de tous les groupes simultanément pour éviter des blocages.

Chronologie des interventions d'Emma à la classe durant le travail de groupe

Le graphe des chemins est donc identique au graphe des itinéraires mais nous pouvons donner une chronologie et une description plus précise des contenus des patterns qui tient compte des réactions des élèves. Dans chaque pattern, les élèves en groupe ont des sous-tâches à réaliser (jouer 5 parties, compléter un tableau et réaliser un graphique). Le travail avec un outil de simulation prêt à l'emploi a été conduit par l'enseignant et balisé par des d'interventions en plénière.

Pattern	**Durée**	**Tâches données par l'enseignante**
N°1	10min	10h08 « Voici une activité de découverte, je vous distribue l'énoncé. Notez vos idées et échangez avec vos voisins. »
N°2	6min	10h18 « Faire plusieurs parties, cinq. Numérotez qui gagne ou ne gagne pas. On est partis, ceux qui veulent en faire plus vous pouvez en faire plus ». 10h23 « On va mettre en commun. Il y en a qui trouvent le lièvre, on n'a pas assez fait de parties. Il y 4 cases 2 acteurs. P récolte les résultats des 5 parties de chaque groupe
N°3	4min	10h25 « Comment on joue ? La tortue avance. » Emma lance le dé en mousse, elle le relance obtient un six et dit : « Qui pense que le lièvre a gagné ? Qui pense que le lièvre a plus de chance de gagner, d'après ce que vous avez fait comme expérience ? »
N°4	6min	10h28 P (à propos des victoires du lièvre et de la tortue obtenus par les élèves manuellement) « On n'a pas fait assez de parties, comment on pourrait faire pour en faire plus ? Avec un tableur ou avec Scratch on peut lancer plusieurs centaines de fois, l'ordinateur peut le faire pour nous. On fait une simulation. Vous allez aller dans le dossier… on a choisi Scratch. » Des premiers groupes d'élèves ouvrent le fichier de simulation 10h31 « Vous vous connectez, vous avez un tableau, vous remplirez le tableau. Une fréquence de gain de la tortue c'est quoi ? C'est le quotient nombre de parties gagnées par la tortue sur le nombre total de parties. »
N°5	29min	10h34 « Vous y allez. » Les groupes d'élèves remplissent le tableau donné par P et tentent de réaliser le graphique attendu. P ramasse les productions des groupes (tableau et graphique)

N°6	29min	11h34 Phase d'institutionnalisation finale (voir 3.3) Fin de séance à 12h03

Tableau 3. Interventions de l'enseignante à la classe durant le travail en groupe

Les contrats spécifiques de l'institutionnalisation : contrat d'ostension et contrat magistral.

L'institutionnalisation finale d'Emma : un contrat d'ostension

Emma a comparé les valeurs obtenues par les différents groupes d'élèves pour 2 000 courses. Elle pointe l'aspect aléatoire de ces résultats puis elle montre des ébauches de graphiques d'élèves qui témoignent de difficultés de représentation liées à l'échelle imposée. Emma projette alors le graphique de l'unique groupe (n°5) où la fréquence de gain du lièvre semble se stabiliser vers 0,52.

Emma ouvre ensuite un fichier Scratch préparé pendant la formation et qui montre la simulation de 15 courses, puis de 1000. Un nouveau plan que nous allons caractériser est convoqué dans l'ETM par l'enseignante qui est la seule responsable de cette phase de preuve. La simulation exposée par Emma à la classe fonctionne comme une boite noire, le fichier a été préparé par un autre enseignant du collectif et son contenu n'est pas explicité aux élèves. Emma utilise ce que Varenne (2009) appelle un modèle algorithmique : ce modèle reproduit la réalité sans donner de justification théorique. Pour nous, ce type de simulation se situe dans le plan [Sem-Ins]. Une alternative aurait été de proposer une preuve dans [Sem-Dis] construite sur un algorithme justifié et appuyé sur des éléments théoriques.

Emma conclut sa séance en traçant une droite vers laquelle semble converger les données obtenues. Elle écrit alors : *Plus on simule l'expérience, plus les fréquences observées s'approchent d'une valeur : probabilité*. et elle ajoute Loi des Grands Nombres. Cette manière de procéder qui s'appuie sur ce que voient les élèves sans donner des définitions et des justification précises relève du contrat d'ostension : le professeur montre ce que les élèves doivent savoir (Brousseau, 1997).

L'institutionnalisation finale de Christian : un contrat magistral

Après avoir vécu la formation, Christian a consacré trois séances de 55 min à la situation avec sa classe. Le contrat didactique de Christian est semblable à celui d'Emma mais nous le qualifions de maïeutique univoque du fait qu'il ne propose pas plusieurs voies aux élèves comme dans le cas d'Emma.

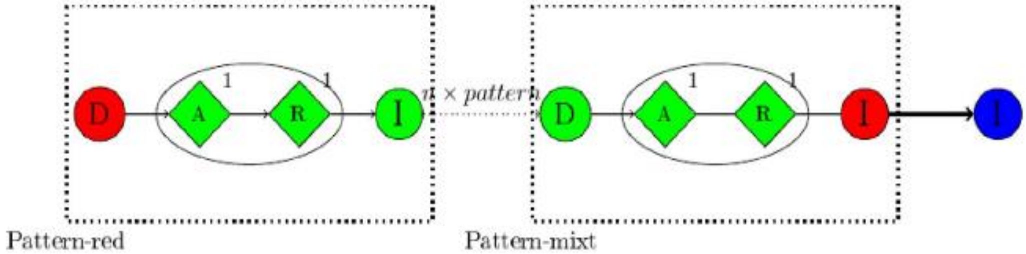


Figure. 7. Chemins empruntés dans l'ETM idoine effectif, Christian

Nous ne détaillons pas plus ici sa façon de faire pour nous attarder sur son institutionnalisation. Celle-ci est exclusivement située dans le plan [Sem-Dis]. Il s'agit d'une preuve formelle présentée aux élèves par l'enseignant sans être partagée dans son élaboration avec le modèle binomial sans simulation. Christian donne la valeur $(5/6)^6$sans justification. Le contrat mis en place est de type magistral, il fait avancer le savoir sans réellement tenir compte des élèves.

RESULTATS, LIMITES ET PERSPECTIVES

Grâce à notre analyse des ETM idoines tant potentiels qu'effectifs, nous avons pu mettre en évidence des itinéraires et des chemins de formes très différentes qui caractérisent divers contrats fortement didactiques.

Nous avons noté une première opposition entre les contrats potentiels et les contrats effectifs. Dans le cas de Lucie, le contrat potentiel est de type socio-constructiviste alors que le contrat didactique effectif est constructif monitoré par un jeu sur les modèles : la diversité des modèles probabilistes initialement possible est restreinte progressivement à un unique modèle avec le tableur. Cette opposition entre les formes potentielles et effectives du contrat didactique est fréquente dans le cas des contrats socio-constructiviste potentiel qui ne prennent pas suffisamment en compte la gestion effective de la classe et les réactions des élèves. Pour s'adapter à ces réactions, le professeur est conduit mettre en place un autre type de contrat.

La différence entre les deux formes de contrat, potentielle et effective, est contrôlée par Emma grâce au contrat *maïeutique multivoque* qui lui permet de rythmer le travail des élèves. Ce contrat se retrouve chez Christian mais de manière simplifiée puisque la dévolution de la tâche est très restreinte. Nous parlerons alors de contrat *maïeutique univoque*.

De manière générale, une rupture de contrat apparaît au moment de l'institutionnalisation. Dans le cas de Lucie, il n'y a pas eu d'institutionnalisation collective. Dans les autres cas, nous avons pu observer des contrats d'ostension où le savoir est montré aux élèves sans explication et un contrat magistral où la preuve est donnée sans prendre en compte ni les réactions ni les connaissances antérieures des élèves.

Notre étude incluant la ThETM complète la définition de contrat de Brousseau, liées aux habitudes des élèves par rapport aux enseignants. Elle met notamment en évidence les différents types de contrats didactiques chez un même enseignant dans les deux types d'ETM (potentiel et effectif). L'étude montre aussi l'existence de contrats coconstruits entre les élèves et l'enseignant et qui évoluent en fonction du milieu et de la dynamique du travail enclenché. Cette évolution au fil de la séance se retrouve explicitée dans les différences entre l'ETM potentiel et l'ETM effectif. De ce fait, il nous paraît important de bien distinguer les contrats didactiques potentiels (décrits en général dans les théories sur l'enseignement) et les contrats didactiques effectifs qui dépendent de la contingence.

Une des limites de notre recherche est liée au petit nombre d'enseignants étudiés mais leur choix permet de montrer des différences de type de contrat importantes malgré une représentation non exhaustive des contrats fortement didactique introduit par Brousseau. Des études complémentaires aideront à préciser en quoi la caractérisation des contrats didactiques liée à la ThETM se différencie ou complète l'approche de la TSD.

Une autre perspective est l'exploitation de notre codage basé sur la théorie des ETM comme outil d'analyse des séances de classes notamment dans le cadre des Lesson Studies. Ces codages, et les éléments de la théorie des ETM utilisés, sont relativement simples à utiliser et donnent rapidement une vision globale du contrat mis en place à travers les chemins et les itinéraires qui sont ainsi visualisés. Ils permettraient à la fois de déceler de nouvelles formes de contrats mais également de discuter la nature des contrats en formation d'enseignants. Il serait ainsi possible d'éclairer les variations de contrats au cours d'une séance mais aussi les différences existantes entre le travail potentiel et le travail effectif.

REFERENCES

Brousseau, G., (1988). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques, 9*(3), 309-336.

Brousseau, G. (1997). *La théorie des situations didactiques*. Le cours de Montréal 1997. http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/06/MONTREAL-archives-GB1.pdf

Henriquez, C, Kuzniak, A, & Masselin, B. (2022). The Idoine or Suitable MWS as an Essential Transitional Stage Between Personal and Reference Mathematical Work, In A. Kuzniak et al. (Eds.) *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces.*121-148. Springer

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. R. (Eds.). (2022). *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (1st ed., Mathematics Education in the Digital Era, Vol. 18). Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education. 4*8(6), 721-737.

Masselin, B. (2020). Dynamique du travail mathématique en classe entre un enseignant et des groupes d'élèves sur la simulation en probabilités : une étude de cas. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 25, 49-88.

Masselin, B. (2019). Étude du travail de l'enseignant sur la simulation en classe de troisième et seconde : métamorphose d'un problème au fil d'une formation en probabilité. Thèse, Université Paris Diderot. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02507438

Masselin, B. & Hartmann, F. (2020). Un dispositif de formation inspiré des Lesson Studies dans l'académie de Rouen, *Repères-IREM, 120*, 43-61.

Varenne, F. (2009). Épistémologie des modèles et des simulations : tour d'horizon et tendances. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00674144.

THE CAPTURING OF VYGOTSKYAN PEREZHIVANIE AS RADICAL ERLEBNIS, THROUGH THE ANALYSIS OF A PROSPECTIVE TEACHER'S LEARNING EPISODE

Zagorianakos Andonis

National and Kapodistrian University of Athens, Greece, Faculty of Preschooler Education

The paper is using a learning episode and the repercussions that it had for Diana, a prospective teacher of secondary mathematics education, concerning her learning and teaching attitudes. The aim is to bring out the so far untranslated concept of perezhivanie, as being determinative for the combination of the analytical potential of the phenomenological perspective and the Vygotskyan approach to Activity Theory. The radical transformation of Diana's attitudes towards learning and teaching mathematics due to her noematic/sense survival during the task, designates her learning experience as radical emotional transcendental lived experience (perezhivanie), by determining her personal evolution; designating a meeting between Husserl's Erlebnis and Vygotsky's perezhivanie. The description of the refraction of the environment as it was perceived by Diana allows the visibility of the complementarity of the analytical lenses of phenomenology and Vygotskyan activity theory.

Keywords: *Perezhivanie, refraction, phenomenological methodology, Vygotskyan approach to C.H.A.T.*

INTRODUCTION

The paper is using a learning episode and the repercussions that it had for Diana (pseudonym), a prospective teacher of secondary mathematics education, concerning the radical change of her learning and teaching attitudes. The particular episode has been explicitly described in another paper (Zagorianakos, 2013), from a solely phenomenological perspective. A different analytical approach is adopted in this paper, by rendering Diana's learning experience as a typical case of perezhivanie, a so far untranslated concept that Vygotsky has explored (Vygotsky, 1934/1994). Instead of a definition, the concept of perezhivanie will be exemplified through the case of Diana, thus also manifesting possibilities for the adaptation of perezhivanie for mathematics education research. The main argument/research question that is addressed in this paper is that the radical evolution of Diana—which was expressed further on, also beyond the course that the learning episode is part of—offers a good case for bridging phenomenological and Vygotskyan analytical approaches, for the casting of a better light on the "indivisible unity of personal characteristics and situational characteristics" (Vygotsky, 1934/1994, p. 342).

RATIONALE – ANALYTICAL LENSES – THEORETICAL FRAMEWORK

The paper is part of a wider study that is aiming at creating theoretical, methodological and analytical space that is combining phenomenology and Vygotskyan Cultural-Historical Activity Theory.An empirical example is used in this paper, in order to exemplify the aforementioned aim, by employing the concept of pereshivanie. The empirical example is depicting the theoretical descriptions that follow. Two analytical lenses are used:

- The phenomenological lens, with which the noematic survival of Diana, a prospective teacher of mathematics, is described, particularly based on her perceptual noematic (Husserl, 2001) survival from (transcendence of) the dead-end that she faced.
- And the activity theory lens, particularly as it was envisaged by Vygotsky in his latest perception of consciousness and his distinction between meaning and sense (Veresov, 1998), which anticipates the cultural stamp of Diana's environment (principally emanating from the teacher and her peers) on the communicable perceptual objects that she intuitively constituted. It is a lens that takes into account the very last programme of Vygotsky's research of consciousness (Veresov, 1998).

It will be shown that the perceptual objects that Diana constituted (e.g., local algorithms, the initial and the final flow chart)[25] enveloped Diana's personal characteristics, as well as her environment's demands and giveness, as they were refracted (rather than reflected) through her subjective uptake of the learning situation. Her learning experience had radical consequences for her attitudes towards learning and teaching mathematics. The empirical example is analysed elsewhere in detail (Zagorianakos, 2013; Ζαγοριανάκος, 2017), from a solely phenomenological perspective, since the personal characteristics of the perezhivanie unit were thematised.

PEREZHIVANIE AS A KEY CONCEPT FOR THE CONVERGENCE OF THE STUDY'S ANALYTICAL LENSES

The typical English translation of perezhivanie is "experience", sometimes carrying the qualifiers "emotional experience" or "lived experience". But perezhivanie is beyond the typical/empiricist meaning of the word "experience", for which the word "opit" is used, in Russian. While the verb perezhivat means to be able to survive after some disaster, to "over-live" something, perezhivanie is not only surviving a life-changing disaster, but also consolidating on a dramatic leap forward in one's life, a daring move one made, a risk that paid off and opened a new phase of one's life (Blunden, 2016a, p. 276). Perezhivaniya (multiple tense) "*differ from experiences in that a perezhivanie includes the 'processing' of an experience, working over and assimilating it into your personality*" (ibid.). Particularly for

[25] See the next section.

Vygotsky (1934) perezhivanie is a psychological unit and "*in a perezhivanie we are always dealing with an indivisible unity of personal characteristics and situational characteristics, which are represented in the perezhivanie*" (p. 342, emphasis added).

Diana's noematic survival and the radical repercussions on her attitudes.

Diana was following a two years' programme of study, organised by the Institute of Education of an English university, in order to become a teacher of mathematics for the secondary education. During the first semester of the first year of her studies I was invited by the teacher of one of her courses in order to participate in his sessions, as an observer. In each session the students were participating in a task that was set and presented by the teacher and their aim was to elaborate the task mathematically. Their performance was evaluated by their coursework on 8 tasks of their choice (out of 20 tasks in total), which each student would submit to the teacher at the end of the course. My aim was to explore the strategies and the manners of appearance of the mathematical objects that the students were using for each task, without receiving any guidance by either the teacher or myself.

The particular session that is explored here was concerned with an open task that involved seeking generalisations on behalf of the students, concerning the behaviour of natural numbers during the 'doubling modulo' process. For instance, with regard to number 8, the 'doubling modulo' process concerned picking up a number smaller than 8, e.g. 1, then doubling 1 repeatedly, thus obtaining 2 and 4; then, since doubling 4 gives us 8, which equals to the given number the doubling process would stop and another number lower than 8 would be picked, one that has not appeared yet (e.g. number 3), and the doubling process would start again, thus obtaining 6 and then 12; but since 12 exceeds 8, a subtraction would take place, 8 from 12, thus obtaining 4. But 4 is a number that had already appeared; hence the doubling process would also stop (the case of a 'loop') and another number lower than 8 would be picked, one that has not appeared yet (e.g. number 5). The 'doubling modulo' process was concerned with exhausting all numbers lower than the given number, by continuing the same process over and over again.

The students were working either alone or in groups of their own choice, free to exchange their ideas on how to develop the treatment of the task. Diana was a student that manifested very low mathematical confidence, being used to follow the other students' ideas each time they differed from her own. Since communication of ideas between students of the same group or from different groups was encouraged, her peers tried to explain their ideas to her (figure 1) but in vain; as she explained in her interview "I still don't understand how they do it; because a couple of people tried to explain it to me but I was just completely lost… I still don't understand it, their way". Her low confidence led her to despair, since the teacher's guidance was not an option. So, she started writing structured sets of questions and answers for all the numbers from 4 to 18 (see her efforts with 4 and 5, as well as with 18, on the left side of figures 2 and 3, respectively), as she was focused on the "rule" of the task.

In figures 1 and 3 there is also a depiction of other students' efforts with the task. What impressed Diana concerning her peers' dealing with the task was these "loops" (as she called them), that her peers were able to coin in their diagrams; as she expressed it in her interview: "everybody understood it straight away and they could just do it as a loop … but I could not process that" (cf. figures 1, 2).

Her response to her peers' "loops" was that: "[t]he only way I could do it was by doing a flow … I invented up doing a flow chart for this, like a flow diagram". This is Diana's description of her transition from the 15 structured sets of questions and answers (concerning the numbers from 4 to 18) to the construction of the "flow diagram", namely her initial algorithmic depiction of the "rule" of the task (figure 2, right image). Her algorithmic intuition transformed her structured sets of questions and answers—based on trial-and-improvement'[26]—to a generalised form of these sets, through her initial flow chart. That was solely her interpretation of the task, one that no other student of her class followed. And she continued working her idea at home, by drawing a more proper flow chart, in order to be able to communicate her understanding of the task with the teacher.

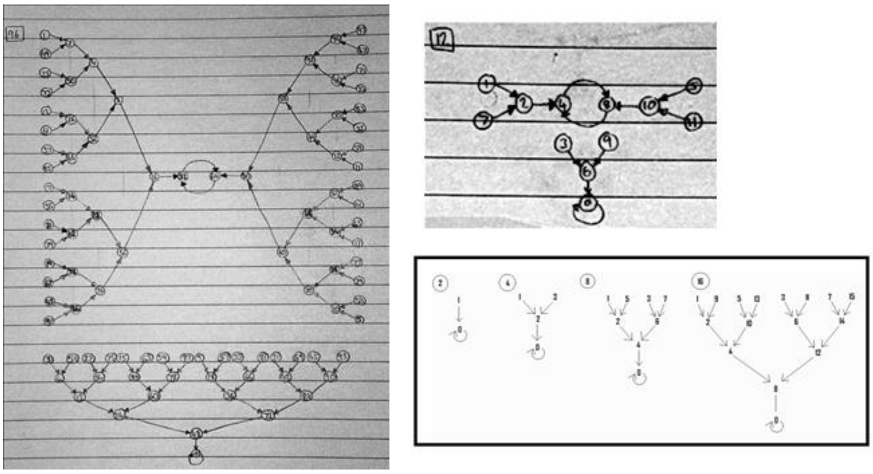


Figure 18: Examples of Ivan's (left and top right) and Jake's (bottom right) treatment of the 'doubling modulo' task, which were perceived as 'loops' by Diana (Ivan, Jake are pseudonyms)

[26] Zagorianakos, 2013.

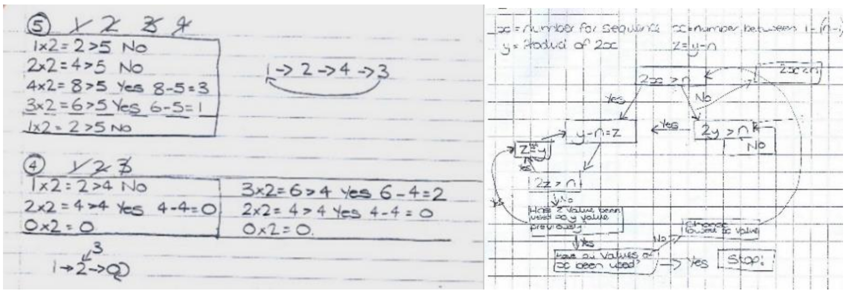


Figure 19: Left image: Diana's structured sets of questions and answers for numbers 4 and 5. Right image: Diana's initial flow chart, where loops can be noticed, as parts of her flow chart.

As it had become apparent from observing Diana in this course, as well as from her interviews, she was brought up in an educational system where delivering answers to her queries and guidance from the teacher were guaranteed; a system where there was always supposed to be a single correct answer. Her attitudes towards learning and teaching mathematics had been shaped accordingly, considering the direct feeding of the students with correct, ready-made answers as a given. Hence, the absence of the teacher's guidance in these sessions made Diana feel uneasy, even frustrated:

> And sometimes it's just really frustrating, because I think, well, "am I doing it right or am I doing it wrong?" and he says "what do you think?" And I'm thinking that "I don't know, that's why I'm asking you!" And it frustrates me. (interview extract)

Hence, in these sessions Diana was turning to her peer students for guidance; moreover, the lack of teacher's guidance enhanced her low confidence: she was considering that her ideas were wrong when differing from her peers' ideas. She stated it clearly in her interview: "I've been very cautious when I found an answer, if my answer isn't the same as everybody else's I've just assumed mine is wrong! Because it's not the same as somebody else's". And yet, something unique happened in this particular session. It was the first time in this course when no matter how her co-students tried to explain what they were doing she couldn't grasp it; and since no guidance would arrive from the teacher she had arrived at a complete dead-end; for the first time she had to depict her inclusive understanding of the task, which was different than anybody else's, without knowing if it is "right" or "wrong".

Diana's Wesensshau and the concordance between the phenomenological and the Vygotskyan lenses

As Diana started the transcription of the behaviour of the numbers from 4 to 18 under the 'doubling modulo' process, as she was filling pages of question/answer sets, she was resembling the 'trial-and-error' and 'trial-and-improvement' methods that she was extensively using in the previous sessions. Thus, these question/answer sets expressed crude empirical intuitions and they became a new layer of data for her. Then, her critical intuition emerged, with which she separated the algorithmic form from the q/a material. This intuition was what Husserl (1970) describes as the 2nd intuitive stage, the intuition of essences (Wesensschau). Let us look closer to this intuition: The generalisation that Diana achieved with her flow chart (figure 2, right image) was a result of discerning/intuiting an algorithmic character (essence) out of the q/a material. Although space limitations do not allow a broader exploration of Husserl's theory of intuitions it might suffice to point out that Diana's intuition of the algorithmic nature of the q/a material is a good example of this kind of intuition (the intuition of essence/Wesensshau), concerning Husserl's approach to intuition, and particularly seeing essences and the intuition of essence. "Husserl never hypostatizes or substantializes the objects of the eidetic method: they are definitely not objects residing in another higher 'reality,' like they are in Plato" (Lohmar, 2010, p. 78). And in Diana's intuition of essence an object of a new class is constituted: the separation (abstraction) of a particular feature/essence (in this case the algorithmic character) of a number of singular objects (the structured question/answer sets), which in its turn allows her the constitution of the object of a new class (the initial flow chart). "Essences are dependent on the real world and they have no independent reality" (ibid.)

The phenomenological lens casts light on Diana's breakthrough moment (the moment of the constitution of mathematical generalisation), being concordant with the Vygotskyan perspective of activity theory: since, according to Vygotsky, the adaptation of objects to diversified features of these objects calls for a distinguishable effort by the person herself; while by the usage of cultural signs the person propels the borders of her micro-experience infinitely further, as the person builds her manners in accordance to schemes that transcend her, as they have been created within the society and they are accessible to everyone.

There is also another point in Diana's intuition of the flow chart that converges the Husserlian phenomenological lens and the Vygotskian approach to activity theory; and that is the *emotional* and passive/embodied character of the intuition of essence. In rough terms, the intuition of essence that Diana coined under the noematic dead-end that she found herself into was not based on an intellectual relation[27] to her environment. It was through a deeply emotional experience and an agonising effort to survive noematically that the crude 'trial-and-improvement' question/answer sets were intuited as instances of a flow chart; it was the result of a certain perception and evaluation of the situation she found herself in and the only manner possible at her own particular level of learning development, within the guidance-lacking course. It was Diana's desperate need to re-arrange herself from the answer-feeding model that she was raised in that brought the flow chart intuition to surface. Ultimately, it was an evolution issue that she desperately needed to deal with due to the particular course's setting, as the teacher was cutting her off from his guidance. The emotional ground of uncertainty, as it was dissolved in Diana's intuition of essence, marks it as *perezhivanie*, as a radical emotional lived

[27] For the non-intellectual character of Diana's activity in relation to her environment see following section on Leont'ev's misunderstanding of Vygotsky's Activity Theory approach.

experience, thus rendering palpable the inborn radical change of attitudes outcome.

> [T]the same point aris[es] in reading Vygotsky's work on the social situation of development in which it is not the environment as such which is determinant, but the significance for the child of relevant features of the environment – that at a certain point, the child becomes aware of needs which can no longer be met within the horizons of the existing social situation, setting up a contradiction in the existing form of collaboration between the child and its carers. (Blunden, 2016b, p. 3, emphasis added).

The teacher's essential response/legitimisation and Diana's radical change of attitudes

Diana's radical change of attitudes on learning and teaching mathematics is expressed clearly in the interview that took place three months after the analysed session:

> it was very very long-winded and it took me a lot longer to understand it [the 'doubling modulo' task] than it did for everyone else. But now I've done this and it's my way, nobody else seems to have done that way. … I like my way! It's a long way, but I like my way … usually my thought is… my thought is the same as everybody else's, so this one [the 'doubling modulo' task] quite intrigued me because I thought it in a different way than nobody else seemed to, so it intrigued me, because of that. … [A] lot of the time I've been very cautious when I found an answer, if my answer isn't the same as everybody else's I've just assumed mine is wrong! Because it's not the same as somebody else's … I think I've possibly become a bit more confident with what I'm doing; because I'm thinking "*well, because I've got a different answer to somebody else it doesn't necessarily mean that it's wrong, it just means I thought about it in a different way*". So, it has, yeah, it's been good for me! … I think *when I'm teaching, I need to get over the urge to give answers… not straight away*. I think I have realised from these lessons that *it helps people more if you help with their understanding of it rather than just give them an answer straight away; and naturally make them think about it and what they are doing and why they are doing it*, which obviously is very important with wanting to be a teacher.

Diana depicted with her flow chart a generalised description of what the 'doubling modulo' process consists in. She did not explore the behaviour of different classes of numbers under that process, as her peer students did. But the teacher of the course had not set any terms concerning what kind of results the students would achieve or the directions that the students' generalisations would take. All approaches were legitimate for him insofar as the students would be capable of bringing results by mathematising the task. And he was consistent with his approach, as he legitimised Diana's work. Likewise, the teacher critically facilitated the radical change of Diana's attitudes towards learning and teaching mathematics. Concerning Diana's gains from her change of attitude they are twofold, both and each deriving from her perezhivanie experience, inextricably linked to her personal sense of the situation that she found herself in.

A. From the learning point of view:

- She realised that coming up with an answer that is "a different answer to somebody else it doesn't necessarily mean that it's wrong, it just means I thought about it in a different way"
- She realised that even without any teacher guidance and without following her peers' ideas on a task she may still produce a legitimate answer to a task.
- She realised that even if the task is not clear for her, she can still come up with her own mathematical understanding of the task.
- She realised that the learner is approaching a task in her own way even without any guidance by the teacher.

B. From the teaching point of view:

- She reconsidered her urge to give answers.
- She realised the importance of "help[ing the learners] with their understanding of it [the task] rather than just give them an answer straight away".
- She realised that the learners may "thi[nk] about it [a task] in a different way" and that "it doesn't necessarily mean that it's wrong" the way that they think about it.

In a bottom-up analytical process it became apparent how Diana's flow chart intuition initiated the breakthrough moment for her noematic survival (i.e. resolving the utter confusion that she was going through), up to the radical repercussions that her sense survival had for her learning and teaching attitudes. The teacher's legitimisation of her treatment of the task was the critical key in concluding what her breakthrough moment had started.

After the 'doubling modulo' session Diana's mathematical confidence was considerably raised and she felt significantly more confident with the course's luck of teacher guidance. During the last session of the course, when the students were supposed to play the teacher's part, Diana was fully accustomed to the course's style, as she fully restrained herself from feeding the other students with answers, while discussing their different perspectives of the task; as she put it in her interview

I liked it that I was learning with the class. And it was nice because I had certain ideas of… sort of a rough idea of what might happen but then it was interesting to see everybody else's ideas; so in a way I suppose it was a good thing because I had no preconceived ideas of what might happen, it left me open to all the possibilities, so I wasn't saying "right, well this is the answer to it"; it wasn't this definite answer, it was like "right, like okay let's just explore it together and see what happens".

Diana's change of attitudes persisted in the other courses that I was observing her, despite the more classical teaching methods that the other courses were using; it was apparent that she felt free to express her own perception of what was taught, even when it was different from everyone else's. I came across repeated evidence that her change of learning attitude endured and I am convinced that if the most significant moments of her two year studies were to be selected the ‘doubling modulo’ one would be amongst them.

Intuition as a key element within Diana’s perezhivanie unit

The *phenomenological lens* engages analytical tools such as the study of intuition, the thematisation of Erlebnis (lived experience), passive and active intentionality (Zagorianakos, 2019). It focuses on and analyses retroactively the constituted object’s roots in the intentional object, as it is intended, immersed as it is in its cultural-historical, intersubjective dimensions. And it may contribute to the Vygotskyan perspective of *concept formation*, within *perezhivanie,* as the latter stands for a radical, emotional, transcendental lived experience and *unit*, while functioning as a *prism* of the situational setting.

Looking more closely to Diana’s intuitive constitution of the flowchart we find more evidence for the links between the Vygotskyan approach to perezhivanie and the Husserlian phenomenological lens: Diana expressed her own version of her peers’ “loops” within the flowchart; as her questions/answers scheme were depicted as different options in the flowchart, according to each number’s case, loops were consistent within the flowchart process. Therefore, the aforementioned links can be summarised as follows:

- Vygotsky’s latest approach to perezhivanie, as allowing the detection of the intersubjective origins of meaning, through the subjective origins of sense. Thus meeting Husserl’s approach of “subjectivity [as] what it is—an ego functioning constitutively—only within intersubjectivity” (Husserl, 1970, p. 172).
- The phenomenological focusing, on intuitive learning and shaping of abstraction, as “Husserl's essences are destined to bring back all the living relationships of experience, as the fisherman's net draws up from the depths of the ocean quivering fish and seaweed” (Merleau-Ponty, 1945/, p. xvii). The intuitive element is manifested as playing a key part in the perezhivanie unit, which is a key unit for Vygotsky, inextricably linking the subjective/personal part in sense making and the situational characteristics.
- The enrichment of the study with the characteristics of personal survival traits, within a learner’s perezhivanie: it is in perezhivanie where the person’s learning evolution within her environment is emerging, drawing its origins from intuitive operations. The spark of radical evolution of Diana’s learning and teaching attitudes emerged due to her essential intuitive moment, which included her perception of how her peers treated the task. It afforded her with a new tool, the “my way!” tool, which was generalised by radically effecting her learning and teaching attitudes, particularly after the legitimisation of her task treatment by the teacher.

We may argue that since intuition is a key element of radical emotional lived experience for the Husserlian analytical lens and since perezhivanie is a psychological unit for Vygotsky, the complementarity of the two analytical lenses could contribute to a better understanding of perezhivanie in mathematics education, as this study exemplifies. As Blunden puts it:

To function as a unit, we require an individual (or singular) entity – a finite concrete entity. What Vygotsky was claiming when he proposed that perezhivaniya be the units of analysis was that we have to pay attention to specific, finite, meaningful and hence generally emotion-laden, even challenging experiences in someone's life that stand out, so to speak, from the generalized passive background of experience. It is these experiences which make us what we are, provided we respond to them. (Blunden, 2016b, p. 4, italics in the original)

And as Merleau-Ponty (1945, p. 68) put it:

Experience of phenomena is not, then, like Bergsonian intuition, that of a reality of which we are ignorant and leading to which there is no methodical bridge – it is the making explicit or bringing to light of the prescientific life of consciousness which alone endows scientific operations with meaning and to which these latter always refer back. It is not an irrational conversion, but an intentional analysis.

The intentional analysis of the personal "prescientific life of consciousness which alone endows scientific operations with meaning" leads to a better understanding of Diana's transformation of the q/a sets to their abstract/mathematised sense/meaning, through her flow chart intuition.

Leont'ev's misunderstanding of Vygotsky's Activity Theory approach

Vygotsky's theory of concept formation is outlined in chapters 5 and 6 of "Thinking and Speech" and it is already a theory of activity (Blunden, 2016b). The concept that a subject forms of the object plays the motivating role for the concept formation and it has got a developmental character. Diana's transcendence of her emotional turbulence due to the noematic dead-end that she encountered, by coining a flaw chart and trusting it, it entailed the adoption of a new learning position—due to a situational lacking of guidance and a circumstantial lacking of communicating with her peers' ideas. Her situation is bearing similarities to Vygotsky's example in his essay (1934) on the problem of the environment, where the eldest child of the wrongheaded mother had "become the senior member of the family". This in no way implies that the taking up of the new social position was an intellectual act, the outcome of intellectual evaluation of the situation (Blunden, 2016b). Diana, in the 'doubling modulo' activity acted similarly to the eldest child, as she perceived and evaluated the situation in the only manner possible at her own particular level of development: an algorithmic depiction of the task's rule. The algorithmic concept formation endowed with mathematical abstraction the 15 q/a sets. It was her 'own way', for the first time since the sessions had started. The teacher's legitimisation concluded and hypostasised the end product of her stressful disposition. It enabled the objectification of Diana's perezhivanie, as a radical change of her learning and teaching attitudes. Leont'ev charged Vygotsky with intellectualism concerning the relation of the person to their environment and "with failure to see that it is activity and not *perezhivanie* which is at issue" (ibid).

Vygotsky—unlike Leonte'v's interpretation of his analytical perception of the relation of the person to their environment—used different units for the analysis of different scientific investigations into a number of different problems (Blunden, 1916b); and he particularly used "perezhivaniya for analysis of personal development and social situations of development for analysis of child development" (ibid).

> The same point arises in reading Vygotsky's work on the social situation of development in which it is not the environment as such which is determinant, but the significance for the child of relevant features of the environment – that at a certain point, the child becomes aware of needs which can no longer be met within the horizons of the existing social situation (Blunden, 2016b, p. 3).

While Leont'ev "never fully grasped the idea of analysis by units" (ibid) the phenomenological lens may offer a more faithful description of subjective personal characteristics, of how a unit like a learning perezhivanie becomes a unit for the learning person. Vygotsky's concern for the person's conscious emotional experience from the perspective/landscape of "all the personal characteristics [that] are represented in an emotional experience [*perezhivanie*]", of "all the factors which are related to our personality and are selected from the personality, all the features of its character, its constitutional elements, which are related to the event in question" (1934, p. 342) is a clear motivating stream for the phenomenological lens. Since it may unfold its methodological repertoire of intentional analysis, intuitive operations' analyses, bracketing and phenomenological attitude (Zagorianakos, 2019). In concordance with the Vygotskyan view of activity, as a unique combination of personal and situational characteristics. In Vygotsky's words (1934/1994, p. 342):

> That is why from the methodological point of view it seems convenient to carry out … an analysis when we study the role the environment plays in the development of a child, an analysis from the point of view of the child's emotional experiences {perezhivania} because, as I have already said, all the child's personal characteristics which took part in determining his attitudes to the given situation have been taken into account in his emotional experience {*perezhivanie*}.

The personal characteristics that are "represented" in perezhivanie may be thematised by the phenomenological analytical lens, thus informing us how perezhivania is personally constituted as a unit for the learner, in the heat of the learning field. It is a lens which could offer descriptions concerned with the intentional analysis of units, such as perezhivanie: as it is exemplified in Diana's case, the critical intuitive 'moment' was detected by exploring the intentional emergence of her flaw chart, through an intuitive act, which realised the abstraction / essence of the q/a sets.

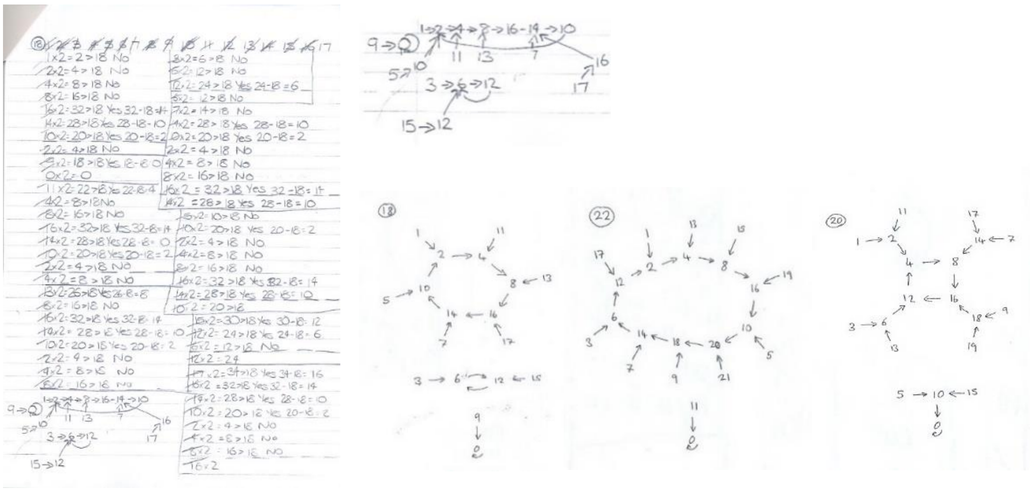


Figure 3. Left side: Diana's treatment of number 18. Right side: Diana’s graph for number 18 on top and Ivan’s treatment of the same number, as well as numbers 20 and 22

CONCLUSIONS

Diana had an extremely rare experience during the ‘doubling modulo’ session due to the *radical break* of Brousseau’ triangle, namely the teacher’s luck of guidance, which unfolded in a dramatic manner; and we saw how Diana finally managed to meet her teacher’s teaching set up. And it was an extremely rare experience since it was also aided critically by Diana’s non-understanding of her peers’ treatments of the task (cf. figure 1), thus, at least seemingly *breaking* the Vygotskyan/Marxist facilitation of the socially constituted concept, within the ZPD. It is only seemingly broken, since we saw in the previous section how Diana’s perception of her peers’ “loops” emerged in the flaw chart, if not facilitated triggering it. Thus Diana’s personal/subjective sense constitution, in a phenomenological (Husserlian) sense, manifested a breakthrough (figure 2, right side) due to *intuiting* an algorithmic essence out of the 15 local questions/answers’ sets of how numbers behave under the ‘doubling modulo’ process, one that bore footprints of her peers’ treatment of the task.

The just mentioned analytical residue makes already apparent how they can be combined analytically, the Vygotskyan and the phenomenological lenses: The combination of the two lenses is concerned with the *Vygotskyan refraction* of the environment by the learning subject, as she is going through the perezhivanie psychological unit, as the latter is being focused through *phenomenological analytical tools*. These tools enable a better description of the intuitive emergence of Diana’s noematic content, such as the passage from the crude empirical intuitions (trial-and-improvement) to the abstract intuition of essence, as Diana was filtering her peers’ loops into a flow chart (figure 3).

The phenomenological methodology is responsible for tracking Diana’s critical intuition. The methodological move from the natural to the phenomenological attitude (Zagorianakos, 2019) brought under the (phenomenological) analytical lens the appearance for the student of the flow chart, as an adequate generalisation of her local algorithms. Diana's noematic survival took place during her desperate need to transform into coherent and systematic sense (a) her confusion over how her peers treated the task, (b) the non-guidance of the teacher and (c) her empirical depiction of how the rule of the task is applied to 15 consecutive numbers. The student's noematic survival and the radical evolution of her learning and teaching attitudes that followed make the particular learning episode an adequate one in order to apply late Vygotsky's focusing on perezhivanie and his according approach to Activity Theory, in contradistinction to Leont'ev's misunderstanding of Vygotsky. The rendering of Diana's learning lived experience as an instance of perezhivanie brings in the Vygotskyan dimension by rendering Diana's learning experience as being…

- A *unit* of Diana's personality, a developmental unit (Blunden, 2016b, p. 3), which "reveals the properties of the complex product of that process in a way which would be impossible if we sought units of the product itself" (ibid).
- A *prism*, through which the environment is *refracted*, as the person/Diana critically evolved, by perceiving the role of the environment in a unique, subjective sense (Vygotsky, 1934/1994, p. 340; Veresov, 2017, p. 57). The phenomenological tenet of subjectivity being the source of meaning/sense is thus coupling Vygotsky's prismatic and personal aspect of perezhivanie.

Refraction is not just taken metaphorically, since it directly refers to the student's personal perception and awareness of her environment at hand, one that she is utterly permeated by, through and through. As we saw, Diana, despite the incognizance of the methods that her peers were using and the absence of guidance by her teacher she produced a result that bore the footprint of her colleagues' methods, through the refraction of her personal understanding of their methods, as she filtered her peers' "loops" through her flow chart. Moreover, the refraction of the teacher's absence of guidance was expressed as her "own way", through the flowchart, by representing how the 'doubling modulo' process operates for any given number. Hence, she also managed to communicate with the teacher's unarticulated didactical horizons. This is also where the complementarity of the analytical lenses of phenomenology and Vygotskyan activity theory becomes visible. Refraction is a nodal characteristic, as it deters a rationalistic interpretation of the cognitive phenomenon. The study of the characteristics of personal survival traits, within the person's perezhivanie, as the learner manages to evolve within her current environment becomes the subject of the phenomenological perspective. The latter may offer essential descriptions of the refraction at hand, through the intentionally interwoven survival of the cognizant of perezhivanie, as an embodied, affect driven and meaningfully realised survival; while by refracting the person's environment, subjectivity exercises its sense making capacity. The person's developmental horizons, permeated by her environment, interweave perezhivanie. Hence, the study supports that Diana's perezhivanie offers a good case for bridging phenomenological and Vygotskyan analytical approaches, for the casting of a better light to the “indivisible unity of personal characteristics and situational characteristics” (Vygotsky, 1934/1994, p. 342).

REFERENCES

Blunden, A. (2016a) Translating Perezhivanie into English, *Mind, Culture, and Activity, 23*(4), 274-283, DOI: 10.1080/10749039.2016.1186193

Blunden, A. (2016b). The Problem of the Environment. A Defense of Vygotsky. For academia.edu. Corpus ID: 197623905

Husserl, E. (1970). *The crisis of the European sciences and transcendental phenomenology.* Evanston: Northwestern University Press.

Lohmar, D. (2010). Intuition in mathematics: On the function of eidetic variation in mathematical proofs. In M. Haritmo (Ed.), *Phenomenology and mathematics* (vol. 195 pp. 73-90). Springer: Dordrecht.

Merleau-Ponty, M. (1945/2002). *Phenomenology of perception.* London: Routledge.

Veresov, N. N. (1998). The problem of human consciousness in L. Vygotsky's approach. A I N O (Electronic Journal of the Department of Behavioural sciences of Oulu University), 1. www.edu.oulu.fi.

Veresov, N. (2017). *The Concept of Perezhivanie in Cultural-Historical Theory: Content and Contexts.* Springer Nature Singapore Pte Ltd.: Singapore.

Vygotsky, L. S. (1934/1994). The problem of the environment. In R. Van Der Veer & J. Valsiner (Eds.), *The Vygotsky reader*, 338–354. New York, NY: Plenum Press.

Zagorianakos, A. (2019). A phenomenological methodology based on Husserl’s work in the service of mathematics education research. Jankvist, U. T. et al (Eds.), *CERME11*. Freudenthal Institute. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02417428/

Zagorianakos, A. (2013). The study of intuitions in one prospective teacher’s constructions of mathematical objects. Smith, C. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 33*(1), 55-60.

Ζαγοριανάκος, Α. (2017). Φαινομενολογική ανάλυση των συνέπειων του ξεπεράσματος του μαθησιακού αδιέξοδου μιας μέλλουσας καθηγήτριας μαθηματικών. *7ο Συνέδριο Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ.7)*: Αθήνα.

PETIT DÉTOUR PAR LE SYSTÈME SÉCIMAL

Florence Peteers & Laurent Vivier

CY Cergy Paris Université, Université Paris Cité, Univ Paris Est Créteil, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-95000 Cergy-Pontoise, France

Nous étudions une séquence longue en base six destinée à de futurs professeurs des écoles dont l'objectif est de développer chez les étudiants un ETM des nombres représentés en base six. Nous faisons l'hypothèse que ce travail permettra une meilleure compréhension de l'ETM des nombres en base dix. L'expérimentation menée début 2022 semble valider cette hypothèse.

INTRODUCTION

Les enseignants du primaire ont souvent des difficultés à enseigner les nombres dans le système décimal (Anselmo et Zucchetta, 2013). Ils ont pour la plupart un profil non scientifique[28] et focalisent leur enseignement sur les techniques opératoires.

L'idée que nous poursuivons dans cette étude consiste à travailler une base autre que dix pour la formation des enseignants en allant beaucoup plus loin que ce que l'on propose usuellement en formation. En général (COPIRELEM, 2015), le travail dans des bases autres que dix consiste à montrer que l'on peut représenter les nombres autrement avec un nouveau registre numérique, éventuellement avec quelques opérations et des techniques de conversions qui n'utilisent essentiellement que des opérations en base dix et en se limitant aux nombres entiers.

La progression que nous proposons (Braconne-Michoux et al., 2018 ; Peteers et Vivier, 2022) est une séquence longue en base six, permettant de développer pour elle-même cette numération avec ses propres techniques, afin d'opérationnaliser ce nouveau registre. En outre, nous ne nous limitons pas aux entiers, car nous considérons également les rationnels et réels, ni même au seul domaine numérique. La géométrie, et notamment les mesures des grandeurs géométriques, occupent une place importante permettant de développer le champ d'application du registre de représentation en base six, ou *sécimal*.

L'ensemble de la séquence est ambitieux et vise à faire découvrir la base six et faire travailler les étudiants dans cette numération en développant les notations, propriétés et les artefacts, qu'ils soient symboliques (comme les techniques posées) ou matériels (comme une règle pour mesurer des longueurs). La question de recherche se centre sur les liens entre les bases dix et six : ce travail approfondi en base six permet-il aux étudiants-professeurs de mieux comprendre et de mieux maitriser la base dix ? Notre hypothèse de travail est que l'enseignement relatif au système décimal sera enrichi par ces nouvelles compréhensions avec une meilleure prise en compte des difficultés des élèves, hypothèse qui pourra faire l'objet d'une étude ultérieure.

[28] https://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr/sites/default/files/imported_files/documents/NF_2020_09_INSPE_num_1293511.pdf

Le choix de la base six (Peteers et Vivier, 2022) repose sur le fait d'avoir une base plus petite que dix, pour éviter la difficulté cognitive de nouveaux chiffres, assez grande, pour ne pas démultiplier le nombre de chiffres. En outre, six=3×2 et dix=5×2 ont la même structure arithmétique.

CADRES THÉORIQUES

Nous reprenons les résultats de Nikolantonakis et Vivier (2013 ; 2016) sur le fait que l'on peut interpréter deux systèmes de numération comme deux Espaces de Travail Mathématique (ETM) distincts. Ainsi, nous interprétons ce travail et ce développement des connaissances sur la base six dans la séquence proposée comme la constitution d'un ETM des nombres représentés en base six. Les trois dimensions de l'ETM, sémiotique, instrumentale et discursive, sont en effet au centre de nos préoccupations. La question est alors de savoir si une meilleure maitrise et compréhension de l'ETM des nombres en base dix, qu'ils auront à enseigner, émerge de ce travail dans un ETM des nombres en base six. Le cadre des ETM (Kuzniak et al., 2016 ; Kuzniak et al., 2022) est ainsi un cadre important de notre recherche.

Nous notons ETMs et ETMd les ETM des nombres écrits en base six et dix. La construction de l'ETMs va permettre d'expliciter des éléments clés de la numération de position usuelle qui devrait pouvoir se retrouver (spontanément de la part des étudiants-professeurs ?) dans l'ETMd. Un travail en lien avec la géométrie et la mesure des grandeurs va permettre de reconstruire les liens nombres-grandeurs et d'enrichir l'ETMs par de nouveaux nombres. Il est attendu, de même, un transfert (spontané ?) vers l'ETMd. La question centrale, au-delà du travail sur l'ETMs est la question de la perméabilité entre l'ETMs et l'ETMd.

Nous utilisons également la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998) pour structurer les séances. En effet, les séances sont construites avec les phases de la TSD afin de faire émerger les connaissances visées : dévolution, action, formulation, validation, institutionnalisation. Les premières expériences (Peteers et Vivier, 2022) ont montré l'importance du formateur pour les phases de validation et d'institutionnalisation afin de compléter le milieu qui est insuffisant pour un travail totalement adidactique. En effet, la construction de l'ETMs et des liens avec la géométrie s'appuie naturellement sur les idées[29] véhiculées par l'ETMd et de ses liens avec la géométrie, mais certaines médiations sont nécessaires, notamment pour une construction *autonome* de l'ETMs, sans référence[30] à l'ETMd.

Ainsi, chaque séance sera structurée par la TSD et dédiée à certaines connaissances bien identifiées de l'ETM en base six, et notamment en lien avec les trois dimensions. Elles sont décrites rapidement dans la section suivante.

[29] C'est par exemple le cas pour les retenues dans les opérations ou encore l'introduction de nombres « à virgule ».

[30] Par exemple, le successeur de cinq, qui est six ou 10, qui est souvent perçu à la première séance comme un « +5 » ou le fait d'introduire des *faux-chiffres* comme 6, 7, 8 ou 9, notamment 60 pour 55+1 (Nikolantonakis et Vivier, 2016).

MÉTHODOLOGIE

Les séances ont été implémentées de janvier à avril 2022 pour trois futures enseignantes de primaire, nommées A, N et S, en troisième année de licence pluridisciplinaire à l'Université Paris Cité. Avec le pré-test et les autres modules de mathématiques, il est à signaler que les trois étudiantes sont d'un niveau faible, ayant très peu de connaissances sur les mathématiques nécessaires pour devenir professeur des écoles.

La séquence est pour l'essentiel celle de 2019 (Peteers et Vivier, 2022) avec quelques adaptations et notamment une centration plus affirmée sur les nombres et un cadrage théorique plus serré par l'élaboration des séances avec la TSD et la ThETM. L'un des auteurs est le formateur, l'autre a un rôle d'observateur, mais les deux interviennent dans les séances afin de débloquer certaines situations, essentiellement en posant des questions ou en rappelant certains points, en s'interdisant au maximum de donner les connaissances qui doivent émerger des séances.

Les séances S1 à S6 sont prévues intégralement en base six, tout appui sur un travail en base dix est interdit. Néanmoins, des évocations de la base dix sont possibles et attendues : pour pouvoir avancer dans la construction de l'ETMs, par habitude (notamment pour dire les nombres ou calculer $3+4$ ou 3×5) ou encore, des parenthèses de la part des formateurs, pour faire des liens entre leurs difficultés en base six avec les difficultés des élèves de primaire en base dix.

Le recueil de données comprend les productions écrites des étudiantes (des feuilles de travail seront distribuées et récoltées à l'issue chaque séance), les notes d'observation, ainsi que des captations vidéo des séances. Les données sont analysées avec la théorie des ETM et notamment avec les dimensions sémiotique (signes et processus de visualisation), instrumentale (artefacts matériels et symboliques et processus de construction) et discursive (référentiel théorique et processus de preuve).

Afin de répondre à la question de recherche, nous avons ajouté une séance S0 et une séance finale SF, respectivement de pré-test et de post-test. La séance S0 est constituée d'un entretien individuel oral, avec un support écrit, qui traite des connaissances en base dix que nous souhaitons voir évoluer par la formation. Elle est constituée principalement d'exercices de mathématiques et d'analyses de production d'élèves de primaire et se focalise sur les sujets suivants : fonctionnement du système décimal, écritures des nombres, techniques opératoires, définition de π, calcul de $\sqrt{3}$, unités et sous-unités de mesure, périmètres et aires de surfaces géométriques. Après le travail expérimental en base six, la séance SF reprendra les thèmes précédents (avec des tâches modifiées) en base dix pour tenter d'identifier des évolutions dans les trois dimensions de l'ETM en base dix.

Les séances S1 à S3[31] sont centrées sur l'élaboration de l'ETMs pour les nombres entiers naturels avec un appui fort pour S1 sur les travaux de Chambris (2010) et de Tempier (2013). Les principales notions abordées sont : numérations écrite et orale avec les unités de numérations, aspects ordinal et cardinal, addition et soustraction (tables d'addition), multiplication et division (tables de multiplication) avec des techniques opératoires (du même type que celles de la base dix en usage en France).

Les séances S4 à S6 s'appuyaient sur un travail conjoint en géométrie (calculs de périmètres et d'aires d'un hexagone, triangle équilatéral, carré, cercles, rectangle) pour développer l'ETMs avec les nombres *sécimaux* et rationnels (écritures à virgule et fractionnaires) avec une extension des opérations, le nombre π et les racines carrées. L'objectif est de connecter les ETMs et l'ETMg des grandeurs, en conservant le mètre comme référence, en faisant des liens avec les unités de mesure et la création d'une règle graduée. Il est prévu à ce stade d'introduire un programme écrit en *Scratch*, rédigé par les formateurs, effectuant de manière automatique additions et multiplications de deux nombres entiers codés en base six afin d'automatiser les calculs pour que ceux-ci ne soient pas un frein aux déroulés des séances. La fin de la séance S6 a proposé un travail sur la mesure des angles, en conservant le degré comme référence, ce qui permet d'introduire la nécessité de la conversion des nombres de la base dix à la base six (pour les mesures des angles plein, plat et droit).

La séance S7 était dédiée à l'automatisation des conversions entre bases six et dix[32], avec l'objectif de mettre en évidence les deux procédures de conversion d'une base à une autre (calcul dans la base finale à partir de l'écriture polynomiale dans la base initiale ou division successive dans la base initiale avec pour diviseur la base finale).

La séance S8, après le test individuel, se proposait de faire une comparaison de différentes bases ayant existé dans l'histoire de l'humanité.

LES TÂCHES SUR LES POLYGONES RÉGULIERS : NÉCESSITE DE NOUVEAUX NOMBRES

La séance S4, ainsi qu'une partie de S5, propose un hexagone régulier de périmètre 1 m qui est tracé sur une feuille de format A3. Il est demandé la longueur du côté, ainsi que les longueurs des côtés d'un triangle équilatéral et d'un carré, tous deux de périmètre 1 m, et de les tracer. Ce travail est d'abord proposé de manière individuelle, pour favoriser les approches différentes. Les étudiantes sont plus dans une phase d'action, même si des formulations et des validations apparaissent. Après cette phase qui a duré environ 1 h, un regroupement autour d'une table avec une discussion collective s'ensuit qui se compose d'une phase de formulation et d'une phase de validation. Il est ensuite demandé de calculer les aires de ces polygones réguliers. Les étudiantes peuvent partager leurs idées, se questionner, s'aider, ou

[31] Prévues à l'origine sur 4 séances, mais trois ont suffi.

[32] Initialement, nous voulions étendre le travail à d'autres bases, toujours plus petite que dix, mais cette séance fut difficile pour les étudiantes et nous nous sommes focalisés sur les bases six et dix.

bien travailler seules pendant un temps – elles sont habituées à ce fonctionnement qui est celui en vigueur depuis S1. Les chercheurs peuvent relancer, proposer de nouvelles tâches, demander de clarifier des formulations, demander une validation.

Les étudiantes ont à leur disposition les connaissances sur l'ETMs pour les nombres entiers, et notamment les techniques opératoires que l'on peut interpréter comme des artefacts symboliques et une feuille rappelant le vocabulaire et les tables d'addition et de multiplication, ainsi que de leurs connaissances de la géométrie et des grandeurs, principalement dans l'ETMd. En outre, des artefacts sont à disposition pour le travail géométrique : compas, règle et équerre sans graduations (elles ont été effacées), ficelle, lacets (voir une utilisation en figure 1), ruban adhésif, ciseaux, papier calque. Comme pour les premières séances, il est interdit de développer tout travail dans le système décimal (donc sans mesure dans le système métrique usuel).

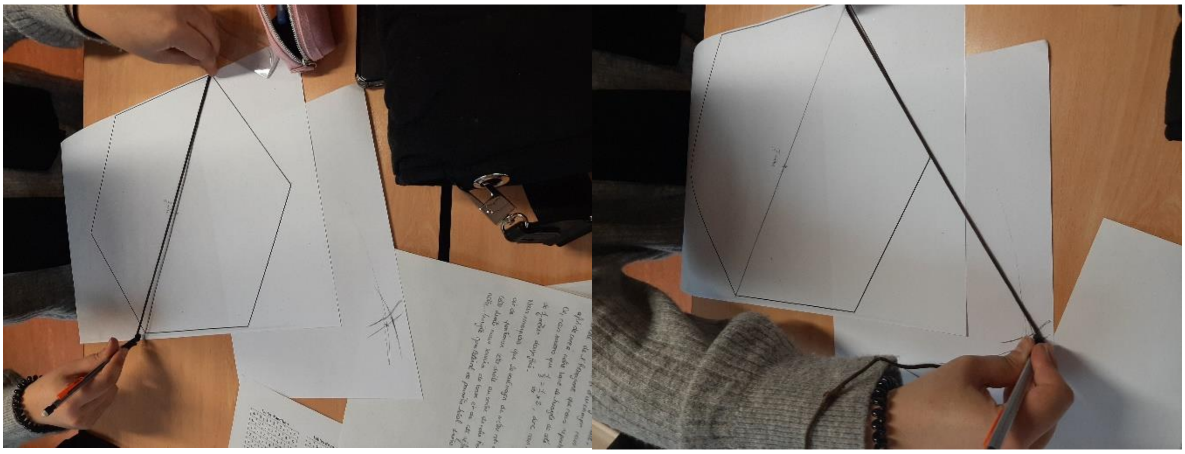


Figure 1 : S utilisant un « compas-ficelle » pour reporter des longueurs dans le tracé du triangle équilatéral

Il est à noter que les nombres qui sont écrits ci-dessous sont tous en base six, conformément au déroulement de la séquence.

Longueurs du côté de l'hexagone

S et A, qui ont un profil plus scientifique, proposent 0,1 m pour la longueur du côté de l'hexagone, puisque l'on a un sixième de m. Elles sont bien surprises lorsque N propose une tout autre approche avec un sous-multiple du m qu'elle nomme « heximètre »[33] en s'appuyant sur leur numération orale où « hexa » désigne le nombre 100 (c'est-à-dire six fois six) : « alors moi j'ai mis que 1 m c'était hexa *hexi*mètre » et S s'exclame « hein ! ». N poursuit « et du coup, quand on divise par six, ça nous fait hexa divisé par six et ça nous donne six […] donc la longueur d'un côté c'est six *hexi*mètre », que l'on note 10 hm. La confrontation des deux propositions rend nécessaire une validation, le problème est suggéré par le

[33] En fait, N propose hexamètre, qui est impropre car c'est alors un multiple du mètre. Cela est repris au début de S5, et elles conviennent, collectivement, de l'appeler « heximètre » pour un hexième de mètre, un mètre fractionné en six puis encore en six. Dans la suite, pour éviter toute ambigüité, nous employons systématiquement *hexi*mètre, même si dans S4 c'est le terme hexamètre qui était employé.

chercheur. S énonce parfaitement : « il faut voir si 0,1 m équivaut à 10 hm ». Après quelques min, une aide est apportée : « quelle est la définition de l'*hexi*mètre ? quelle est la définition de 0,1 ? ». L' *hexi*mètre est compris comme un sixième d'un sixième du mètre, ce que N énonce comme « ben c'est couper en hexa alors ! ». Le terme « hexième » apparaît pour désigner 1/100 et on arrive à la définition de l'hm qui est « un hexième de m ». Cela permet alors à A de valider l'équivalence : « 0,1 m, et 0,1 fois hexa ça donne six, le six *hexi*mètre de N ». L'ensemble de ces éléments sont institutionalisés.

Du point de vue de l'ETMs, on a la production de nouveaux signes pour écrire de nouveaux nombres, par importation du système décimal, et du point de vue de l'ETMg on a la production de sous-unités du m, par transposition du système métrique usuel. La question de la validation, non seulement permet de rapprocher l'ETMs et l'ETMg mais permet en outre l'enrichissement des référentiels théoriques. En effet, la discussion aboutit à l'égalité en prenant conscience que 0,1 c'est un sixième dans l'ETMs, que l'hm c'est un hexième de m et que donc 0,1 m c'est 0,1×100 hm, soit 10 hm (Figure 2).

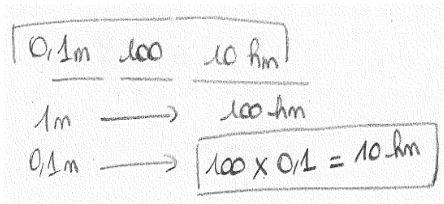


Figure 2 : trace écrite de S lors de la validation collective

Longueurs des côtés du triangle équilatéral et du carré

La longueur du côté du triangle équilatéral ne pose pas de problème particulier : 0,2 m pour A et S et 20 hm pour N. Le tracé est plus problématique, mais toutes les trois y sont arrivées (voir par exemple la Figure 1 pour S). La confrontation des deux résultats n'est plus une surprise compte tenu du travail précédent.

Pour le carré, en revanche, les points de vue sont différents : S propose 1/4 m, A également mais en faisant le calcul de la division elle trouve 0,13 m et N donne 13 hm en disant que c'est un côté de l'hexagone plus la moitié d'un côté, et la moitié de 6 c'est trois.

Dans cette phase, les nouveaux objets définis dans les référentiels théoriques permettent des calculs avec une extension des techniques opératoires des nombres entiers. Les artefacts symboliques s'adaptent sans problème aux nombres écrits avec une virgule dans le système sécimal.

Aires des polygones réguliers

Cette phase a été très riche. Pour le carré, même si elles n'ont pas commencé par celui-ci, le calcul est assez aisé et permet de continuer à rendre opérationnels les nouveaux nombres, ici avec la multiplication.

Pour le triangle équilatéral et l'hexagone en revanche, c'est moins aisé et elles ont pris des voies différentes, mais complémentaires, que l'on résume ci-dessous :

S remarque, entre autres, que l'hexagone peut se décomposer en 6 petits triangles équilatéraux et que le triangle équilatéral en contient 4. Cela est important car, si on a l'aire du triangle équilatéral, alors on a l'aire de l'hexagone, et réciproquement (rapport 4/6). Cela sera d'une grande importance pour ce calcul.

Toutes essayent d'appliquer la formule de l'aire d'un triangle. Mais si on a la base, 0,1 m ou 10 hm, la hauteur reste à déterminer. A et S utilisent le théorème de Pythagore ce qui mène à la recherche de la racine carrée de 0,03 (Figure 3). A essaye de la trouver en faisant des multiplications « à la main », mais c'est long et elle fait quelques erreurs. Elle finit par abandonner, mais N a trouvé une valeur approchée égale à 14,5 hm en reportant des longueurs et des moitiés de longueurs connues avec des estimations visuelles. A vérifie alors que 0,145 m est proche de la valeur de la racine carrée qu'elle cherchait.

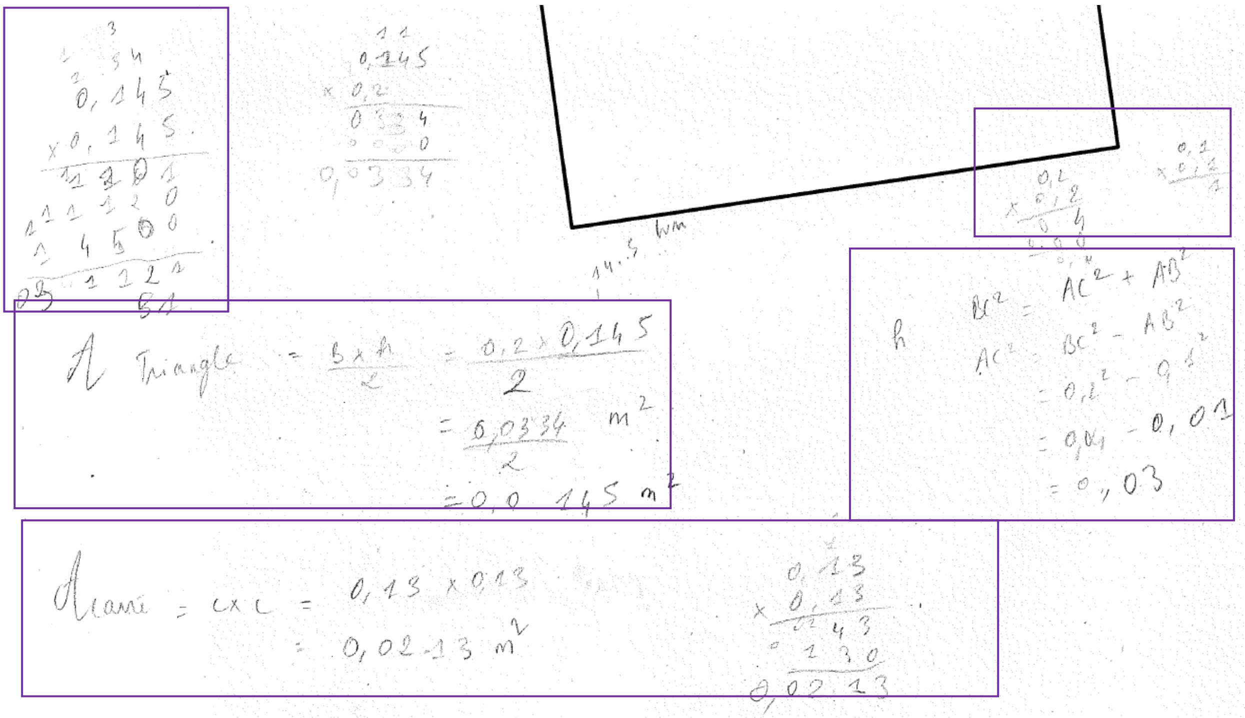


Figure 3 : trace écrite des calculs de A, les cadres sont ajoutés pour permettre de bien visualiser les différentes parties : vérification de la valeur 0,145 comme valeur approchée de la racine carrée de 0,03, calcul de l'aire du triangle, théorème de Pythagore et essais de calcul de la racine carrée (il y en avait d'autres), calcul de l'aire du carré

Tous les éléments importants de S4 sont repris en début de S5, pour une institutionnalisation. On conclut par l'aire de l'hexagone qui est l'aire du triangle équilatéral multiplié par six et divisé par 4 (au début de S5, Figure 4). N s'exclame, après quelques instants de réflexion signe que ce n'était pas évident, que « faire fois six c'est facile, il suffit d'ajouter un zéro et c'est tout ! ».

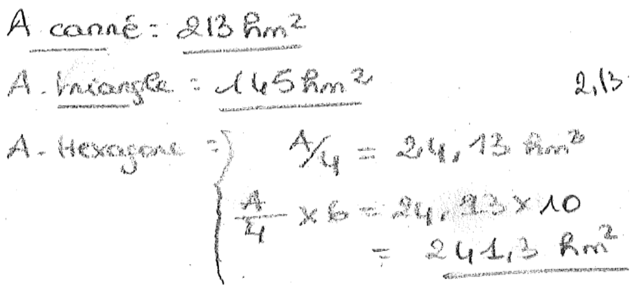


Figure 4 : récapitulation et calcul de l'aire de l'hexagone par S en S5

Le travail conjoint dans l'ETMs et l'ETMg est très fructueux et permet de développer l'ETMs avec, maintenant, aussi les racines carrées et les fractions.

CONSTRUCTION D'UN OUTIL DE MESURE : LA DROITE NUMÉRIQUE

L'institutionnalisation et la finalisation des calculs de l'aire de l'hexagone prennent 30 min au début de S5. À la suite, il leur est présenté le programme Scratch qui constitue une calculatrice effectuant les additions et multiplications de nombres entiers en base six. Il est alors demandé de calculer l'aire d'un rectangle dont les longueurs des côtés ne sont pas aussi simples (Figure 6). Elles sont bien bloquées. S, en interaction avec N et A, utilise la ficelle comme en S4 (Figure 5).

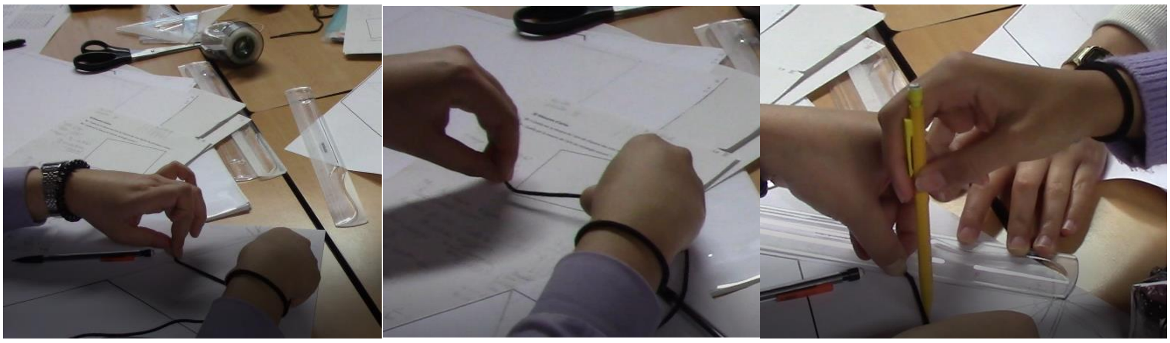


Figure 5 : report de la moitié de la longueur d'un petit triangle équilatéral sur la longueur du rectangle, mais ça ne correspond pas ; interaction des trois étudiantes

Plusieurs tentatives utilisant la ficelle puis le compas pour reporter les côtés et les diagonales apparaissent, mais sans succès. Après 8 min de cette phase N quantifie le propos en disant que la longueur qu'elle cherche à reporter est égale à 3 hm. Après 30 s, un chercheur demande ce qui fait 3 hm et N répond en indiquant un marquage sur le rectangle (voir la flèche sur la figure 6). Après 30 s, le chercheur dit « alors c'est un peu plus que 3 hm, et de l'autre côté comment on pourrait faire ? », N « c'est long 3 hm ». 1 min plus tard, le chercheur continue : « là c'est un peu plus que 3 et la largeur ce serait combien à peu près, à vue de nez ? ». Après une nouvelle relance, N s'avance : « à peu près 2 et demi » et le chercheur reprend « entre 2 et 3 ». Ces médiations avaient pour objectif de mettre sur la voie d'un encadrement entre deux valeurs sécimales, pour pousser vers une meilleure précision et la création d'une règle graduée pour les mesures de longueur. Ce travail a été très long malgré les nombreuses questions pour orienter le travail, comme avec : « comment on peut être sûr que la longueur de ce côté est comprise entre 2 et 3 ». N pense plutôt à ajouter ou soustraire des longueurs connues, ou des moitiés de longueurs connues, pour trouver la mesure des côtés du rectangle (figure 6). Elle trouve la largeur 2,13 hm en calculant 13:4=2,13 car elle remarque que la largeur est (environ) le quart de la longueur du carré de périmètre 1 m (valeur obtenue après 17 min). N tente juste après de reporter cette longueur, maintenant connue, sur la longueur du rectangle.

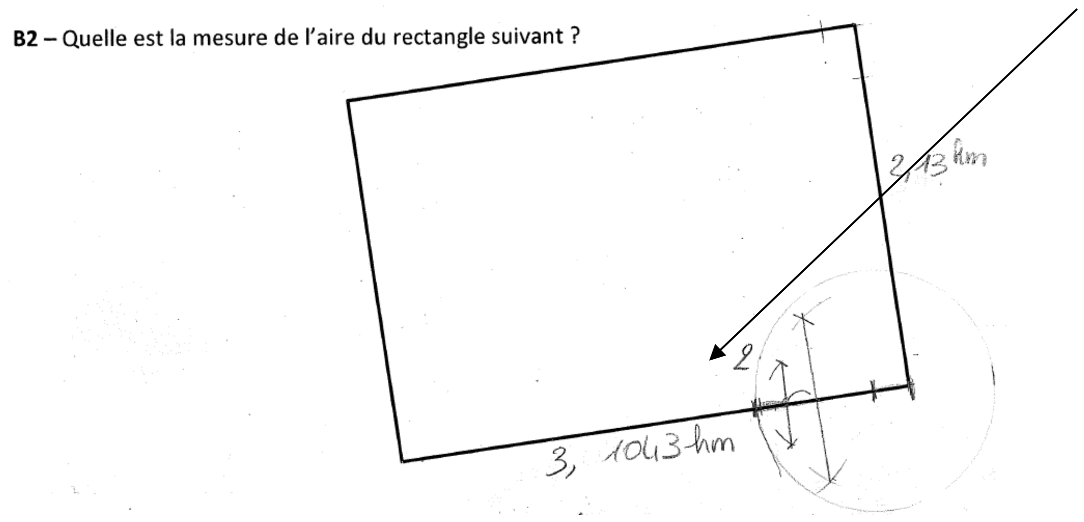


Figure 6 : Mesure des longueurs du rectangle par N

5 min après l'obtention de la largeur, S prend la règle pour essayer de mesurer, le chercheur saisit l'occasion pour dire que les graduations sont effacées, que ce n'est pas permis, mais surtout pour mettre dans le milieu le fait qu'on a besoin d'une règle graduée : « c'est tentant [en brandissant la règle graduée usuelle] mais ça ne peut pas fonctionner car c'est en base dix ». Cela n'a pas suffi pour les mettre sur la voie.

32 min après le début du travail sur le rectangle, N a trouvé une mesure de la longueur, l'aire est donc calculable. Un point collectif est alors effectué : N a soustrait 2,13 hm (la largeur) à 3 hm, elle fractionne en 2, puis encore en 2 avec des médiatrices (figure 6) et le segment obtenu correspond à ce qui manque au-delà de 3 hm. Il ne lui restait plus qu'à calculer.

Le chercheur énonce, en disant que c'est compliqué, mais que c'est le principe de base de la mesure, on stocke des mesures connues et on refractionne pour avoir des mesures de plus en plus précises. Il enchaîne : « alors, vous êtes tout le temps parties sur *diviser par deux* […] est-ce qu'on aurait pu diviser par autre chose que par deux ? », puis « trois on a vu que c'était plus grand, mais deux on l'a pas, est-ce qu'on peut l'avoir ? c'est quoi comme longueur 2 hm ? ». Sans réponse, il poursuit : « parce que 3 on l'a facilement, on l'avait déjà la semaine dernière, hein ! c'est la moitié du côté de l'hexagone ». Après une vingtaine de secondes, elles répondent « on partage le côté [de l'hexagone] en 3 ». La nouvelle tâche, explicite, est de trouver la longueur 2 hm (avec rappel de la procédure utilisant le théorème de Thalès vu dans un autre module d'enseignement). La réalisation des tracés, avec aide, prend 6 min. Puis, il demande encore : « alors si on continue comme ça qu'est-ce qu'on peut avoir de plus ? » la réponse de S, après quelques secondes de réflexion est « 1 hm » qu'on peut obtenir soit en prenant la moitié soit par soustraction entre 3 hm et 2 hm. En fait, il était déjà présent sur la figure de S qui s'exclame, au bout de 2 min « ah c'est ça ! ». On demande alors de vérifier que la largeur du rectangle est bien comprise entre 2 et 3 et la longueur entre 3 et 4. C'est ce que S fait en reportant à l'aide du compas sur le côté de l'hexagone (figure 7).

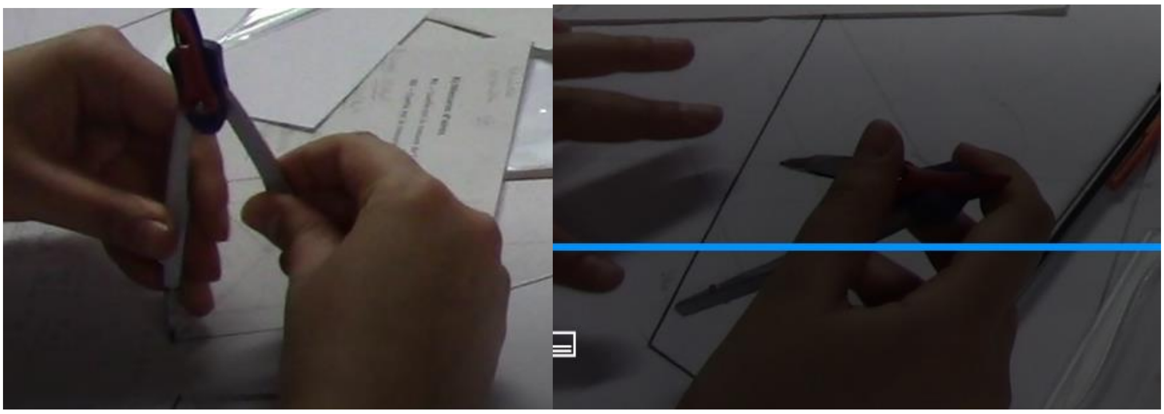


Figure 7 : encadrement par S de la largeur par 2 et 3 heximètre

S commence à graduer son côté en mettant des nombres, le chercheur signale que le 1 est mal placé (à une extrémité) et qu'à l'autre extrémité on devrait mettre 10 et non 6. N relève en disant qu'on devrait mettre 0 à la première extrémité et de compléter avec 1 et 5 en reportant 1 hm. Le chercheur reprend alors son idée initiale : « C'est intéressant ça, et vous voyez qu'avec ça on voit tout de suite que la longueur est entre 3 et 4 et la largeur entre 2 et 3, plus proche de 2. On n'a pas les valeurs exactes […] comment on pourrait faire pour avoir quelque chose de plus précis ? ». Une étudiante répond « diviser encore ». À la nouvelle question du chercheur « oui, par combien ? », elles répondent « par 2, par 4 ou par six ». S propose de commencer par diviser par 2, mais N intervient « pourquoi tu ne divises pas directement par six, ça te ferait comme une règle ! » – non relevé par les étudiantes, ni par les chercheurs. La réalisation géométrique prend plus de 6 min, avec aide, et elles trouvent que la nouvelle longueur est un trilimètre (un trilième de mètre). Puis, le report des longueurs sur le côté ainsi gradué mène à 3,13 hm pour la longueur (durée 2 min 30) et un peu plus que 2,1 hm pour la largeur (durée 45 s).

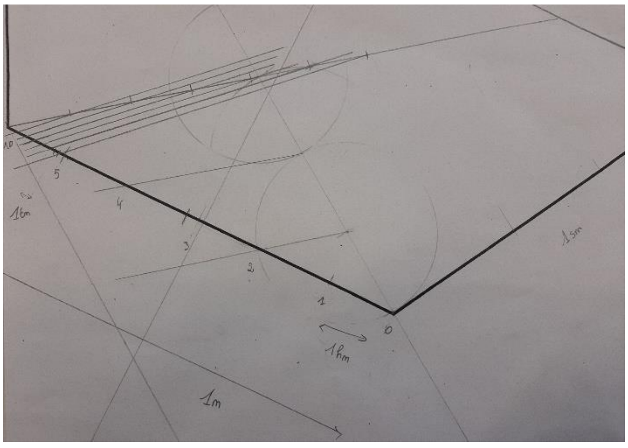


Figure 8 : la règle graduée de S, construction collective

Le chercheur appuie : « Et c'est plus pratique avec ça, et pourquoi c'est plus pratique avec ça ? ça demande un petit travail au début en coupant par six puis encore par six [pause] qu'est-ce que vous avez construit ici ? » deux étudiantes répondent « une règle », et le chercheur conclut « c'est un outil qu'on peut réutiliser ». Il a fallu une heure en tout pour en arriver à ce point.

Les liens entre les nombres, la droite numérique, la mesure des longueurs et la règle graduée ne sont pas une évidence pour les étudiantes. C'est pourtant une structuration cruciale de l'ensemble des nombres, très souvent utilisée. L'enrichissement de l'ETMs, avec la droite numérique, concerne ici les trois genèses.

À la reprise après la pause, une règle graduée en papier est donnée à chacune pour poursuivre le travail sur le cercle et pi.

CONCLUSION

Concernant l'hypothèse initiale de transfert des connaissances de l'ETMs dans l'ETMd, il est difficile de se prononcer, les analyses des pré-test et post-test n'ont pas encore été faites. On remarque tout de même une plus grande aisance dans l'expression des étudiantes pour les analyses de calculs effectués par des élèves d'école primaire. Dans le pré-test, les explications portaient beaucoup sur l'algorithme, les règles, et notamment le placement des chiffres : les discours portaient essentiellement sur la dimension instrumentale. En revanche, dans le post-test, les explications des erreurs et procédures sont plus riches avec un apport des connaissances de la numération : les explications avaient une dimension discursive affirmée.

Par ailleurs, les étudiantes n'étaient que trois et de faible niveau. Nous pensons, notamment en référence à l'expérimentation de 2019, qu'une classe ordinaire permettrait la constitution de plusieurs groupes ce qui favoriserait l'émergence de différents points de vue – à ce propos, nous savons que c'était possible de ne pas voir apparaître le point de vue des sous-unités, ce qui aurait beaucoup changé la suite des séances. Avec des étudiants ayant des connaissances plus affirmées sur les mathématiques de l'école, cela permettrait d'enrichir le milieu, de diversifier les points de vue (à nouveau) et d'aller plus vite à beaucoup d'endroits. En effet, et cela a limité la séquence, le temps mis par les étudiantes pour effectuer certaines tâches n'a pas permis de faire tout ce que nous avions prévu.

Malgré ces limitations, et à travers les quelques moments relatés dans cette étude, il est remarquable de constater l'ensemble du travail effectué par ces étudiantes, même si, bien sûr, des médiations sont nécessaires. Reprendre l'ensemble du processus de construction des nombres dans la base six permet aux futurs enseignants de se confronter aux notions qu'ils devront enseigner, de mieux les comprendre, sans doute de mieux les maîtriser, et d'expliciter des notions qui sont cachées. Il nous semble que cette étude met en lumière un autre aspect de la séquence de formation sur la base six. C'est toute la cohérence de l'ETM des nombres que nous souhaitons prendre en compte dans cette séquence ainsi que les liens avec l'ETM des grandeurs qui permet d'avancer et de structurer l'ensemble des nombres.

Enfin, on peut se poser la question de la transférabilité de cette formation expérimentale compte tenu du rôle du formateur. En effet, conserver les objectifs tout en adaptant et orientant le travail, compte tenu des réponses et difficultés des étudiants, et en maintenant une vigilance didactique et mathématique est particulièrement complexe et demande une grande attention. Nous avons conscience que certaines de nos médiations n'ont pas été adéquates.

RÉFÉRENCES

Anselmo, B., et Zucchetta, H. (2013). Du comptage à la numération-une formation sur l'enseignement de la numération. *Grand N, 91*, 71-91.

Braconne-Michoux, A., Nikolantonakis, K., et Vivier, L. (2018). La numération sécimale en formation initiale des enseignants du premier degré. Dans *Actes du 45ème colloque COPIRELEM*, 649-654. ARPEME.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage.

Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 30*, 317–366.

COPIRELEM, (2015). *Numération à l'école primaire, un scénario de formation*. ARPMEP.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. R. (Eds.). (2022). *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (1st ed., Mathematics Education in the Digital Era, Vol. 18). Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8.

Kuzniak, A., Tanguay, D., et Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM, 48*, 721–737.

Nikolantonakis, K., et Vivier, L. (2016). El ETM de Futuros Profesores de Primaria en un Trabajo sobre los Números Naturales en Cualquier Base, *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, 30*(54), 23-44.

Nikolantonakis, K., et Vivier, L. (2013). Positions numeration in any base for future Elementary school teachers in France and Greece: one discussion via Registers and Praxis. MENON, issue 2a, 99-114.

Peteers, F., et Vivier, L. (2022). Les mathématiques pour la formation des enseignants du premier degré revisitées par le système sécimal. *Grand N, 109*, 33-54.

Tempier, F. (2013). La numération décimale à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource. Thèse de Doctorat, Université Paris Diderot, Paris.

EDUCATORS' DOCUMENTATION WORK FOR THE BUILDING OF AN INQUIRY COMMUNITY WITH TEACHERS

Gabriella Pocalana, Ornella Robutti

Università degli Studi di Torino, Italy

This paper is aimed to analyse the relationships between the educators' documentation work, in the context of a professional development program for in-service mathematics teachers, and their goal of building an inquiry community with the teachers who participate. The three examples of documents, analysed according to the Documentational Approach to Didactics framework, show how the educators base their documentation work on different types of resources. The choice of these resources and their schemes of utilization are deeply connected with the characteristics of inquiry communities, involving educators and teachers in a co-work and co-learning agreement.

Key-words: *Teacher educators, documentation work, inquiry communities, teacher professional development.*

INTRODUCTION

This paper addresses some of the issues raised in ETM7 - Topic 3: *Genesis and development of mathematical work: the role of teachers, of trainers, of collective and of interactions*. The specific focus of this paper is on the work of researchers in mathematics education, having the role of teacher educators, when designing a professional development (PD) program and all the materials needed for the meetings with the teachers. To take into account their double role of both researchers and educators, we denote them with the term 'didacticians' (following Jaworski, 2006; 2008). The issue of how the didacticians choose and use *resources* to generate *documents* for the work with the teachers during a PD program has not yet been fully addressed in research, thus we aim to deepen our insight into this aspect of their work.

Particularly, we aim to analyse the relationships between the didacticians' *documentation work* (Gueudet & Trouche, 2009; 2010; Gueudet et al., 2018) for a PD program, addressed to in-service mathematics teachers, and their goal of building an *inquiry community* (Jaworski, 2006; 2008; Jaworski and Potari, 2021) with the teachers. They, indeed, have to generate *documents* for the work during the meetings, coherently with the goal that they set for the PD program. The Documentational Approach to Didactics (DAD) framework is usually applied to the study of the teachers' work and professional development, related to the design of teaching materials and activities for their students. We adopt this framework to study the didacticians' documentation work, when they have to design the teacher-sheets and all the materials to be provided to the teachers during the meetings. This study can also provide insights into the didacticians' professional development in this respect.

In the light of what has been said, the research question addressed in this paper is:

Which are the relationships between the didacticians' documentation work and their goal of building an inquiry community with the teachers participating in the PD program?

In the following, to answer our research question, we present examples of analysis of didacticians' *documents* through the lenses of DAD framework, describing how different types of *resources* are used according to specifics *utilization schemes*, to pursue the didacticians' goal for the PD program.

INQUIRY COMMUNITIES

According to Jaworski (2008), *inquiry communities* have the scope of 'improving learning environments for students in mathematics classrooms. Inquiry, in this context, is intended at different levels (Jaworski, 2006):

- at students' level, facing mathematical tasks in classroom;
- at teachers' level, developing and questioning approaches to mathematics teaching;
- at didacticians' level, exploring ways of working with teachers in professional development programs.

The members of an *inquiry community* try to assume inquiry as a way of being, thus becoming people who question, explore, investigate within every day, normal practice. (Jaworski, 2008). The inquiry process develops as interplay between known and unknown, in situations where a subject (student, teacher or didactician) is faced with a challenge. What is unknown can be approached with what is already known, thanks to the fact that data and references can suggest hypotheses and inferences (Artigue & Blomhøj, 2013).

Jaworski describes a form of collaboration among teachers and didacticians, in which all are partners in developing mathematics teaching in classroom (Jaworski, 1999). In the experience that she reports, didacticians avoid offering teachers 'ready-made' models of practice, as well as involving teachers in classroom implementations only after the teaching materials design phase is completed (Jaworski, 2006). In an *inquiry community*, all participants are learners, be they teachers or didacticians. Their learning results come from the inquiry approach to practice and from the effort to improve the existing practices, including teaching and teacher education. Everyone engages with inquiry as a tool to develop meta-knowing, a form of critical awareness that manifests itself in 'inquiry as a way of being' (Jaworski, 2006).

In the PD program object of the present paper, the didacticians aim to follow the principles indicated by Jaworski and to engage teachers in an *inquiry cycle* (plan, act & observe, reflect and analyse, feedback) in the design process, which led to a continuous process of reconceptualization and redesign (Jaworski; 2008).

DOCUMENTATIONAL APPROACH TO DIDACTICS (DAD)

DAD framework (Gueudet & Trouche, 2009; 2010; Gueudet et al., 2018) has been introduced to study teachers using different kind of resources to prepare their lessons and to support students' learning. The term *document* is meant to indicate a set of resources combined with their scheme of *utilization*. The concept of *scheme* comes from Vergnaud (1998) and it is defined as an invariant organization of activity for a given class of situations. The definition of *document* has the same structure as that of *instrument*, according to *the instrumental approach* (Vérillon & Rabardel, 1995): *document = resources + scheme of utilization*.

Resources may be constituted by 'a textbook, a piece of software, a student's sheet, a discussion with a colleague'' (Gueudet & Trouche, 2009, p. 205). The *scheme* of *utilization of a resource* (or a set of resources) includes *operational invariants*, which are cognitive, invisible, aspects guiding the action, and usages, which are observable regularities in the action. Therefore, the definition can be written, more precisely, as *document = resources + usages + operational invariants*. The process by which a set of resources is transformed in a *document* is called, by Gueudet and Trouche, *documentational genesis*, while the work carried out by teachers who generate documents is called *documentation work*.

The main aim of DAD framework is to understand teachers' professional development by studying their interactions with *resources*, including the selection, modification, adaptation and design of (new) *resources* (e.g. Gueudet & Trouche, 2010). However, there are studies (e.g., Kieran et al., 2013) in which DAD framework is applied to the work of researchers, who design *documents* for students. Psycharis & Kalogeria (2018), instead, carried out an analysis of trainee educators' PD path to become teacher educators. Their PD was expected to develop through their design of *resources* for teachers, in the context of a teacher PD program.

Our study has some common points, but also some differences, with respect to the two studies mentioned above (Kieran et al., 2013; Psycharis & Kalogeria; 2018). In fact, we aim to study the *documentation work* of researchers, who are teacher educators in the context of a teacher PD program (didacticians). The *documents* designed by the didacticians are not directly addressed to students, but to the teachers involved in the PD program. In this sense, we present a novelty element in respect to the application of the DAD framework. Furthermore, we aim to connect didacticians' *documentation work* with their goal of building an inquiry community with the teachers participating in the PD program. So, in this paper, we describe a wide range of *resources*, material and human involved in the didacticians' documentation work and the *documents' schemes of utilization*, based on the didacticians' goal for the PD program.

METHODOLOGY

The context

The PD program analyzed in our study is part of the Turin University project SSPM: 'Scuole Secondarie Potenziate in Matematica', which is inserted in the Italian national project 'Liceo Matematico'[34]. The national project is mainly directed to upper secondary schools, but the Turin experience also involves primary and lower secondary schools, in a common overall approach to mathematics teaching and learning. The educational/institutional aim of the project is to provide additional mathematics classes (at least 33 per year) to the students, held according to the 'mathematics laboratory' approach (Anichini et al. 2004). It consists in an inclusive student-centered approach, based on problem solving and inquiry activities. To ensure that the additional hours become a real learning opportunity for students, the mathematics teachers involved in the project have to follow every year a PD program, held by educational researchers of the university department of reference.

The PD program, object of the present study, is directed to lower secondary school (grades 6-8) in-service mathematics teachers, started in 2017 and is focused on the inquiry-based approach (Artigue & Blomhøj, 2013). The participants are 17 teachers who have attended the program from the start and the didacticians are the two authors. 8 of them have a degree in mathematics or physics, while 9 have a degree in biology, natural sciences or agriculture. The majority of them are women, there are only 3 men. They are all experienced teachers, only two of them have less than 10 years of service. During the year that we are analyzing (2020/2021), the program was held online, due to Covid-19 pandemic restrictions. It consisted of 10 meetings of 2 hours (about one meeting a month) with the didacticians and of 33 hours of classroom implementations, in charge of the teachers. The program was held by the first author – PhD student in mathematics education - under the supervision of the second author. The meetings with the teachers were structured in different moments: they started altogether in a common session, when the didacticians provided teachers with a teacher-sheet, containing hints for the design of tasks for students and questions for the teachers. This phase was followed by the group work moment, in which teachers, divided in groups of three/four in different sub-sessions, completed the task design for students and answered the questions. The final moment involved teachers and didacticians altogether again for collective reflections and discussions. After the meetings, the teachers were asked to carry out classroom implementations and to report about them in the subsequent meetings.

Data collection and data analysis

For this study, part of a broader project, we collected data from all the teacher-sheets and the slideshows created by the didacticians for the work with the teachers participating in the PD program (through Moodle platform), during the year 2020/2021. We, furthermore, collected data from the teachers' task design

[34] https://www.liceomatematico.it/torino

proposals, from their reports of classroom implementations and from the transcript of the collective discussions, among teachers and didacticians, occurred during the meetings of the PD program.

We present an analysis of a subset of the data collected. In particular, we analyze the teacher-sheets provided by the didacticians during the 7th and the 8th meetings of the PD program, containing the tasks for the teachers. Besides that, we analyze the slideshow presented during the 7th meeting to provide ‘theory pills’, short excerpts from the literature, which could constitute theoretical justifications for the teachers’ choices regarding the design of the tasks for students. We study these elements as ‘material parts’ of *documents*, tracing the different types of *resources* on which they are based, including excerpts of collective discussions with the teachers and teachers’ task design proposals. For each *document*, we identify the associated scheme of utilization, according to the DAD framework. In parallel, we trace evidences in the *documents* of connections with the didacticians’ goal of building an *inquiry community* with the teachers.

RESULTS AND DISCUSSION

All the teacher-sheets provided by the didacticians during the PD program meetings, have the same structure: a first section (Fig.1) with ideas and hints for the mathematical task to be presented to the students, and a second part devoted to the requests for the teachers. Analyzing these teacher-sheets and the slideshows presented during the meetings as ‘material parts’of *documents*, according to the DAD framework, we can identify some of the *resources* on which they are based and their *scheme of utilization*. We can also distinguish the motivations underlying their usages and their operational invariants, recognizing the didacticians’ goal of building *an inquiry community* with the teachers. We present the analysis of some excerpts from two teacher-sheets, provided by the didacticians during the 7 th and the 8th meetings, and from a slideshow presented to the teachers during the 7 th meeting. All the excerpts presented in the following section are translated from the Italian by the authors. Teachers’ names are all pseudonyms.

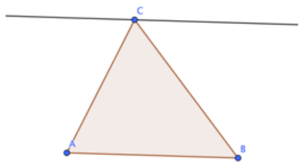
7th meeting of the PD program – 1st and 2nd documents

During the 7th meeting, the didacticians proposed to the teachers ideas and hints for a mathematics task for their students, entailing the exploration of the concept of area of a triangle (Fig. 1). With that task, the students should develop the awareness that they can construct infinite triangles with the same area, keeping the base segment fixed. The exploration of the situation is meant to prompt students to understand where they have to put the third vertex, in order to keep the measurement of the height, and therefore of the area, always the same. An input is provided to favour the production of conjectures about how many triangles can be constructed with the same base segment and the same area. A figure is inserted in the teacher-sheet as example of one of the possible positions of the third vertex. The didacticians did not provide the complete student-sheet, ready to be presented in classroom, but only the teacher-sheet, which constituted the 'material part' of the first *document* analyzed in this paper, generated by the didacticians.

The *scheme of utilization* of this document is based on the idea that the teachers have to complete the task design for their students and be engaged in reflections on their design activity. In the 'Task design' section of the teacher-sheet there are, in fact, explicit requests in this direction: 'As a group, design the activity sheet to be provided to students'. The insertion of this kind of request in the teacher-sheet is a *rule of action* (Gueudet & Trouche, 2009) for the didacticians' *documentation work*, that is a component of the *usages*, a regularity in the didacticians' action in all the meetings. In the *operational invariants*, we can recognize the didacticians' goal of involving teachers as partners in the phase of task design for their students, a typical aspect of *inquiry communities*. The subsequent request for the teachers, in the 'Justification of task design' section of the teacher-sheet (Fig.1), was to motivate and justificate their design choices. Particularly they had to justify their choice regarding the proposal of the same activity for the whole class or a differentiation for some groups of students: 'Motivate your choices regarding the proposal of the same activity for all the students or a differentiation for different groups.'

ACTIVITY
Height and area of a triangle

1) In the GeoGebra environment, assign the following situation to explore: given a triangle ABC, find another triangle with base AB and area equal to ABC.



2) Ask how many triangles with base AB and having the same area can be found and how.

3) Start the discussion about the productions of the different groups (or couples).

TASK DESIGN

As a group, design the activity sheet to be provided to students. If you deem it necessary, design separate cards for different groups of pupils.

JUSTIFICATION OF TASK DESIGN

Motivate your choices regarding the proposal of the same activity for all the students or a differentiation for different groups.

Figure. 1 Teacher-sheet provided to the teachers during the 7th meeting

This last request was introduced because there had been a lot of discussion, during the previous meetings, about the appropriateness of the inquiry activities, designed during the PD program, for all the students. The teachers, indeed, had expressed doubts and reservations, like in the following example, taken from the collective discussion of the 5th meeting:

Paola: When you propose the activity to the whole class, […] you have to guide them a little more. [...]. Furthermore, if the activity is for everyone, I don't use GeoGebra, because with paper and pencil it is more for everyone. If I put some students in front of a screen, they struggle […].

This kind of feedback can be considered a *resource* on which the didacticians based their *documentation work*, taking into account teachers' reservations and proposing a form of didactical differentiation. Many other *resources*, material and human, can be listed for this *document*, and the *resources* presented in our analysis are not intended to be exhaustive. For the idea of the mathematics task (Fig.1), a *resource* can be identified in the research literature on the affordances of dynamical geometry software. For instance, Arzarello et al. (2002) studied how the dragging functionality supports the exploration of a situation, the discovery of invariants and the production of conjectures: 'exploring drawings by moving them, looking at the ways after which their forms change (or do not change), allows users to discover their invariant properties' (p.1). The task (Fig. 1) is aimed at prompting students to use the dragging to explore the variation of the area of the triangle as the position of point C varies.

Besides the teacher-sheet with the requests for the teachers, the didacticians also generated a *document* (the 2nd *document* analyzed in this paper), whose 'material part' is constituted by a slideshow, with 'theory pills' meant to provide support and references for the task design for students. The theoretical references came from the work of Cusi et al. (2017), conducted in the context of the FAsMEd European project, regarding formative assessment. In particular, in this work, they proposed the introduction of a 'problem worksheet', the same for all the students, and a 'helping worksheet', 'aimed at supporting students who face difficulties with the problem worksheets by making specific suggestions' (p. 758). In the slideshow, the didacticians reported some crucial aspects of this proposal (Fig. 2), that they deemed useful in the specific context of the PD program:

Helping sheets are designed to be provided to students who face difficulties with specific requests, in the following situations:

- they ask for help;
- the teacher understands that they are stucked;
- the answer provided by them shows errors or problems.

To ensure that the students maintain an active role and don't become executors, the helping sheet contains one or more gradual questions, to guide the students to focus on specific strategies, or tasks to complete, such as a table or another kind of representation.

Figure. 2 Slide projected by the didacticians during the 7th meeting

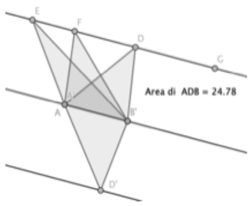
The research article by Cusi et al. (2017) is considered, in this study, a *resource* for the didacticians' *documentation work*. Other *resources* for this *document* can be listed, such as discussions among the didacticians about possible useful theoretical references for the development of the PD program, and feedbacks from the teachers. The *scheme of utilization* for this document is connected with the spirit permeating *inquiry communities*, in which the teachers develop and question different approaches to mathematics teaching. The *usages* entail the discussion with the teachers about teaching approaches which could be integrated in the theoretical framework at the base of the PD program activities. The *operational invariants*, coherently, comprehend the proposal of theoretical references, from the literature in mathematics education, which can inspire teachers' and didacticians' co-work.

8th meeting of the PD program – 3rd document

During the 8th meeting of the PD program, the didacticians proposed to the teachers ideas and hints for a mathematics task, connected to the task designed during the previous meeting. The idea is an extension of the proposal of the previous meeting, entailing further explorations and advanced questions, according to the 'inquiry as a way of being' principle, valid for students, teachers and didacticians, permeating Jaworski's conceptualization of *inquiry communties* (Jaworski, 2006). The input for the students' mathematical exploration is to verify if the equivalent triangles constructed in the previous activity are isoperimetric. In the teacher-sheet of the 8th meeting (Fig. 3), 'material part' of the 3rd *document* analyzed in this paper, there is an explicit reference to 'the previous activity' (line 1) and a drawing recalling the one in the teacher-sheet of the 7th meeting. So, the document generated by the didacticians for the previous meeting constitutes a *resource* for the didacticians' *documentation work* for the 8th meeting.

PERIMETERS AND AREAS OF TRIANGLES

In the previous activity, we understood, with the help of GeoGebra, how to find different triangles with base AB and equivalent to a given triangle ABC. Now, we can ask the students to check if these triangles have also the same perimeter.



After having ascertained that the triangles are not isoperimetric, ask the students if there is a minimum value and/or a maximum value for the length of the perimeters of the triangles equivalent to ABC.

TASK DESIGN

With your group, design the activity sheet to be provided to the students. Not to reveal the answer to a previous question in the subsequent question, consider the possibility of dividing the various points of the activity into multiple cards, with relative "help cards".

JUSTIFICATION OF TASK DESIGN

Motivate your choices regarding the proposal of "help cards", if any, for the different points.

Figure. 3 Teacher-sheet provided to the teachers during the 8th meeting

In the teacher-sheet subsections 'Task design' and 'Justification of task design', the didacticians introduced explicit references to 'the possibility of dividing the various points of the activity into multiple cards, with relative 'help cards' (Fig. 3, 'Task design'), and to 'Motivate your choices regarding the proposal of 'help cards', if any, for the different points' (Fig. 3, 'Justification of task design'). These references are based on the teachers' intervention, during the previous meeting, which explained how they decided to adapt the ‘helping worksheets’ of the FAsMEd project (Cusi et al., 2017) to their task design activity for their students. The teachers, during the 7th meeting, had described, indeed, their introduction of ‘help cards’, with specific hints, sugestions or questions for groups of students with different types of difficulties:

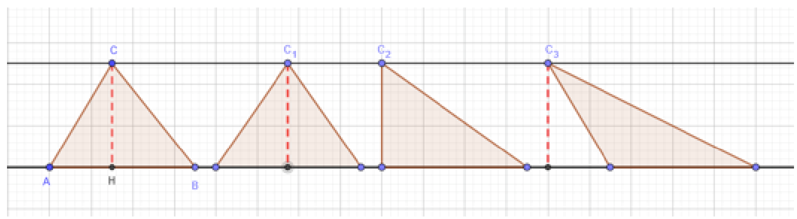
Annalisa: We give help cards to those who ask them, so we didn't think of designing entire sheets, we leave more depending on how the work in the groups goes.

This and other similar interventions in the collective discussion on teachers’ task design, occurred during the 7th meeting, has been a *resource* for the didacticians’ *documentation work* for the 8th meeting. Another *resource* can be identified in the teachers’ task design proposals, based on the teacher-sheet of the 7th meeting. We present an example of teachers’ task design, from which the didacticians could understand the teacher’s need to prepare different ‘help cards’, with diverse types of prompts for different groups. The same teacher, indeed, proposed three different ‘help cards’, of which we show the first two (Fig. 4, Fig. 5).

ACTIVITY
Height and area of a triangle

Look carefully at the figure below. As you can see, point C has been moved along the line.

Try to describe what happened to the triangle.



a) Does the area of the 4 triangles change?

b) Can other triangles be drawn with the same base and the same area? How many?

c) Which of the following statements are true?

	TRUE	FALSE
The triangles have the same area because they have the same base and the same height.		
The triangles have the same height because the distance between two parallel lines is constant.		
The triangles have different perimeters.		
The triangles have different areas.		

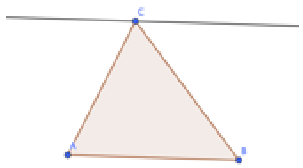
Figure. 4 ‘Help card’ 1 proposed by a teacher for the task design activity of the 7th meeting.

The first ‘help card’ (Fig. 4) contains examples of triangles, already drawn, with the same base and height, in which the vertices opposite the bases of the different triangles are all on the same straight line. Below the drawings are questions aimed to prompt students to reflect if the area of the triangles changes and why. Finally, a True/False table is proposed, aimed to make students reflect on the relationships between heights, bases, areas and perimeters of the triangles.

The second ‘help card’ (Fig. 5), designed by the same teacher, contains different kinds of stimuli for students. There is the same image of the teacher-sheet provided by the didacticians, followed by additional questions, in respect to those proposed by the didacticians, to help students focus on the triangles' heights: 'In addition to the base and the area, what does not change?'; 'Must the triangles have same height or different height?'.

ACTIVITY

Height and area of a triangle



a) Draw another triangle in order to respect the conditions:

"... same base AB and area equal to ABC".

b) Draw other triangles, different from the previous ones, always respecting the two conditions.

In addition to the base and the area, what does not change?

c) Must the triangles have same height or different height?

d) Do you think it could be useful, to draw another line in addition to the one that is already there?

Figure. 6 'Help card' 2 proposed by a teacher for the task design activity of the 7th meeting.

The teacher declared that the two 'help cards' had been designed for groups of students who experienced different types of difficulties. This idea was picked up by the didacticians, who inserted in the teacher-sheet for the 8th meeting the explicit request of considering the possibility of designing different 'help cards' (Fig. 3).

As in the other *documents* analyzed in this paper, also in the case of the 3rd document, teachers' feebacks, reflections and task design activities constituted a *resource* for the didacticians' *documentation work*. This aspect is crucially connected with the didacticians' goal of involving teachers in a co-working and co-learning partnership, in the spirit of an *inquiry community*. The *scheme of utilization* in inspired, as in the 1st *document*, by the principle of involving teachers in the task design activity and in reflections on task design. This is testified by the request: 'With your group, design the activity sheet to be provided to the students […]' (Fig. 3, 'Task design'), and 'Motivate your choices […]' (Fig. 3, 'Justification of task design'). The *usages* and the *operational invariants* are connected with the didacticians' goal of involving teachers as partners in the phase of task design for their students.

CONCLUSIONS

In this paper, we aimed to analyze the relationships between the didacticians' *documentation work* (Gueudet & Trouche, 2009; 2010; Gueudet et al. 2018) and their goal of building an *inquiry community* (Jaworski, 2006; 2008) with the teachers participating in their PD program. To address this issue, we analyzed three documents, generated by the didacticians for two consecutive meetings, through the lenses of DAD framework. We traced connections between the *resources* involved in the *documentational genesis*, their *scheme of utilization*, and the didacticians' goal for the PD program.

The results show that the choice of the *resources* for the *documentation work*, as well as the *usages* and the *operational invariants* of the analyzed *documents*, are deeply influenced by the didacticians' goal of building an *inquiry community* with the teachers. The teachers, indeed, have been involved in the task design for their students and in collective reflections on the justifications for their task design. The teachers' feedbacks, doubts, reservations and proposals constituted *resources* for the genesis of didacticians' *documents* for subsequent meetings. This form of co-working and co-learning has been pursued by the didacticians thoughout the year of the PD program analyzed in this paper and this is evidenced in their *documentation work*.

These findings can shed light on the didacticians' professional work and development, regarding the design of a PD program and, particularly of materials (teacher-sheets, slideshows etc ...) for the meetings with the teachers, coeherently with the goal of the PD program itself. Further research could be conducted to highlight the distinctions between what was foreseen by the didacticans (potential space of work) for the PD program in terms of implementation, and what was actually implemented (actual space work) in order to take into account teachers' feedback.

REFERENCES

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L. and Robutti, O. (Eds.). (2004). *Matematica 2003. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica (ciclo secondario)*. Matteoni Stampatore.

Artigue, M., Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education 45*, 797–810.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *ZDM Mathematics Education*, 34(3), 66–72. https://doi.org/10.1007/BF02655708

Cusi, A., Morselli, F., & Sabena, C. (2017). Promoting formative assessment in a connected classroom environment: design and implementation of digital resources. *ZDM Mathematics Education*, 49(5), 755–767.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics*, *71*(3), 199–218.

Gueudet, G., & Trouche, L. (Eds.). (2010). *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. Rennes/Lyon: Presses Universitaires de Rennes/INRP, Paideia. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00519055

Gueudet, G., & Trouche, L. (2012). Teachers' work with resources: Documentational geneses and professional geneses. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Eds.). *From text to 'lived' resources: Mathematics curriculum materials and teacher development* (pp. 23–41). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1966-8

Gueudet, G., Pepin, B., Sabra, H., Restrepo, A., & Trouche, L. (2018). E-textbooks and connectivity: Proposing an analytical framework. International Journal for Science and Mathematics Education, 16(3), 539– 558.

Kieran, C., Boileau, A., Tanguay, D., & Drijvers, P. (2013). Design researchers' documentational genesis in a study on equivalence of algebraic expressions. *ZDM – Mathematics Education, 45*(7), 1045–1056.

Jaworski, B. (1999). Tensions in teachers' conceptualizations of mathematics and of teaching. In L. Burton (Ed.), Learning mathematics: From hierarchies to networks, (pp. 153–172). Falmer Press.

Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(2), 187–211. https://doi.org/10.1007/s10857-005-1223-z

Jaworski, B. (2008). Building and sustaining inquiry communities in mathematics teaching development: teachers and didacticians in collaboration. In Krainer, K. & Wood, T. (eds.). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education, vol. 3: Participants in Mathematics Teacher Education: Individuals, Teams, Communities and Networks.* Sense Publishers.

Jaworski, B., Potari, D. (2021). Implementation of a developmental model of teachers' and didacticians' learning through inquiry: design, operationalisation and outcomes. *ZDM - Mathematics Education* 53, 1073–1084.

Psycharis, G., & Kalogeria, E. (2018). Studying the process of becoming a teacher educator in technology-enhanced mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(6), 631-660. https://doi.org/10.1007/s10857-017-9371-5

Vergnaud, G. (1998). Toward a cognitive theory of practice. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 227–241). Kluwer.

Vérillon P. & Rabardel P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrument activity. *European Journal of Psychology of Education*, 9(3), 77-101.

EPISTEMOLOGÍAS PRÁCTICAS Y ACCIÓN DIDÁCTICA EN PROFESORES UNIVERSITARIOS DE MATEMÁTICAS

Inés M. Gómez-Chacón

Instituto de Matemática Interdisciplinar, Facultad de Ciencias Matemáticas,
Universidad Complutense de Madrid (UCM) (España),
igomezchacon@mat.ucm.es

En esta comunicación se reflexiona sobre el diseño de tareas como un aspecto clave en la formación del profesorado novel universitario de matemáticas. La experiencia y trabajo de campo se sitúa en el marco de un taller de desarrollo profesional con profesores en el proyecto europeo PLATINUM en España. Describimos el enfoque metodológico y sometemos a discusión qué contribución podrían hacer herramientas didácticas inspiradas en la teoría de Espacios de Trabajo Matemático (teoría ETM) en el diseño y la implementación de tareas matemáticas bajo un enfoque de Inquiry Based Mathematics Education.

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas se han incrementado las exigencias institucionales para el desarrollo profesional docente en el ámbito universitario (Martín De Diego, 2020). Sin embargo, aunque ha habido avances en propuestas de formación general docente aún queda mucho en las distintas universidades para introducirse como práctica institucional en el área de Matemáticas. El Proyecto europeo PLATINUM (2018-2021) busca responder a esta necesidad y considera entre sus líneas el desarrollo profesional del profesorado universitario de matemáticas (Gómez-Chacón, Hochmuth y Jaworski, 2021).

Uno de los objetivos del proyecto PLATINUM era desarrollar y pilotar una plataforma para el desarrollo profesional de los profesores universitarios de matemáticas de forma regular en el formato de taller "práctico" y desde enfoques colaborativos. La necesidad de una plataforma de formación de este tipo refleja la situación actual de la enseñanza universitaria de las matemáticas, en la que el profesor tiene que encontrar un equilibrio entre la preparación de los conocimientos y la reflexión sobre los métodos pedagógicos, así como familiarizarse con áreas complementarias de conocimientos que le permitan consideraciones didácticas en la asignatura que imparte. La situación institucional en la mayoría de los países tal como han analizado Ruge y Peters (2021) es que los profesores universitarios de matemáticas (matemáticos de profesión) suelen tener un acceso limitado o nulo a la información sobre los métodos pedagógicos y didácticos contemporáneos, lo que a su vez puede contribuir a la falta de motivación para utilizarlos. Además, no se puede esperar que los profesores, cuyo campo de especialización no es la educación matemática (matemática pura, matemática aplicada, estadística, etc..), se sumerjan por completo en la investigación en educación matemática para convertirse en expertos en este área. Somos conscientes de estos límites institucionales y, por tanto, nos centramos en actividades de formación desde la práctica, pero cuyos trasfondos tenga una reflexión teórica reconocida en educación matemática.

En esta comunicación presentamos algunos de los aspectos de la reflexión generada al considerar como “trasfondo” la teoría ETM para la elaboración de herramientas de desarrollo profesional. La elección de esta teoría tiene que ver con dar prioridad al contenido matemático. La crítica a los estudios sobre Inquiry based learning se han centrado en que se abordan técnicas pedagógicas generales y no las referidas al dominio de conocimiento específico.

PLATINUM y los talleres de desarrollo profesional que realizamos se basan, entre otras cosas, en la idea de crear Comunidades de Indagación (CoI) (Jaworski, 2020). La colaboración en CoIs resulta efectiva a los profesores para la indagación en matemáticas y fomenta su desarrollo profesional en la docencia de matemáticas, impulsando un mayor aprendizaje conceptual de los estudiantes. El modelo teórico de (Inquiry based mathematics education (IBME) en la educación superior del proyecto PLATINUM (Gómez-Chacón, Hochmuth, Jaworski et. al., 2021) introduce tres niveles que abordan la enseñanza y el aprendizaje a través de principios de desarrollo e interacción entre el aula y la investigación (Figura 1).

Figura 1. Modelo de tres capas para el desarrollo profesional en el Proyecto PLATINUM (Gómez-Chacón, et. al. 2021)

Siguiendo este modelo y teniendo en cuenta las restricciones institucionales de los profesores universitarios de matemáticas, nos centramos en un enfoque a pequeña escala del diseño de tareas. La cuestión planteada en las sesiones de formación es qué hace que una tarea sea una tarea IBME. En los talleres locales e internacionales del proyecto PLATINUM, abordamos esta cuestión de diferentes maneras y desarrollamos varios instrumentos. Aquí elegimos una de las herramientas desarrolladas y utilizadas para caracterizar tareas basadas en la indagación. El contenido de esta comunicación está basado en la experiencia realizada en la Universidad Complutense de Madrid (UCM) en un Taller de formación de profesores universitarios en el 2019. Dos características centrales de esta herramienta, por un lado, su uso sencillo y directo por parte de los profesores y, por otro lado, debería ser posible interpretar los efectos de la herramienta en un contexto didáctico (en este caso se eligió la Teoría ETM).

En este taller presentamos, entre otras cosas, la herramienta mencionada de apoyo a los profesores noveles en el desarrollo y caracterización de las tareas IBME. La pregunta de investigación a la que tratamos de responder en esta contribución es: ¿Qué pistas y qué márgenes posibles de actuación pudimos observar con esta herramienta? ¿Qué dificultades se presentaron? ¿Qué epistemologías prácticas y acción didáctica sustentadas por la Teoría ETM sería transferible en la enseñanza universitaria?

La estructura de esta contribución es la siguiente: en la primera sección describimos el taller de profesionalización realizado en la UCM en 2019. Seguidamente, nos centramos en el análisis de los datos de este taller y en la respuesta a nuestras preguntas de investigación. Para ello, primero abordamos los aspectos teóricos y metodológicos subyacentes. A continuación, presentamos los resultados de nuestros análisis. Por último, formulamos algunas conclusiones.

TALLER IBME PLATINUM

A continuación, describimos el contexto, objetivos institucionales, participantes y enfoque didáctico del taller.

Contexto y objetivos institucionales

El concepto del taller PLATINUM celebrado en Madrid en el 2019 se desarrolló teniendo en cuenta dos condiciones. En primer lugar, había que tener en cuenta el compromiso con otros socios de Alemania y Noruega encargados, juntamente con nosotros, de la elaboración de materiales y cursos para la formación de profesores en diferentes contextos culturales focalizando en matemáticas. En segundo lugar, el contexto de desarrollo profesional de los profesores de matemáticas a nivel institucional en la UCM. En nuestra universidad, la formación académica de los profesores noveles es una prioridad. Los aspectos del IBME trabajados en el proyecto PLATINUM debían abordarse dentro de las estructuras de los cursos existentes para profesores universitarios que se inician. Desde este punto de vista, hay principios de eficacia en el desarrollo profesional que se promueven tanto en el contenido como en los procesos de formación utilizados. El taller tiene como principios considerar los conocimientos matemáticos de los participantes las prácticas de enseñanza que desarrollan Así, los objetivos del taller fueron 1) Iniciación práctica de los profesores universitarios en un enfoque de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas basado en la indagación; 2) Desarrollo de habilidades metodológicas para diseñar tareas basadas en la indagación[35] y 3) Conocimiento de recursos: ejemplos de tareas y proyectos basados en la indagación en la enseñanza universitaria de las matemáticas.

A continuación, nos centraremos en el punto 2), teniendo en cuenta específicamente los conocimientos matemáticos que se deben enseñar.

Participantes

En el taller participaron 45 personas de 5 universidades o centros de investigación matemática diferentes. Los perfiles de los asistentes fueron: nuevos profesores

[35] http://blogs.mat.ucm.es/catedramdeguzman/proyecto-novelmat/)

universitarios de matemáticas en las facultades de Ciencias (Matemáticas, Física, Informática), las facultades de ingeniería, ayudantes de investigación en matemáticas, estudiantes-profesores de matemáticas del máster de educación matemática.

Dispositivo de formación

Duró diez horas distribuidas en dos partes complementarias entre sí. Cada parte forma una unidad por sí misma. La primera de una duración de cinco horas dirigido a profesores senior y noveles. Los contenidos fueron los siguientes: (1) Aspectos teóricos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a través de la indagación; (2) Caracterización de una tarea matemática bajo este enfoque y (3) Proyectos y tareas de indagación implementados en el aula en España por el grupo UCM (ver ejemplos en Gómez-Chacón, Hochmuth y Jaworski et. al, 2021).

La segunda parte, dirigida únicamente a los participantes de la primera parte que son ayudantes de investigación en la UCM y colaboran en la docencia. Nos centramos en los datos procedentes de estas sesiones. El objetivo y los contenidos era profundizar en diferentes aspectos de la primera parte y diseñar a partir de una tarea de referencias (Periscopio) tareas utilizando el enfoque de indagación y analizando las génesis que conducen a la formalización de los conceptos matemáticos para la enseñanza del Álgebra lineal para el estudiante de grado universitario en Desarrollo de Videojuegos.

Presentación de la situación problema: Periscopio

Este proyecto es considerado como una actividad de desarrollo profesional basada en una situación de homología que puede ser desarrollada con sus futuros estudiantes (Gómez-Chacón, Hochmuth, et. al., 2021). Tomamos como situación de partida el videojuego Silent Hunter III gameplay. Silent Hunter III, es un simulador de combate submarino para PC desarrollado por la empresa Ubisoft y publicado en marzo de 2005, ambientado en la Segunda Guerra Mundial. Si no has jugado nunca puedes ver el siguiente video de presentación del juego: Video: https://www.youtube.com/watch?v=2Xa4gWCHlFU.

Algunas de las misiones del videojuego utilizan uno de los elementos más significativos de un submarino, el periscopio. Gracias a él, los jugadores pueden ser capaces de inspeccionar gran parte del mapa, avistar las posiciones de los enemigos o establecer rutas seguras para el desplazamiento del submarino.

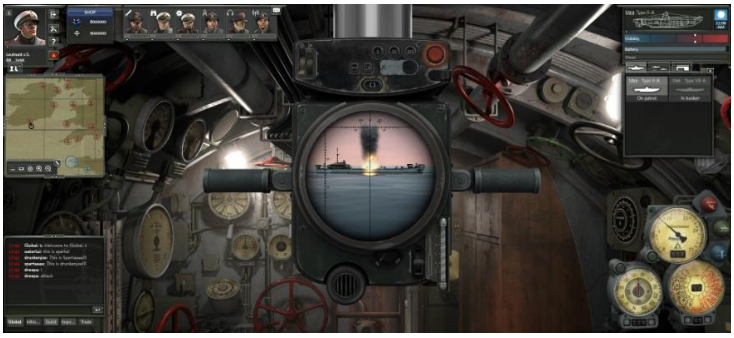


Figura 2. Periscopio de un submarino del videojuego Silent Hunter III

Tarea 1: ¿Qué tipo de actividades matemáticas le plantearías a un estudiante de primer año del grado en Desarrollo de Videojuegos (o en el Grado en Matemáticas) para la enseñanza de los contenidos de Elementos de matemáticas o de Álgebra Lineal? Describe algunas de ellas.

Tarea 2: Con ayuda del software dinámico GeoGebra crea un "hipotético" periscopio ideal que pueda desplazarse hacia arriba y hacia abajo y que gire un máximo de 45 grados, desde un punto de partida hacia cualquiera de los puntos cardinales. Previo a la realización del problema con GeoGebra deja constancia de tu proceso de pensamiento anotando pasos que darías, conocimientos matemáticos, puntos de bloqueo, etc.

Tarea 3: En caso de que hayas tenido dificultades para lograr la construcción con GeoGebra específica a qué ha sido debido: contenidos matemáticos, construcción instrumental con GeoGebra, interacción intuición-formalización, otros…

ASPECTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS QUE SUBYACEN A LA HERRAMIENTA DIDÁCTICA Y A LOS ANÁLISIS

La *Teoría de los Espacios de Trabajo Matemático* (ETM) en relación con la caracterización del desarrollo profesional ha sido discutida en distintos trabajos (Gómez-Chacón, 2022). En ellos se muestra el dinamismo de la teoría ETM para reflexionar sobre la acción del profesor en el aula y sobre elementos importantes a tener en cuenta en su desarrollo profesional. Uno de los aspectos señalados que requieren prioridad en la investigación es el de las relaciones epistémicas y cognitivas en el trabajo matemático, estudiando en qué medida se relacionan estos planos en la formación del profesorado y en la práctica docente.

Se parte de la idea que el "desarrollo profesional" participa de una epistemología del conocimiento profesional que tiene en cuenta la naturaleza contextualizada de la experiencia del profesor (conocimiento de la experiencia) y el conocimiento personalizado de la práctica. El concepto epistemología del profesor lo consideramos como esa teoría implícita de matemáticas, una especie de modelo construido para la práctica y para el uso profesional, que tiene que ver con los fenómenos transposicionales observable en las aulas. En este trabajo, el énfasis en epistemología se presenta desde dos dimensiones, desde la práctica y como una meta-perspectiva de cómo el profesor piensa y actúa sobre el conocimiento siguiendo categorías expresadas en la Teoría ETM.

Se promueve que los profesores desarrollen habilidades de diseño de tareas IBME. Para apoyar el desarrollo profesional de los profesores en este sentido, un reto es reflexionar sobre lo que significa que una tarea sea una tarea basada en la indagación en matemáticas. En este proceso de indagación el contenido y el desarrollo del pensamiento matemático es central, la herramienta que aquí presentamos fue desarrollada en la UCM (Gómez-Chacón, Hochmuth, et. al., 2021) con el fin de ayudar a identificar las características de una tarea de indagación se consideran las siguientes dimensiones: a) Apertura de las tareas (estructuradas, guiadas, abiertas) y, b) Habilitación de estrategias para que través de la indagación se favorezca en el estudiante el paso de lo intuitivo a lo simbólico y formal en el pensamiento matemático. Se exploran distintos modos de pensamiento con objeto de adquirir una comprensión conceptual (génesis semiótica-visualización, instrumental y discursiva), las conexiones (intra-matemáticas, extra-matemáticas, conceptuales) y el control o regulación. Adquirir la experiencia de enseñanza por indagación va a requerir un movimiento entre distintos niveles en la misma tarea. Para el profesor universitario plantea los siguientes desafíos:

a) graduar los niveles de indagación en el uso del concepto, de las técnicas y en el uso de regulación de la actividad por parte del profesor;

b) las relaciones en los procesos de pensamiento entre las ideas más intuitivas, informales y más formales en matemáticas.

Dimensiones indagación / Niveles indagación	Genesis en procesos de pensamiento matemático			Conexiones			Control y regulación
	Semiótica-Visualizacion	Instrumental	Discursiva	Intra-matemática	Extra-matemática	Conexiones conceptuales	
Estructurada							
Semi-estructurada							
Abierta							

Tabla 1. Niveles y dimensiones de indagación matemática

La Tabla 1 muestra una parrilla que ayudó a los participantes en la discusión de la determinación de secuencias de recorridos de indagación, visualización de conceptos y formalización y simbolización y al establecimiento de conexiones.

Un aspecto importante del uso de esta herramienta es que no pretende clasificar las tareas como tareas IBME, sino para ayudar a la reflexión de forma colaborativa y para identificar dimensiones claves a tener en cuenta en el diseño de tareas.

La utilización de esta herramienta incorporó elementos básicos de la Teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2022) como son los planos cognitivos y epistémicos y la circulación entre génesis semióticas, instrumentales y discursiva. El potencial de esta teoría es la capacidad de articular cuestiones de enseñanza y aprendizaje mediante un cuestionamiento significativo sobre el contenido y conocimientos matemáticos. Recordamos que estos profesores universitarios son matemáticos cuya formación didáctica es escasa, pero la práctica matemática fuerte -aunque a veces no traída a nivel consciente-. La Teoría ETM favorece que el profesor movilice los recursos materiales o intelectuales derivados de la cultura matemática en la que desarrolla su tarea de investigación en matemáticas. Sin embargo, al tener menos formación didáctica le cuesta la reflexión sobre el plano cognitivo, los procesos y procedimientos utilizados por los individuos en las actividades de resolución de tareas. ETM se estructura en torno a tres procesos cognitivos: visualización, construcción y comprobación. A través de la herramienta de la Tabla 1, se invita a reflexionar sobre la visualización, considerado como el proceso cognitivo asociado con la identificación y el desarrollo de un conjunto de tratamientos y transformaciones de los representamen o signos; y en el paso de las dimensiones intuitivas a la formalización, donde los aspectos semióticos y del discurso deductivo y lógico son claves.

RESULTADOS

A continuación, presentamos los resultados relativos a formas de desarrollo de tareas IMBE y procesos de pensamiento matemático representadas en la Tabla 1 y a la utilidad de esta como herramienta de reflexión didáctica.

Varios son los aspectos que la experimentación puso de relieve para la formación del profesor:

a) plano epistémico y cuestión generatriz en la tarea IBME.

b) la graduación de niveles de indagación en el uso del concepto y de las técnicas.

c) las relaciones entre las ideas más intuitivas, informales y más formales en matemáticas.

d) el uso de regulación de la actividad por parte del profesor mediante cuestiones y observaciones pertinentes.

Plano epistémico en la elección de la cuestión generatriz en la tarea IBME

Las respuestas de los participantes a utilizar Videojuegos para el diseño de tareas en las asignaturas de Álgebra Lineal o de Métodos matemáticos vienen inicialmente asociadas a preocupaciones por aspectos pedagógicos: despertar el interés y motivación de los alumnos y una forma de gestión del aula para captar su atención mediante técnicas de aprendizaje como la gamificación (game-based learning, escape room, flipped room, etc.). Sin embargo, son más escasos los profesores que desde el inicio se sitúen en el trabajo matemático. La herramienta (Tabla 1) resulta sugerente para focalizar cómo desarrollar los procesos de indagación en el trabajo matemático a modo como lo hace un matemático, destacando aspectos relativos a la ejecución y desarrollo del trabajo matemático (meta, procesos y resultados). Considerando el plano epistemológico situamos el formato de la tarea desde más estructurada a más abierta en función del contenido matemático, los procesos y los resultados; y también, reflexionamos sobre el principio de generar la necesidad intelectual epistémica en los estudiantes. La noción de necesidad intelectual está ligada a la justificación epistemológica: el discernimiento por parte de los estudiantes de cómo y por qué se ha producido un determinado conocimiento. No nos referimos solo a aspectos históricos, sino en el caso que estamos planteando a las formas en que los profesores pueden hacer conscientes a los estudiantes de la necesidad intelectual del álgebra lineal mediante la práctica. La cuestión generatriz en la tarea de referencia aparece como una posible manera de hacer vivir la actividad de resolución de problemas a partir de un conjunto de conocimientos teóricos y prácticos asociados y articulados entre sí.

Graduación de niveles de indagación en conceptos y técnicas

En relación con la pregunta: ¿Qué tipo de tareas de indagación matemática le plantearías a un estudiante de primero de Grado de Videojuegos que abordara contenidos del Álgebra Lineal? contamos con doce propuestas distintas de tareas asociadas a contenidos diferentes. Elaborado a partir de los datos por la investigadora, el mapa siguiente ilustra los temas matemáticos que subyacen en las tareas diseñadas por los participantes (Figura 3). La mayoría de las contribuciones se articulan con relación a contenidos de Álgebra y Geometría tal como se había solicitado originalmente en el dispositivo de formación. Sin embargo, algunos participantes optan por el rediseño de tareas tomando como origen otras áreas de conocimiento como geometría esférica, superficies, etc. El tema de cuaterniones surgió en la sesión de discusión de propuestas. Este tema, aunque no será desarrollado aquí, es interesante ya que parte de ir en profundidad en la modelización de videojuegos con el campo de conocimiento entre física, computación y matemáticas y dimensiones de interdisciplinariedad.

En expresión del Profesor P1EA:

Antes de la propuesta de las distintas actividades para los estudiantes, primero se ha buscado ver que contenidos relacionados con el Álgebra Lineal son los fundamentales. Desde mi punto de vista, los conceptos básicos que debe conocer son los relacionados con las matrices: propiedades de las matrices, matrices inversas, etc; sistemas de ecuaciones (lineales): resolución a través de matrices, e identificar en el espacio R^3 planos y rectas, vectores... La idea es, a través de las actividades que se van a plantear, crear una serie de actividades que involucren movimientos en tres dimensiones y que no sean complicadas para que se introduzcan los conocimientos previamente mencionados. Estas actividades serian, por ejemplo, recrear un escenario de juego que implique las tres dimensiones para localizar la posición de un personaje o sus movimientos como las que se ven en juegos que implican acción, en el cual trabajamos conceptos como distancias en R^3, rectas y vectores; aplicaciones más reales como el Video Arbitraje (VAR) pueden ser aplicaciones para introducir R^3. Con el juego planteado en cuestión, se podrían ampliar los conocimientos adquiridos, por ejemplo, introduciendo las coordenadas esféricas y las cilíndricas, así como trabajando con matrices de rotación (Informe P1EA, Tarea 1).

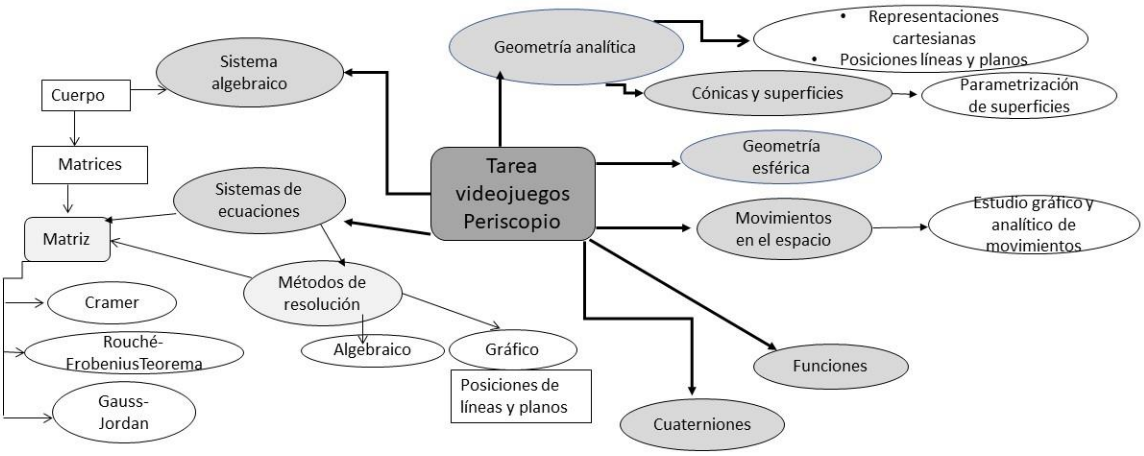


Figura 3. Mapa conceptual de temas que subyacen en las tareas diseñadas

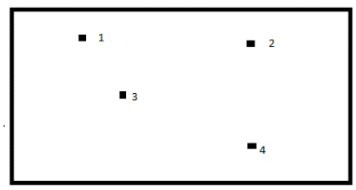
Relaciones entre las ideas más intuitivas y formales en matemáticas

Presentamos extractos de algunos ejemplos de los propuestos y donde se puede observar/analizar la contribución conjunta de los aspectos semióticos y cognitivos en el trabajo matemático. Siguiendo la circulación entre génesis se destacó:

Construcción y artefactos: se consideró las variables didácticas que se pueden derivar de las herramientas que posee el juego y que pueden ser utilizadas para la actividad matemática como son: escuadra, regla, compás, lápiz, borrador, radar y radio, además del periscopio. Se presta especial atención a la configuración matricial que tiene la pantalla del juego, planteado actividades como la recogida en la Figura 4 cuyo foco principal es el aprendizaje de matrices.

Uno de los usos más primario de las matrices es la ordenación de datos. Para introducir este uso, se puede plantear una actividad en la que, a partir de la disposición de varios objetos, en el ejemplo 4 submarinos, conseguir la matriz de las distancias.

Si se considera d_{ij} como la distancia entre el submarino i y el submarino j, se puede formar la siguiente matriz:



$$\begin{pmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{12} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{13} & d_{23} & 0 & d_{34} \\ d_{14} & d_{24} & d_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 4. Tarea propuesta por el profesor P1DP

Este enunciado propuesto por el profesor P1DP (Figura 4) plantea en el grupo de participantes la discusión de cómo las matrices se utilizan en los videojuegos con diversos fines, como por ejemplo hacer una base de datos, definir las coordenadas de objetos o personas y aplicar movimientos como: traslación, rotación y escalado.

Procesos de visualización: distintos profesores destacan, las trayectorias visualizadas a través de funciones, movimientos en el plano o movimientos y rotaciones en el espacio, y el modelado 3D para la construcción del periscopio. Particularmente de interés en relación con los procesos de visualización fue tomar conciencia de la transmisión del profesor o libro de texto habitualmente en la docencia desde el paradigma de Geometría III (geometría axiomática). La Tarea 2 ayudó a describir las génesis figurativas e instrumentales involucradas en los procesos de aprendizaje en entornos informáticos. Para el estudio de estas dos génesis se utiliza los conceptos de visualización icónica versus visualización no-icónica, lo que ayudó a la identificación tipologías de imágenes y usos de visualización (Figura 5).

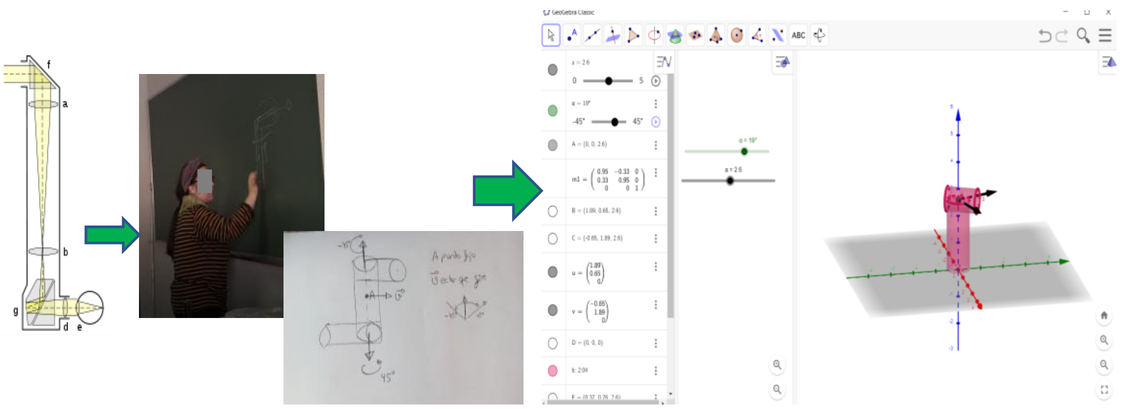


Figura 5. Modelización de periscopio, traslaciones y rotaciones

Dimensión conexiones: dos aspectos emergen en la acción y en la discusión, las dimensiones intra-matemáticas y la dimensiones extra-matemáticas e inter-disciplinares en las tareas de indagación. Se abordó la problematización de cómo proceder didáctica y matemáticamente desde el conocimiento procedimental hasta una comprensión más profunda de las definiciones y los conceptos; las tareas se ampliaron para centrarse en la vinculación del conocimiento matemático interno que tiene como objetivo conectar diferentes conceptos matemáticos y superar la compartimentación del conocimiento matemático. La elaboración de la Tarea 2 y del Periscopio hizo adentrarse en aspectos interdisciplinares, alguno no fáciles de resolver y que dejaban cuestiones abiertas de indagación (Figura 5).

Esto ha puesto de relieve en el diseño de la acción didáctica de los profesores noveles distintos bloqueos para secuenciar génesis de pensamiento y conexiones. Para una caracterización específica del área de conocimiento en el que se desarrolla la indagación se describió el proyecto de indagación en términos didácticos siguiendo distintos momentos de la organización matemática: inicial exploratorio, de trabajo de conceptos y procedimientos, tecnológico-teórico, institucional, de compromiso, de reflexión crítica y de motivación) y, articulados en torno a tareas asociadas a objetivos concretos. Los aspectos más destacados del desarrollo fueron los siguientes: a) promoción de un tiempo teórico de justificación de los conceptos y técnicas matemáticas; b) integración de la tecnología GeoGebra para la resolución del problema particular y c) consideración de construcción matemática con sus procesos y productos matemáticos (intra-matemático y extramatemáticos). Claramente se puso de relieve la necesidad de profundización en el rol de las matemáticas en la interdisciplinariedad (Maass, et.al, 2019).

CONCLUSIONES

En la experiencia de formación, focalizada en el diseño de tareas, constatamos que el punto de vista epistemológico del conocimiento matemático y la relación de la dimensión epistemológica y cognitiva en el proceso de indagación son clave. Los resultados del estudio permiten destacar dos aspectos para sistematizar en el desarrollo profesional del profesor universitario en la determinación de las secuencias de tareas para el establecimiento de recorridos e itinerarios de indagación:

- La relación de las ideas intuitivas, informales o propias de los estudiantes con las matemáticas convencionales y más formales.
- La naturaleza de la pregunta (sistema extramatemático y sistema matemático).

Desde esta experiencia se formulan distintos retos para el desarrollo del profesor universitario de matemáticas: ¿qué entendemos por una tarea basada en la indagación en matemáticas? ¿qué es lo específico de la indagación en el trabajo matemático y lo diferencia de otros conocimientos? Plantear tareas de indagación hace que los profesores matemáticos se sientan capaces de dar propuestas, vinculando estas a su propia disciplina de investigación. Ahora bien, la naturaleza de la pregunta, obviamente, tiene consecuencias para el proceso de indagación. En el caso de las preguntas que provienen de una fuente externa, como es el ejemplo del proyecto de videojuegos, su transformación en preguntas de naturaleza matemática es una parte importante del proceso de indagación, que implica un proceso de modelización. La indagación matemática, cuando procede de situaciones externas, incluye necesariamente un proceso de modelización y combina varias lógicas. En la experiencia compartida, se abre una mayor profundidad en las relaciones entre los dos sistemas: extramatemático y matemático. Cada uno tiene su propia lógica y, en consecuencia, es necesario diferenciar los aspectos epistemológicos, así como los de estrategia del proceso de indagación.

La teoría ETM, abordada como "trasfondo" de la herramienta, ha acercado a los profesores matemáticos a estos aspectos y a conceptos didácticos con los que están menos familiarizados. Aunque no conocen la teoría y algunos términos quedan lejos de su lenguaje -como el término génesis-, sirvió como punto de apoyo a la discusión y se evidencio efectiva para el trabajo colaborativo en la CoI para integrar el cuestionamiento didáctico-matemático en el enfoque IBME a nivel universitario. También, el que los formadores conozcan la teoría ETM ha actuado como facilitador en el desarrollo de las sesiones, ayudaba a focalizar los aspectos esenciales sin necesidad de que los participantes conocieran en profundidad la teoría. Finalmente, reseñar la influencia en una mayor toma de conciencia para determinación de las actividades, como la elección de problemas para trabajar el razonamiento de los estudiantes y la circulación entre tipos de pensamiento matemático hasta la justificación matemática. La utilización de esta herramienta en términos de formación y desarrollo profesional de los profesores en otros contextos, implicando a otros actores y otras interacciones institucionales universitarias queda como línea abierta de profundización. Sin embargo, nos parece que los resultados obtenidos en esta investigación constituyen un paso clave en esta dirección.

REFERENCES

Gómez-Chacón I.M. (2022). Mathematics teachers' knowledge and professional development: a cross-case comparison study, En A. Kuzniak, E. Montoya and P. Richard (Ed). *Mathematical Work in Educational Context. The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*, (pp. 229-246). Switzerland: Springer

Gómez-Chacón I.M., Hochmuth, R., Rogovchenko, S., Brouwer, N. (2021). Methods and Materials for Professional Development of Lecturers, In I. M. Gómez-Chacón, R. Hochmuth., B. Jaworski, J. Rebenda, J. Ruge, S. Thomas (Eds), *Inquiry in University Mathematics Teaching and Learning: The Platinum Project.* (pp. 127-146). Brno: MUNI, Masaryk University Editor.

Gómez-Chacón, I.M, Hochmuth, R., Jaworski, B., Rebenda, J., Ruge, J., Thomas. S. (Eds) (2021). *Inquiry in University Mathematics Teaching and Learning: The Platinum Project*. Brno: MUNI, Masaryk University Editor.

Jaworski, A. (2020). Inquiry-based practice in university mathematics teaching development. En D. Potari & O. Chapman (Ed.) *International handbook of mathematics teacher education: Vol. 1.* (pp. 275-302). Koninklijke Brill/Sense Publishers. Rotterdam. Doi: 10.1163/9789004418875 011

Kuzniak, A. (2022). The theory of Mathematical Working Spaces-Theoretical Characteristics, En A. Kuzniak, E. Montoya and P. Richard (Ed). *Mathematical Work in Educational Context. The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*, (pp. 3-56). Switzerland: Springer.

Maass, K., Geiger, V., Ariza, M. & Goos, M. (2019). The role of mathematics in interdisciplinary STEM education. *ZDM. 51*(6), pp. 869 - 884.

Martin De Diego, D. (Coord) (2020). *Libro Blanco de las Matemáticas*. Madrid: Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S.A.

Ruge, J., & Peters, J. (2021). Reflections on professional growth within the field of mathematics education. In D. Kollosche (Ed.), *Exploring new ways to connect. Proceedings of the Eleventh International Mathematics Education and Society Conference* (Vol. 3, pp. 868-877). Tredition.

EMOCIONES EPISTÉMICAS Y TRABAJO GEOMÉTRICO CON FUTUROS PROFESORES DE PRIMARIA

María Teresa Costado Dios, Inés M. Gómez-Chacón

Universidad de Cádiz (España), Universidad Complutense de Madrid (España)

En esta comunicación se reflexiona sobre la especificidad de las relaciones entre creencias y emociones epistémicas y conflictos cognitivos en el trabajo geométrico. Se aportan elementos que podrían enriquecer dimensiones en la constitución del ETM personal del futuro profesor.

INTRODUCCIÓN

La importancia de las emociones en el aprendizaje complejo y el rendimiento cognitivo es reconocida en la investigación en educación matemática (Gagatsis y Nardi, 2016). En el campo de la psicología los investigadores se han centrado en examinar las emociones de logro relacionadas con el éxito y el fracaso. Sin embargo, las emociones que se desencadenan por las características cognitivas que conlleva la ejecución de una tarea tienen una importancia fundamental en el aprendizaje. Éstas son denominadas emociones epistémicas, definidas como emociones que surgen cuando su objeto es el conocimiento y el proceso de conocer (Gómez-Chacón, 2017). El término conflicto cognitivo hace referencia a la tensión interna del sistema de ideas, creencias y emociones (cogniciones) que percibe una persona que tiene al mismo tiempo dos pensamientos que están en conflicto, o por un comportamiento que entra en conflicto con sus creencias. La persona debe generar ideas y/o creencias nuevas hasta conseguir que este sistema de cogniciones encaje nuevamente en coherencia interna. Una secuencia típica de emociones epistémicas inducidas por conflictos cognitivos de razonamiento matemático puede implicar (1) sorpresa; (2) curiosidad e interés situacional si la sorpresa se mantiene (3) ansiedad en caso de incongruencia o información que altera las creencias existentes sobre la matemática o sobre sí mismo, (4) disfrute y satisfacción cuando se conecta la información y se resuelve la tarea; o (5) frustración cuando esto parece imposible. Para la identificación de las relaciones entre las emociones epistémicas y los conflictos cognitivos se ha tomado para el estudio el ámbito del trabajo geométrico. Las investigaciones actuales (Piñero Charlo y Costado Dios, 2020) muestran el bajo nivel de conocimiento geométrico del alumnado universitario futuro profesor de primaria y la necesidad de diseñar acciones formativas específicas de esos contenidos en los actuales planes de formación de profesores de primaria.

La pregunta de investigación planteada para este estudio es en qué medida la confusión y la frustración vienen generadas por el tema matemático específico del que trata la tarea o vienen generadas por el conflicto cognitivo entre las creencias existentes antes y la nueva información discrepante. La pregunta que se planteó fue: ¿qué sistemas afectivos (creencias y emociones epistémicas) informan de los procesos de razonamiento geométrico en el aprendizaje de las matemáticas? El primer análisis intenta caracterizar las dimensiones de creencias que los estudiantes futuros profesores de primaria tienen. El segundo se centra en las emociones epistémicas en la resolución de tareas en un taller de geometría.

CONSIDERACIONES TEORICAS

La *Teoría de los Espacios de Trabajo Matemático* (ETM) en relación con la caracterización del desarrollo profesional del profesor ha sido discutida en distintos trabajos (ver una síntesis en Gómez-Chacón, 2022). En ellos se muestra el dinamismo de la teoría del ETM para reflexionar sobre la acción del profesor en el aula y sobre elementos importantes para tener en cuenta en su desarrollo profesional. Uno de los aspectos señalados que requieren prioridad en la investigación es el de las relaciones epistémicas y cognitivas en el trabajo matemático y cómo configura el espacio de trabajo personal. En el marco de la teoría ETM se considera como objetos intervinientes en la práctica matemática las situaciones/problemas o tareas matemáticas de cuya solución emergen los conceptos y procedimientos. En la configuración de objetos y procesos asociados a una práctica matemática se establecen distintas génesis asociadas: semiótica, instrumental y discursiva; así como los planos cognitivos y epistemológico, con los diversos elementos que los forman.

Trabajo Geométrico/ Geometría 3D

En el campo de la geometría espacial, la habilidad de visualizar objetos tridimensionales desempeña un papel fundamental. La visualización de objetos tridimensionales constituye un conjunto de habilidades relacionadas con el razonamiento espacial, es decir, visualizar un objeto tridimensional no implica solo ver los objetos, sino también la habilidad de reflexionar sobre dichos objetos, sus posibles representaciones, las relaciones entre sus partes, su estructura y la habilidad de examinar las posibles transformaciones del objeto. Así mismo, la comunicación de la información espacial de manera figural, verbal o mixta son también importantes habilidades para tener en cuenta en el campo de la visualización de objetos tridimensionales.

En el análisis de los procesos cognitivos y afectivos implicados al trabajar con representaciones o imágenes (internas y externas) en el razonamiento y resolución de una tarea utilizamos el término de visualización de forma holística en la misma línea de otros trabajos en el marco de la teoría ETM (Gómez-Chacón y Escribano, 2014). Se considera tanto la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre dibujos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas, con la finalidad de representar y comunicar información, pensando y desarrollando ideas. En nuestro caso, se dará prioridad a la visualización icónica en el sentido de que el alumnado debe realizar el reconocimiento de lo que representan las formas, y en la semejanza con el objeto (real) representado. Se destaca la visualización como proceso que influye en la comprensión y la forma de resolución, y cómo puede estar asociado con diferentes emociones y creencias.

En esta exploración de la interacción con las emociones parece pertinente identificar distintas acciones que ayudan en el control cognitivo. Se han tenido en cuenta la identificación de tres grandes categorías de acciones para que el sujeto tenga un buen control de sus relaciones con el espacio (Berthelot y Salin, 1992). Estas tres categorías son: 1.- reconocer, describir, fabricar o transformar objetos; 2.- desplazar, encontrar, comunicar la posición de objetos; 3.- reconocer, describir, construir o transformar un espacio de la vida cotidiana o de desplazamiento. Es precisamente en la primera y segunda categoría donde se incluyen las tareas de fabricación de los objetos y de representación de objetos tanto bi como tridimensionales con materiales o representados en el plano.

Siguiendo la teoría ETM, para el caso que se trata en este estudio, dentro del plano epistemológico se encuentra el espacio real y local con un conjunto de objetos concretos, las herramientas como conjunto de artefactos y un sistema de referencia como las definiciones, teoremas y propiedades. En nuestro caso, el objeto concreto es la maqueta u objeto 3D que los estudiantes deben de construir, las herramientas serian el material manipulable y el referencial las propiedades de los objetos que componen el objeto tridimensional que será el encargado de sostener el discurso deductivo. Dentro del plano cognitivo, intervienen el representante que es la visualización relativa a la representación del espacio y soporte material; la configuración como la construcción que depende de los instrumentos y técnicas asociadas; y la prueba que es la demostración apoyada en el proceso discursivo de validación basado en el referencial.

Dimensión emocional en matemáticas y ETM personal

En el marco ETM se han realizado estudios sobre ETM personal (Menares-Espinosa y Vivier, 2022; Gómez-Chacón, 2022) centrándose más en aspectos cognitivos. En el presente trabajo, se consideran además en el ETM personal las emociones y creencias epistémicas como factores claves para comprender el comportamiento en matemáticas del estudiante, porque influyen en el aprendizaje como un sistema regulador, como un indicador de la situación de aprendizaje, como fuerzas de inercia o resistencias al cambio y como vehículo de conocimiento. En la formación del profesorado de Primaria es clave considerar esta dimensión, ya que son estudiantes a los que no les suelen gustar y con bajas calificaciones en matemáticas.

La experiencia emocional consiste en múltiples relaciones entre el afecto, la cognición y la motivación, así como en situaciones de aprendizaje está relacionado con los objetos de aprendizaje y los procesos de adquisición del conocimiento resolviendo tareas matemáticas. El afecto incluye sentimientos cambiantes durante la tarea (afecto local), así como otros constructos más estables y duraderos (afecto global). El afecto local se define como los estados de cambio de sentimientos y reacciones emocionales durante la resolución de una actividad matemática, es decir, las relaciones entre las emociones y los procesos cognitivos correspondientes a la resolución de la tarea matemática. Este afecto local cambiante contribuye a desarrollar el afecto global, que son aquellas estructuras generales del concepto de uno mismo y las creencias acerca de las matemáticas y su aprendizaje en un contexto social de interacción con otros. Cambios en el afecto local durante la realización de una tarea pueden alterar el afecto global del estudiante, o el afecto global influir en el desarrollo de la tarea y en las emociones que se producen durante la misma.

OBJETIVOS

Los objetivos principales de esta investigación son los siguientes: 1) Identificar el sistema de creencias sobre las matemáticas de estudiantes universitarios futuros profesores de Primaria; 2) Caracterizar el trabajo matemático mediante acciones y emociones epistémicas; 3) Explorar las correspondencias entre 1) y 2) en la configuración del ETM personal.

METODOLOGIA

El grupo de estudio está constituido por 191 estudiantes (33,5% son hombres y el 66,5% mujeres) del Grado de Educación Primaria en la Universidad de Cádiz. La metodología del estudio es mixta, una combinación de métodos cualitativos y cuantitativos. La recogida de datos se realiza mediante un cuestionario sobre creencias y actitudes, y el desarrollo de un taller de geometría. El cuestionario fue realizado por el grupo de estudio de 191 estudiantes, pero el taller fue solo para el grupo de caso de 59 discentes.

El cuestionario sobre creencias de tipo Likert, consta de 10 items con una escala de 4 valores, donde 1 significa “muy en desacuerdo” y 4 “muy de acuerdo”. Los ítems están articulados en tres dimensiones: creencias sobre aprender matemáticas (CreDim1, ítems 1, 2, 3), creencias sobre uno mismo como aprendiz de matemáticas (CreDim2, ítems 4, 5, 6) y creencias sobre resolución de problemas y emociones (CreDim3, ítems 7, 8, 9, 10). Se estudió la consistencia interna y la fiabilidad, obteniéndose un coeficiente Alfa de Cronbach = 0,823. En la tabla 1 se muestran los valores de media y desviación típica de cada item del cuestionario para el grupo de estudio (191) y para el grupo del estudio de caso (59).

El taller de geometría llevado a cabo por el grupo del estudio de caso, constaba de dos sesiones de hora y media de duración y el alumnado, dividido por grupos, debía crear un objeto 3D original formado por diferentes poliedros y/o polígonos combinando varios materiales. Seguidamente, debían elaborar un informe escrito a modo de diario recogiendo toda la información relevante del proceso, detallando la utilidad del objeto, los conocimientos matemáticos básicos, así como las dificultades encontradas en la ejecución. El enunciado de la tarea matemática es el siguiente:

1. Crear un objeto 3D relacionado con la vida cotidiana para el cual debéis utilizar al menos dos poliedros y/o cuerpos de revolución, así como las figuras 2D que consideréis para su construcción o decoración.
2. Hacer el desarrollo plano, calcular el área total y volumen de uno de los poliedros/cuerpo de revolución.

3. Redactar un informe de campo donde se detalle el desarrollo de la tarea, y también los cálculos de área total y volumen de una de las piezas que constituye el objeto 3D creado.

Para componer un objeto tridimensional, que es el objetivo principal del trabajo matemático, el estudiante debe identificar las partes que lo componen, las características de estas para poder asociarle un posible poliedro y que se asemeje lo más posible a la realidad en su totalidad. Además, necesita reflexionar sobre las relaciones entre los diferentes elementos que constituyen el objeto matemático tanto para plegar como para desplegarlo, y así construirlo.

Análisis de Datos

Para el análisis del cuestionario se han utilizado técnicas cuantitativas y para el informe sobre la resolución de la tarea se ha realizado un análisis de contenido. El protocolo seguido en el análisis ha sido la identificación de episodios de trabajo matemático en la resolución de la tarea, y dentro de ellos estudiar qué tipos de acciones y emociones epistémicas se asocian (sorpresa, curiosidad, confusión, frustración y confianza). Nos interesa identificar qué tipos impasses o rupturas se producían y como se articula la acción epistémica en la interacción cognición y el afecto.

RESULTADOS

Se exponen los resultados según los objetivos planteados.

Identificación de sistemas de creencias

En la Tabla 1 se recoge la media y desviación típica de las creencias acerca de la naturaleza de las matemáticas, creencia de autoeficacia y creencias sobre la resolución de problemas y emociones para el grupo total y el estudio de caso.

	GT (N=191)		EC (N=59)	
Items	M	SD	M	SD
1.Las matemáticas son difíciles, aburridas y alejadas de la realidad. (CreDim1)	2,00	0,641	1,85	0,551
2.Las únicas matemáticas que me interesan son las que entran en el examen, porque son las más importantes y las que tengo que conocer. (CreDim1)	2,14	0,700	1,95	0,570
3.Las destrezas o habilidades que utilizo en clase para resolver problemas no tienen nada que ver con las que utilizo para resolver problemas en la vida cotidiana. (CreDim1)	2,37	0,727	2,25	0,632
4.Mi rendimiento en matemáticas depende en gran medida de la actitud del profesor hacia mí. (CreDim2)	2,68	0,820	2,61	0,720
5.No tengo confianza en mí mismo/a cuando me enfrento a los problemas de matemáticas. (CreDim2)	2,49	0,845	2,54	0,750
6.No me considero muy capaz y hábil en matemáticas. (Dim2)	2,62	0,798	2,73	0,739
7.Las clases de matemáticas se me hacen eternas, son muy pesadas, no estoy a gusto y siento deseos de salir corriendo. (CreDim3)	2,12	0,755	1,98	0,656
8.Ante un problema complicado suelo darme por vencido	2,10	0,788	2,08	0,794

fácilmente. (CreDim3)				
9.Si no encuentro la solución de un problema tengo la sensación de haber fracasado y de haber perdido el tiempo. (CreDim3)	2,40	0,703	2,44	0,595
10.Cuando me atasco o bloqueo en la resolución de un problema empiezo a sentirme inseguro, desesperado, nervioso. (CreDim3)	2,93	0,750	3,05	0,680

Tabla 1: Resultados del Cuestionario para Grupo Total y Estudio de Caso

En el estudio de caso (59 estudiantes) se pone de manifiesto que un 83% se sienten inseguros, desesperados y nerviosos cuando se bloquean en la resolución de un problema, pero solo un 42,4 % tienen la sensación de haber fracasado o perdido el tiempo si no encuentran la solución a un problema. Un 57,7% piensan que su rendimiento en matemáticas depende de la actitud del profesor hacia ellos, manifestando un 52,6% que no tiene confianza en sí mismos cuando se enfrentan a problemas de matemáticas. Sin embargo, un 71,2% indican que no suelen darse por vencido ante un problema complicado, aunque un 62,8% no se consideran muy capaces ni hábiles en matemáticas. Con relación a las creencias sobre la aplicabilidad de las matemáticas, un 91,5% expresan que están conectadas con la realidad y no son aburridas, solo a un 17 % se le hacen eternas las clases de matemáticas y solo para un 13,6% su interés está vinculado a la resolución del examen.

Caracterización del trabajo matemático (acciones) y emociones epistémicas

En el grupo de caso han sido realizados diversos objetos en 3D, pero aquí solo vamos a analizar dos de ellos: una vaca y un robot, realizados por dos grupos de trabajo de 6 integrantes cada uno. Para poder identificarlos serán denominados en las tablas como proyecto vaca (PV) y proyecto robot (PR). El análisis de contenido de los informes relativos a la realización de estos objetos nos ha permitido clasificar el trabajo matemático en cuatro tipos de episodios:

Episodios de tipo 1. Coordinar e integrar vistas de objetos: “describir y representar construcciones geométricas y relaciones espaciales”.

Episodios de tipo 2. Componer y descomponer en partes un objeto tridimensional: “formar cuerpos geométricos a partir de otros por composición y descomposición”.

Episodios de tipo 3. Plegar y desplegar desarrollos: “construir cuerpos geométricos a partir de desarrollos”.

Episodio de tipo 4: Descomponer cuerpos tridimensionales: “cálculo de volúmenes” y Analizar figuras planas: “cálculo de áreas”.

En las Tablas 2, 3, 4, y 5 se presentan extractos de sus informes con una evidencia gráfica, explicitando las acciones y emociones epistémicas correspondientes al trabajo matemático.

Episodios de tipo 1. Coordinar e integrar vistas de objetos

Para representar el desarrollo de un sólido o de una parte del objeto 3D construido es necesario que el estudiante lo manipule en tres dimensiones. En un primer momento hay situaciones de confusión al no ser capaz de visualizar el objeto terminado o cómo sería, pero el hacerse una idea global por ejemplo con un software y anticipar el diseño final hace que la dirección de la emoción cambie, manteniéndose en una ruta de interés y curiosidad.

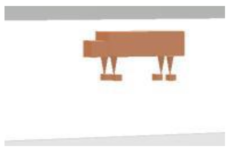
Episodios de tipo 1. Coordinar e integrar vistas de objetos			
Acciones	**Extracto del informe**	**Evidencia gráfica modelo 3D**	**Emociones**
Describe y representa construcciones geométricas.	Para decidir qué objeto íbamos a realizar, al principio todos estábamos confusos en cuanto a la figura que teníamos que hacer, pues nos dimos cuenta de que lo primero que habíamos pensado (granja con animales) era bastante difícil. (PV)		Confusión
[Génesis semiótica]	Hemos realizado un prototipo para tener una idea de cómo va a ser más o menos la figura final (una vaca). Para su realización hemos utilizado un programa de ordenador llamado paint 3D, que era la primera vez que los usábamos. (PV)	 Imagen prototipo de la vaca	Interés, curiosidad

Tabla 2. Coordinar e integrar vistas de objetos

Episodios de tipo 2. Componer y descomponer en partes un objeto tridimensional

Para componer y/o descomponer un objeto 3D es importante que el alumnado identifique las propiedades o características de dicho objeto matemático y las relaciones entre ellas. Aunque con material manipulativo pueda resultar más fácil que mentalmente, la composición/descomposición de sólidos, la operación y la justificación para resolver dichas fases de la tarea se han apoyado en elementos analíticos relacionados con las propiedades de los desarrollos y de los poliedros involucrados. Estos elementos son representados por medio de dibujos/fotos y/o descritos por lenguaje verbal en el informe presentado por el alumnado al finalizar el taller. En este tipo de episodio hemos identificado emociones variadas (Tabla 3 – desconcierto, curiosidad o confusión) en la transición del plano al espacio y viceversa y en el ajuste de medidas para tener precisión en la construcción del objeto tridimensional.

<table>
<tr><th colspan="3">Episodios de tipo 2. Componer y descomponer en partes un objeto tridimensional</th><th></th></tr>
<tr><th>Acciones</th><th>Extracto del informe</th><th>Evidencia gráfica modelo 3D</th><th>Emociones</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Forma cuerpos geométricos a partir de otros por composición.

Usa artefactos.

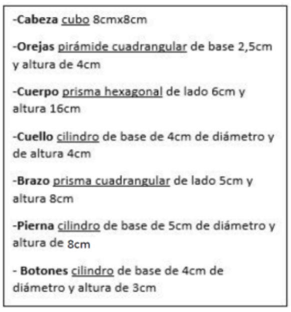
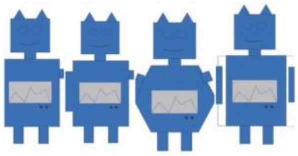
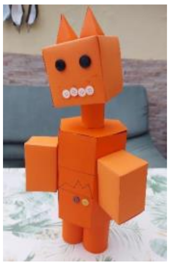
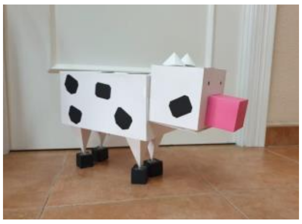
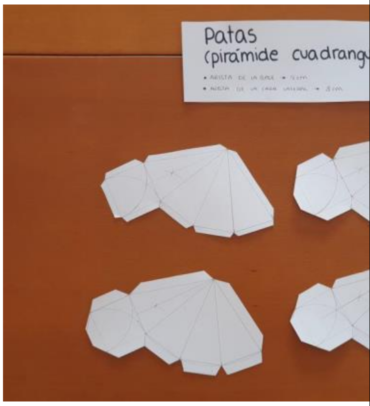
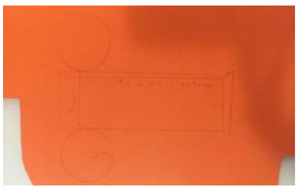
[Génesis semiótica e instrumental]</td><td>Las medidas que teníamos pensado en un principio no eran lo mismo que las piezas que habíamos creado y al montarlas quedaba algo que no tenía nada que ver. (PR)</td><td>Ejemplo de medidas del objeto robot pensadas inicialmente

-Cabeza <u>cubo</u> 8cmx8cm
-Orejas <u>pirámide cuadrangular</u> de base 2,5cm y altura de 4cm
-Cuerpo <u>prisma hexagonal</u> de lado 6cm y altura 16cm
-Cuello <u>cilindro</u> de base de 4cm de diámetro y de altura 4cm
-Brazo <u>prisma cuadrangular</u> de lado 5cm y altura 8cm
-Pierna <u>cilindro</u> de base de 5cm de diámetro y altura de 8cm
- Botones <u>cilindro</u> de base de 4cm de diámetro y altura de 3cm</td><td>Desconcierto</td></tr>
<tr><td>El único conflicto que se nos ha planteado ha sido quizás, el tomar las medidas adecuadas y “exactas” para que nuestro producto final tuviera sentido y ajuste. (PR)</td><td rowspan="2">

Diferentes modelos iniciales del robot en color azul e imagen del robot finalmente creado en naranja.</td><td>Confusión</td></tr>
<tr><td>En un primer momento, nuestro proyecto consistía en un robot hecho a base de un cubo para la cabeza, un prisma rectangular para el cuerpo, otros dos prismas rectangulares para hacerle los brazos y las piernas, dos pirámides cuadrangulares como orejas, un cilindro como cuello y otros dos como piernas. (PR)</td><td>Curiosidad</td></tr>
<tr><td>Hemos intentado que nuestros poliedros y cuerpos de revolución tuvieran medidas coherentes para que luego, cuando tuviéramos nuestra vaca montada, destacara las principales partes del cuerpo de esta, sobre otras. (PV)</td><td rowspan="2">
Imagen de la vaca construida.</td><td>Determinación, confianza</td></tr>
<tr><td>Era la primera vez que realizábamos una figura en 3D, por lo que hemos aprendido todos los pasos que hay que dar para poder llegar a construirla. (PV)</td><td>Intriga, curiosidad</td></tr>
</table>

Tabla 3. Componer y descomponer en partes un objeto tridimensional

Episodios de tipo 3. Plegar y desplegar desarrollos

En el plegado de desarrollos planos para componer un objeto sólido, el estudiante debe identificar qué aristas o vértices del solido se pueden unir y cuáles no, o incluso identificar propiedades del poliedro a construir para proceder a su plegado como puede ser relacionar aquellas caras paralelas entre sí. Debe, por tanto, reflexionar sobre las relaciones entre los diferentes elementos que constituyen el objeto tanto para plegar como desplegar el poliedro o cuerpo de revolución. Cuando esto no se produce, es cuando aparecen emociones negativas de frustración o confusión, o positivas de confianza y sorpresa cuando sí se consigue (Tabla 4).

Episodios de tipo 3. Plegar y desplegar desarrollos			
Acciones	**Extracto del informe**	**Evidencia gráfica modelo 3D**	**Emociones**
Construye poliedros. Usa artefactos. Relaciona objetos matemáticos y sus elementos significantes. [Génesis instrumental y discursiva]	Más tarde, dibujé el desarrollo plano del cubo o hexaedro (cabeza de la vaca), un desarrollo plano que me salió a la primera y sin problemas. (PV)	 Imagen del desarrollo plano de la cabeza de la vaca	Confianza
	Para hacer el desarrollo de estas partes de la figura (patas de la vaca), lo primero que hemos realizado es el cuadrado a partir de un segmento de 4 cm. A continuación, sobre la arista superior del cuadrado hemos realizado la mediatriz, y hemos levantado una recta de una longitud indeterminada ya que de los dos vértices del cuadrado partirán dos líneas de 8 cm que unen dichos vértices con la mediatriz. (PV)	 Imagen de los desarrollos planos de las patas de la vaca	Confianza
	Las patas fue lo que más me costó de toda la figura y cuando hice el desarrollo todo iba bien, pero lo complicado vino al pegarlas, que no sabía que partes debía juntar. (PV)		Confusión
	Primero realizamos la base del cono que como vemos en la imagen, es un círculo que tiene como radio 2 cm. Calculamos el perímetro de este a través de la siguiente fórmula: Perímetro= Π x diámetro à P = Π x 4 cm= 4Π cm2 (PV)	 Imagen de los desarrollos planos de las orejas de la vaca	Determinación
	En primer lugar, tuve la dificultad a la hora de realizar el desarrollo plano de los cilindros, ya que las medidas con las que empezamos a trabajar no eran válidas y hubo que volver a calcularlas. (PR)		Frustración
	En segundo lugar, llegó el problema de la dificultad de realizar y pegar los cilindros en 3D. (PR)		Frustración

	Sorprendentemente, las patas con las pestañas improvisadas en el desarrollo plano se pegaron perfectamente y sin ningún problema. (PR)	Imagen del desarrollo plano de uno de los cilindros, de las patas del robot.	Sorpresa

Tabla 4. Plegar y desplegar desarrollos

Episodio de tipo 4: Análisis de cuerpos bi y tridimensionales

En este episodio el bloqueo que genera emociones negativas (Tabla 6) se produce en la identificación de propiedades, en la argumentación desde el referencial teórico, en operaciones geométricas más complejas o en la combinación entre cálculos aritméticos y algebraicos.

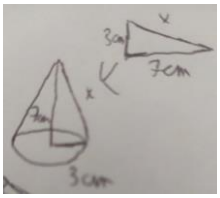
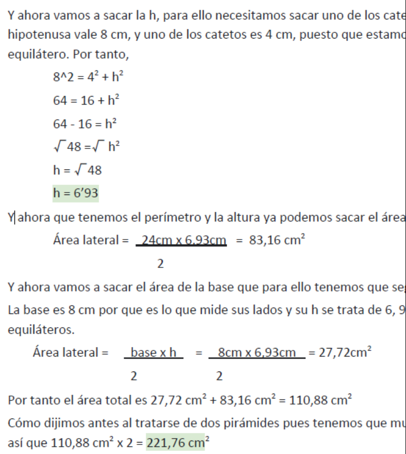
Episodios de tipo 4. Análisis de cuerpos bi y tridimensionales			
Acciones	**Extracto del informe**	**Evidencia gráfica modelo 3D**	**Emociones**
Cálculo de área. Cálculo del volumen. Caracteriza propiedades del objeto. [Génesis semiótica y discursiva]	Lo que resolví fue una ecuación con el teorema de Pitágoras para hallar la hipotenusa del triángulo rectángulo que forman el radio y la altura, que será nuestra generatriz y así calcular el área del cono (orejas del robot). (PR)	 Imagen de los cálculos realizados por el alumnado	Determinación
	Hemos tenido algunas dificultades ya que hemos comenzado a realizar el área y el volumen de las figuras y no sabíamos por dónde empezar (PV).	 Y ahora vamos a sacar la h, para ello necesitamos sacar uno de los cate hipotenusa vale 8 cm, y uno de los catetos es 4 cm, puesto que estamo equilátero. Por tanto, $8^2 = 4^2 + h^2$ $64 = 16 + h^2$ $64 - 16 = h^2$ $\sqrt{48} = \sqrt{h^2}$ $h = \sqrt{48}$ h = 6'93 Y ahora que tenemos el perímetro y la altura ya podemos sacar el área Área lateral = $\frac{24cm \times 6.93cm}{2}$ = 83,16 cm^2 Y ahora vamos a sacar el área de la base que para ello tenemos que se La base es 8 cm por que es lo que mide sus lados y su h se trata de 6, 9 equiláteros. Área lateral = $\frac{base \times h}{2} = \frac{8cm \times 6{,}93cm}{2}$ = 27,72cm^2 Por tanto el área total es 27,72 cm^2 + 83,16 cm^2 = 110,88 cm^2 Cómo dijimos antes al tratarse de dos pirámides pues tenemos que mu así que 110,88 cm^2 x 2 = 221,76 cm^2 Imagen de los cálculos realizados por el alumnado	Confusión
	Gracias a este trabajo hemos aprendido: cómo calcular las áreas los volúmenes de figuras con las que no habíamos trabajado antes (PV).		Intriga, curiosidad

Tabla 5. Análisis de cuerpos bi y tridimensionales

Explorar las correspondencias entre los anteriores objetivos en la configuración del ETM personal

El análisis realizado de los distintos episodios de la tarea matemática donde se pone de manifiesto el afecto local (emociones), se podría sintetizar bajo categorías de la Teoría ETM, en los procesos y génesis más reiterados (Tabla 6). Si volvemos en profundidad a lo expresado en la Sec. 2 de resultados teniendo en cuenta los diferentes descriptores de cada componente, en la génesis instrumental la interacción emoción-acción refleja movimientos en la configuración o construcción que conducen al desarrollo de los esquemas cognitivos del sujeto de la acción instrumentada para dar respuesta a la tarea de manera eficaz. La influencia del uso de los artefactos (en nuestro caso múltiples: papel, ordenador) se muestra efectiva en los procesos relacionados con la génesis instrumental y semiótica de visualización. Se produce también un trabajo de exploración de los objetos matemáticos, un análisis de sus propiedades, así como una composición o descomposición de sus partes o transformación dentro de la génesis semiótica, relacionando los objetos matemáticos con sus elementos principales.

Génesis	**Componentes**	**Descriptor**
Génesis semiótica	Representamen	Relaciona objetos matemáticos y sus elementos significantes
	Visualización	El proceso de visualización considera solo la visualización icónica
		Interpreta y relaciona los objetos matemáticos según actividades cognitivas
		Interpreta representaciones gráficas de objetos tridimensionales
		Descompone cuerpos tridimensionales (p.e. descompone un poliedro en otros poliedros, algoritmos para cálculo de volúmenes)
		Analiza figuras planas (p.e. algoritmos para cálculo de áreas, relaciones entre polígonos, triangulación de polígonos, etc.)
Génesis instrumental	Artefacto	Utiliza artefactos de tipo material
	Construcción	Se basa en acciones desencadenadas por los artefactos utilizados y las técnicas de uso asociadas.
		Construye poliedros. Estudia sus elementos. Construye polígonos. Determina la existencia de poliedros a partir del número de aristas y/o del número de caras que convergen en un vértice.
Génesis discursiva	Referencial	Utiliza definiciones y/o propiedades
	Prueba	El razonamiento discursivo se basa en una prueba (pragmática o intelectual)

Tabla 6. Relaciones entre las génesis, componentes y descriptores del ETM

Estas dos génesis están en continua relación con el paso de una a otra para la ejecución del trabajo matemático, tanto a nivel de plano epistemológico como cognitivo del sujeto. Los posibles bloqueos iniciales relacionados con las propiedades o medidas de los objetos al dibujar para posteriormente plegar y el propio proceso de plegado de los desarrollos planos se fueron solventando en la mayoría de los casos por ensayo y error de construcción del propio objeto. El alumnado recurría a la construcción del objeto, es decir, a la resolución de la propia tarea matemática y al gusto por solventarla para solucionar cualquier confusión o frustración, o a la ayuda de sus compañeros para resolver la dificultad concreta que tuvieran en ese momento.

La posibilidad de crear objetos, de comprobar ideas teóricas y manipular objetos les ayudó en los procesos de validación y de argumentación (génesis discursiva), igualmente se constató creencias más positivas sobre la naturaleza y utilidad de las matemáticas y actitudes de confianza, determinación y curiosidad durante el desarrollo de la tarea. Esta interacción entre acción, creencias y emociones epistémicas propicia la evolución del conocimiento en la construcción de formas y en la conexión entre las fases de la elaboración del modelo 3D, y en la argumentación del proceso, siendo la escritura de ello en el informe de la tarea matemática una ayuda para tomar conciencia de lo realizado y de su propio aprendizaje.

CONCLUSIONES

Los resultados del estudio permiten dar respuesta a la cuestión de investigación planteada sobre la interacción de creencias y emociones epistémica en la actividad matemática. Se constata un uso significativo de nociones y conceptos matemáticos, así como el uso de relaciones y propiedades para construir figuras geométricas. Se detectan emociones negativas de frustración y confusión en relación con las génesis semióticas e instrumental a la hora de analizar las figuras (componente de visualización) y cálculo de medidas de desarrollos plano y su plegado (componente de construcción). Igualmente, se identifican emociones epistémicas de determinación y confianza de un trabajo bien hecho y de que su proceso de aprendizaje ha resultado efectivo. Se puede concluir que las emociones epistémicas de frustración y confusión vienen generadas por los aspectos cognitivos en el tema matemático específico del que trata la tarea, y este grupo apenas afloran creencias negativas previas sobre la naturaleza de las matemáticas y sus creencias de autoeficacia. Este último resultado podría dejar abierto un cuestionamiento a estudios sobre creencias con futuros profesores de primaria. Estudios previos sobre esta temática concluyen que el sistema de creencias sobre las matemáticas o uno mismo tiene más peso sobre las emociones que la propia tarea matemática, algo que parece no mostrarse en este estudio no estable.

REFERENCIAS

Berthelot, R. y Salin M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thesis doctoral, Université de Bordeaux I.

Gagatsis, A. y Nardi, E. (2016) Developmental, Sociocultural, Semiotic, and Affect Approaches to the Study of Concepts and Conceptual Development, In A. Gutiérrez, G. Leder & P. Boero *Second Handbook of Research on the Psychology of Math Educ.*, (pp. 187-234). Sense Publishers.

Gómez-Chacón, I. M. (2017). Emotions and heuristics: the state of perplexity in mathematics, *ZDM- Journal on Mathematics Education,* 49, 323-338.

Gómez-Chacón I. M. (2022). Mathematics teachers' knowledge and professional development: a cross-case comparison study, In A. Kuzniak, E. Montoya and P. Richard (Ed). *Mathematical Work in Educational Context. The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*, (pp. 229-246). Switzerland: Springer.

Gómez-Chacón, I. M. y Escribano, J. (2014). Geometric Locus activities in a dynamic geometry system. Non-iconic visualization and instrumental genesis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17, 4-2, 361-376.

Menares-Espinosa, R. y Vivier, L. (2022). Personal Mathematical Work and Personal MWS, In A. Kuzniak, E. Montoya and P. Richard (Ed). *Mathematical*

Work in Educational Context. The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces, (pp. 91-120). Switzerland: Springer.

Piñero Charlo, J. C. y Costado Dios, M. T. (2020). Codiseño de problemas geométricos apoyados en TICs: estudio de un caso con estudiantes de maestros bajo un modelo de aprendizaje mixto. *Edutec. Revista Electrónica De Tecnología Educativa*, 74, 94-113.

LA INFLUENCIA DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UNA MAESTRA EN EL TRABAJO MATEMÁTICO DE SUS ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN INFANTIL

Daysi Julissa García-Cuéllar, Juan Pedro Martín-Díaz, Jesus Victoria Flores Salazar, Nuria Climent

Pontificia Universidad Católica del Perú; Universidad de Huelva, garcia.daysi@pucp.pe, juan.martin@ddcc.uhu.es, jvflores@pucp.pe, climent@uhu.es

Se presenta una investigación que explora relaciones entre el conocimiento especializado de una maestra y el trabajo matemático de sus estudiantes de educación infantil. Se utilizaron como referentes teóricos el modelo del Conocimiento Especializado del profesor de Matemáticas (MTSK), para el análisis del conocimiento de la maestra, y el Espacio de Trabajo Matemático (ETM), para el análisis del trabajo que desarrollan los estudiantes. La investigación fue realizada con una docente y 25 estudiantes de una clase de 5 años (3°curso de educación infantil) de un colegio público de Huelva - España. Para el análisis de una tarea de repartición, bajo los referentes teóricos ya mencionados, se realizaron grabaciones de las dos sesiones de clase, transcripciones y fichas de observación. Se reportan los resultados de la primera actividad de la primera clase observada.

Palabras clave: *Conocimiento especializado, trabajo matemático, repartición, educación infantil.*

CONSIDERACIONES INICIALES

La investigación que presentamos se encuentra en proceso. La experiencia se desarrolló en un total de dos sesiones con una secuencia de tres actividades. Nos centramos en el análisis de la primera actividad, con estudiantes de 5 años en educación Infantil de un colegio público de la ciudad de Huelva - España. La maestra, que participa en un proyecto de investigación colaborativa con otros profesores, cuenta con 14 años de experiencia en Educación infantil. Este estudio está orientado por la pregunta: ¿Cómo el conocimiento especializado de la maestra influye en el trabajo matemático de los estudiantes de educación infantil?

LA ACTIVIDAD Y SUS EPISODIOS

La primera actividad de la primera sesión consiste en repartir en parejas 12 fichas en dos vasitos. En primer lugar (episodio 1) se propone la tarea y se resuelve manipulativamente. Diferenciamos tres sub-episodios en este primer episodio: (1.1) la maestra explica la tarea y reparte el material; (1.2) los estudiantes trabajan en parejas y la maestra va pasando por las mesas preguntado qué están haciendo; (1.3) la puesta en común de las resoluciones. Seguidamente (episodio 2) el foco se sitúa en el dibujo del proceso realizado para resolver la tarea. Se inicia (2.1) con la petición por parte de la maestra del dibujo de lo que han hecho. (2.2.) Como en el episodio 1, los niños trabajan haciendo el dibujo (esta vez individualmente) y la maestra va pasando por las mesas y pidiéndoles que expliquen lo que han dibujado. Se continúa (2.3) con la puesta en común de los dibujos. Esta actividad termina con un cuarto subepisodio (2.4) que se basa en la organización espacial de los dibujos en la pizarra (propiciado por la maestra en el sub-episodio anterior). Los niños explican lo que representa cada grupo de dibujos (y se va diferenciando la situación inicial, cómo se repartió y lo que queda).

ASPECTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

Tomamos aspectos del modelo teórico Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) que de acuerdo con Carrillo et al. (2019) considera tres dominios en el conocimiento de un profesor de matemáticas: el conocimiento matemático (MK), el conocimiento didáctico del contenido (PCK) y las creencias acerca de la matemática y su enseñanza y aprendizaje. Dentro del conocimiento matemático (MK), existe una división en tres subdominios: Conocimiento de los temas (KoT), que abarca conocimiento de definiciones, propiedades, fenomenología, etc., ligados a un mismo tema; Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM) que se centra en cómo se articulan y conectan entre sí los diferentes temas y el Conocimiento de la práctica matemática (KPM) que aborda el cómo se "hacen" matemáticas, esto es, las reglas sintácticas de construcción matemática. Por otro lado, en el conocimiento didáctico del contenido (PCK) también se distinguen tres subdominios: Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), que aborda aquello que el profesor conoce acerca de estrategias, teorías y recursos de enseñanza; el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), que se enfoca en el conocimiento de cómo ciertos contenidos son aprendidos, y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS).

En cuanto al Espacio de Trabajo Matemático (ETM), Kuzniak, Tanguay y Elia (2016) consideran que el trabajo matemático que realiza el estudiante es un proceso gradual, interactivo y complejo. La evolución de los conocimientos matemáticos dependerá de las tareas propuestas y de las actividades que el estudiante realice para resolverlas. En el ETM se consideran tres génesis: la *semiótica* basada en las representaciones semióticas, que proporciona un sentido a los objetos y les confiere su estatus de objetos matemáticos operatorios; la *instrumental* que "hace funcional los artefactos en el proceso constructivo que contribuye al trabajo matemático" (Kuzniak et al., 2016, p.726) y; la *discursiva* que utiliza propiedades del referencial para ponerlas al servicio del razonamiento matemático y de su validación. Para Kuzniak (2022) en el trabajo matemático, no todo discurso debe estar relacionado con la génesis discursiva (de la prueba), y la descripción, caracterización o designación de un objeto puede más bien entenderse como perteneciente a la génesis semiótica, en este sistema específico de signos que pertenecen al lenguaje habitual.

Asimismo, en el ETM se consideran tres planos verticales cada uno de los cuales está definido por la interrelación de dos génesis: semiótica-instrumental [Sem-Ins]; semiótica-discursiva [Sem-Dis], e instrumental-discursiva [Ins-Dis].

En el Espacio de Trabajo Matemático se diferencian tres tipos: ETM de referencia, que toma en cuenta la matemática desarrollada a nivel institucional; ETM idóneo, que consiste en el tratamiento que da el docente al proceso de enseñanza con el propósito de favorecer el trabajo matemático de los estudiantes; y ETM personal, que es el trabajo matemático que desarrolla un individuo (profesor o estudiante).

Investigaciones como las realizadas por Carrillo et al. (2015), Flores-Medrano et al. (2015) y Vasco-Mora et al. (2015) muestran una dialéctica entre el ETM y el MTSK, destacando la potencialidad del MTSK en profundizar en el estudio del ETM idóneo y ETM personal del profesor. Sin embargo, la presente investigación representa un avance debido a que se centra en cómo el Conocimiento Especializado del Profesor influye en los ETM personales de los estudiantes.

Con el fin de conocer el MTSK movilizado por la maestra y el ETM que se activa en los estudiantes a través de la gestión de ella, realizamos un análisis cualitativo de los datos en el sentido de Borba (2004), porque se prioriza el análisis del fenómeno didáctico. Así, el estudio se desarrolló siguiendo un paradigma interpretativo (Bryman, 2013) puesto que nos acercamos a la realidad a través de los modelos y tratamos de comprenderla desde estos.

De esta manera, en línea con la caracterización cualitativa de la investigación, atendemos al estudio de caso como metodología. En este caso, se trata de un estudio de caso instrumental (Bassey, 1999), ya que nos acercamos al objeto de estudio no solo con la intención de describirlo, sino también con la intención de extraer conclusiones en relación con nuestro objetivo de investigación el cual es: conocer las posibles relaciones entre el MTSK movilizado por una maestra y el ETM personal del alumno que se desarrolla en una sesión sobre resolución de problemas en 5 años de educación infantil.

Así, en un primer momento, analizamos el conocimiento matemático especializado movilizado por una maestra para, en un segundo momento, analizar el ETM personal que movilizan los estudiantes. Posteriormente, trataremos de encontrar en el análisis elementos que relacionen y justifiquen cómo el MTSK de la maestra influye en el ETM personal de los estudiantes.

La maestra participante del estudio cuenta con 14 años de experiencia en Educación Infantil. Si bien su formación inicial fue como maestra de Primaria, toda su experiencia docente se ha desarrollado en la etapa de Infantil. Es una maestra preocupada por su formación y participa en un proyecto de investigación colaborativa con otros profesores de distintos niveles educativos, incluyendo formadores del área de Didáctica de la matemática.

Para analizar los ETM de los estudiantes de educación infantil se han considerado las acciones de éstos para determinar su trabajo matemático considerando qué génisis (semiótica, discursiva o instrumental) y qué planos verticales ([Sem-Ins], [Sem-Dis] o [Ins-Dis]) se activan cuando la maestra les presenta una tarea de reparto.

ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD

Episodio 1

La sesión comienza (sub-episodio 1.1) con una presentación de la maestra de la actividad planificada. En primer lugar, pregunta a los niños si saben qué significa repartir. Esta pregunta puede estar motivada por su conocimiento sobre las dificultades de aprendizaje de los estudiantes (KFLM: fortalezas y dificultades), debido a que, tal y como surge en la conversación, es posible que algunos estudiantes puedan confundir el concepto de "repartir" con el concepto "de compartir".

> Niños: Si fuera en juego y uno tiene más que otro y se te gasta, es que el amigo que tenga más le puede dar al otro.
>
> Maestra: ¿Qué pensáis de lo que ha dicho Alba? ¿Quién está de acuerdo? ¿Por qué?... Compartir es una cosa y repartir es otra. A ver…
>
> Niños: Si un niño tiene muchos juguetes y otro tiene poco, pues le puede dar…
>
> Maestra: ¿Eso es compartiendo, repartiendo, o repartiendo para compartir?
>
> Niños: Repartiendo para compartir.

Posteriormente, la maestra entrega a sus estudiantes, distribuidos por parejas, dos vasitos con 12 fichas dándoles la instrucción de que deben repartirlas. Esta actividad muestra que la maestra tiene conocimiento sobre, estrategias que puede utilizar para trabajar el reparto (KMT: *recursos materiales y virtuales*). En este caso, la maestra conoce que, a través del uso de dos vasitos (que representan el divisor de la división) y la entrega de 12 fichas (que representan el dividendo), los estudiantes van a conseguir realizar un reparto. Su intención, al entregar 12 fichas, es que los estudiantes realicen un reparto equitativo (KoT: *propiedades y fundamentos*). Además, también parece mostrar conocimiento sobre la forma de interactuar de sus estudiantes con un contenido matemático (KFLM: *formas de interacción*). Esto se debe a que la maestra sabe que, al estar en parejas y tratándose de repartir, los estudiantes van a tener tendencia natural a hacer un reparto equitativo sin necesidad de mencionarlo, en otras palabras, el trabajo colaborativo en parejas tiene el objetivo de lograr el reparto equitativo. También se puede relacionar la cantidad de fichas elegida por la maestra (12) como su conocimiento sobre variables de la tarea (KMT: *tarea*), al seleccionar un número que tiene muchos divisores (lo que le permitirá más adelante proponer variantes de la tarea), que es suficientemente grande como para que la actividad no sea inmediata y que es a su vez abarcable por un niño de educación infantil.

En la secuencia de trabajo propuesta (repartir con vasitos, explicar lo que han hecho y dibujarlo) encontramos indicios de conocimiento de la maestra de cómo aprenden matemáticas los niños de esta edad, lo que podría ser conocimiento de teorías de aprendizaje (KFLM: *teorías de aprendizaje*).

Luego, en el subepisodio 1.2, mientras los estudiantes trabajan en parejas y la maestra va pasando por las mesas. La maestra (M) pregunta a una dupla de estudiantes (A1 y A2) cómo han repartido las fichas, generándose el siguiente diálogo:

A1: Él tiene 7 y yo tengo 5.

M: Y, ¿qué pasa? A ver, Diego, tú tienes 7 y tu compañera tiene 5, ¿habéis repartido bien?

A2: No

M: Vamos a hacerlo otra vez.

Para superar el error de esta pareja de estudiantes, la maestra les sugiere realizar de nuevo el reparto. En la pregunta realizada por la maestra, ¿habéis repartido bien?, es posible evidenciar que busca activar su génesis instrumental, pues hacen uso de los artefactos 12 fichas y 2 vasos, y su génesis semiótica cuando describe sus procedimientos; es decir, que se activa el plano [Sem-Ins].

Tras el trabajo de las parejas, ya en el sub-episodio 1.3, la maestra abre un turno de debate donde persigue que sus estudiantes cuenten “cómo lo han hecho” a otro compañero. De esta manera, cede el turno de palabra a una estudiante que procede a explicárselo a otro alumno. Esto puede realizarlo porque, de nuevo, parece que conoce cómo pueden interactuar sus estudiantes con la tarea (KFLM: formas de interacción), sabiendo que van a utilizar estrategias diferentes y, de esta manera, las pone en común para que el resto de compañeros conozcan nuevas estrategias:

A3: Hemos contado cuántas teníamos y hemos repartido. Porque yo tenía más y ella (la compañera) menos.

A4: Y entonces ella me ha dado una y, ahora, tenemos las dos 6.

M: Ah, porque ella tenía más y tú tenías menos, ¿verdad?

La estrategia utilizada por los estudiantes en la resolución anterior muestra que realizan una compensación del reparto, es decir, que habiendo repartido las fichas sin saber cuál sería el resultado final y al darse cuenta de que una estudiante tenía más que la otra, han pasado una ficha de una estudiante a otra.

Estas interacciones entre maestra y estudiantes reflejan la influencia del ETM idóneo de la maestra en los ETM personales de sus estudiantes, dado que pide que ellos expliquen sus procedimientos o los de otros compañeros, lo que contribuye a la activación del plano [Sem-Ins], la estrategia seguida se basa en repartir de uno en uno hasta repartirlos todos:

M: A ver, ¿cómo lo has hecho?

A5: He hecho uno para él y otro para mí, uno para él y otro para mí…

M: Y, al final, ¿cuántos tenéis?

A5: 6 cada uno.

Posteriormente, se comenta una nueva estrategia empleada por otra pareja. En esta estrategia, la estudiante afirma haberlos repartido quedando como resultado 7 y 5. A continuación, y para compensar la diferencia, la estudiante que tenía más le dio 2 a la estudiante que tenía menos. Conocedora de que, en vez de dar una ficha para compensar el reparto, pueden dar dos fichas siendo el resultado de la diferencia entre 7 y 5 (KFLM: *fortalezas y dificultades*), la maestra les pregunta sobre si, habiendo realizado esa compensación, el resultado les ha dado lo mismo. Esto puede mostrar énfasis por parte de la maestra en que se evidencie la equitatividad del reparto debido a que busca en sus estudiantes la revisión del proceso seguido hasta alcanzar la solución, detectando el posible error que haya podido surgir en el proceso del reparto. Además, para hacer conscientes a los estudiantes de la estrategia empleada, la maestra pregunta a esta pareja si su resolución se parece a la de alguna pareja anterior:

> M: ¿Entonces tú como lo has hecho, como Jadiya o como Celia y María? ¿Y ahora tenéis los dos lo mismo? (la niña dice que sí)

Esto muestra una preocupación de la maestra por dar a conocer a sus estudiantes las diferentes estrategias que pueden utilizar para resolver el problema. Esta tendencia muestra su conocimiento sobre las formas de interacción con el contenido de sus estudiantes, sabiendo que existen numerosas estrategias para la resolución del problema (KFLM: formas de interacción). Otra evidencia de esto es la siguiente intervención donde pregunta sobre otra nueva estrategia:

> M: (Alguna pareja dijo que lo habían contado antes de repartir): ¿Quién más había contado antes las fichas? (Muchos niños levantan la mano). (Continúa preguntando a otras parejas, hablan del reparto uno a uno).

En este caso, la estrategia no solo consiste en repartir el total de elementos mediante ensayo y error, sino que, además, se añade la complejidad de contar previamente los elementos del conjunto para, posteriormente, estimar el resultado del reparto teniendo en cuenta ese total de elementos, demostrando conocer otra estrategia que los estudiantes pueden utilizar (KFLM: *formas de interacción*).

También podemos indicar que el desarrollo del trabajo matemático en clase, guiado por la maestra, evidencia la organización de su ETM idóneo lo cual influye en el ETM personal de los estudiantes. Por ejemplo, la elección de trabajar con material concreto (fichas y vaso), la instrucción verbal de la tarea, las preguntas y repreguntas, y la socialización de los diferentes trabajos matemáticos realizados por los estudiantes al resolver la tarea, muestran los significados de repartir que utilizan los estudiantes, es decir, el referencial del ETM personal de cada uno de ellos para algunos en un inicio el repartir era compartir y para otros un reparto equitativo.

Episodio 2

Seguidamente (sub-episodio 2.1), la maestra procede a realizar la siguiente parte de la actividad. En esta, pide a sus estudiantes que dibujen lo que han hecho antes para resolverla.

> M: Ahora vamos a poner todas las fichitas en el vaso, vamos a coger el rotulador negro y a pintar lo que hemos hecho (entrega a cada niño un folio).

Seguidamente (sub-episodio 2.2), los estudiantes realizan dibujos, de manera individual, de sus procedimientos. Podemos evidenciar que realizan diferentes procedimientos para representar la resolución de la tarea como, por ejemplo:

Figura 1: representación deA 6

A6 dibuja en el centro un vaso con las doce fichas adentro. Luego, para el reparto, dibuja una a una las fichas, a la izquierda y derecha, de tal manera que queden 6 a ambos lados.

Figura 2: representación de A7

A7 realiza la representación de todo el espacio. Primero coloca las 12 fichas en el centro y conforme va repartiéndolas entre él su compañero (izquierda y derecha) va pintando las fichas del centro de color negro. Al final, el reparto es representado con 6 fichas blancas a la derecha y 6 a la izquierda.

Consideramos que, en términos del ETM, los estudiantes al dibujar sus formas de repartir usando papel y rotulador (artefactos) y representaciones semióticas, activan la génesis semiótica e instrumental, es decir, el plano [Sem-Ins].

Otros estudiantes hicieron dibujos utilizando diferentes representaciones como lo realizado por A8 y A9.

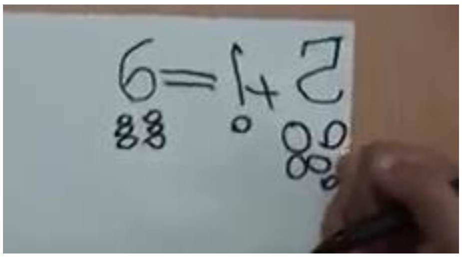


Figura 3: representación de A8

A8 escribe 5+ (con el 5 en espejo, después escribe 6=5+1, con el número de fichas dibujada debajo de cada número). Lo anterior muestra que relaciona el signo igual con el reparto, y su representación muestra que asocia los numerales con sus respectivos números.

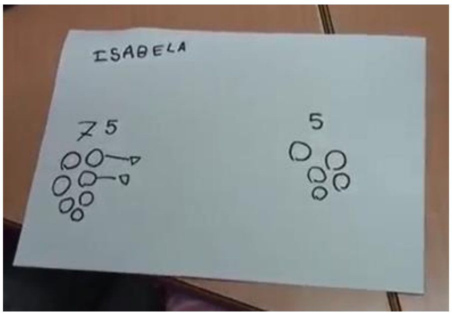


Figura 4: representación de A9

A9 dibuja 7 en un lado, 5 en el otro, y dos flechas en dos de las fichas representadas de las 7 que van hacia el otro lado, explica que él tenía 7, su compañero 5, le dio dos al otro. Pero su compañero aclara que solo le dio una ficha y así ambos tenían la misma cantidad.

De lo anterior, se observa que A8 y A9 hacen dos representaciones del mismo número, con bolitas y con el numeral. Lo que nos permite suponer que los estudiantes visualizan el reparto (activación de la génesis semiótica) de su ETM personal. Asimismo, se puede observar que A3, además de la noción de reparto tiene la noción de la operación de adición.

Una vez que la maestra comprueba que todos los niños han terminado su dibujo, pide que de forma voluntaria cuenten lo que han dibujado (sub-episodio 2.3). El niño que explica se sube a una silla enfrente de sus compañeros y muestra su dibujo a la vez que lo explica. Lo que sigue es la primera intervención al respecto.

> M: En el vaso ¿qué has pintado? (refiriéndose a la Figura 5)
>
> A10: Las fichas que me ha dado la seño.
>
> M: ¿Alguien lo ha hecho también así, que en el vaso ha metido todas las fichas que os he dado? (A Claudia): Porque tú aquí, ¿Qué has metido, todas las fichas que te he dado o todas las que tenías al final?

A10 dice que ha metido todas, luego dice que las que le quedaron a ella (se ven dibujadas 6). La maestra cuelga el dibujo de A10 en la pizarra e invita a salir a otro niño que levantaba la mano.

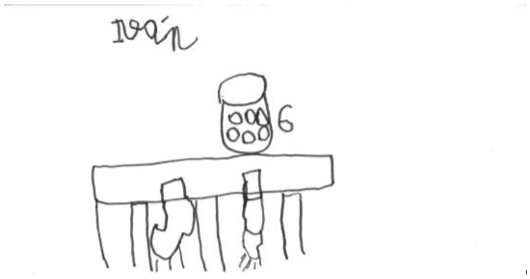


Figura 5: representación de A10 **Figura 6: representación de A11**

A11 explica que ha dibujado la mesa y el vaso con 6 fichas (Figura 6).

> M: ¿Eso qué era, antes o después de repartirlo? (El niño explica que después). ¿Alguno tiene esto en su dibujo un vaso con las 6? (Algunos niños levantan la mano).

Siguen saliendo niños con sus dibujos y los explican. Pide que salga un niño de cada pareja. Va disponiendo los dibujos en la pizarra de modo que se ven algunos dispuestos en columna y otros aparte.

Como se puede extraer del diálogo anterior, la maestra percibe que los dibujos de sus estudiantes representan diferentes partes del problema (datos, resolución y solución). Por ello, hace referencia a “las fichas que dio la maestra/que había al principio” y “los vasitos” (datos –dividendo y divisor), “cómo se había repartido” (resolución) y “lo que le queda a cada uno” (solución -cociente). Esto guarda relación con el conocimiento de la práctica matemática, referido a las partes en las que se puede descomponer un problema (KPM: *procesos asociados a la resolución de problemas*).

Además, y como una estrategia que constantemente utiliza con sus estudiantes, una vez que ha clasificado algunas representaciones les pide que pongan su dibujo en el que más se parezca al suyo. Esta estrategia requiere, por parte de su estudiantado, la comparación y un proceso metacognitivo que le permita identificar aspectos comunes de su representación con la de otro compañero, potenciando así la construcción de conocimiento (KMT: *estrategias*).

Una vez se han explicado y dispuestos los dibujos en columnas (con cada columna con los que son del mismo tipo, Figura 7), en el episodio 2.4 la maestra llama la atención sobre los distintos tipos de representaciones:

> M: Vis, Lucía ha hecho el problema con los vasitos (refiriéndose al primer grupo). Aquí, cómo se había repartido (refiriéndose al siguiente grupo). Después aquí los niños han pintado lo que le queda a cada uno (refiriéndose al resultado final del problema). Y otros niños me han pintado un resumen de todo. ¿Habéis visto? Y están todos bien.

Pide a los niños que quieran que se acerquen a la pizarra y expliquen lo que representa cada grupo de dibujos. Dice, por ejemplo, (señalando un grupo de dibujos) “esta parte de aquí ¿cuándo estábamos qué?”. Repartiendo (concluyen).

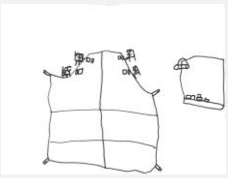
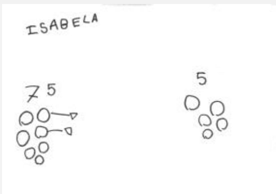
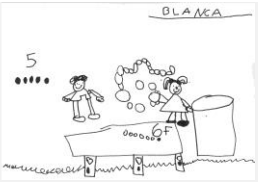
Planteamiento	**Estrategia**	**Resultado**	**Resumen**
	 		

Figura 7: Ejemplo de las representaciones de los estudiantes y del orden que estableció la maestra.

Vemos cómo la maestra diferencia los momentos: antes de realizar el reparto, después de realizar el reparto, durante la realización del reparto y resumiendo todo el proceso. La identificación de estos momentos se relaciona con el conocimiento sobre las diferentes partes de un problema matemático antes referido (datos, resolución y solución) (KPM: *procesos asociados a la resolución de problemas*).

Asimismo, utiliza la clasificación de estos momentos como una estrategia (KMT: *estrategias*) para dar a conocer a sus estudiantes las distintas partes del problema.

En relación con el trabajo matemático de los estudiantes al realizar la tarea sobre la representación de las fichas y los vasitos, se evidencia la activación de la génesis semiótica e instrumental, es decir el plano [Sem-Ins] pues los estudiantes transitan del trabajo con instrumentos (fichas y vaso) a realizar representaciones. En otro momento, con respecto al reparto (equitativo o no) se muestra la activación del plano [Sem-Dis].

CONCLUSIONES

Como se ha mencionado anteriormente, la elección de la maestra del recurso de 12 fichas y 2 vasitos se corresponde con su conocimiento sobre el recurso y variables de la tarea (como la elección del 12). Así, a través del recurso, los estudiantes activan la *génesis instrumental*, evidenciándose una correspondencia entre el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (*KMT*) en lo que al recurso y la tarea se refiere y la activación en el alumnado de la génesis instrumental.

Además, en relación con el párrafo anterior, la maestra utiliza un agrupamiento por parejas como estrategia (*KMT*) que atiende a su conocimiento sobre cómo interactúan los estudiantes con un contenido determinado. En este caso, la maestra conoce que sus estudiantes tratarán de hacer un reparto equitativo (*KFLM*) debido a que los estudiantes en esta etapa tienden a ser egoístas y, en caso de tener menos, van a tratar de compensar las fichas que tiene cada uno. Por tanto, en relación con el *ETM* de los estudiantes, tanto la elección del agrupamiento (*KMT: estrategia*) como el conocimiento sobre cómo interactuarán con el material (KFLM: formas de interacción con el contenido), posibilita la activación de la génesis instrumental y de la *génesis semiótica*, ya que los estudiantes tratarán de describir por qué el reparto no ha finalizado en caso de no ser exacto. Por otro lado, en la gestión de la puesta en común, el conocimiento de la maestra de posibles estrategias de reparto de los estudiantes (*KFLM: formas de interacción con el contenido*) y posibles dificultades (*KFLM: dificultades*) se muestra crucial para formular cuestiones que inciden en la argumentación del alumnado, lo que fortalece la activación de la génesis discursiva y la maestra, a través de su conocimiento, posibilita la activación del plano [Ins-Dis] de sus estudiantes.

Se aprecia también otra relación entre el ETM del alumno y el MTSK de la maestra cuando se pide a los estudiantes dibujar lo que han hecho. Así, el conocimiento de la maestra sobre la potencialidad de la secuencia actividad manipulativa-explicación oral-registro gráfico en el aprendizaje de estudiantes de este nivel (*KFLM: teorías de aprendizaje*), favorece la activación de la *génesis semiótica*, al representar lo que han hecho con el vaso y las fichas. Por tanto, también es posible evidenciar una relación con la génesis instrumental, debido a que el alumno se apoya en el material para representar en el papel lo que ha sucedido, que previamente ha explicada oralmente, activándose así los planos [Sem-Ins] y [Sem-Dis].

Además, mediante las exposiciones de cada estudiante de sus representaciones, la maestra posibilita que los estudiantes activen la génesis discursiva y, a su vez el plano [Sem-Dis], ya que tienen que explicar qué es lo que han representado en el papel, así como explicar cómo han construido la representación. En este caso, destacamos el conocimiento de la maestra sobre la secuencia de aprendizaje antes aludida (*KFLM: teorías de aprendizaje*) y sobre las partes de un problema (KPM: *procesos asociados a la resolución de problemas*) como importantes motores de su gestión para propiciar la activación de la génesis discursiva.

Consideramos que lo anterior muestra que el conocimiento didáctico del contenido de la maestra (KFLM y KMT) y algunos elementos de su conocimiento matemático (fundamentalmente KoT en cuanto a la idea de equitatividad en la división y KPM en relación con las partes de un problema) posibilitan la activación de las tres génesis y planos del ETM de los estudiantes. Apreciamos que esto permite explicar de manera relacionada, siempre parcialmente, el trabajo del profesor y del alumnado. Esta forma de comprender una situación de aula integrando las perspectivas de ETM y MTSK puede ser interesante, pues hasta ahora se había avanzado sobre todo en la integración entre ambos modelos teóricos centrándose en el profesor, generalmente incluyéndose el ETM idóneo y personal de éste (Verdugo-Hernández y Espinoza-Vásquez, 2018). Cuando se desplaza el foco del ETM del profesor al estudiante, podemos identificar relaciones entre subdominios de conocimiento del profesor y elementos del ETM (génesis y planos, en este caso) que amplían las relaciones que podamos prever teóricamente. Así, es esperable que el KPM del profesor se relacione con la génesis discursiva si nos fijamos en su ETM idóneo (pues ambos se refieren de algún modo a la argumentación), mientras que aquí observamos relaciones entre, por ejemplo, el KFLM del profesor y la activación de la génesis discursiva en el ETM personal de los estudiantes. Como futuras investigaciones se propone considerar el estudio profundo del componente prueba del plano cognitivo del ETM dado que se requiere pensar qué implica en estudiantes de Educación Infantil y cómo influye el conocimiento especializado del profesor en la activación de la génesis discursiva que considera dicho componente en el nivel indicado.

AGRADECIMIENTOS

Este estudio está asociado al proyecto RTI2018-096547-B-I00 (Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades, España) y la Red Iberoamericana de Investigación MTSK (financiada por la AUIP).

Agradecemos a la Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP; a la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático, RIITMA y al Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas, IREM PUCP por el apoyo brindado.

REFERENCIAS

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. McGraw-Hill Education (UK).

Borba, M. (2004). A pesquisa qualitativa em Educação Matemática. *CD nos Anais da 27ª reunião anual da Anped, Caxambu, MG*.

Bryman, A. (2013). Quality issues in mixed methods research. In Talk to The White Rose Social Science DTC Second Annual Spring Conference. University of Leicester.

Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Contreras, L.C. y Climent, N. (2015). El profesor en el marco de los ETM: el papel del MTSK como modelo de conocimiento. En I.M. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak y P. Richard (Eds.), *Espacio de trabajo matemático. Actas ETM4* (pp. 461-471). Universidad Complutense de Madrid.

Carrillo J., Climent N., Contreras L.C., y Montes M.Á. (2019). Mathematics Teachers' Specialised Knowledge in Managing Problem-Solving Classroom Tasks. En P. Felmer, P. Liljedahl y B. Koichu (Eds.), *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7_16

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M. y Carrillo, J. (2015). ¿Cómo se relaciona el conocimiento que tiene el profesor acerca del aprendizaje de las matemáticas con su entendimiento sobre los espacios de trabajo matemático? .M. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak y P. Richard (Eds.), *Espacio de trabajo matemático. Actas ETM4* (pp. 473-484). Universidad Complutense de Madrid.

Kuzniak, A. (2022). The Theory of Mathematical Working Spaces—Theoretical Characteristics. In: Kuzniak, A., Montoya, E., Richard, P. (eds) Mathematical Work in Educational Context. Mathematics Education in the Digital Era, vol 18. Springer.

Kuzniak, A., Tanguay, D., y Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education, 48,* 721–737.

Kuzniak, A, y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectiva. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. México, *27*(4), 5-15.

Vasco-Mora, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M.A. y Ribeiro, C.M. (2016). Conocimiento especializado en un profesor de álgebra lineal y espacios de trabajo matemático. *Boletín de Educación Matemática, Bolema, 30*(54), 222-239.

Verdugo-Hernández, P. y Espinoza-Vásquez, G. (2018). Comprensión del uso de las herramientas teóricas y operatorias en el espacio de trabajo matemático y el conocimiento matemático del profesor. E. Montoya-Delgadillo, P. Richard, L. Vivier, M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto y D. Tanguay (Eds.), *Espacio de trabajo matemático. Actas ETM6* (pp. 455-466). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

EL CAMBIO DE DOMINIO EN LA ENSEÑANZA DEL TEOREMA DE TALES: UNA MIRADA DESDE LA RELACIÓN ETM-MTSK

Espinoza-Vásquez, G[1]., Henríquez-Rivas, C[2]., Climent, N[3]., Ponce, R[4]. y Verdugo-Hernández, P[4].

Universidad Alberto Hurtado[1], Universidad Católica del Maule[2], Universidad de Huelva[3], Universidad de Talca[4]

Este trabajo estudia la enseñanza del Teorema de Tales (TT) desde la complementariedad entre el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) y el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK). Proponemos un estudio de caso que analiza una propuesta de enseñanza donde se observan los cambios geométrico-numérico y geométrico-algebraico, lo que permite evidenciar el conocimiento movilizado del profesor. Discutimos sobre el tránsito entre dominios y sobre la comprensión de la práctica del profesor a la luz de la relación ETM-MTSK.

INTRODUCCIÓN

La investigación sobre la educación en geometría es extensa y ha experimentado un gran desarrollo en los últimos años (Houdement y Kuzniak, 1999, 2006; Sinclair *et al*., 2017; Herbst *et al*, 2018). Específicamente, sustentada en la teoría del Espacio de Trabajo Matemático (ETM), la investigación de Montoya Delgadillo (2014) se centra en el proceso de prueba en futuros profesores, destacando los obstáculos generados debido a las diferencias en cuanto a los roles y estatus de la demostración en el liceo y en la universidad. Otros trabajos han identificado bloqueos y dificultades en el trabajo geométrico de profesores, y analizado las circulaciones del ETM, en los enfoques sintético y analítico, discutiendo la complementariedad entre dichos enfoques (Henríquez Rivas y Montoya Delgadillo, 2015, 2016). Un número creciente de investigaciones muestran el potencial del ETM como una herramienta teórica y metodológica para el análisis del trabajo matemático en geometría (Gómez-Chacón y Escribano, 2014; Gómez-Chacón y Kuzniak, 2015; Richard *et al*., 2016; Guerrero Ortiz y Henríquez Rivas, 2018; Kuzniak y Nechache, 2021). El presente trabajo intenta aportar en la perspectiva de las conexiones teóricas entre dos modelos y, cómo estos permiten aportar a la comprensión y profundizar en los análisis de un mismo fenómeno.

Desde la perspectiva del ETM, el trabajo propuesto por el profesor de matemáticas ha sido de interés tanto para profundizar en la planificación de su enseñanza, como para comprender el conocimiento movilizado durante su práctica (Henríquez Rivas *et al*., 2021). En este sentido, desde el Simposio ETM4 se ha dado lugar a estudios centrados en el profesor en donde el modelo del MTSK ha mostrado ser útil para interpretar y profundizar en sus prácticas docentes y las interacciones de los distintos elementos que conforman el ETM (Carrillo *et al*., 2018).

En relación con lo señalado en los párrafos precedentes, los trabajos de Henríquez Rivas *et al*. (2021) y Climent *et al*. (2021) resaltan la importancia de estudiar el trabajo geométrico del profesor durante la enseñanza del teorema de Tales (TT) y el conocimiento especializado movilizado, respectivamente. Ambos estudios analizan las mismas prácticas de aula, en las que se puede observar cambios de dominio (en la terminología del ETM). Por ello, surge interés por comprender las prácticas de enseñanza del profesor durante la enseñanza del TT en el aula, con especial atención a los cambios de dominio, desde la geometría a lo numérico y algebraico, considerando como sustento teórico la complementariedad entre los modelos ETM y MTSK, lo que permite ahondar en la complejidad que conllevan estudiar los conocimientos que pone en juego el docente en su práctica de enseñanza.

CONTEXTUALIZACIÓN

Para dar contexto a la problemática planteada, consideramos dos dispositivos de carácter oficial que son referentes en Chile para el diseño de la enseñanza y el trabajo en el aula, estos son: *Bases Curriculares* y el *Texto del Estudiante de Matemáticas.*

De acuerdo a las Bases Curriculares (Ministerio de Educación [Mineduc], 2015), que corresponde al ciclo comprendido entre 7° Básico (12 años) y 2° Medio (15 años), los alumnos deben estudiar el teorema de Tales en Primero Medio (14 años), en el eje temático *Geometría*. Específicamente uno de los Objetivos de Aprendizaje (OA) de estas bases, señala “Desarrollar el teorema de Tales mediante las propiedades de la homotecia, para aplicarlo en la resolución de problemas” (Mineduc, 2015, pp. 120). El currículo plantea, pues, promover la habilidad de resolver problemas asociada con el teorema y, también, su estudio a partir de las transformaciones geométricas, específicamente la homotecia y sus propiedades.

En cuanto al estudio del teorema de Tales en el libro de texto del estudiante (Fresno *et al.*, 2020), se presenta en la lección *Homotecia y teorema de Tales*, donde las tareas propuestas y ejemplos resueltos aparecen con énfasis en las proporciones y la semejanza de triángulos, destacando la aparición de representaciones prototípicas (Hershkowitz, 1989), e implican la resolución de ecuaciones, tal como se muestra en la siguiente Figura 1.

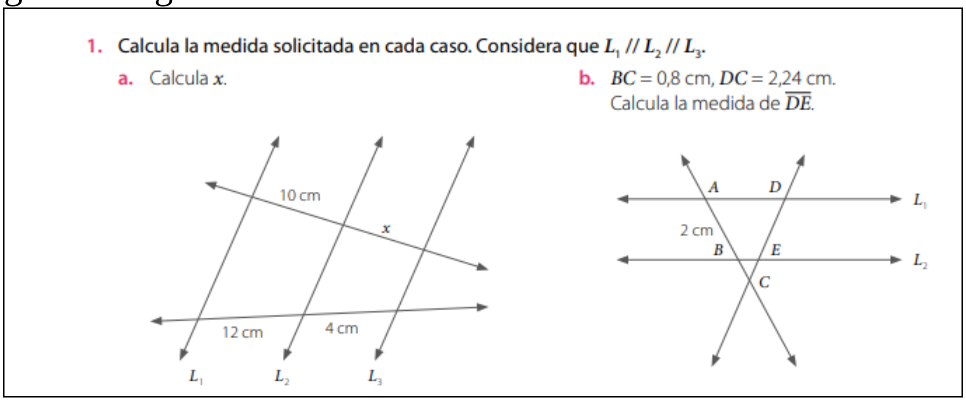


Figura 1. Tareas propuestas en el libro de texto del estudiante (Fresno *et al.*, 2020, p. 124).

De la revisión de las tareas y el teorema de Tales en el libro de texto, destacamos que no existe una relación explícita de su estudio con la homotecia y sus propiedades, y si bien aparecen en la misma lección, se presentan como temas desconectados entre sí.

MARCO TEÓRICO

Espacio de Trabajo Matemático (ETM)

El ETM proporciona herramientas teóricas y metodológicas para caracterizar los caminos que emergen en la resolución de tareas matemáticas (Kuzniak *et al*., 2016; Kuzniak y Nechache, 2021). En este sentido consideramos el uso teórico de sus componentes, génesis y planos verticales para caracterizar las circulaciones del trabajo geométrico del profesor en el aula, en la resolución de una tarea (Montoya-Delgadillo, Mena-Lorca y Mena-Lorca, 2014).

La Figura 2 muestra la relación entre génesis, componentes de cada plano y planos verticales del ETM.

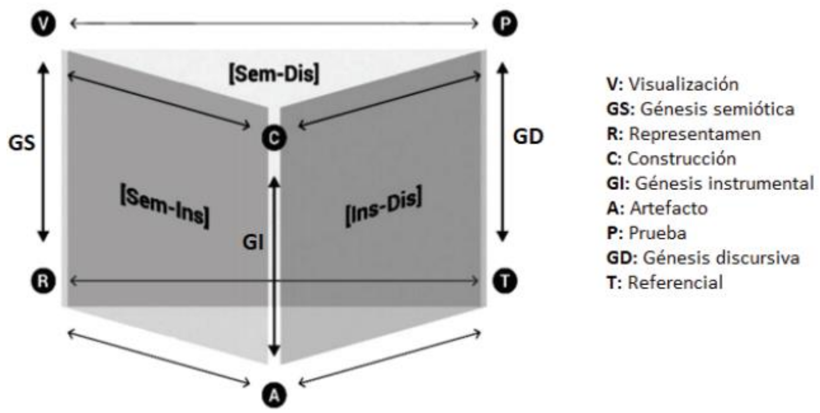


Figura 2. Planos verticales, componentes y génesis del ETM (Kuzniak *et al.*, 2016)

En este estudio se pone foco en el ETM idóneo de un profesor, considerando la distinción entre ETM idóneo *potencial* y ETM idóneo *actual*, entendidos como las modificaciones para la enseñanza a priori y las que se implementan en las aulas, respectivamente (Henríquez Rivas *et al*., 2022). Nos centramos en el ETM idóneo actual de un profesor cuando enseña el teorema de Tales a sus estudiantes, con implicancias futuras para mejoras al ETM idóneo potencial del profesorado, en la formación de profesores o en la investigación.

Asimismo, destacamos el rol de la tarea como una activadora del trabajo matemático del individuo (Kuzniak, 2011; Kuzniak *et al.*, 2022), ya que favorece el análisis de circulaciones en el ETM (Henríquez Rivas *et al.*, 2021). En el presente trabajo, los análisis se realizan en relación con las tareas que el profesor propone para la enseñanza en su práctica en el aula.

Cambios de dominio

La investigación en ETM considera los principios epistemológicos de los objetos que se estudian dentro de un dominio matemático, por ejemplo, la geometría, el análisis o la probabilidad (Kuzniak, 2011). Asimismo, la noción de dominio permite identificar los paradigmas que caracterizan al ETM y hace posible especificar las representaciones semióticas, los artefactos, propiedades de objetos, etc., puestos en juego en un determinado espacio de trabajo en relación con una tarea matemática dada (Montoya-Delgadillo y Vivier, 2014).

En estudios previos sobre circulaciones en el ETM se han estudiado los *cambios de dominio*, entendidos como la articulación entre dos dominios matemáticos diferentes, uno de origen y otro de resolución (Montoya-Delgadillo y Vivier, 2014). Un cambio de dominio en el trabajo matemático puede desembocar en que no haya retorno al dominio inicial, o bien, una tarea que ha sido diseñada para que durante su trabajo sea necesario cambiar de dominio. Cabe resaltar que, los autores distinguen la noción de dominio de la de marco en el sentido de Douady (1986), pues el dominio en el sentido del ETM, no solo contine imágenes mentales, como lo es en el caso de los marcos. Asimismo, el ETM no solo se centra a nivel de una noción específica y el cambio de roles de esta, como en la dialéctica herramienta-objeto, pues en el ETM el foco está en una perspectiva operativa más global y las articulaciones entre las componentes de los planos epistemológico y cognitivo que operan en este (Montoya-Delgadillo y Vivier, 2014), donde el dominio de resolución no necesariamente adquiere el rol de herramienta, tal como veremos en el presente estudio.

Para los propósitos del presente estudio planteamos que los cambios de dominio pueden ser analizados en profundidad a partir de la relación teórica ETM-MTSK. Por ello, en lo que sigue se describen aspectos teóricos centrales de este último modelo.

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

El modelo MTSK es una conceptualización del conocimiento del profesor útil para el análisis de las prácticas de enseñanza de la matemática. Este modelo contempla los dominios del Conocimiento Matemático (MK) y Didáctico del contenido (PCK), cada uno dividido en tres subdominios. El MK contempla el Conocimiento de los temas (KoT), de la Estructura (KSM) y de las Prácticas (KPM) Matemáticas. Por su parte, el PCK contempla el Conocimiento de la enseñanza (KMT), el de las características del aprendizaje (KFLM) y de los estándares de aprendizaje (KMLS) de las Matemáticas. El esquema presentado en la Figura (3) exhibe estos subdominios que conceptualizan el conocimiento del profesor de matemáticas.

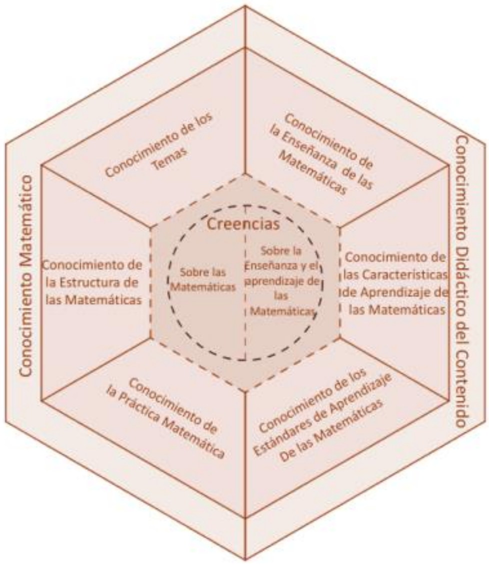


Figura 3. Subdominios del MTSK (Carrillo *et al*., 2013).

Conexiones entre ETM y MTSK

Desde el pasado simposio ETM4 realizado el año 2016, se ha avanzado en el establecimiento de relaciones entre ambos modelos, abriendo espacio a investigadores en MTSK para iniciar formalmente el diálogo con investigadores en ETM, produciéndose los primeros trabajos en esta línea y planteándose algunas preguntas que han permitido avanzar en la conexión de estos modelos. Los trabajos sobre la relación ETM-MTSK reconocen su potencial para dar nuevas interpretaciones y refinar los análisis (Espinoza-Vásquez *et al*., 2018).

En términos generales, los trabajos que han abordado la relación entre los modelos han utilizado el paradigma de conexión entre teorías que exponen Bikner-Ahsbahs y Prediger (2010). En particular, el presente estudio considera estrategias de *combinación* y *coordinación* de los elementos teóricos para analizar las prácticas del profesor, pues se analizan los datos de forma conjunta con los elementos de cada teoría (como ya se ha señalado, con foco en el cambio de dominio asociado al estudio del TT).

METODOLOGÍA

Para alcanzar nuestro objetivo, adoptamos un enfoque cualitativo, basado en un diseño con estudio de casos de tipo instrumental (Stake, 2007). El caso corresponde a un profesor (P1) de matemáticas que participó en talleres de reflexión sobre la práctica de aula y propuestas de mejoras en torno a tareas y ejemplos, en relación con un contenido geométrico seleccionado, impartidos por los autores de este trabajo. El taller estaba dirigido a profesores de matemáticas de un liceo público. La participación de los docentes en el taller fue voluntaria.

En estos talleres P1 expuso, discutió y reformuló una de sus clases habituales centrada en el estudio del teorema TT. La selección de P1 se basó en su reformulación (incluyendo recursos tecnológicos) y en su disposición a colaborar y manifestar opiniones. Dentro de las características de P1, destacamos que se manifiesta cercano a la enseñanza expositiva y tradicional. La clase analizada se realizó a un segundo año de enseñanza media (15-16 años).

La recolección de datos consideró videograbaciones, transcripciones de clases y observación no participante. El análisis de los datos contempla elementos de una metodología usada en trabajos en ETM (Kuzniak y Nechache, 2021; Henríquez Rivas y Kuzniak, 2021), de la cual consideramos la etapa *adentro*, para describir las principales acciones en la realización de las tareas analizadas en la clase de P1. Los criterios de análisis de dicha etapa se han adaptado para los propósitos del presente estudio, siendo: i) *descripción del trabajo desplegado en la clase* a partir de las tareas desarrolladas; ii) *análisis de la circulación en el ETM y del conocimiento especializado del profesor*, con base en la descripción del trabajo efectuado en i).

RESULTADOS

P1 propone como objetivo de la clase *comprender y resolver ejercicios con el TT*. Para ello, la clase se desarrolla alrededor de tres tareas, que se muestran en la Tabla 1.

Tarea 1	Comparar el valor de la razón de medidas de segmentos entre rectas paralelas y no paralelas representadas con Geogebra con uso de calculadora.
Tarea 2	Establecer relaciones proporcionales a partir de la igualdad entre razones de segmentos.
Tarea 3	Calcular la medida desconocida de un segmento entre rectas paralelas cortadas por dos rectas secantes aplicando el TT, a partir de representaciones figurales.

Tabla 1. Tareas propuestas en la clase por P1.

Para efectos de los análisis que presentamos, nos centramos en las tareas 1 y 3, pues en estas se observan cambios de dominio asociados con la enseñanza de TT y ocupan gran parte de la clase.

En la tarea 1, proyectando en el pizarrón una figura que trae previamente construida en GeoGebra (Figura 4), P1 solicita a sus estudiantes calcular razones entre las medidas de segmentos en la configuración general del TT. Las medidas están determinadas por el software y permiten establecer la igualdad numérica entre las razones.

> P1: El TT se desprende básicamente de la semejanza de triángulos. Quiero que hagamos un cálculo, ¿se acuerdan cómo lo hacían en semejanzas? […] vamos a hacer una proporcionalidad. Comparábamos dos razones y aquí vamos a hacer lo mismo, […] este segmento, partido por este segmento [se refiere a los segmentos de la configuración], y lo vamos a igualar. Ya chiquillos, vamos dividiendo esto por esto. [...] Vamos a comparar esto con esto, hagan la fracción y anótenla por ahí. 1, 3, 4 decimales.

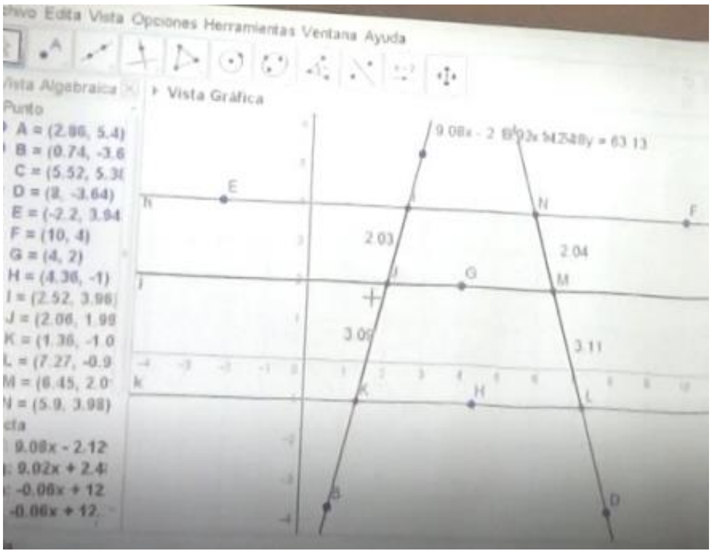


Figura 4. Tarea 1 propuesta por P1 con uso de GeoGebra.

Los estudiantes realizan aproximaciones y usan la calculadora para concluir tal igualdad. Si bien se inicia el estudio del TT en el *dominio geométrico*, activando la génesis semiótica con la representación figural proyectada y la visualización icónica, inmediatamente se trabaja mediante razones numéricas (las razones en la proporcionalidad son tratadas como fracciones, enfatizando el carácter numérico del teorema y la prueba pragmática del teorema). Esto se evidencia por el uso del artefacto material (calculadora) para obtener los resultados y probar la validez de TT. Este tratamiento numérico supone un cambio del *dominio geométrico* de origen al *dominio numérico* en la resolución, sin retornar al dominio inicial en esta tarea (Montoya Delgadillo y Vivier, 2014), en la cual se evidencia el privilegio del plano vertical [Sem-Ins].

Desde el punto de vista de su conocimiento, P1 cambia el foco en el dominio geométrico hacia lo algebraico mediante las razones entre las medidas de los segmentos, tomando la proporcionalidad como una idea transversal que permite llevar el TT al dominio numérico (KSM, *conexiones auxiliares*). Esta organización y las tareas propuestas, dan cuenta también del énfasis procedimental visible en lo esperado por P1 de sus estudiantes (KMLS, *nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado*), que parece consistente con la finalidad que atribuye al TT y que declara como objetivo de la clase (*comprender y resolver ejercicios con el TT*).

Parte importante de la clase se desarrolla alrededor de la tarea 3, en la cual P1 propone ejercicios sobre el TT restringidos a plantear y resolver ecuaciones lineales con apoyo de figuras prototípicas, similares a las propuestas en la Figura 1, lo que en términos de ETM activa el plano vertical [Sem-Ins] por la relación entre la figura, los tratamientos algebraicos y el uso del TT como un artefacto simbólico. En esta tarea vuelve a observarse el cambio del *dominio geométrico* original al dominio *algebraico* en la resolución (con el énfasis en las ecuaciones). Desde el punto de vista de su conocimiento, P1 muestra su conocimiento de la aplicación del TT a la medición de distancias desconocidas (KoT –*fenomenología*). Si consideramos el conjunto de los ejercicios propuestos a los alumnos, lo que muestra su conocimiento sobre tareas relativas a este contenido (KMT- *tareas*), podemos diferenciar mayoritariamente ejercicios de cálculo de valor desconocido (como el de la Figura 5), cinco frente a uno. El mayor peso de las tareas de cálculo de valor desconocido parece coherente con la finalidad de aplicación que atribuye al teorema. En los registros figurales se hace uso de representaciones de dos rectas secantes cortadas por paralelas (sin que se represente el punto de corte de las secantes) (Figura 4) y de representaciones de triángulos homotéticos de tipo "pico" (Figura 5), estableciéndose la relación entre ambas representaciones. En la interpretación de estas representaciones se trata el aspecto de homotecia, estando ausente el de proyección (KoT *–definiciones, propiedades y sus fundamentos)*. El conocimiento de estas configuraciones del teorema es parte del KoT (representaciones) y permite utilizarlas para el diseño de los ejercicios que plantea (KMT - *tareas*) de acuerdo a lo que espera aprendan sus estudiantes (KMLS -*nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado*).

En el ∆ABC de la figura, DF//BC. Si AF=4FB, AD=20cm, entonces la medida del segmento DC es

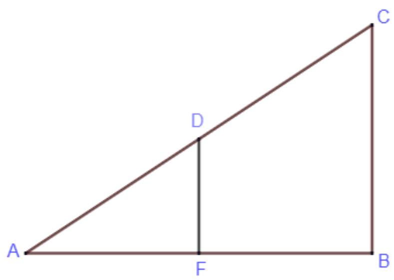


Figura 5. Ejercicio propuesto por P1 en tarea 3.

CONCLUSIÓN

Aunque el TT está en el eje de la geometría del currículo escolar chileno y se relaciona con la homotecia y sus propiedades, la enseñanza que presentamos y su análisis se desarrolla en discordancia con lo planteado en los lineamientos curriculares, pues se centra en el cambio de dominio desde lo geométrico en el origen al cambio de dominio en la resolución del trabajo con números, proporcionalidad y ecuaciones.

De los análisis observamos que la enseñanza del profesor analizado considera vínculos entre los dominios geométrico y numérico-algebraico con privilegio por tareas de ejercitación en el dominio algebraico. La organización y desarrollo de la enseñanza supone un cambio de dominio que no regresa al dominio inicial y que está influenciado, en parte, por el conocimiento especializado del profesor sobre el TT y por la organización de su ETM idóneo. En particular, el cambio de dominio en este caso, que se basa en el conocimiento del profesor de las conexiones entre dichos dominios (KSM), parece estar influenciado por las expectativas de aprendizaje (KMLS), su conocimiento de aplicaciones del TT (KoT), de representaciones del mismo (KoT) y de tareas para su enseñanza (KMT).

Lo anterior nos lleva a preguntarnos si el análisis del conocimiento especializado del profesor nos puede aportar luz sobre algunas posibles razones de los cambios de dominio identificados desde el ETM. Destacamos que los análisis presentados consideran el cambio de dominio (de la geometría a los números y álgebra) como un escenario que posibilita el estudio de las relaciones entre el ETM y MTSK, lo cual merece continuar siendo estudiado en futuras investigaciones.

Planteamos como una proyección, la toma de consciencia del cambio de dominio del origen y de resolución en las tareas que se proponen para el aprendizaje de conceptos, específicamente en el ETM idóneo del profesorado y sus implicancias en el ETM idóneo actual y potencial, así como en el ETM personal de los estudiantes. El presente estudio puede servir de insumo para la mejora/reformulación de propuestas que atiendan las dificultades detectadas y la discordancia entre los lineamientos curriculares y lo propuesto por el profesor. En este sentido, considerar la complementariedad entre el modelo MTSK, el ETM idóneo actual del profesor y la planificación en la perspectiva del ETM idóneo potencial, tanto desde la perspectiva de enseñanza, como desde el punto de vista de la investigación, podrían ser consideradas como una proyección a partir de la complementariedad entre los modelos teóricos que hemos abordado. Asimismo, planteamos este estudio como un aporte al diseño de propuestas para la enseñanza, como es el caso del libro de texto, que podría poner atención en el ETM personal del estudiante, que específicamente en relación con el TT, debe ser mejorado atendiendo los resultados del presente estudio y ahondar en el diseño de tareas pertinentes a partir de los cambios de dominio intencionados.

Finalmente, destacamos que, si bien esta investigación aborda el estudio de un caso, se ha constatado en investigaciones precedentes que el cambio de dominio en el tratamiento del TT no es aislado (Montoya y Vivier, 2014; Henríquez Rivas *et al*., 2021). Por ello, visualizamos una oportunidad investigativa en la perspectiva de la complementariedad teórica aquí abordada para el diseño de propuestas de enseñanza y aprendizaje para este u otro tema que involucren dos o más dominios matemáticos en juego, a partir de un dominio de origen y otros dominios de resolución. En el caso de la complementariedad entre los modelos ETM y MTSK, se podría plantear una propuesta para su análisis en la formación del profesorado que, por una parte, propicie dichos cambios de dominio y, por otra, que aborde la discordancia con los lineamientos curriculares que aquí hemos presentado.

AGRADECIMIENTOS

Este estudio está asociado al proyecto RTI2018-096547-B-I00 (Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades, España) y la Red Iberoamericana de Investigación MTSK (financiada por la AUIP).

REFERENCIAS

Bikner-Ahsbahs, A. y Prediger, S. (2010). Networking of theories: an approach for exploting the diversity of theorical approaches. En B. Sriraman y L. English (Eds.). *Theories of Mathematics Education: Seeking new frontiers* (pp. 483-506). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-00742-2

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser, y M. A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2985-2994). Middle East Technical University, Ankara.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Climent, N., Espinoza-Vásquez, G., Carrillo, J., Henríquez-Rivas, C. y Ponce, R. (2021). Una lección sobre el teorema de Thales vista desde el conocimiento especializado del profesor. *Revista Educación Matemática, 33*(1), 98-124. https://doi.org/10.24844/EM3301.04

Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5-31. https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique/

Espinoza-Vásquez, G., Ribeiro, M. y Zakaryan, D. (2018). Avance en la comprensión de las relaciones entre el ETM idóneo y el MTSK del profesor. *Journal of Educational Research, MENON, 4*, 146-161.

Fresno, C., Torres, C. y Ávila, J. (2020). *El Texto del Estudiante Matemática 1° Medio*. Editorial Santillana.

Guerrero Ortiz, C. y Henríquez Rivas, C. (2018). El Espacio de Trabajo Matemático en el Estudio de Propiedades Sintéticas y Analíticas de la Parábola. *Journal of Educational Research, MENON, 4*, 162-178.

Gómez-Chacón, I. y Escribano, J. (2014). Actividades sobre lugares geométricos desarrolladas en un sistema de geometría dinámica. Visualización no icónica y génesis instrumental. *Relime, 17*(4-II), 361-383. https://doi.org/10.12802/relime.13.17418

Gómez-Chacón, M. I. y Kuzniak, A. (2015). Spaces for geometric work: figural, instrumental, and discursive geneses of reasoning in a technological environment. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*, 201-226.

Henríquez-Rivas, C. y Montoya-Delgadillo, E. (2015). Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 51-70. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1408

Henríquez Rivas, C. y Montoya Delgadillo, E. (2016). El Trabajo Matemático de Profesores en el tránsito de la Geometría Sintética a la Analítica en el Liceo. *Bolema, 30*(54), 45-66. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a03

Henríquez Rivas, C., Ponce, R., Carrillo Yáñez, J., Climent, N. y Espinoza-Vásquez, G. (2021). Trabajo matemático de un profesor basado en tareas y ejemplos propuestos para la enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(2), 123-142. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3210

Henríquez Rivas, C. y Kuzniak, A. (2021). Profundización en el trabajo geométrico de futuros profesores en entornos tecnológicos y de lápiz y papel. *Bolema, 35*(71), 1550-1572. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a15

Henríquez Rivas, C., Kuzniak, A. y Masselin, B. (2022). The idoine or suitable MWS as an essential transition stage between personal and reference mathematical work. En A. Kuzniak et al. (Eds.). *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 121-146). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_6

Herbst, P., Cheah, U. H., Richard, P. R. y Keith, J. (2018). *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools. ICME-13 Monographs*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77476-3

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry: two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(1), 61–76.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour de l’enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics, 40*, 283-312.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11*, 175-193.

Kuzniak, A. (2011). L’espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 9-24.

Kuzniak, A., Tanguay, D. y Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education, 48*, 721–737. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x

Kuzniak, A. y Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of Mathematical Working Spaces. *Educational Studies in Mathematics, 106*, 271–289. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10011-2

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. R. (Eds.). (2022). *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (1st ed., Mathematics Education in the Digital Era, Vol. 18). Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8.

Montoya Delgadillo, E. (2014) El proceso de prueba en el espacio de trabajo geométrico: profesores en formación inicial. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(3), 227-247. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1049

Montoya-Delgadillo, E., Mena-Lorca, A. y Mena-Lorca, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Relime*, *17*(4-I), 181-197. DOI: 10.12802/relime.13.1749

Montoya Delgadillo, E. y Vivier, L. (2014). Les changements de domaine dans le cadre des espaces de travail mathematique. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *19*, 73-101.

Richard, P., Oller Marcén, A. y Meavilla Seguí, V. (2016). The concept of proof in the light of mathematical work. *ZDM Mathematics Education, 48*, 843–859. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0805-9

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M., De Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2017). Geometry Education, Including the Use of New Technologies: A Survey of Recent Research. En G. Kaiser (Eds.), *Proceedings of the 13th international congress on mathematical education* (pp. 277-287). Springer.

Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos* (4ª Ed.). Ediciones Morata.

DISEÑO DE TAREAS EN LA CONFORMACIÓN DEL ETM IDÓNEO DEL FUTURO PROFESOR CENTRADAS EN LAS FUNCIONES

Paula Verdugo-Hernández[1] y Carolina Herníquez-Rivas[2]

(1) Universidad de Talca y (2) Universidad Católica del Maule

Las experiencias docentes y las demandas establecidas para el profesorado son cada vez mayores, lo cual requiere una vigilancia sistemática en la formación inicial docente (FID). Presentamos un estudio de caso que caracteriza el trabajo matemático sobre una tarea diseñada por futuros profesores (FP) para estudiantes entre 13 y 14 años, centrada en la noción de función y que favorece la habilidad representar declarada en el currículo escolar de secundaria chileno. Para los análisis, se utilizó el ETM como una herramienta analítica del trabajo realizado por los FP. El estudio se realiza en un curso de didáctica de la FID en una universidad. Los resultados muestran dificultades asociadas con el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) idóneo potencial. Concluimos sobre posibilidades de mejoras para los futuros profesores en la conformación de su ETM idóneo actual para el aula.

INTRODUCCIÓN

Existen diversos trabajos que abordan problemáticas educativas sobre la noción de función, sus características y propiedades (Ortega y Pecharromán, 2010; Arce y Ortega 2013; Martínez De La Rosa, 2015; Pino-Fan *et al*. 2019). Por ejemplo, Carrión *et al*. (2014) estudian, desde la teoría del ETM, el uso de las funciones en un taller con participación de profesores, resaltando el uso de las herramientas tecnológicas. Desde la perspectiva semiótica de Duval (1995), el estudio de las funciones ha sido ampliamente abordado y continúa con desafíos latentes. En el ámbito de la formación del profesorado de matemáticas, nos parece relevante explorar y dar a conocer trabajos que ponen atención en el diseño de tareas en contextos simulados, los que entenderemos por aquellos momentos que sitúan al FP en su rol docente y en el estudio de los procesos cognitivos, desde una perspectiva semiótica que ayuda a favorecer la enseñanza. Por ello, el presente trabajo aborda el análisis del *ETM idóneo potencial* del FP, con miras a la conformación de su *ETM idóneo actual* (Henríquez Rivas *et al*., 2022), para contribuir al diseño y ejecución de su trabajo matemático en el aula.

EL CURRÍCULO ESCOLAR Y LIBRO DE TEXTO PARA CONTEXTUALIZAR EL DISEÑO DE LA ENSEÑANZA

Para dar contexto a la problemática planteada, consideramos el *Texto del Estudiante* de 8° Básico -13 años aprox.- (Torres Jeldes y Caroca Toro, 2019), en relación con el concepto función y la habilidad *representar*, presentes en el currículo de educación secundaria chileno (Mineduc, 2015). En cuanto a las habilidades matemáticas declaradas en el currículo, *representar* se trata de una de cuatro habilidades propuestas en dicho documento de la que se espera que los estudiantes

[…] extraigan información desde el entorno y elijan distintas formas de expresar esos datos (tablas, gráficos, diagramas, metáforas, símbolos matemáticos, etc.) según las necesidades de la actividad o la situación” (Mineduc, 2015, p. 97).

La intención es propiciar el desarrollo de ciertas destrezas asociadas a los conceptos matemáticos para su aplicación en contextos diversos.

El libro de texto es un referente en Chile para el diseño de la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes. En la lección *Funciones, concepto y representación de una función*, se observa la intención de abordar la diversidad de registros para representar el concepto función. Sin embargo, gran parte de las tareas presentadas y los ejemplos resueltos se plantean con preguntas dirigidas, dando escasa libertad al estudiante para que decida cuál representación le resulta más conveniente utilizar. Una muestra de esto, lo presentamos en la siguiente tarea (Figura 1).

3. ¿Cuál es la expresión algebraica que permite modelar la relación entre los valores de x e y que se muestra en la siguiente tabla?

x	1	2	3	4	5	6	7
y	5	7	9	11	13	15	17

Figura 1. Tarea propuesta en libro de texto (Torres Jeldes y Caroca Toro, 2019, p. 94)

A partir de lo anterior, nos resulta relevante resaltar la necesidad de propiciar y analizar las experiencias formativas en contextos simulados de enseñanza que realizan los profesores de matemáticas, con el fin de contribuir a que los FP comprendan el uso de las representaciones semióticas relativas al estudio de las funciones. En este sentido, esperamos que los FP puedan enriquecer sus estrategias de enseñanza, especialmente asociadas con el diseño de tareas en la FID, para su posterior implementación o adaptación en el aula. Para analizar en profundidad estos diseños propuestos por los FP, utilizamos el ETM como una herramienta analítica. De lo anterior, se desprende el objetivo general de esta investigación: *Analizar las circulaciones en el ETM idóneo potencial que favorecen las tareas diseñadas por FP para la enseñanza de las funciones y sus representaciones.*

MARCO TEÓRICO

Para efectos de nuestros análisis nos hemos basado en la teoría *Espacios de Trabajo Matemático* -ETM- (Kuzniak *et al*., 2022) el cual posee dos planos, uno *epistemológico* relacionado con los principios epistemológicos de los objetos estudiados, y otro *cognitivo*, apoyado en el pensamiento del sujeto cuando utiliza los objetos matemáticos. Cada plano considera tres componentes: el plano epistemológico está constituido por el *referencial,* referido a la parte teórica del trabajo matemático, lo que abarca propiedades, teoremas y definiciones, entre otros; el *representamen*, relativo a los objetos matemáticos que son interpretados y construidos por el individuo; los *artefactos*, se distinguen aquellos de tipo material (abarca herramientas tecnológicas, para dibujo, construcción o medición) o un sistema simbólico (considera el empleo de objetos de naturaleza semiótica o algoritmos basados en técnicas de cálculo). El plano cognitivo está constituido por los componentes: *visualización*, determinado por la representación semiótica de los objetos matemáticos; *construcción*, basado en las acciones desencadenadas por los artefactos utilizados y las técnicas de uso asociadas; *prueba*, definido como todo proceso discursivo de validación, que permite formular argumentaciones organizadas deductivamente, definiciones, hipótesis, conjeturas o el enunciado de contraejemplos (Kuzniak *et al*., 2016b; Henríquez Rivas *et al*., 2021). La articulación entre los planos y sus componentes se realiza mediante tres génesis, *semiótica, instrumental* y *discursiva*, las que permiten explicitar la naturaleza del trabajo matemático puesto en juego (Kuzniak, 2011).

Existen interacciones entre las distintas génesis, las que implican la activación de los planos verticales, que generan la circulación entre las componentes del ETM. Cuando se involucra las génesis semiótica y discursiva, se dice que es activado el plano vertical Sem-Dis; cuando es involucrada las génesis semiótica e instrumental, se activa el plano vertical Sem-Ins; Finalmente, la génesis instrumental y discursiva activan el plano vertical Ins-Dis (ver figura 1).

Por otra parte, en el contexto del trabajo matemático según los propósitos de la investigación y del foco en el estudio del trabajo matemático, el modelo distingue tres tipos de ETM: referencia, idóneo y personal. En el contexto del presente estudio, analizamos el ETM *idóneo* del futuro profesor, desarrollado en relación con la elección, diseño y adaptación de tareas propuestas para la enseñanza de las funciones y sus representaciones. Asimismo, considerando la distinción entre el ETM *idóneo potencial*, referido a la concepción a priori del ETM, y ETM *idóneo actual*, referido a la implementación del trabajo matemático en el aula (Henríquez Rivas *et al*., 2022). Así, en el presente estudio nos centramos en el ETM *idóneo potencial* del FP.

Finalmente, nos focalizamos en la definición de tarea, entendida como la activadora del trabajo matemático del individuo (Kuzniak, 2011), destacando la importancia que se atribuye al diseño de tareas en la perspectiva de *task design* (Watson y Ohtani, 2015).

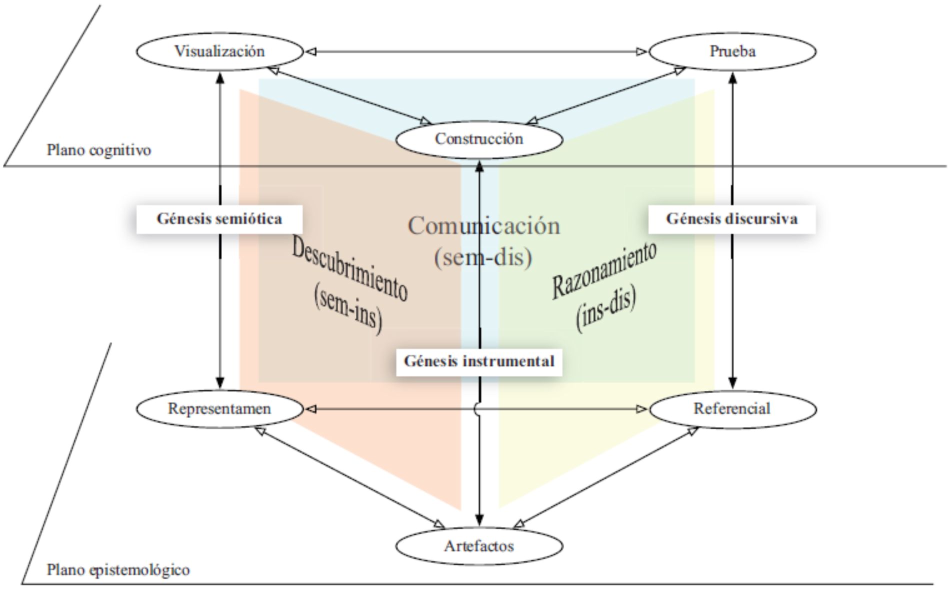


Figura 2. Esquema del Espacio de Trabajo Matemático

(Kuzniak y Richard, 2014. p, 23)

METODOLOGÍA

Proponemos una investigación enmarcada en el paradigma cualitativo, adoptando un diseño basado en el *estudio de casos* de tipo instrumental (Stake, 2007), cuya unidad de análisis consiste en el trabajo matemático realizado por un FP, en un curso de Didáctica del Álgebra de formación inicial de profesores de matemáticas realizado en una universidad chilena.

En la actividad realizada en el curso de formación inicial docente (FID), tres estudiantes diseñaron y analizaron tareas para su enseñanza asociada a la noción de función privilegiando la habilidad *representar*, de los cuales se ha seleccionado un trabajo individual que consideramos como representativo del grupo de estudio (Yin, 2018); siendo éste ilustrativo del tipo de trabajo matemático desarrollado por los FP participantes, el cual nos parece apropiado de analizar, dada la dinámica presente en la formación de profesores. El trabajo se realizó de forma virtual durante la pandemia en el año 2020 y tuvo una duración de ocho semanas en total.

Cabe señalar que el curso de Didáctica del Álgebra se desarrolló de forma permanente en dos sesiones por semana. El curso estuvo a cargo de un académico con grado de doctor en Didáctica de la Matemática, cuya formación inicial corresponde al ámbito de la pedagogía en la especialidad, quien propuso a los estudiantes crear y desarrollar las actividades que se muestran más adelante. El profesor del curso tiene un perfil de docente e investigador. La propuesta contempló la siguiente estructura:

Fase 1: *Teórico-práctico*. Se desarrollaron cuatro sesiones virtuales teórico-prácticas centradas en la habilidad representar del currículo escolar. Para ahondar en el tema, se estudiaron aspectos teóricos de la semiótica en educación matemática por parte del docente encargado de dictar el curso.

Fase 2: Ejemplificaciones. Se llevaron a cabo, por parte del profesor del curso, dos sesiones virtuales para analizar tareas que privilegian y sirvan de ejemplos ilustrativos de la habilidad representar. Estos provienen de una selección presentada por el académico a cargo y, también, de ejemplos elaborados y discutidos por los estudiantes.

Fase 3: Desarrollo de la actividad. Se desarrolló en 5 semanas, cuya modalidad ha sido el trabajo autónomo por parte de los futuros profesores, en donde éstos describieron niveles asociados a la habilidad representar y diseñaron tareas para la enseñanza y la presentación del trabajo matemático de los FP. Cabe mencionar que en esta etapa la tarea ha sido intencionada para incentivar la habilidad representar, pues es una de las habilidades que el currículo escolar chileno sugiere propiciar en la enseñanza secundaria.

Las fases anteriores fueron monitoreadas por el docente-investigador a cargo del curso. Además, en el momento del diseño de tareas, los estudiantes contaban con conocimientos teóricos que les posibilitaron los análisis realizados. En esta investigación, nos focalizaremos en las producciones de la fase 3.

En cuanto a la recolección de los datos en la fase 3, estas han considerado la observación participante, notas de campo del docente-investigador y las producciones de los estudiantes, entregadas al académico encargado. Las tareas propuestas por los FP se han desarrollado en las siguientes etapas, las cuales se relacionan con el ETM idóneo potencial planificado por el FP:

Etapa 1: Diseño de tareas relacionadas con la habilidad representar. Corresponde a la presentación de las tareas diseñadas por FP, sus características en la perspectiva semiótica (Duval, 1995) y el vínculo que establecen (los FP) con el nivel de la habilidad representar descrito en el currículo escolar (Mineduc, 2015).

Etapa 2: Trabajo matemático previsto para la enseñanza por el FP. Corresponde al estudio del trabajo a priori de una tarea diseñada por el FP, denominado *ETM idóneo potencial del FP*. Esta fase nos permitió comprender cuál es el trabajo matemático que el FP pretende propiciar para la enseñanza. En esta etapa, el ETM es utilizado como una herramienta analítica del trabajo matemático propuesto por el FP.

Con el propósito de describir las principales acciones en la relación de la tarea, los análisis del *ETM idóneo potencial del FP* contemplan elementos metodológicos basados en trabajos recientes en ETM (Henríquez Rivas *et al*., 2021; Kuzniak y Nechache, 2021; Nechache y Gómez-Chacón, 2022), los que se describen a continuación:

Identificación de los episodios de trabajo. De acuerdo con la resolución de una tarea por el FP, se identifican episodios (E), comprendidos como aquellos momentos en donde se evidencia una acción específica para la resolución de una tarea.

Descripción del trabajo. Se describe el trabajo de cada episodio a través de una secuencia de acciones realizadas por el FP.

Análisis de la circulación. Basado en lo anterior, se analiza e interpreta en términos de la circulación del ETM. Para los análisis utilizamos un protocolo con descriptores y criterios que refieren a las génesis y sus componentes, así como también los planos verticales, como una forma de dar mayor especificidad a los análisis (Tabla 1).

Criterio	***Componentes***	***Descriptor***
Génesis semiótica (GS)	Representamen	Relaciona objetos matemáticos y sus elementos significantes.
	Visualización	Interpreta y relaciona los objetos matemáticos según actividades cognitivas relacionadas con los registros de representaciones semióticas (identificación, tratamientos, conversiones).
Génesis instrumental (GI)	Artefacto	Utiliza artefactos de tipo material o un sistema simbólico.
	Construcción	Se basa en los procesos dados por las acciones desencadenadas por los artefactos utilizados y las técnicas de uso asociadas.
Génesis discursiva (GD)	Referencial	Utiliza definiciones, propiedades o teoremas.
	Prueba	El razonamiento discursivo se basa en distintas formas de justificación, argumentación o demostración.
Plano vertical	[Sem-Ins]	Los artefactos se usan en la construcción de resultados bajo ciertas condiciones o para la exploración de representaciones semióticas.
	[Ins-Dis]	El proceso de prueba se basa en una experimentación con el empleo de un artefacto, o bien, en la validación de una construcción.
	[Sem-Dis]	El proceso de visualización de los objetos representados se pone en coordinación con un razonamiento discursivo para probar.

Tabla 1. Protocolo para el análisis de la circulación en el ETM. Fuente: Adaptado de Henríquez Rivas *et al*. (2021, p. 129).

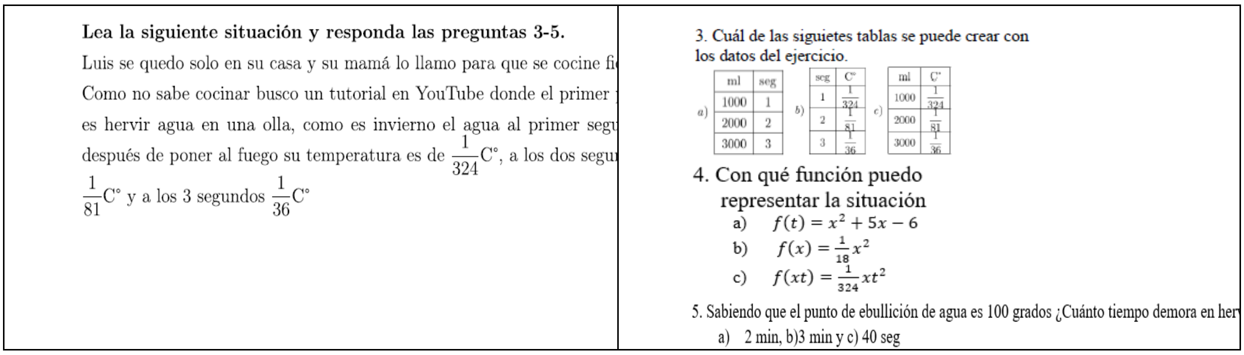
En las etapas 1 y 2, se considera la triangulación (Denzin, 1978) *de datos* y *del investigador*, dado por la experiencia y formación de las autoras, ambas especialistas en la teoría del ETM.

En relación con la actividad desarrollada en la fase 3, los estudiantes debieron proponer tareas que privilegian la habilidad representar para la enseñanza sobre el concepto de función. En la primera semana, los FP debieron describir tres niveles asociados a la habilidad involucrada, relacionando la demanda cognitiva, relativa al grado de dificultad implicada en cada nivel. En la segunda y tercera semana, trabajaron en el diseño de las tareas y su relación con el nivel descrito anteriormente. En la cuarta y quinta semana, desarrollaron los análisis del trabajo previsto que las tareas promueven. Luego, los estudiantes entregaron la actividad al docente a cargo del curso.

RESULTADOS

Etapa 1: Diseño de tareas relacionadas con la habilidad representar

A continuación, presentamos una tarea diseñada por el FP, que consta de una secuencia de tres preguntas (llamaremos P3, P4, P5).



Lea la siguiente situación y responda las preguntas 3-5.

Luis se quedo solo en su casa y su mamá lo llamo para que se cocine fi
Como no sabe cocinar busco un tutorial en YouTube donde el primer
es hervir agua en una olla, como es invierno el agua al primer segu
después de poner al fuego su temperatura es de $\frac{1}{324}$C°, a los dos segu
$\frac{1}{81}$C° y a los 3 segundos $\frac{1}{36}$C°

3. Cuál de las siguietes tablas se puede crear con los datos del ejercicio.

a)

ml	seg
1000	1
2000	2
3000	3

b)

seg	C°
1	$\frac{1}{324}$
2	$\frac{1}{81}$
3	$\frac{1}{36}$

c)

ml	C°
1000	$\frac{1}{324}$
2000	$\frac{1}{81}$
3000	$\frac{1}{36}$

4. Con qué función puedo representar la situación
   a) $f(t) = x^2 + 5x - 6$
   b) $f(x) = \frac{1}{18}x^2$
   c) $f(xt) = \frac{1}{324}xt^2$

5. Sabiendo que el punto de ebullición de agua es 100 grados ¿Cuánto tiempo demora en her
   a) 2 min, b)3 min y c) 40 seg

Figura 3. Tarea propuesta por FP

Consideramos que el enunciado de la tarea presenta un contexto cercano para el estudiante, debido a que plantea una situación cotidiana para este. Sin embargo, las preguntas son más bien de carácter cerrado, pues no promueven la creación de una respuesta ni la libertad de elección del registro de representación. Específicamente en la pregunta 4, se aprecia que *a*) y *c*) no poseen una unificación en el registro algebraico de la variable, siendo esta incorrecta y podría llevar a errores y confusión en caso de ser utilizada para la enseñanza.

- El FP clasifica su propuesta con las siguientes características semióticas (Duval, 1995):
- P3 involucra un registro de tipo tabular, en donde el estudiante debe representar los datos.
- En P4 se debe verificar cuál de las expresiones algebraicas se ajusta a los datos tabulados.
- En P5 debe inferir una respuesta a partir de la expresión encontrada en la pregunta anterior.

Etapa 2: *Trabajo matemático previsto para la enseñanza por el FP*

Para efectos de los análisis en esta etapa, consideramos los tres elementos metodológicos descritos anteriormente: 1) *identificación de los episodios de trabajo*; 2) *descripción del trabajo*; 3) *análisis de la circulación*.

Identificación de los episodios y descripción del trabajo para P3.

Se identificaron dos episodios (E) relacionados con el trabajo esperado presentado (Figura 4). E1, *identificación de variables tiempo y temperatura,* y E2, *representación de los datos en una tabla*. E1 posee un foco interpretativo del enunciado de la tarea, expresado inicialmente en un lenguaje cotidiano y convertido a una representación tabular, en donde FP justifica las razones para encontrar las variables tiempo y temperatura según E2.

FP concreta E1 a través del discurso "al primer segundo después de poner al fuego su temperatura es de 1/324 C°", "a los dos segundos después 1/8 C°" y "a los tres segundos después 1/36 C°", estableciendo una tabla de temperatura (C°) versus tiempo (s), tal como se observa en la Figura 4.

Para construir la tabla debemos encontrar las variables que nos entregan en el ejercicio, que son dos, nos habla de tiempo (Seg) y temperatura (C°) y se nos dice que al primer segundo después de poner al fuego su temperatura es de $\frac{1}{324}$C°, a los dos segundos $\frac{1}{81}$C° y a los 3 segundos $\frac{1}{36}$C°. Por lo que tenemos una tabla de dos variables parecida a la siguiente

seg	C°
1	$\frac{1}{324}$
2	$\frac{1}{81}$
3	$\frac{1}{36}$

Por lo tanto la opción (a) es la correcta, pues, es igual a la tabla que construimos. A diferencia de las tablas (b) y (c) que tienen variables diferentes

Figura 4. Respuesta de P3 propuesta por el FP.

Cabe señalar que, en la figura anterior, se aprecia en las opciones b) y c) son igualmente correctas, siendo la opción a) la opción incorrecta.

Análisis de la circulación para P3. De la respuesta anterior, se observa en E1 la activación del plano vertical [Sem-Dis], por la justificación discursiva en E1 y, luego, su interpretación en E2 a través de la génesis semiótica y la representación de los datos en la tabla. Además, se aprecia la activación de la génesis instrumental debido a la componente de la construcción, pues el FP declara explícitamente cómo va creando la tabla temperatura versus tiempo, lo que implica activar el plano vertical [Ins-Dis].

Identificación de los episodios y descripción del trabajo para P4. En la respuesta 4 prevista por el FP (Figura 5), asociamos los siguientes episodios: E1, *transformaciones algebraico-numéricas de las funciones a las fracciones relacionadas; y* E2, *tratamientos de las expresiones numéricas,* y E3, *generalización.* E1 considera transformaciones de las funciones a las expresiones algebraico-numéricos, al escribir de otra manera las fracciones de la tabla encontrada. En E2, FP realiza tratamientos de cada fracción involucrada, escribiendo los números al cuadrado y asociándolos a los segundos tabulados, obteniendo en E3 una generalización de las fracciones mediante la expresión algebraica requerida en P4, es decir, $\frac{1}{324} \cdot t^2$.

Respuestas a la pregunta 4)

Teniendo ya la tabla desarrollada, si nos detenemos a observar las fracciones, notaremos que:

$$\frac{1}{81} \Longrightarrow 4 \cdot \frac{1}{324} \qquad 4 \cdot \frac{1}{324} \Longrightarrow 2^2 \cdot \frac{1}{324}$$

$$\frac{1}{36} \Longrightarrow 9 \cdot \frac{1}{324} \quad \text{y que a la vez} \quad 9 \cdot \frac{1}{324} \Longrightarrow 3^2 \cdot \frac{1}{324}$$

$$1 \cdot \frac{1}{324} \Longrightarrow 1^2 \cdot \frac{1}{324}$$

Si nos fijamos bien los números que estan al cuadrado equivalen los segundos, por lo que se puede generalizar de la siguiente manera $t^2 * \frac{1}{324} \Longrightarrow \frac{1}{324}t^2$

Figura 5. Respuesta de P4 propuesta por el FP

Análisis de la circulación para P4. En este desarrollo se observa el predominio de la génesis semiótica, en el momento de la representación numérico-algebraica, la visualización y los tratamientos de la expresión algebraica requerida, tanto en E1 como en E2, a partir de datos empíricos. En E3 observamos la intención de explicar la generalización presentada en lenguaje algebraico, lo que activa el plano vertical [Sem-Dis]; sin embargo, destacamos la falta de presencia del referencial que permitiría dar sustento epistémico al trabajo propuesto y resaltamos la intención de la prueba de tipo pragmática.

Identificación de los episodios y descripción del trabajo para P5. En la respuesta 5 prevista por el FP (Figura 6), asociamos el siguiente episodio: E1, *planteamiento de una ecuación*; y E2, *despeje de la incógnita e interpretación de su valor*.

En E1 considera la interpretación del enunciado para escribirlo en términos de la ecuación $f(x)$=100, lo que implica además reconocer que la función se debe igualar con los 100°C. Luego, en el lado derecho de la Figura 6, el E2 consiste en despejar el valor correspondiente a la igualdad. Sin embargo, se aprecia una falta de rigurosidad matemática al no observar en su desarrollo las equivalencias correspondientes entre cada paso, durante el desarrollo de la resolución de la ecuación, lo cual es un llamado de atención sobre el rigor en la enseñanza de las matemáticas y la justificación del trabajo presentado por FP analiza y, a su vez, nos resultan preocupantes las posibles consecuencias en la enseñanza escolar que esta falta de cuidado y rigurosidad matemática podría ocasionar.

Respuestas a la pregunta 5)

Conociendo la función tenemos que aplicarla de la siguiente manera, sabiendo por el enunciado que f(t)=100

$f(t)= \frac{1}{324}t^2$

$\wedge f(t) = 100$

Por lo que

$100 = \frac{1}{324}t^2$

$324 \cdot 100 = 324 \cdot \frac{1}{324}t^2$

$32400 = t^2$

$\sqrt{32400} = t^2$

$180 = t$

Figura 6. Respuesta de P5 propuesta por el FP

Finalmente, el FP interpreta la solución encontrada, analizando cada posible alternativa, señalando que "*la solución (b) dice que demora 3 min, lo que equivale a 180 segundos. Es decir, la alternativa correcta*".

Análisis de la circulación para P5. En términos de ETM, en general se observa el predominio de la génesis semiótica, activándose la génesis semiótica y discursiva, por lo tanto, el plano [Sem-Dis]. En E1, por el planteamiento de una ecuación y su interpretación según el contexto de la tarea, lo que implica un trabajo tanto semiótico, como de conocimiento de los objetos matemáticos involucrados (concepto de función, ecuación). Luego, en E2 los tratamientos algebraicos se ven reflejados en la resolución de la ecuación y la génesis discursiva, se ve reflejada la activación del referencial y la prueba al interpretar el resultado numérico según en contexto de la tarea dada.

CONCLUSIONES

En los análisis de las circulaciones del ETM idóneo potencial de FP, consideramos que es privilegiada la génesis semiótica y, especialmente, el plano vertical [Sem-Dis], como se aprecia en los resultados. Constatamos que los registros semióticos no son del todo aprovechados, tanto en la formulación de la tarea, como en las soluciones planteadas por FP. Asimismo, se destaca la necesidad de considerar un trabajo matemático más robusto, en términos de la componente referencial, las justificaciones del trabajo matemático, uso de registros semióticos (tratamientos y conversiones). Un camino que podría ser considerado a futuro, si se trabaja en la perspectiva del ETM desde el diseño de tareas por parte de estudiantes, es considerar el desarrollo de tareas que involucren la activación del ETM *completo* (Kuzniak *et al.*, 2016) y precisar el papel del profesor guía en la activación de las distintas componentes. En estas tareas se podría propiciar el trabajo con las distintas génesis, pues la tarea analizada en este escrito no las contempló. En el caso del análisis presentado, pensamos que este hecho se debe a que la creación de la tarea no se vincula con el ETM en específico (sus componentes, génesis y planos verticales).

Evidenciamos que en las tareas que propone para la enseñanza el FP predomina la escasa libertad para quien resuelve, en términos de las elecciones sobre qué registro utilizar. Además, se observa que el profesor no escribió rigurosamente el enunciado; lo que se observa sobre todo en P5. Esta falta de rigurosidad en el profesor, nos invita a estar vigilantes y reforzar la construcción del ETM de los FP basados en un diseño y entrega de un ETM referencial más sólido durante su formación docente, dada la falta de cuidado y rigurosidad matemática y didáctica y las consecuencias que a futuro esto podría ocasionar.

Consideramos que, tanto los libros de texto, como la formación del profesorado, pueden considerar esta conclusión en futuros trabajos. En este sentido, nos parece que el trabajo del formador podría ser clave para mejoras en el ETM idóneo potencial del profesorado. Así, pretendemos contribuir en la reflexión sobre la formación del profesorado, considerando los alcances y limitaciones de la FID, proporcionando elementos de atención y vigilancia para los formadores.

Finalmente, entre las proyecciones y limitaciones evidenciadas en esta propuesta, consideramos que sería deseable que esta actividad pudiese ser aplicada en un contexto de presencialidad, ya que, tal como se ha mencionado en la metodología, ésta se ha implementado virtualmente, por el contexto de emergencia vivido a nivel mundial (pandemia por Covid-19). Asimismo, este tipo de análisis realizados en emergencia, podrían servir como ejemplos de prácticas de estudio y de formas de trabajos para otro tipo de emergencias, donde la enseñanza remota se torna de relevancia. Por otra parte, el ETM se podría considerar en la enseñanza de la formación inicial docente, como una herramienta de análisis para la creación de tareas que, al potenciar las distintas génesis y componentes podrían generar un aprendizaje más robusto.

REFERENCIAS

Arce, M. y Ortega, T. (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. *PNA, 8*(2), 61-73.

Carrión Miranda, V. y Pluvinage, F. (2014). Registros y estratos en ETM al servicio del pensamiento funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(4-II), 267–286.

Denzin, N. K. (1978). *The Research Act: A Theoretical Introduction to Sociological Method* (2.ª ed.). McGraw-Hill.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Henríquez Rivas, C., Kuzniak, A. y Masselin, B. (2022). The idoine or suitable MWS as an essential transition stage between personal and reference mathematical work. En A. Kuzniak *et al*. (eds.), *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of mathematical working spaces (pp. 121-146)*. Springer.

Henríquez Rivas, C., Ponce, R., Carrillo Yáñez, J., Climent, N. y Espinoza-Vásquez, G. (2021). Trabajo matemático de un profesor basado en tareas y ejemplos propuestos para la enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 39*(2), 123-142.

Kuzniak, A., Nechache, A. y Drouhard, J. P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context. *ZDM Mathematics Education, 48*, 861-874.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. R. (Eds.). (2022). *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (1st ed., Mathematics Education in the Digital Era, Vol. 18). Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8.

Kuzniak, A. y Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of Mathematical Working Spaces. *Educational Studies in Mathematics, 106*, 271–289.

Martínez De La Rosa, F. (2015). Esquemas conceptuales de los estudiantes en relación con algunas características de las funciones. *Suma, 79*, 41-52.

Mineduc. (2015). *Bases Curriculares: 7° Básico a 2° Medio.* Autor.

Nechache, A. y Gómez-Chacón, I. M. (2022). Methodological Aspects in the Theory of Mathematical Working Spaces. En A. Kuzniak *et al*. (eds.), *Mathematical Work in Educational Context, Mathematics Education in the Digital Era 18 (pp. 33-56).* Springer.

Ortega, T. y Pecharromán, C. (2010). Diseño de enseñanza de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(2), 215–226.

Pino-Fan, L., Parra-Urrea, Y. y Castro-Gordillo, W. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación, 11*(23), 201-220. doi: 10.11144/Javeriana.m11-23.sfpc

Stake, (2007). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.

Torres Jeldes, C. y Caroca Toro, M. (2019). *Texto del estudiante. Matemática 8° básico*. Santillana del Pacífico S. A. de Ediciones.

Watson, A. y Ohtani, M. (2015). *Task Design in Math Education. ICMI study 22*. Springer.

Yin, R.K. (2018). *Case study research and applications. Design and methods* (6e ed.). Sage.

TAREAS, DEFINICIONES Y EJEMPLOS QUE PROPONE UN FUTURO PROFESOR EN SU PRÁCTICA PROFESIONAL

Espinoza-Vásquez, G[1]., Verdugo-Hernández, P[2]. y Henríquez-Rivas, C[3].

(1) Universidad Alberto Hurtado, (2) Universidad de Talca y (3) Universidad Católica del Maule.

Este trabajo estudia una propuesta de enseñanza implementada por un futuro profesor en el tema de ecuación lineal. Se tiene por objetivo caracterizar el trabajo matemático que promueve el futuro profesor en su ETM idóneo actual a la luz del conocimiento que moviliza para dicho diseño, especialmente a partir de definiciones, ejemplos y tareas desde el punto de vista de la complementariedad del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) y el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK). Se trata de un estudio de caso en donde se analiza la planificación de la primera clase sobre ecuaciones lineales con dos incógnitas. Los resultados muestran que en el diseño del ETM idóneo inciden conocimientos del tema, de la enseñanza y de lo que se espera aprendan los estudiantes sobre la ecuaciones. Finalmente, se observa que el trabajo matemático promovido atiende a los aspectos semióticos de las ecuaciones y al conocimiento de las definiciones del tema.

INTRODUCCIÓN

Existe una preocupación y ocupación constante de parte del Ministerio de Educación chileno [MINEDUC] respecto de la formación del profesorado. En el año 2021, el MINEDUC publica la última versión de los estándares pedagógicos respecto de lo que se espera logre la formación inicial de los profesores y lo que se espera del docente durante la enseñanza. En estos estándares se menciona que el docente debe contar con conocimientos disciplinares profundos de los temas curriculares y que debe ser capaz de conducir los procesos de enseñanza y de aprendizaje en los diferentes temas del currículo así como diseñar propuesta de enseñanza efectivas para el aula.

En una línea similar, la Comisión Nacional de Acreditación (2014) ha establecido Criterios de Evaluación para Carreras y Programas de Pregrado, en donde se muestran exigencias a los programas de pedagogía, con una especial atención sobre el desarrollo de las prácticas profesionales, y se destaca la importancia de ellas en el proceso de formación del profesorado.

Aunque se reconocen varios acercamientos al concepto de práctica profesional (Ponte et al., 2012), aquí distinguimos entre dos; la primera, en un sentido amplio, se relaciona con la actividad del profesor en torno a los procesos de enseñanza y de aprendizaje; la segunda, restringida a aspectos curriculares de la formación, se refiere a las asignaturas o cursos donde el futuro profesor (FP) se introduce al contexto escolar real desde la perspectiva del profesor. Esto último se desarrolla progresivamente de acuerdo a los conocimientos adquiridos por los FP y van desde la observación de clases de matemáticas y el contexto escolar, hasta hacerse cargo de la enseñanza de un tema en un determinado nivel.

La práctica profesional (PP) corresponde a la última etapa formativa que realizan los FP durante sus estudios y es una instancia de formación en donde se integran distintos saberes para el diseño de propuestas de enseñanza en un contexto escolar real. Compartimos el interés y preocupación por el desarrollo de estas prácticas, ya que cumplen un rol fundamental en dicha integración entre conocimientos y práctica de enseñanza, generando las primeras aproximaciones y experiencias en el ejercicio docente. La relevancia de estas prácticas radica en que gran parte del aprendizaje del conocimiento profesional se aprende mediante dicha observación y el desarrollo de ellas (Paquay et al., 1996; Zeichner, 2010).

Este trabajo se orienta al estudio de los conocimientos que ponen en juego el FP durante la práctica profesional y en sus propuestas de enseñanza como parte de su formación inicial. Especialmente, nos centramos en las definiciones, los ejemplos y las tareas matemáticas dentro de tales propuestas, vistos como instrumentos movilizadores de conocimientos disciplinares del FP y organizadores de la enseñanza.

Respecto de ello, las definiciones y los teoremas, junto con las tareas y los ejemplos (matemáticos y para la enseñanza), corresponden a elementos estructuradores de la clase de matemática que, de acuerdo con Winicki (2006), dan cuenta tanto de una forma de comprender la Matemática como la construcción del conocimiento. Winicki también señala que la presentación de la definición en la enseñanza deja ver dos estilos: uno rígido y de conocimiento acabado mediante la secuencia *definición-teorema-tarea*, y uno que invita a la exploración y construcción de conocimiento mediante la secuencia *usar-descubrir-definir*.

En este sentido, la “definición” refleja un tipo de trabajo matemático en torno a un tema cuya enseñanza requiere que el profesor movilice su conocimiento matemático y didáctico respecto sobre él. Algo similar ocurre con la selección y propuesta de tareas y ejemplos para la enseñanza. La organización de estos refleja parte del conocimiento del profesor sobre el tema, sobre la enseñanza y sobre sus estudiantes (Carrillo et al., 2018), a la vez que promueve un determinado tipo de trabajo matemático en el aula.

Watson y Mason (2005), por su parte, clasifican los tipos de ejemplos producidos para externalizar la forma de concebir un concepto, definiendo los espacios de ejemplos. Entre ellos se encuentran los ejemplos convencionales, que el profesor puede esperar que sus estudiantes se apropien, o aquellos que son elaborados en un colectivo sobre un tema particular. De esta forma, los ejemplos durante la enseñanza también permiten acercarnos a comprender cómo es la práctica de aula del profesor, el trabajo que propone en ella y cuál es el conocimiento que moviliza para ello.

Finalmente, según Ponte et al. (2012), las tareas que el profesor propone estructuran las prácticas de aula y dan buena cuenta de ellas, por ejemplo, sobre el trabajo que el profesor propone a sus estudiantes y sobre el conocimiento que tiene el profesor sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes relativo al tema de estudio.

Por lo anterior, enfocamos este trabajo al análisis de las tareas, definiciones y los ejemplos propuestos durante la enseñanza por parte del FP y el trabajo matemático que fomenta en sus estudiantes, en el contexto de su PP. En este escenario, planteamos la pregunta: ¿cómo se presenta el trabajo matemático que promueve el FP a través de las definiciones, las tareas y los ejemplos y qué tipo de conocimiento especializado moviliza en/para ello durante el desarrollo de una de sus clases?

Para atender a este enfoque y pregunta, utilizamos los modelos ETM y MTSK, que describimos a continuación.

MARCO TEÓRICO: Conocimiento Especializado y Espacio de Trabajo Matemático

A continuación, presentamos sucintamente los elementos que dan forma a nuestro marco teórico, el cual se basa en el uso conjunto de dos modelos teóricos: el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por su sigla en inglés, Carrillo et al., 2018) y los Espacios de Trabajo Matemático (ETM, Kuzniak, 2011). Asimismo, consideramos algunas relaciones declaradas entre ambos modelos y entre sus componentes como, por ejemplo, aquella existente entre el conocimiento sobre la enseñanza de la matemática y el conocimiento de los temas en relación al diseño del ETM idóneo (Espinoza-Vásquez et al., 2018), lo que se desarrollará más adelante.

El MTSK se presenta como un modelo analítico para el conocimiento que el profesor de matemática muestra, posee o declara . Adicionalmente, constituye una herramienta para la interpretación y análisis de la práctica y del conocimiento del profesor considerando dos dominios de conocimiento y un dominio para las creencias, el cual no contemplamos en este trabajo (Carrillo et al., 2018). Por un lado, el dominio del Conocimiento Matemático (MK) corresponde al conocimiento matemático como disciplina científica. En este dominio se incluyen los siguientes subdominios del Conocimiento de los Temas (KoT) como elementos que forman el cuerpo de conocimiento disciplinar en matemáticas, el Conocimiento de las Prácticas Matemáticas (KPM) sobre las formas en que se explora, produce y comunica este conocimiento, y el Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM) sobre las conexiones entre conceptos que permiten delimitarlos y organizarlos de acuerdo a su evolución.

Por su parte, el dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) comprende el conocimiento de los objetos matemáticos como objetos de enseñanza (Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas, KMT), como objetos de aprendizaje (Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas) y el conocimiento de aquello que se espera que los estudiantes logren en un determinado nivel escolar (Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas, KMLS). Para este escrito consideraremos el subdominio KoT y los subdominios KMT y KMLS del PCK que pasamos a describir a continuación.

El *Conocimientos de los Temas* (KoT) abarca el conocimiento disciplinar profundo y contempla las categorías de Procedimientos y características de resultado; Definiciones, propiedades y sus fundamentos; Registro de representación; Fenomenología y aplicaciones.

El *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas* (KMT) corresponde a aquel conocimiento de los objetos matemáticos como objetos de enseñanza de modo que la enseñanza está condicionada por ellos. Incluye las categorías de teorías de enseñanza, recursos materiales y virtuales y estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.

El *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas* (KMLS) corresponde al conocimiento del profesor sobre lo que el estudiante debe o puede alcanzar en un curso escolar determinado. Incluye las categorías para las expectativas de aprendizaje, sobre la secuenciación de temas y para el nivel de desarrollo procedimental y conceptual esperado.

Por su parte, **el ETM**, modelo de los Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011), se formula con el objetivo de estudiar el trabajo matemático como una actividad humana basada en la articulación de dos planos o niveles: el epistemológico y el cognitivo.

En el plano epistemológico se contempla el componente *referencial* para las definiciones, propiedades, teoremas, etc., los artefactos que pueden ser simbólicos o materiales y la componente del *representamen* de los objetos matemáticos. El plano cognitivo contempla la prueba que permite formular argumentaciones organizadas deductivamente, la *construcción* para las acciones y técnicas que se realizan con los artefactos y la componente de la *visualización* determinado por la representación semiótica de los objetos matemáticos. Estos planos y sus componentes se articulan mediante la génesis semiótica, la génesis instrumental y la génesis discursiva.

En el ETM se reconoce el ETM personal como la organización de estos elementos basado en las capacidades cognitivas personales del individuo que aborda la tarea matemática; el ETM de referencia definido a partir solamente de criterios matemáticos y el ETM idóneo, que adapta el ETM de referencia para comprometer a los estudiantes con el desarrollo de la tarea y permitir el trabajo, para lo cual distinguimos el ETM idóneo actual (en el aula) y potencial (organización a priori) (Henríquez Rivas et al., 2022). Este último corresponde a nuestro foco de estudio, particularmente, el ETM idóneo actual del futuro profesor y las tareas, ejemplos y definiciones que se incluyen en él, cuando realiza la enseñanza en el aula.

Respecto de la complementariedad entre ETM y MTSK, la relación MTSK-ETM, basada en la conexión de teorías, se ha desarrollado para avanzar en la comprensión del quehacer docente en términos del conocimiento que moviliza en su trabajo matemático (Verdugo-Hernández et al., 2022), ampliando el poder explicativo y descriptivo que ofrecen las relaciones entre sus elementos en el análisis de la práctica del profesor de matemáticas (Espinoza-Vásquez et al., 2018).

Algunas de estas conexiones están mediadas por los elementos considerados en este texto. Por ejemplo, la identificación de la tarea matemática como un elemento visible desde ambos modelos, que permite el estudio en conjunto desde el ETM y desde el MTSK (Espinoza-Vásquez et al., 2018). Reconocemos que no existe un consenso en su definición y acogemos aquella usada por Henríquez-Rivas et al. (2021), para quienes una tarea es “una experiencia matemática planificada para los estudiantes, que puede ser una acción o una secuencia de acciones” (p. 127). Según las formulaciones de ambos modelos, el conocimiento sobre las tareas matemáticas, su elección, secuenciación y sus características para la enseñanza forman parte de una de las categorías del KMT, mientras que, desde el ETM, aunque no es un componente explícito, es la que moviliza el trabajo matemático y permite la activación y circulación del individuo por los componentes durante su abordaje.

Otras conexiones menos exploradas se dan, por ejemplo, con las definiciones como otro elemento en común entre ETM y MTSK. El ETM las ubica como parte del componente referencial en el plano epistemológico junto a las propiedades y teoremas, mientras el MTSK las contempla dentro del KoT, en la categoría de definiciones, propiedades y sus fundamentos. Aya-Corredor et al. (2014) señalan que una definición expresa las propiedades que caracterizan a un objeto y que permiten relacionarlo con otros mediante una red conceptual. Además, en el KoT tienen cabida tanto las definiciones formales como aquellas alternativas que conozca el profesor (Carrillo et al., 2018). En esta línea, coincidimos con Winicki (2006) sobre la responsabilidad del profesor en la elección de las definiciones que utilice y en que debe ser consciente de las consecuencias de esa elección sobre la enseñanza y aprendizaje. Esto anticipa relaciones entre el KoT y PCK, así como la conexión con el ETM respecto de los ETM de referencia, personal e idóneo del profesor.

Finalmente, los ejemplos se identifican desde el modelo MTSK en los subdominios KoT y KMT, mientras que desde el ETM se muestran como organizadores del ETM idóneo, dado luces de posibles conexiones, sin embargo, su estudio desde la relación ETM-MTSK no se ha realizado hasta ahora. Henríquez-Rivas et al. (2021) definen los *ejemplos instructivos*, basados en el trabajo de Watson y Mason (2005), como “aquellos ejemplos que utiliza el profesor para el estudio de un tema matemático en específico” (p. 127). En este trabajo tomamos el rol articulador de las tareas matemáticas en la relación entre ETM y MTSK (Espinoza-Vásquez et al., 2018) y proponemos avanzar en este diálogo mediante el estudio de las definiciones y ejemplos en el contexto de la enseñanza.

METODOLOGÍA

En virtud de nuestro objetivo, adoptamos un paradigma interpretativo con una metodología de tipo cualitativa (Denzin y Lincoln, 2000). El diseño corresponde a un estudio de caso de tipo instrumental (Stake, 2007) en el cual se seleccionó a un futuro profesor, que llamamos Simón, quien fue nuestro informante y único caso de estudio. Simón se encontraba realizando su práctica profesional (PP) en el último año de la carrera Pedagogía en Matemática en una universidad chilena, tras haber cursado todas las asignaturas de disciplinares, didácticas y pedagógicas. En dicho curso de PP, los futuros profesores asumen el rol de profesor a cargo de uno o más cursos en un centro educacional, donde deben implementar secuencias de enseñanza sobre un determinado tema, diseñadas por ellos mismos.

Se revisaron las propuestas de todos los participantes del curso, buscando aquellas que se caracterizaran por el planteamiento de la definición de algún objeto matemático; que, además, esta definición se vinculara con el planteamiento de tareas y ejemplos; y que los materiales generados para la enseñanza dieran cuenta, a priori, de riqueza de elementos para indagar en el trabajo matemático propuesto para el aula y del conocimiento especializado movilizado para ello. Bajo estos criterios seleccionamos el caso de Simón, quien, a su vez, nos dio la posibilidad de acceder a la variedad de materiales (planificaciones y videos de clases, guías de ejercicios y la bitácora de reflexión, entre otros) elaborados para su PP en un curso de primer año de enseñanza media (14-15 años), donde abordó el tema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, atendiendo al criterio de accesibilidad del caso.

Se realizó el análisis del contenido de estos datos, considerando como unidades de análisis las definiciones, tareas y ejemplos que se incluían en la clase y materiales preparados, para luego identificar las características de estas presentaciones en términos de los elementos del marco de referencia: los modelos ETM y MTSK y las conexiones entre ellos. Para esto se utilizó el siguiente protocolo de análisis.

Componente	Descripción
ETM	
Plano cognitivo	Visualización de los objetos basada en su presentación y uso.
Plano epistemológico	Representamen: Registros en los que se presentan los objetos. Referencial: Definición y propiedades que se proponen
Génesis	Semiótica, relacionando la representación con la visualización y comprensión del objeto.
MTSK	
MK - KoT	Definiciones y Propiedades del objeto. Registros de representación utilizados.
PCK-KMT	Estrategias de enseñanza, tareas, ejemplos y actividades que se proponen.
PCK-KMLS	Desarrollo procedimental y conceptual esperado en el tema. Secuenciación de temas anteriores y posteriores que potencian el estudio del tema actual.
Foco	
Tareas, Definiciones, Ejemplos	Características, rol en la enseñanza, conocimiento movilizado en su propuesta y tipo de trabajo que promueve.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 1: Elementos de análisis.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Simón inicia la sesión con la noción de ecuación lineal proponiendo la definición de ecuación lineal con dos incógnitas como "una igualdad algebraica de la forma $\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} = \boldsymbol{c}$, donde $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son incógnitas y $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son valores numéricos". Esta definición refleja su conocimiento sobre lo que es una ecuación lineal (KoT), y le permite reconocerla, seleccionar y plantear esta definición para la enseñanza (KMT) como parte del ETM idóneo. Simón indica que los coeficientes numéricos de la ecuación son números racionales, lo que también muestra su conocimiento sobre el ámbito numérico que manejan los estudiantes hasta este momento (en su KMLS), ya que este nivel escolar contempla hasta los racionales, y condiciona el diseño del ETM idóneo. Con ello también se tiene un indicio de conocimiento sobre lo que se espera aprendan los estudiantes en este nivel respecto de la definición (KMLS) y, en su KMT, sobre la forma de organizar/iniciar la enseñanza de la ecuación lineal (ETM idóneo).

En la presentación de la definición es posible observar el conocimiento de Simón sobre dos formas de representar algebraicamente la ecuación lineal (KoT). La definición anterior se acompaña de otras dos definiciones para ecuación lineal (Figura 1) cuyas representaciones pretenden activar el ETM personal de los estudiantes desde el componente referencial (la definición) hacia la génesis semiótica (representación en las formas general y principal).

Sea $\boldsymbol{dx+ey=f}$ una ecuación lineal con dos incógnitas, con $d, e, f \in \mathbb{Q}$.

FORMA GENERAL		FORMA PRINCIPAL
$\boldsymbol{dx+ey-f=0}$		$\boldsymbol{y=-\frac{dx}{e}+\frac{f}{e}}$

Figura 1: Presentación de definición de ecuación lineal

Simón no repara en que el coeficiente e debe ser diferente de cero, teniendo un indicio del conocimiento (en su KoT) sobre las características de esta definición y de la función lineal.

Seguidamente, Simón define la solución de este tipo de ecuaciones y la forma en que se representan. Señala que: "Una **solución** de una ecuación lineal con dos incógnitas es un par de valores $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ que hacen cierta la igualdad. Una ecuación lineal con dos incógnitas tiene infinitas soluciones y si las representamos, forman una recta". Aquí, Simón muestra conocer los conceptos de ecuación y solución, como parte de su KoT y del referencial en el ETM idóneo que diseña. Esta definición establece una conexión entre la ecuación lineal y su solución mediante el cumplimiento de la igualdad que plantea la ecuación, formando parte de la red conceptual para la ecuación lineal (Aya-Corredor et al., 2014). Esta relación está dentro del mismo tema de ecuación lineal, por tanto, la consideramos como parte de su KoT. Simón no incluye condiciones (adicionales a la de ser números racionales) para los coeficientes de la ecuación (Figura 1), por ejemplo, cuando posee infinitas o ninguna solución ($e,d \neq 0$), lo que da indicio de cómo comprende el concepto de ecuación lineal con dos incógnitas (en su KoT). Esto se interpreta como una imprecisión en el referencial y establece los focos de atención para sus estudiantes en el trabajo que propone con estas ecuaciones: génesis discursiva mediante la definición y génesis semiótica mediante la representación de la solución. Esta situación plantea interrogantes sobre la conciencia del FP al seleccionar esta definición para la enseñanza, en el sentido de Winicki (2006), y muestra la incidencia del conocimiento del tema sobre la organización de la enseñanza como ETM idóneo y los conocimientos del PCK involucrados.

Asimismo, en esta definición de solución de la ecuación lineal, Simón privilegia la activación de la génesis semiótica en el ETM idóneo ya que propone la solución de la ecuación articulada con lo algebraico y lo geométrico cuando señala que su representación es una recta. Tal como señalan Espinoza-Vásquez y Henríquez-Rivas (2018) para el caso de las funciones, la génesis semiótica es la entrada al trabajo matemático que promueve el profesor. Este asunto da cuenta de la organización del ETM idóneo, así como de su conocimiento de la ecuación lineal y supone un tipo de trabajo orientado a la representación de la solución de las ecuaciones que enseña.

Para Simón, la resolución de ecuaciones tiene un rol clave en su propuesta. El ejemplo y las tareas que plantea (Figura 2a y 2b) persiguen los aspectos semióticos de estas ecuaciones lineales, ahora desde el trabajo algebraico que supone su resolución, lo que evidencia la estructuración de la enseñanza (KMT) y del trabajo matemático (ETM idóneo) en torno al tema. El par ejemplo-tareas resalta la representación de la ecuación y de su solución mediante la forma principal de las ecuaciones planteadas, dirigiendo el trabajo sobre las tareas mediante la réplica de lo realizado en los ejemplos. Los procedimientos para resolver estas ecuaciones forman parte de su KoT, se muestran como ejemplos instructivos en la enseñanza de la ecuación lineal y estructuran el ETM idóneo, que a su vez da luces de lo que espera logren los estudiantes a nivel procedimental, sobre la resolución de ecuaciones, y conceptual, sobre la comprensión de la solución como una recta (KMLS), desde una perspectiva semiótica.

<table>
<tr>
<td>a)</td>
<td>Si la ecuación $2x+3y=5$ se quisiera expresar en su forma principal, es
de la forma $y=mx+n$, ¿cuál sería la ecuación que la representaría?

Para determinar la ecuación de la forma solicitada, se despejará y de la ecu

$2x+3y-2x = 5-2x$ → Restar $2x$ en ambos lados de la ecuac
$\frac{3y}{3} = -\frac{2x}{3}+\frac{5}{3}$ → Multiplicar por $\frac{1}{3}$
$y = -\frac{2x}{3}+\frac{5}{3}$ → Simplificar

Respuesta: La ecuación es $y=-\frac{2x}{3}+\frac{5}{3}$.</td>
<td></td>
<td>Represente cada ecuación lineal con dos incógnitas en su FORM
GENERAL $ax+by+c=0$ y en su FORMA PRINCIPAL $y=mx+n$ (4 punto
por cada ecuación que tenga su FORMA GENERAL Y PRINCIPAL).

a) $y+3x=5$
b) $-2x=7+y$
d) $x-\frac{2}{4}y=8$
e) $\frac{4}{4}x+\frac{100}{100}y=0$</td>
</tr>
</table>

Figura 2: Presentación de ejemplo (a) y tarea (b)

Según Watson y Masón (2005) y Henríquez Rivas et al. (2021), el ejemplo propuesto cumple su rol instructivo al especificar cómo se resuelve la ecuación y cómo se genera la representación solicitada. En él se expresa la relación entre el conocimiento especializado (KoT, KMT y KMLS) y el diseño del ETM idóneo. En el caso de Simón, el ejemplo planteado busca preparar a los estudiantes para la tarea que le sigue dando indicio sobre lo que espera de ellos en el trabajo matemático que propone (KMLS). Simón estructura el ETM idóneo de modo que sus estudiantes puedan usar las definiciones dadas y el andamiaje que produce el ejemplo (Figura 2a) para desarrollar las tareas que propone (Figura 2b). De acuerdo con Espinoza-Vásquez et al. (2018), el PCK y el KoT de Simón inciden en este diseño.

El trabajo que propone el FP se identifica con la secuencia *definición-teorema-tarea* (Winicki, 2006) y deja ver un estilo de enseñanza de la matemática como conocimiento acabado que, a su vez, promueve un trabajo de aula más rígido. Esta secuencia se alinea con el rol descriptivo que el FP asigna a la definición.

La selección de las definiciones, el ejemplo y la tarea, cómo parte del diseño del ETM idóneo, está sustentada tanto en lo que espera aprendan sus estudiantes sobre este tema (KMLS, representar una ecuación en su forma principal y resolver ecuaciones lineales con dos incógnitas) como en su conocimiento de la enseñanza (KMT, selección y organización de las tareas y ejemplos). Recíprocamente, tal diseño permite identificar cómo es el trabajo matemático que Simón propone a sus estudiantes en su ETM idóneo, quedando caracterizado por partir desde el referencial (definición de ecuación y solución) hacia la activación de la génesis semiótica (interpretación de la solución de la ecuación como recta) y fomentar los aspectos procedimentales de la resolución de ecuaciones. En esta propuesta de trabajo se observa cómo se ponen en juego los conocimientos del tema y de su enseñanza para conseguir los objetivos que contempla dicho espacio en términos de desarrollos procedimentales y conceptuales.

Finalmente, el ETM idóneo da cuenta de la organización de definiciones, ejemplos y tareas como estrategia de enseñanza y, más general, el conocimiento movilizado en este diseño, observándose así la relación entre ETM y MTSK expresada por Espinoza-Vásquez et al. (2018) como parte de la complementariedad entre los modelos.

REFLEXIONES FINALES

El FP requiere de varios conocimientos para diseñar el ETM idóneo y ejecutar estas propuestas de enseñanza. Entre estos conocimientos se destacan aquellos identificados por el modelo MTSK como conocimiento del tema (KoT), de su enseñanza (KMT) y sobre lo que se espera de los estudiantes (KMLS). En la formación de profesores se busca que el FP, al momento de diseñar propuestas de enseñanza, maneje los aspectos disciplinares y didácticos del tema como, por ejemplo, la efectividad del ejemplo y las implicancias que tiene una definición en su propuesta. Todo esto se desarrolla al integrar los conocimientos teóricos y prácticos en las experiencias docentes en contextos reales. Así, conocimientos y experiencias permiten al FP promover un cierto tipo de trabajo matemático mediante la selección de definiciones, tareas y ejemplos, como aquí hemos analizado, y organizarlo para fomentar un determinado tipo de trabajo matemático, apoyando la comprensión del concepto en sus estudiantes.

En el caso de Simón, existe una tendencia hacia el trabajo semiótico, que parte desde el referencial, mediante la definición de los objetos, y llega a la caracterización de la solución de la ecuación mediante su representación gráfica. El ejemplo propuesto guía este tipo de trabajo y la tarea que le sigue lo asienta, resaltando las metas de aprendizaje (conceptuales y procedimentales) que ha trazado para sus estudiantes en este nivel. Concluimos que es el conocimiento especializado de Simón lo que le permite diseñar el ETM idóneo y que, a su vez, este diseño nos muestra cómo se integran y relacionan tales conocimientos.

Más precisamente, se observa una estrecha relación entre el diseño del ETM idóneo y los conocimientos en el PCK y KoT. Algunas relaciones aquí evidenciadas coinciden con hallazgos de trabajos anteriores, como en el estudio de las tareas, mientras que otras se evidencian en la enseñanza de la definición y la propuesta de ejemplos, lo que nos permite proponerlos como elementos factibles de analizar desde la complementariedad ETM-MTSK. Sin embargo, la relación entre ETM idóneo y PCK es un asunto que se debe profundizar, por ejemplo, en el estudio del conocimiento especializado que se moviliza para diseñar las tareas matemáticas o seleccionar las definiciones que se incluyen en dicho ETM.

Consideramos importante que los FP, así como los docentes e investigadores, reflexionen sobre el diseño aquí analizado y las estrategias de enseñanza respecto de lo que se propone en el aula como trabajo matemático, de modo que se puedan contemplar otras que incluyan, por ejemplo, un enfoque geométrico o recursos de geometría dinámica para ampliar el ETM idóneo y profundizar en los conocimientos adquiridos durante la formación de los FP que posibilitan esta ampliación.

A modo de avance en nuestra línea de estudio y como proyección de este trabajo, destacamos que el estudio del FP en su PP es un contexto que permite el estudio en conjunto ETM y MTSK cuando se analiza la propuesta de tareas así como las definiciones y ejemplos. Estos elementos, junto a la tarea matemática, también contribuyen a observar la complementariedad entre los modelos respecto y (re)interpretar el quehacer docente en términos del trabajo que propone en la enseñanza y los conocimientos que se ponen en juego para ello. Lo anterior amplía las oportunidades para profundizar en las relaciones ETM-MTSK y avanzar en la comprensión de la práctica del profesorado en todos los niveles escolares.

AGRADECIMIENTOS

P. Verdugo-Hernández agradece el financiamiento al Convenio Marco FID-TAL 1856, de la Universidad de Talca (2021).

Este trabajo está vinculado a la Red MTSK de la Asociación Universitaria Iberoamericana de Posgrado (AUIP).

REFERENCIAS

Aya-Corredor, O., Echeverry, A y Samper, C. (2014). Definición de altura de triángulo: ampliando el espacio de ejemplos con el entorno de geometría dinámica. Tecné, *Episteme y Didaxis: TED*, (35), 63-86.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https//doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Comisión Nacional de Acreditación (2014). *Criterios de Evaluación para Carreras y Programas de Pregrado*. Santiago, CNA.

Denzin, N. y Lincoln, Y. (2000). *The handbook of qualitative research*. Sage.

Espinoza-Vásquez, G., Ribeiro, M, y Zakaryan, D. (2018). Avance en la comprensión de las relaciones entre el ETM idóneo y el MTSK del profesor. *Journal of Educational Research, MENON, 4*, 146-161.

Henríquez-Rivas, C., Ponce, R., Carrillo, J., Climent, N. y Espinoza-Vásquez, G. (2021). Trabajo matemático de un profesor basado en tareas y ejemplos propuestos para la enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *39*(2), 123-142. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3210

Henríquez Rivas, C., Kuzniak, A. y Masselin, B. (2022). The idoine or suitable MWS as an essential transition stage between personal and reference mathematical work. (Chapter 3). En A. Kuzniak et al. (Eds.). *Mathematical work in educational context: The perspective of the theory of mathematical working spaces* (pp. 121-146). Springer.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathematique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9–24.

Ministerio de Educación de Chile (Mineduc). (2021). *Estándares orientadores para carreras de Pedagogía en Educación Media*. Autor.

Paquay, L., Altet, M., Charlier, E. y Perrenoud, Ph. (Ed.) (1996). *Former des enseignants professionnels. Quelles stratégies? Quelles compétences?* Bruxelles: De Boeck

Ponte, J.P., Quaresma, M. y Branco, N. (2012). Prácticas professionais dos professores de Matemática. *Avances de investigación en Educación Matemática, 1*, 65-86.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Morata.

Verdugo-Hernández, P., Espinoza-Vásquez, G. y Carrillo, J. (2022). Análisis de una tarea sobre sucesiones desde el uso de las herramientas y el conocimiento matemático del profesor. *Enseñanza de las Ciencias, 40*(2), 125-145. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3457

Watson, A. y Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity*. *Learners Generating Examples.* Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Winicki, G. (2006). Las definiciones en matemáticas y los procesos de su formulación: algunas reflexiones. En G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 528-537). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Zeichner, K. (2010). Reithinking the connections between campus courses and field experiencies in college-and university-based teacher education. *Journal of Teacher Education. 61*(1), 89-99.

TEMA 4: EL PAPEL DE LAS TAREAS EN EL TRABAJO MATEMÁTICO

Elizabeth Montoya-Delgadillo, Rosa Elvira Páez Murillo, Jaime Huincahue

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, (Chile), Universidad Autónoma de la Ciudad de México, (México), Universidad Católica del Maule (Chile)

DESCRIPTOR INICIAL DEL TEMA

El tema 4 tiene como propósito problematizar el concepto de tarea, analizando y discutiendo su rol en cuanto a la construcción del trabajo matemático personal del estudiante y del profesor. En la vivencia del tema fueron considerados escenarios educativos que mostraron distintas formas de identificar el trabajo matemático, refiriéndonos a entornos educativos en nivel secundario, técnico, universitario y académico. Tal diversidad de los participantes en las investigaciones ha enriquecido y complejizado el rol de la tarea, ubicando el contexto de las investigaciones –y de las tareas– como una variable de interés en los resultados mostrados en cada uno de los estudios. De esta manera, se ha identificado en los reportes consideraciones incipientes de naturaleza social y/o de nivel educativo que permiten identificar características propias de tales escenarios, en donde las tareas de modelación tomaron relevancia en el tema 4 para un desarrollo en la enseñanza y el aprendizaje del trabajo matemático.

Ha existido mucho interés en simposios anteriores sobre la importancia de la tarea para fomentar un trabajo matemático específico (Gómez-Chacón, *et al.*, 2017; Montoya-Delgadillo *et al.*, 2019), identificando previamente características propias del modelar, siendo visualizadas inicialmente como un tipo de tarea con un valor agregado, ya que permite relacionar los conocimientos matemáticos a aprender con los conocimientos de la realidad del estudiante. Esta noción ha sido desarrollada virtuosamente en estudios que han articulado marcos conceptuales o teóricos centrados en el modelar (p.e. ciclos de modelación), lo que permitió describir ciertas fases y etapas durante el proceso de modelación y que han sido analizados desde los Espacios de Trabajo Matemático. Por otro lado, también se ha identificado una forma genuina de modelación matemática desde los ETM, emergente desde una reflexión crítica para desarrollar la idea de trabajo matemático desde el modelar y la pluralidad de circulaciones entre las dimensiones semiótica, discursiva e instrumental de los ETM (Lagrange *et al.*, 2022), mostrando una valoración propia y un permanente análisis de un desarrollo sociocultural dentro del marco teórico.

Una característica de interés en el tema y en las investigaciones presentadas durante la jornada, recae en la pluralidad de características identificadas en una tarea cuando existe una aproximación del contexto de la tarea hacia la realidad del estudiante. Esto fue desarrollado desde varios enfoques investigativos y principalmente desde una metodología cualitativa, haciendo uso de experimentaciones, encuestas y usos de recursos tecnológicos para identificar los trabajos matemáticos. En este sentido, el tema 4 se ha desarrollado en una diversidad de tareas que enriquecieron las formas en cómo sucede el aprendizaje para propiciar la enseñanza y la confección de tareas con y sin el uso de tecnologías.

PRESENTACIONES

Las presentaciones del tema 4 fueron las siguientes:

Formato presencial

Título de la contribución	Autor	Institución	País
Modelling sound phenomena through trigonometric polynomials	Alejandro Cabrera-Baquedano, Elizabeth Montoya-Delgadillo, Fabrice Vandebrouck, Laurent Vivier	LDAR – Université de Paris / Pontificia Universidad Católica de Valparaíso	Francia /Chile
Vers la mathématisation de situations ancrées dans le réel : une proposition de grille d'analyse	Charlotte Derouet, Sonia Yvain-Prébiski	Université de Strasbourg / CY Cergy Paris Université	Francia
Implicaciones de los ambientes digitales en los procesos de modelización	Carolina Guerrero-Ortiz	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso	Chile
Résolutions d'équations du premier degré en IUT GEII – ETM personnel des étudiants	Philippe Hoppenot	Université Paris-Saclay	Francia
Modelización en entornos académicos interdisciplinares e ideas para la construcción de tareas	Jaime Huincahue	Universidad Católica del Maule	Chile
Trabajo matemático de docentes en formación inicial : una tarea de modelización en cálculo	Leslie Jiménez y Alain Kuzniak	Universidad de Chile / Universidad de París	Chile / Francia
Une étude algorithmique relative à un probleme de calcul approche d'un zéro d'une fonction	Dominique Laval	CY Cergy Paris Université – INSPE de l'académie de Versailles	Francia
Modéliser l'intervalle de fluctuation des frequences : un travail mathematique	Jannick Trunkenwald	LDAR – Université de Paris	Francia
Le jeu des modèles mathématiques dans le travail mathématique	Alain Kuzniak, Claudia Reyes	Université de Paris/Universidad Autónoma de la ciudad de México	Francia/ México

Formato virtual

Título de la contribución	Autor	Institución	País
Enseñanza de la derivada en un contexto interdisciplinar en el nivel superior (POSTER)	Flor Carrillo Lara	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso	Chile
Tracing creativity in geometry: figural, instrumental and discursive geneses of reasoning in a geometry multiple-solution task	Iliada Elia, Eleni Deliyianni, Athanasios Gagatsis, Evgenios Avgerinos, Panayiotis Gridos	University of Cyprus /Cyprus Ministry of Educación, Sports and Youth / University of the Aegean	Cyprus, Greece
Una situación didáctica en probabilidad en la formación inicial de profesores en Chile	Katherine Machuca, Elizabeth Montoya-Delgadillo	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso	Chile
ETM de una situación didáctica sobre transformaciones isométricas y el uso de GeoGebra en estudiantes entre 12 y 15 años	Marcela Muñoz-Lira	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso	Chile
Tareas de evaluación en una educación no presencial: caracterización en el marco del ETM	Rosa-Elvira Páez-Murillo, Víctor Larios-Osorio	Universidad Autónoma de la ciudad de México/ Universidad Autónoma de Querétaro	México
Función exponencial : caracterización del trabajo matemático de estudiantes de humanidades (POSTER)	Jorge Vivas Pachas, Jesús Victoria Flores Salazar	Pontificia Universidad Católica del Perú	Perú

La organización del trabajo presencial y virtual fue basada en sesiones de presentaciones presenciales y remotas, estableciendo espacios de reflexión y discusión para cada una de ellas.

AVANCES EN EL ROL DE LA TAREA

El planteamiento de tareas que involucran estructuras tecnológicas fue un aspecto de interés durante el desarrollo del tema 4, estableciendo alcances exitosos frente a la implementación, siendo considerado como un componente de interés al establecer una problematización en la construcción de tareas.

Si bien, la predominancia de técnicas metodológicas fue de naturaleza cualitativa, se ha presentado una propuesta cuantitativa con alcance descriptivo-frecuencial frente al significado de los términos matemáticos en cuanto al uso. Este trabajo, además de su interés propio en el escenario que fue desarrollado, invita a futuros estudios ETM en donde se utilicen técnicas cuantitativas, de tal manera que los propósitos investigativos puedan ser con distinto alcance y se presenten como estudios que sean capaces de innovar metodológicamente y con orientación hacia cómo desarrollar tareas para describir distintos trabajos matemáticos.

Inicialmente, el tema 4 no estaba acotado únicamente a tareas de modelación. Sin embargo, la gran mayoría de tareas presentadas en esta séptima versión fue enfocada hacia vincular la realidad con las ideas matemáticas. Esto podría generar múltiples áreas de trabajo, como por ejemplo:

- El rol de la tecnología en las tareas (de modelación).
- La inclusión de la realidad del estudiante en el trabajo matemático.
- ¿Cómo se desarrolla el trabajo matemático en distintas culturas a partir de una tarea (o un tipo de tarea)? Tales transversalidades pueden ser una oportunidad de enriquecer los andamiajes metodológicos en las futuras investigaciones.
- Caracterizaciones para la construcción de tareas (de modelación).
- Circulaciones idealizadas y ¿cómo ciertos tipos de tareas pueden propiciar tales circulaciones?
- Pluralidad de usos/ajustes/construcciones de modelos matemáticos según los tipos de tareas y los contextos en donde se aplican las tareas.

REFERENCIAS

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., Nikolantonakis, K., Richard, P., Vivier, L. (2019). *Mathematical Working Space. Fifth ETM Symposium.* University of Western Macedonia. https://etm5.web.uowm.gr/wp-content/uploads/2017/11/%ce%95%ce%a4%ce%9c5Final.pdf

Lagrange, J-B, Huincahue, J., Psycharis, G. (2022). Modeling in education: new perspectives opened by the Theory of Mathematical Working Spaces. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, P. Richard (Eds.) *Mathematical Work in Educational Context* (pp. 247-266). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_11

Montoya-Delgadillo, E., Richard, P., Vivier, L., Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., Maschietto, M., Tanguay, D., (2019). *Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático*. Ediciones Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. https://www.pucv.cl/uuaa/site/docs/20200102/20200102160133/actes_etm6.pdf

TOPIC 4: THE ROLE OF TASKS IN MATHEMATICAL WORK

Elizabeth Montoya-Delgadillo, Rosa Elvira Páez Murillo, Jaime Huincahue

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, (Chile), Universidad Autónoma de la Ciudad de México, (México), Universidad Católica del Maule (Chile)

INITIAL DESCRIPTOR OF THE TOPIC

The purpose of topic 4 is to problematise the concept of homework, analysing and discussing its role in the construction of the student's and teacher's personal mathematical work. In the experience of the topic, educational scenarios were considered that showed different ways of identifying mathematical work, referring to educational environments at secondary, technical, university and academic levels. Such diversity of the participants in the research has enriched and complexified the role of the task, placing the context of the research - and of the tasks - as a variable of interest in the results shown in each of the studies. In this way, incipient considerations of a social nature and/or educational level have been identified in the reports, allowing the identification of characteristics of such scenarios, where modelling tasks became relevant in topic 4 for a development in the teaching and learning of mathematical work.

There has been much interest in previous symposia on the importance of the task to foster specific mathematical work (Gómez-Chacón, *et al.*, 2017; Montoya-Delgadillo *et al.*, 2019), previously identifying characteristics of modelling, being initially visualised as a type of task with an added value, as it allows relating the mathematical knowledge to be learned with the knowledge of the student's reality. This notion has been virtuously developed in studies that have articulated conceptual or theoretical frameworks centred on modelling (e.g. modelling cycles), which have made it possible to describe certain phases and stages during the modelling process and which have been analysed from the Mathematical Working Spaces. On the other hand, a genuine form of mathematical modelling has also been identified from the MWSs, emerging from a critical reflection to develop the idea of mathematical work from modelling and the plurality of circulations between the semiotic, discursive and instrumental dimensions of the MWSs (Lagrange *et al.*, 2022), showing an own valuation and a permanent analysis of a socio-cultural development within the theoretical framework.

A characteristic of interest in the topic and in the research presented during the conference lies in the plurality of characteristics identified in a task when there is an approximation of the context of the task to the reality of the student. This was developed from various research approaches and mainly from a qualitative methodology, making use of experimentation, surveys and the use of technological resources to identify mathematical tasks. In this sense, topic 4 has been developed in a variety of tasks that enriched the ways in which learning takes place in order to facilitate the teaching and making of tasks with and without the use of technologies.

PRESENTATIONS

The presentations for topic 4 were as follows:

Face-to-face format

Title of the contribution	Author	Institution	Country
Modelling sound phenomena through trigonometric polynomials	Alejandro Cabrera-Baquedano, Elizabeth Montoya-Delgadillo, Fabrice Vandebrouck, Laurent Vivier	LDAR – Université de Paris / Pontificia Universidad Católica de Valparaíso	Francia /Chile
Vers la mathématisation de situations ancrées dans le réel : une proposition de grille d'analyse	Charlotte Derouet, Sonia Yvain-Prébiski	Université de Strasbourg / CY Cergy Paris Université	Francia
Implicaciones de los ambientes digitales en los procesos de modelización	Carolina Guerrero-Ortiz	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso	Chile
Résolutions d'équations du premier degré en IUT GEII – ETM personnel des étudiants	Philippe Hoppenot	Université Paris-Saclay	Francia
Modelización en entornos académicos interdisciplinares e ideas para la construcción de tareas	Jaime Huincahue	Universidad Católica del Maule	Chile
Trabajo matemático de docentes en formación inicial : una tarea de modelización en cálculo	Leslie Jiménez y Alain Kuzniak	Universidad de Chile / Universidad de París	Chile / Francia
Une étude algorithmique relative à un probleme de calcul approche d'un zéro d'une fonction	Dominique Laval	CY Cergy Paris Université – INSPE de l'académie de Versailles	Francia
Modéliser l'intervalle de fluctuation des fréquences : un travail mathematique	Jannick Trunkenwald	LDAR – Université de Paris	Francia
Le jeu des modèles mathématiques dans le travail mathématique	Alain Kuzniak, Claudia Reyes	Université de Paris/Universidad Autónoma de la ciudad de México	Francia/ México

Online format

Title of the contribution	Author	Institution	Country
Enseñanza de la derivada en un contexto interdisciplinar en el nivel superior (POSTER)	Flor Carrillo Lara	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso	Chile
Tracing creativity in geometry: figural, instrumental and discursive geneses of reasoning in a geometry multiple-solution task	Iliada Elia, Eleni Deliyianni, Athanasios Gagatsis, Evgenios Avgerinos, Panayiotis Gridos	University of Cyprus /Cyprus Ministry of Education, Sports and Youth / University of the Aegean	Cyprus, Greece
Una situación didáctica en probabilidad en la formación inicial de profesores en Chile	Katherine Machuca, Elizabeth Montoya-Delgadillo	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso	Chile
ETM de una situación didáctica sobre transformaciones isométricas y el uso de GeoGebra en estudiantes entre 12 y 15 años	Marcela Muñoz-Lira	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso	Chile
Tareas de evaluación en una educación no presencial: caracterización en el marco del ETM	Rosa-Elvira Páez-Murillo, Víctor Larios-Osorio	Universidad Autónoma de la ciudad de México/ Universidad Autónoma de Querétaro	México
Función exponencial : caracterización del trabajo matemático de estudiantes de humanidades (POSTER)	Jorge Vivas Pachas, Jesús Victoria Flores Salazar	Pontificia Universidad Católica del Perú	Perú

The organisation of the face-to-face and online work was based on face-to-face and remote presentation sessions, establishing spaces for reflection and discussion for each of them.

ADVANCES IN THE ROLE OF THE TASK

The approach of tasks involving technological structures was an aspect of interest during the development of topic 4, establishing successful scopes of implementation, being considered as a component of interest when establishing a problematisation in the construction of tasks.

Although the predominance of methodological techniques was of a qualitative nature, a quantitative proposal has been presented with a descriptive-frequential scope regarding the meaning of mathematical terms in terms of use. This work, in addition to its own interest in the scenario in which it was developed, invites future MWS studies where quantitative techniques are used, so that the research purposes can be of a different scope and be presented as studies that are able to innovate methodologically and with an orientation towards how to develop tasks to describe different mathematical works.

Initially, topic 4 was not limited to modelling tasks only. However, the vast majority of tasks presented in this seventh version were focused on linking reality with mathematical ideas. This could generate multiple areas of work, for example:

- The role of technology in (modelling) tasks.
- The inclusion of the student's reality in the mathematical work.
- How does mathematical work in different cultures develop from one task (or one type of task)? Such transversalities can be an opportunity to enrich methodological scaffolding in future research.
- Characterisations for the construction of (modelling) tasks.
- Idealised circulations and how certain types of tasks can enable such circulations?
- Plurality of uses/adjustments/constructions of mathematical models according to the types of tasks and the contexts in which the tasks are applied.

REFERENCES

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., Nikolantonakis, K., Richard, P., Vivier, L. (2019). *Mathematical Working Space. Fifth ETM Symposium.* University of Western Macedonia. https://etm5.web.uowm.gr/wp-content/uploads/2017/11/%ce%95%ce%a4%ce%9c5Final.pdf

Lagrange, J-B, Huincahue, J., Psycharis, G. (2022). Modeling in education: new perspectives opened by the Theory of Mathematical Working Spaces. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, P. Richard (Eds.) *Mathematical Work in Educational Context* (pp. 247-266). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_11

Montoya-Delgadillo, E., Richard, P., Vivier, L., Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., Maschietto, M., Tanguay, D., (2019). *Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático*. Ediciones Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. https://www.pucv.cl/uuaa/site/docs/20200102/20200102160133/actes_etm6.pdf

UNE ETUDE ALGORITHMIQUE RELATIVE A UN PROBLEMEDE CALCUL APPROCHE D'UN ZERO D'UNE FONCTION

LAVAL Dominique

CY Cergy Paris Université – INSPE de l'académie de Versailles

L'hypothèse sous-jacente de l'enseignement de l'algorithmique en cours de mathématiques des classes de Seconde (grade 10) et du cycle terminal scientifique (grades 11 et 12) est que le travail sur des algorithmes aide les élèves à l'apprentissage des mathématiques. Ainsi, nous faisons le choix d'étudier un travail algorithmique sur un même sujet comme contribution à l'apprentissage en analyse au cours des trois années de lycée de notions aussi diverses qu'approximations, résolutions d'équations à une inconnue dans ***R*** *ou sur des intervalles de* ***R****, études de la continuité sur un intervalle de* ***R****. Pour cela, nous choisissons d'élaborer et d'expérimenter une ingénierie didactique autour d'algorithmes d'approximation.*

INTRODUCTION

Nous situant dans le champ de l'analyse enseignée dans les classes de Seconde et du cycle Terminal Scientifique (CTS) des lycées français jusqu'à la réforme du baccalauréat en 2020, nous souhaitons présenter une approche continue d'algorithmes d'approximation (balayage et dichotomie) d'une solution d'une équation numérique réelle. Trouver des valeurs exactes de solutions d'une équation de type f(x) = 0 n'est pas toujours possible. Ainsi, les élèves peuvent être amenés à déterminer une valeur approchée de ces solutions à l'aide de méthodes d'approximation. Par ailleurs, nous nous questionnons aussi sur le travail mis en place par les élèves « pour organiser un test de sortie de boucle quand celui-ci n'est pas défini par une égalité à un nombre donné » (Laval, 2018). En effet, dans le cadre d'un travail algorithmique papier-crayon, un tel test de sortie peut sembler ne pas poser de réelles difficultés aux élèves. Cependant nous faisons l'hypothèse qu'il puisse y avoir une vraie rupture, lors du passage à un algorithme écrit en pseudo-code en vue de son implémentation dans un environnement numérique afin de tester sa validité. Partant de cette idée de rupture, nous construisons deux ingénieries didactiques indépendantes sur deux sous-domaines de l'analyse : celui que nous appelons analyse discrète (AD) où les élèves travaillent sur des suites de nombres dans N et celui que nous nommons analyse continue (AC) qui se rapporte à des fonctions numériques définies sur R ou sur des intervalles de R. Dans AD, les élèves travaillent sur des notions mathématiques issues des champs de l'analyse et des probabilités pour les Espaces de Travail Mathématiques spécifiques (Kuzniak & Richard, 2014) et sur une structure itérative pour l'Espace de Travail Algorithmique (Laval, 2017, 2018, 2021). Dans AC, la rupture institutionnelle est partielle. En effet, suivant le niveau scolaire des élèves, ils n'ont pas nécessairement les connaissances théoriques sur certaines définitions et propriétés de l'analyse, comme la continuité, les dérivées, la monotonie. Cette communication se situe dans une suite de l'approche *discrète* de l'*algorithme de dichotomie* (Laval, 2017) présentée lors du symposium de l'ETM5. Souhaitant présenter ici l'approche *continue* d'algorithmes d'approximation, nous faisons le choix de mener dans des classes (2nde et CTS) de lycée français une étude de ces algorithmes relative à un problème de calcul approché d'un zéro d'une fonction numérique avec une prise de conscience de conditions suffisantes pour leurs effectivités, ainsi que l'unicité de solutions lors de la résolution d'équations à une inconnue dans **R** ou sur des intervalles de **R**, complétée d'une première approche du concept de continuité d'une fonction sur un intervalle de **R**. Après avoir rappelé le travail mis en place dans AD, nous présentons le cadre théorique, la problématique et la méthodologie de recherche, et enfin nous exposons le point phare de cette communication, c'est-à-dire l'ingénierie sur des algorithmes d'approximation.

RAPIDE RETOUR SUR L'INGÉNIERIE *DISCRÈTE* DE LA DICHOTOMIE

Dans des classes de Seconde et de CTS, une ingénierie *discrète* (Laval, 2017) est construite et expérimentée. La problématique est la suivante : décrire un modèle et une stratégie permettant de simuler un jeu, où deux joueurs A et B doivent suivre la règle suivante : le joueur A pense secrètement et au hasard à un « nombre entier secret » compris entre 1 et 1000 et le joueur B doit deviner ce « nombre entier secret » en faisant le minimum de propositions. Pour chaque proposition de B, A répond : « Le nombre entier secret est plus grand » ou « Le nombre entier secret est plus petit » ou « Bravo, tu as gagné », selon la position de la proposition de B par rapport au « nombre entier secret ». Bien que les élèves n'aient pas nécessairement l'intuition d'une stratégie particulière pouvant répondre à la problématique, nous attendons qu'ils prennent conscience que la dichotomie peut s'imposer comme une stratégie *gagnante* et *rapide*. Cela se traduit par le fait que le *nombre entier secret* doit être découvert *en faisant le minimum de propositions* et que les élèves interprètent cela comme un objectif de performance comparée sans être exprimé en termes d'optimalité. Lors du passage à la programmation d'un algorithme associé àla stratégie *rapide*, les élèves travaillent « la compréhension et la maîtrise des structures de boucles et des variables informatiques » (Laval, 2018), mais aussi l'aspect algorithmique « sur une suite de nombres dans **N** pour la compréhension du concept d'un *test de sortie de boucle* en informatique » (Ibid.). Ils ne distinguent pas nécessairement l'opérateur humain de la machine sur laquelle l'algorithme associé à la stratégie est implémenté afin d'en contrôler la pertinence de cette stratégie et la validité de l'algorithme. Les élèves n'ont pas nécessairement conscience du type de traitement que l'implémentation nécessite. En effet, la prise de conscience renvoie à des questions liées à la représentation du traitement dans l'environnement numérique avec la mise en place d'*Espaces de Travail Algorithmique spécifiques* (ETA$_s$) connectés (au sens de Minh & Lagrange, 2016, Lagrange, 2018 et Lagrange & Laval, 2019) à des *Espaces de Travail Mathématique spécifiques* (ETM$_s$) (Kuzniak & Richard, 2014) où les concepts mathématiques sont issus des champs de l'analyse (continuité, monotonie, etc.). Ainsi, nous observons chez les élèves une série d'interactions entre les genèses discursives mises en place dans un ETA_s sur

> les représentations des traitements des données, des structures informatiques, des variables, mais aussi sur les observables (production et interprétation) lors de l'exécution de l'algorithme dans l'environnement informatique et un ETM_s mettant en lumière une réflexion de la part de l'élève sur des concepts mathématiques comme celui de *nombre entier aléatoire*, d'*intervalle*, de *moyenne* et de *fonction partie entière*. (Laval, 2018)

Dans l'ETA_s, le choix des *variables itératives* effectué par les élèves et les notions mathématiques sollicitées font l'objet de notre attention. Une utilisation de variables dans une structure de boucle, plutôt que lors d'une simple déclaration ou alternative, est favorisée par le fait que, dans la boucle, la variable informatique apparait différente de celle de variable mathématique. En effet, selon Knuth (1968),

> une variable informatique désigne un emplacement dans la mémoire de l'ordinateur et nous comprenons alors, que même si le vocabulaire est le même, le mot variable dans un contexte algorithmique relève ici de l'informatique et non des mathématiques. Le mot
> « variable » représente donc des concepts différents selon qu'il est utilisé en mathématique ou en informatique. (Couderette, 2016).

Nous identifions « trois opérations sur les variables dans une boucle, renvoyant à trois aspects cognitifs : la *mise à jour*, le *test d'arrêt* et l'*initialisation* » (Laval, 2018). Selon Samurçay (1985), nous avons deux types de variables en programmation informatique : « celles qui sont des données explicites du problèmeet celles qui sont rendues nécessaire par la solution informatique » (Laval, 2018). Par ailleurs, plus le traitement algorithmique des variables s'éloigne d'une simple exécution *à la main*, plus les élèves sont confrontés à des difficultés, comme par exemple, la gestion d'un invariant de boucle. Leurs conceptions de l'initialisation des variables, des variables d'accumulation ou des compteurs, sont étudiées lors de cette ingénierie *discrète*. Laval constate que les élèves traitent les variables d'accumulation moins bien que les autres. Les variables avec lesquelles ils éprouvent le moins de difficultés sont les compteurs. Cela est dû au fait que ces variables sont institutionnalisées et pratiquées par les élèves tout au long de leur scolarité du lycée. Laval observe aussi qu'ils éprouvent des difficultés avec la structure de boucle « Répéter… Jusqu'à ». Ainsi, les questions des relations entre structures algorithmiques et variables itératives sont abordées par les élèves avant le passage à l'ingénierie *continue* en lien avec des algorithmes d'approximation. Les analyses sur ces structures et ces variables ont été présentés lors de la communication ETM 5 (Laval, 2017) et dans la thèse de Laval (2018).

UN CADRE THEORIQUE

Approche épistémologique

Le cadre théorique est basé sur les recherches autour des *Espaces de Travail Mathématique* (ETM). Nous rappelons que la genèse de ces *Espaces de Travail* (ET) est liée au champ géométrique. Kuzniak (2006) élabore un modèle d'*Espaces de Travail Géométrique* (ETG) et de leurs paradigmes. Depuis, l'évolution de la recherche autour des ET a montré la nécessité d'élargir ce cadre initial à d'autres champs mathématiques. Ainsi, des *Espaces de Travail Mathématique spécifiques* (ETM_s) associés à l'analyse, l'algèbre, l'arithmétique élémentaire, les statistiques, les probabilités, etc., sont construits. Tenant compte de cette évolution, nous partons de l'hypothèse qu'une série de tâches dans le domaine de l'algorithmique peut aussi être analysée dans le cadre d'un ET.

En effet, la réalisation d'un algorithme comme représentation d'une suite finie d'opérations élémentaires, à appliquer dans un ordre déterminé, à des données, peut être comparée aux différentes étapes à mettre en place lors de la construction d'une figure géométrique donnée. Ainsi, tant pour la réalisation d'un algorithme que pour la construction d'une figure géométrique, le processus associé permet de résoudre un même type de problème. (Laval, 2018)

Cependant, devons-nous voir l'algorithmique comme un simple sous-domaine des mathématiques? En effet, cela impliquerait de poser comme unique objectif d'étendre les ETM_s à un ETM_{algo} sans chercher à construire un nouvel ET propre à l'algorithmique. Ou bien, devons-nous voir l'algorithmique comme une discipline à part entière qui interagirait avec des ETM_s, mais aussi avec d'autres disciplines que les mathématiques (cf. [1]) ? Selon Knuth (1968), l'algorithme n'est pas que du ressort de l'informatique, ni que du domaine des mathématiques. Il affirme qu'il est des deux, bien qu'en France, l'enseignement de l'algorithmique au secondaire est pour l'essentiel assuré par le professeur de mathématiques. Les algorithmes étudiés dès le collège s'appuient sur des énoncés mathématiques (Couderette, 2016 et Laval, 2018). Cependant, Couderette rapporte que « l'objectif n'est pas de faire un cours de mathématiques, mais de faire comprendre à un lecteur *novice* en informatique ce qu'est un algorithme ». Selon Knuth, il faut décrire « des concepts algorithmiques potentiellement difficiles à comprendre du fait de leur proximité avec des concepts informatiques (le stockage dans une variable par exemple) » (Couderette, 2016). En accord avec cette approche *hybride* de Knuth, nous supposons nécessaire « de construire et de justifier l'existence d'un *Espace de Travail Algorithmique* comme *Espace de Travail* à part entière » (Laval, 2018). Faisant le choix de favoriser cette approche d'ET, nous supposons qu'un enseignement de l'algorithmique de l'école primaire au lycée

peut se voir tant d'un point de vue didactique de l'informatique comme l'ont évoqué les travaux de Lagrange, Rogalski, Samurçay, … mais aussi d'un point de vue didactique desmathématiques comme l'a présenté Modeste […]. (Ibid.)

Nous proposons ainsi de générer un nouvel ET nommé *Espace de Travail Algorithmique* (ETA).

L'idée d'Espaces de Travail Algorithmique

Comme pour les ETM, deux organisations des ETA sont présentes : une première avec un plan épistémologique et une seconde due à l'ouverture sur le plan cognitif des ETA qui se fait en interaction avec le niveau épistémologique et ses composantes.

Le plan épistémologique et ses composantes de l'ETA

Nous avons trois composantes en interaction, mais non juxtaposées organisées selon un but précis dépendant du domaine algorithmique spécifique dans sa dimension épistémologique. Les trois composantes (Laval, 2017, 2018) sont : - un *ensemble d'objets* associé au support matériel ; - un *ensemble d'artefacts programmables* ; -un *ensemble d'idées théoriques* permettant « de créer et de justifier les algorithmes comme objets pour l'exécution par des artefacts programmables ». Par ailleurs, selon Laval (2018), quand l'accent est mis sur le processus d'apprentissage des élèves dans une situation didactique, ce plan épistémologique peut être considéré comme un *milieu épistémologique* (Coutat et Richard, 2011). Les éléments des ensembles des *artefacts programmables* et des *idées théoriques* restent deux composantes de base pour tout plan épistémologique associé à un domaine algorithmique particulier. Par exemple, dans le cas *discret* de *l'algorithme de dichotomie*, nous avons le plan épistémologique ci-dessous (Figure 1).

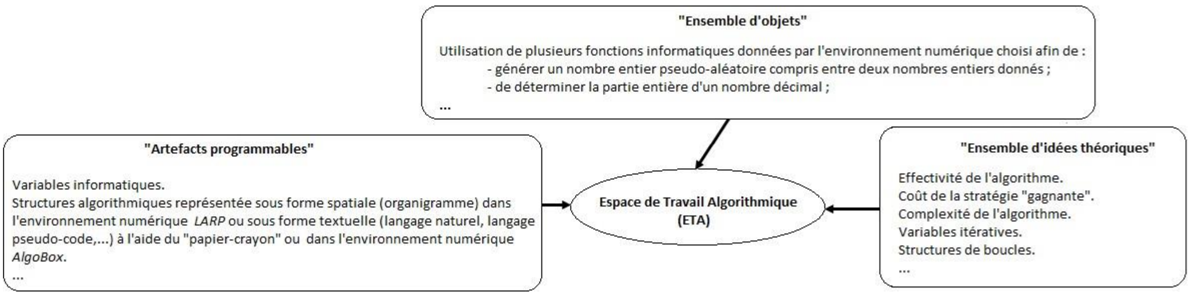


Figure. 1 : Plan épistémologique – Cas *discret* de l'*algorithme de dichotomie* (Laval, 2018)

Le plan cognitif de l'ETA

Comme pour les mathématiques, l'algorithmique au lycée ne se limite pas à « un corpus désincarné de propriétés et d'objets réduits à des signifiants manipulables par des systèmes formels, elle est d'abord et principalement une activité humaine » (Kuzniak et Richard, 2014, p. 4). Il est important de voir comment les élèves s'approprient des connaissances algorithmiques dans leurs pratiques des mathématiques, et comment ils donnent du sens aux structures algorithmiques et aux variables informatiques. Dans la continuité des perspectives faites sur les ETM (Kuzniak et Richard, 2014), nous proposons un deuxième niveau des ETA, *centré* *sur le sujet vu comme un sujet cognitif*. Cette ouverture sur le champ cognitif se faiten relation avec les différentes composantes du plan épistémologique. Selon Laval (2018), afin de rester dans une vision didactique, nous adaptons l'*approche sémiotique* de Duval (2006). Pour l'activité algorithmique, nous avons trois processus cognitifs : - un *processus de visualisation* (Kuzniak et Richard, 2014) en relation avec la représentation de l'algorithme et le support matériel ; - un *processus de construction* (Ibid.) déterminé par les langages et les instruments utilisés (organigrammes, langage naturel, pseudo-code, langage machine, ordinateurs,environnements numériques algorithmiques, calculatrices, etc.) ; - un *processus discursif* (Ibid.) où sont étudiées la *terminaison*, la *correction*, *l'efficacité* et la *complexité* de l'algorithme, avec production d'argumentations et de preuves. Lors de l'exécution d'un algorithme, il est nécessaire de se poser les questions suivantes (Laval, 2018) : (1) L'algorithme se termine-t-il ? ; (2) Résout-il correctement le problème posé ? ; (3) Suivant la *taille* des données, en combien de temps se termine- t-il ? La question (1) pose le problème de terminaison de l'algorithme, la question (2) celle du problème de la correction (démonstration) de l'algorithme et la question (3) pose le problème de la complexité de l'algorithme. Il est important « de prouver que l'algorithme résout le problème posé en un nombre fini d'étapes » (Ibid.).

METHODOLOGIE, HYPOTHESES, QUESTIONS DE RECHERCHE

Souhaitant étudier la possibilité d'améliorer et de développer des compétences chez les élèves, dans le domaine de l'analyse enseigné au lycée à l'aide de l'algorithmique, nous étudions les connexions possibles entre ETM$_{analyse}$ et ETA. En effet, cette étude permet de tenir compte des articulations entre ces ET. Cette extension prend en compte les trois processus cognitifs décrit ci-dessus, dans différents domaines, et leurs interactions. Ainsi, nous nous attendons à ce qu'elleaide à donner du sens à des situations qui impliquent des tâches basées à la fois sur la pensée algorithmique et la pensée mathématique. Par ailleurs, nous analysons les points forts dans les ET *de référence* et les ET *idoine* en fonction des difficultés rencontrées par les élèves afin d'étudier les conséquences au niveau des différentes genèses (sémiotique, instrumentale et discursive entre les deux plans de ces ET) et des interactions au niveau des élèves. Les ET servent de guide d'observation méthodologique pour définir les objets et les relations entre ETM$_{analyse}$ et ETA dans l'ingénierie *continue*. L'objectif est de tester l'hypothèse qu'un travail approfondi sur des algorithmes aide les élèves : - à faciliter l'apprentissage de nouveaux concepts mathématiques ; - à développer des démarches scientifiques dans le domaine de l'analyse ; - à approfondir des compétences en algorithmique et en programmation.

UNE INGENIERIE *CONTINUE* EN LIEN AVEC DES ALGORITHMES D'APPROXIMATION D'UN ZERO D'UNE FONCTION

Les élèves travaillent une approche algorithmique relative « à un problème de calcul approché d'un zéro d'une fonction et vers la prise de conscience de conditions suffisantes pour son effectivité, et pour l'unicité de solutions » (Laval, 2018). Ainsi, les élèves mettent en évidence « la définition [d'une fonction] sur un intervalle, la continuité sur cet intervalle ainsi que la monotonie comme des conditions suffisantes d'effectivité de l'algorithme de dichotomie. » (Ibid.).

Organisation de l'ingénierie *continue* à la suite de l'ingénierie *discrète*

Cette seconde ingénierie est menée dans les trois classes (une Seconde et deux classes du CTS) qui ont expérimenté l'ingénierie *discrète*. Nous partons de l'hypothèse qu'un algorithme d'approximation d'un zéro d'une fonction peut rendre deux valeurs aussi proches que l'on veut, encadrant un réel annulant la fonction (au sens de l'effectivité), et, qu'éventuellement, il soit garanti qu'il n'existe pas de zéros en dehors de cet encadrement (au sens de l'unicité). Nous nous intéressons ainsi à la *dichotomie* qui peut être utilisée dès la Seconde. Les élèves mettent en évidence la définition d'une fonction sur un intervalle, puis la continuité et la monotonie de la fonction sur cet intervalle comme conditions suffisantes d'effectivité de l'*algorithme de dichotomie*. En Seconde et en Première Scientifique, nous attendons l'entrée

> en jeu [*de*] la compréhension de la *méthode de dichotomie* « continue » comme moyen d'obtenir une approximation d'un antécédent par une fonction donnée et de prendre conscience du « Théorème des Valeurs Intermédiaires » et des conditions nécessaires dans ce théorème. (Laval, 2018)

Comme les élèves ont participé à l'ingénierie *discrète*, nous supposons que la compréhension et la maitrise des structures de boucles et des variables informatiques acquises leur permettent de réinvestir la structure de l'algorithme obtenu pour le joueur B (cf. la section *Rapide retour sur l'ingénierie discrète*) avec, néanmoins, des adaptations indispensables sur la condition d'arrêt et sur les conditions des alternatives. Par ailleurs, les variables itératives sont aussi réinvesties. De plus, le fait que l'*algorithme de dichotomie* interagit dans l'ingénierie avec des contenus mathématiques, permet d'étudier les connexions entre ETA et $\text{ETM}_{analyse}$.

Les objectifs et les attentes de l'ingénierie *continue*

Nous attendons que le travail sur l'*algorithme de dichotomie* permette aux élèves d'obtenir une suite d'intervalles emboités où les bornes sont rationnelles, avec des conditions de signes sur les bornes de chaque intervalle, jusqu'à une amplitude arbitrairement petite. L'étude du corps de boucle permet la construction de la suite des bornes et une condition d'arrêt, faisant intervenir l'amplitude du dernier intervalle. En effet, afin de faire le lien avec l'ingénierie *discrète*, les élèves étudient les différences sur les conditions d'arrêt dans une structure de boucle. Nous attendons qu'ils prennent conscience que, suivant la situation, *discrète* ou *continue*,la condition d'arrêt se ramène à une égalité à un nombre donné ou à une comparaison à un nombre arbitraire. Nous attendons aussi qu'ils observent des situations où, malgré le fait que l'algorithme termine, celui-ci n'encadre pas nécessairement un zéro, ou encore n'en encadre qu'un seul alors qu'il en existe plusieurs. Ainsi, les élèves sont confrontés à des éléments de nature informatique comme la conception d'une structure pour l'algorithme et la mise en place de variables. Par ailleurs,comme l'algorithme opère sur des fonctions mathématiques, il est intéressant que les élèves utilisent une fonctionnalité de l'environnement numérique permettant le calcul de valeurs avec un formalisme fonctionnel ($f(\ldots)$), faisant ainsi un lien entre fonctions mathématiques et fonctions informatiques. Restant dans une approche institutionnelle de l'*algorithme de dichotomie*, nous attendons des élèves qu'ils justifient en fonction des savoirs mathématiques dépendants du niveau scolaire, l'existence ou non d'un zéro unique sur un intervalle donné. Ensuite l'algorithme est présenté comme moyen d'obtenir un encadrement du zéro, s'il existe. Nous nous situons ici dans une *application numérique* de l'*algorithme de dichotomie*.

Quatre phases successives pour l'ingénierie *continue*

Comme pour l'ingénierie *discrète*, nous faisons le choix de laisser la dévolution chez les élèves pour la conception d'algorithmes *papiers-crayons*. Par ailleurs, tenantcompte des aspects institutionnels de l'enseignement des mathématiques au lycée, nous n'évoquons pas la comparaison de différentes méthodes de recherche d'une approximation d'un zéro d'une fonction du point de vue de l'efficacité. Le découpage en quatre phases permet aux élèves de progresser, en partant de leurs pratiques, où un algorithme d'approximation est utilisé comme un *outil* dans une perspective d'*application numérique*, vers un questionnement sur l'algorithme comme un *objet* dans une perspective d'*analyse numérique*. Dans la phase 1, les élèves justifient l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation $f(x) = 0$, f étant une fonction dont l'expression est connue. Une procédure de justification est demandée, tenant compte des connaissances dans le domaine de l'analyse, en fonction du niveau scolaire. Puis, à l'aide d'un algorithme donné par l'enseignant sous forme d'organigramme (Figure 2) pour une fonction f générique, les élèves le transposent en pseudo-code, afin de pouvoir l'implémenter dans un environnement numérique avec une fonction f (où $f(x) = x^3 + x - 1$) et de le tester pour obtenir un encadrement de la solution avec une amplitude donnée. Cette phase s'inscrit dansune perspective des phases 3 et 4, où les élèves étudient l'importance des conditions nécessaires et suffisantes que doit vérifier la fonction, afin qu'une utilisation de la *méthode de dichotomie* ait du sens. Dans la phase 2, l'enseignant distribue aux élèves un deuxième algorithme correspondant à la *méthode de balayage*. L'algorithme comporte un *trou* (Figure 3) que les élèves remplissent, puis programment l'algorithme complet dans un environnement numérique afin de le tester pour obtenir un encadrement d'amplitude 10^{-p}de la solution de l'équation

$f(x) = 0$ sur un intervalle donné, où f est la fonction de la phase 1. Tenant compte des possibilités de l'environnement numérique, nous faisons le choix que l'algorithme donné soit écrit avec une structure de type « Répéter … Jusqu'à ». Ainsi, l'élément manquant dans l'algorithme est la condition de sortie de la boucle. Les élèves déterminent cette condition de sortie. La tâche met en jeu la notion d'amplitude d'un intervalle et permet d'aborder la recherche des bornes d'un intervalle encadrant une solution de l'équation $f(x) = 0$, pour une amplitude prédéfinie. Dans les deux dernières phases (Figures 4 & 5), les élèves disposent d'algorithmes complets de la méthode de dichotomie, écrits sous *AlgoBox*, environnement basé sur une logique pédagogique avec apprentissage par structures logiques à travers un langage textuel proche du langage naturel que l'utilisateur peut taper directement sous forme de lignes de code, avec possibilité de définir et d'utiliser des fonctions. Les élèves regroupés en binômes avec un ordinateur par groupe, ont un fichier *AlgoBox* comprenant l'algorithme et la définition d'une fonction (fonction « cachée ») dont l'expression leur est inconnue. Cette fonction est appelée par l'algorithme via l'identificateur F1. La condition de continuation porte sur la distance entre deux valeurs numériques, Binf et Bsup, représentant les deux bornes de l'intervalle d'étude, variables en jeu dans la dichotomie, devant être inférieure à une précision donnée. Pendant ces deux phases, les binômes répondent à la question : « Est-ce que Binf et Bsup encadrent un zéro unique de la fonction, quelle que soit la précision choisie ? » (Laval, 2018).

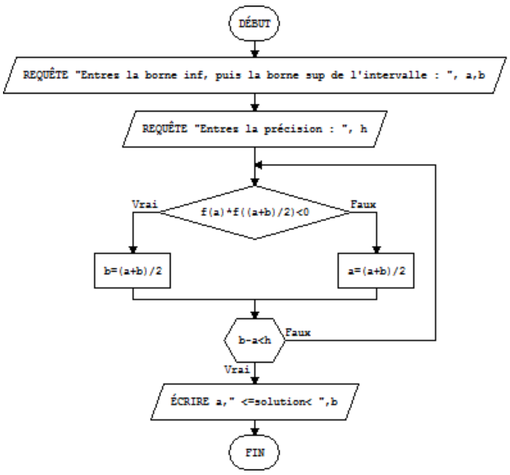


Figure. 2 : Organigramme pour une fonction *f* générique (Laval, 2018)

Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$, telle que pour tout réel x, $f(x) = x^3 + x - 1$
Soit l'algorithme :

Initialisation :	x prend la valeur 0	
Traitement :	Répéter	
		x prend la valeur $x + 10^{-3}$
	Jusqu'à $f(\ldots)$ ……..	
Sortie :	Afficher $x - 10^{-3} < x_0 \leq x$	

1) Compléter cet algorithme (Méthode de balayage).
2) Programmer cet algorithme dans un environnement numérique au format « pseudo-code » ou « organigramme ».
3) A l'aide de l'algorithme, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-3} de l'unique solution x_0 de l'équation $f(x) = 0$.

Figure. 3 : Fonction polynomiale (Ibid.)

Soit l'algorithme suivant, où F1 est une fonction dont on ne connait ni son expression, ni sa représentation graphique, ni les propriétés qu'elle vérifie.

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  e EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  a PREND_LA_VALEUR 0
  b PREND_LA_VALEUR 10
  e PREND_LA_VALEUR 0.0001
  TANT_QUE (b-a>e) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    SI (F1(b)*F1((a+b)/2)>0) ALORS
      DEBUT_SI
      b PREND_LA_VALEUR (a+b)/2
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        a PREND_LA_VALEUR (a+b)/2
        FIN_SINON
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER a
  AFFICHER b
FIN_ALGORITHME
```

☛ **Ouvrir le fichier AlgoBox « question1_p2.alg » <u>sans jamais ouvrir l'onglet</u> « Utiliser une fonction numérique ».**

1) Décrire en quelques mots ce que fait l'algorithme donné ci-dessus.

2) a) Ouvrir le fichier « question1_p2.alg » et exécuter le programme.

b) Quelles sont les valeurs affichées lors de son exécution ?

c) Que pensez-vous des résultats affichés après l'exécution de l'algorithme ?

3) En utilisant l'onglet « Dessiner dans un repère » du logiciel AlgoBox, compléter l'algorithme de telle façon que le programme trace en plus la courbe de la fonction F1 sur l'intervalle de départ, dans un plan muni d'un repère orthogonale.

Que pouvez-vous en conclure ?

Figure. 4 : Fonction « cachée » admettant plusieurszéros sur l'intervalle [0 ; 10] (Ibid.)

Soit l'algorithme suivant, où F1 est une fonction dont on ne connait ni son expression, ni sa représentation graphique, ni les propriétés qu'elle vérifie. :

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  e EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  a PREND_LA_VALEUR 1
  b PREND_LA_VALEUR 2
  e PREND_LA_VALEUR 0.000000001
  TANT_QUE (b-a>e) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    AFFICHERCALCUL F1(a)
    AFFICHER " , "
    AFFICHERCALCUL F1(b)
    SI (F1((a+b)/2)>0) ALORS
      DEBUT_SI
      b PREND_LA_VALEUR (a+b)/2
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        a PREND_LA_VALEUR (a+b)/2
        FIN_SINON
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER a
  AFFICHER b
FIN_ALGORITHME
```

☛ **Ouvrir le fichier *AlgoBox* « dichoun_x2m2 » <u>sans jamais ouvrir l'onglet</u> « Utiliser une fonction numérique ».**

1) Décrire en quelques mots ce que fait l'algorithme donné ci-dessus.

2) a) Ouvrir le fichier « dichoun_x2m2 » et exécuter le programme.

b) Quelles sont les valeurs affichées lors de son exécution ?

c) Que pensez-vous des résultats affichés après l'exécution de l'algorithme ?

3) En utilisant l'onglet « Dessiner dans un repère » du logiciel AlgoBox, compléter l'algorithme de telle façon que le programme trace en plus la courbe de la fonction F1 sur l'intervalle [- 3 ; 3], dans un plan muni d'un repère orthonormé.

Que pouvez-vous en conclure ?

Figure. 5 : fonction « cachée » non définie en unevaleur de l'intervalle [1 ; 2] (Ibid.)

Les élèves ont aussi pour consigne de ne pas chercher à connaître l'expression de la fonction F1. Toutefois, ils ont la possibilité d'obtenir une représentation graphique de F1, sans que cela leur soit indiqué. Une de nos attentes est qu'ils aient l'initiative de chercher dans le logiciel la fonctionnalité adéquate. Pour la phase 3 (Figure 4), la fonction « cachée » F1, dont l'expression (F1(x) = x3 – 3 x² + 2) et sa représentation graphique sont inconnues des élèves, est continue et admet deux zéros sur l'intervalle du départ [0 ; 10]. Cependant, pour une précision suffisante, un seul des zéros est encadré par Binf et Bsup. Pour la phase 4 (Figure 5), la fonction « cachée » F1, dont l'expression (F1(x) = 1/(x² – 2))) et sa représentation graphique sont inconnues des élèves, est monotone et change de signes sur l'intervalle du départ [1 ; 2]. Cependant, il existe une valeur $\sqrt{2}$ de l'intervalle qui le sépare en deux sous-intervalles où la fonction change de signes et, par conséquent, Binf et Bsup encadrent ce point qui ne correspond pas à un zéro de la fonction, car F1 n'est pas définie en $\sqrt{2}$. Les tâches proposées dans ces deux phases sont en lien avec la dichotomie continue et les conditions suffisantes d'unicité (phase 3) et d'effectivité (phase 4).

ANALYSE A PRIORI DE LA PHASE 4

Après la phase 3, nous supposons que les élèves vont avoir un regard critique sur les résultats affichés lors de l'exécution d'un algorithme. Cependant, nous faisons l'hypothèse que les élèves de Seconde, habitués à une application numérique des algorithmes vont penser « que la fonction s'annule en au moins un point de l'intervalle et que l'algorithme donne par conséquent un encadrement d'un de ces zéros » (Laval, 2018). En revanche, au niveau du CTS, nous faisons l'hypothèse que les élèves vont remettre en cause cette conception en faisant afficher les valeurs successives prises par la fonction aux bornes de l'intervalle. Ces valeurs ne se rapprochant pas de zéro, ils peuvent alors « envisager de faire afficher la représentation graphique de la fonction « cachée » à l'aide d'une fonctionnalité de l'environnement informatique […] » (Ibid.). Ainsi, les élèves vont prendre conscience de conditions suffisantes à l'existence d'un zéro et à l'effectivité de l'algorithme, voire faire le lien avec les conditions suffisantes énoncées pour le Théorème des Valeurs Intermédiaires, chez les élèves de Terminale.

ANALYSE A POSTERIORI DE LA PHASE 4

Nous observons que presque tous les binômes (près de 90% en 2nde et 100% au CTS) comprennent que l'algorithme peut ne pas afficher une solution d'une équation mais une valeur interdite pour la fonction « cachée ». Cependant, nous observons diverses explications concernant ce constat chez les binômes. Celles-ci dépendent de leurs compétences dans le domaine de l'analyse et non en algorithmique. Par ailleurs, dans le prolongement des observations faites lors de la phase 3, les élèves sont totalement autonomes pour l'utilisation de l'environnement informatique : compléter et exécuter un algorithme. Une majorité d'élèves sort de l'aspect application numérique de l'algorithme de dichotomie. Nombreux sont les binômes qui précisent que l'utilisation de l'algorithme nécessite un travail en amont sur l'étude de certaines propriétés de la fonction, en particulier le fait de vérifier si elle est bien définie sur l'intervalle du départ avant d'utiliser l'algorithme. Cependant, nous observons que certains binômes de 2nde restent essentiellement dans l'$ETA_{AlgoBox}$ pour expliquer leurs raisonnements. Nous affinons notre analyse *a posteriori* en nous référant aux connexions entre $ETM_{analyse}$ et $ETA_{AlgoBox}$. Les élèves coordonnent de fait deux genèses discursives dans les deux ET, ainsi que deux genèses, l'une instrumentale et l'autre sémiotique, dans ces deux ET. Ils réfléchissent sur la signification des résultats affichés par *AlgoBox* lors de l'exécution de l'algorithme proposé dans un premier temps, puis sur la pertinence de leurs premières explications (Laval, 2018).

CONCLUSION

Dans la continuité du travail fait sur l'existence et l'unicité d'un zéro d'une fonction sur un intervalle particulier, ainsi que sur les adaptations nécessaires sur les conditions d'arrêt ou de continuation, et sur les conditions alternatives, les élèves comprennent l'importance de l'étude du domaine de validité de l'algorithme. Ils se questionnent « sur des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'algorithme détermine réellement un encadrement (ou une valeur approchée […]) d'un zéro d'une fonction sur un intervalle » (Laval, 2018). Ainsi, l'algorithmique est vu ici comme un *objet* d'apprentissage (Douady, 1986). Le travail observé lors des phases montre une évolution dans l'installation d'un ETA qui complète le premier bilan observé lors de l'ingénierie *dichotomie discrète* sur une première mise en place de cet ETA (cf. communication de Laval dans les actes du 5ème symposium ETM). Nous avions observé que la *dichotomie discrète* était un objet algorithmique mais pas un objet d'un ETM_s. En revanche, dans cette ingénierie *continue*, nous observons des articulations possibles entre ETA et ETM en particulier au niveau du CTS (Laval, 2018). Par ailleurs, nous observons qu'au niveau de la Seconde, le travail reste assez laborieux lors des phases 2 avec l'*algorithme de balayage* et 3 où la fonction n'admet pas qu'un seul zéro sur l'intervalle initial. Cependant, quel que soit leniveau scolaire, nous constatons que le choix de l'organisation de ces 4 phases est très productif. Outre le travail sur les structures algorithmiques de contrôle et de données, l'organisation permet aux élèves de changer leur posture vis-à-vis de laplace de la dichotomie en analyse et en particulier d'aller, d'une utilisation de l'*algorithme de dichotomie* (ou *de balayage* (phase 2)) comme *applicationnumérique*, à une utilisation de la dichotomie comme *objet* de l'*analyse numérique*. Les élèves mettent en évidence des conditions d'existence (phase 4) et d'unicité (phase 3) sur la recherche d'une valeur approchée (ou d'un encadrement) d'une solution d'une équation $f(x) = 0$. f devant vérifier certaines propriétés pour que la dichotomie devienne un objet d'un $\text{ETM}_{analyse}$. Cependant, suivant les niveaux scolaires, les interactions sont plus ou moins fortes entre ETA et ETM personnels. Pour conclure, dans le prolongement de cette ingénierie *continue*, une seconde ingénierie sur une ébauche de preuve algorithmique du *Théorème des valeurs intermédiaires* en Terminale Scientifique est présentée dans la thèse de Laval (2018) et résumée lors du séminaire national de didactique des mathématiques de 2020 (Laval, 2021).

NOTES

1. Le conte et la pensée algorithmique: une nouvelle représentation mentale au service de la compréhension du récit àl'école primaire (Laval, ETM7, 2022)

RÉFÉRENCES

Couderette, M. (2016). Enseignement de l'algorithmique en classe de seconde : une introduction curriculaire problématique, in *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, 21, 267-296.

Coutat, S. & Richard, P.R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométries, in *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 97-126.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil–objet. Recherches en didactique des Mathématiques, 7(2), 5-31.

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? RELIME. Revista latinoamericana de investigación enmatemática educativa, ISSN 1665-2436, Vol. 9, Nº. 1, 2006, pp. 45-82. 9.

Knuth, D. E. (1968), *The Art of Computer Programming*, Vol 1: Fundamental Algorithms (2e éd.). Addison-Wesley.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométrique. Eléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science and Mathematics Education*, Vol. 6.2, pp. 167-188.

Kuzniak, A., & Richard, R. P. (2014). Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. *Relime*, *17*(4.1), 17–26.

Lagrange, J. B. (2018). *Connected Working Spaces: Designing and evaluating modelling based teaching situations*. Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Umeå, Sweden.

Lagrange, J.-B., & Laval, D. (2019). *Connected Working Spaces: The case of computer programming in Mathematics Education*. Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht, Netherlands.

Laval, D. (2017). L'algorithme de dichotomie « discret » : une stratégie « rapide » et « gagnante ». Dans I. Mª Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, R.-P. Richard, & L. Vivier (Éds.), *Actes Cinquième Symposium ETM* (p. 267-279). http://etm5.web.uowm.gr/actes/index.html

Laval, D. (2018). *L'algorithmique au lycée entre développement de savoirs spécifiques et usage dans différents domaines mathématiques* (Thèse). Université Sorbonne Paris Cité. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01943971.

Laval, D. (2021). Les Espaces de Travail Mathématique et Algorithmique connectés. Etude d'une activité algorithmique comme objet d'apprentissage de savoirs spécifiques et d'usage : Cas d'une ingénierie « dichotomie continue ». In A. Chesnais, H. Sabra (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2020* (p. 88-114). IREM de Paris – Université de Paris.

Minh T. K., & Lagrange J.B. (2016). Connected functional working spaces: a framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. *ZDM Mathematics Education, 48*, pp.793–807.

Samurçay, R. (1985). Signification et fonctionnement du concept de variable informatique chez des élèves débutants. *Educationnal Studies in Mathematic*, n°16-2: pp. 143-16

MODELIZACIÓN EN ENTORNOS ACADÉMICOS INTERDISCIPLINARES E IDEAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE TAREAS

Jaime Huincahue

Centro de Investigación de Estudios Avanzados del Maule, Universidad Católica del Maule

La presente investigación se sitúa en la construcción de modelos matemáticos interdisciplinares en escenarios académicos, valorando la práctica esencial del modelamiento matemático y ubicando tal escenario como uno que refleja su razón de ser de la modelización matemática. Para ello, se ha propuesto la pregunta: ¿Qué construcciones de modelos matemáticos se llevan a cabo en escenarios interdisciplinares académicos? Desde un enfoque cualitativo del análisis temático reflexivo, se ha podido reconocer componentes emergentes como el reconocimiento de un problema, el trabajo en equipos, la intelección, la relación entre modelos, prototipos de modelos y el análisis de las hipótesis. Tales componentes invitan a reflexionar sobre las implicancias educativas en los tipos de tareas matemáticas interdisciplinares.

INTRODUCCIÓN

Las expresiones de las matemáticas en la realidad del estudiante han tenido una progresiva valoración en el currículo chileno, caracterizando al modelar como una habilidad que permite un desarrollo hacia cómo las matemáticas logran comprender de mejor manera los distintos entornos de la realidad del estudiante (Mineduc, 2021), considerado actualmente como uno de los propósitos principales de las matemáticas en el currículum nacional. De esta manera, la realidad actúa como una fuente de información y conocimiento para el estudiante, y a la vez, como un escenario en donde habita el problema de interés de las prácticas de enseñanza.

Desde el punto de vista global, el modelar matemáticamente es una actividad que posee gran valorización en la comunidad científica relacionada con la Didáctica de la Matemática, desarrollándose en los últimos 40 años desde variadas perspectivas y distintos enfoques teóricos, con amplias intenciones educativas y diversos escenarios a explorar. Sin embargo, todos estos posicionamientos teóricos consideran un factor común al referirse al modelar matemáticamente, que es comprender las relaciones que suceden entre las matemáticas y la realidad del que aprende. Al parecer, esta última idea habita en el centro de lo que se entiende por modelar en Didáctica de la Matemática, Educación Matemática o Matemática Educativa. Al respecto, la Teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2022) no son ajenos a tal inquietud. Desde esta perspectiva, la actividad de modelizar es analizada desde sus constructos basales, como son las dimensiones semiótica, discursiva e instrumental, evidenciando, además, la posibilidad de determinar una pluralidad de espacios de trabajo en este tipo de tareas, desarrollando ejemplos que transitan por distintas áreas de las ciencias básicas (Lagrange, et al., 2022).

Por otro lado, la matemática siempre ha sido reconocida como una manera de describir el mundo que nos rodea (Stillman y Brown, 2019), desde el clarificar cómo funciona la organización social y económica de las sociedades, desarrollado en el papiro de Rhind (Bell, 2017), hasta las problemáticas contingentes de la humanidad, como es la optimización del uso del agua, la disminución de la contaminación o la mejora de los procesos energéticos. En todo ello la modelización matemática es utilizada y obteniendo una función descriptiva, explicativa o predictiva. Por ello, es de interés conocer cómo suceden los procesos de modelización en ciertos entornos que planteen rasgos de inspiración frente a la práctica educativa, es decir, es de interés analizar escenarios que permitan comprender y profundizar cómo la práctica de modelar matemáticamente tiene éxito, donde ocurren dificultades, e incluso, bajo qué situaciones fracasa el proceso.

Estas y muchas otras situaciones, ubican al uso de los modelos matemáticos en un hábitat de trabajo matemático, en el sentido de definir rutas o trazados epistemológicos y cognitivos, conducidos por un problema que usualmente exige cruzar barreras disciplinares para definir, construir y/o ajustar sistemas o modelos matemáticos que permiten generalizar situaciones de una realidad. Esto, ha permitido comprender las dificultades didácticas del proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

Trabajo matemático y modeladores matemáticos

Los modeladores matemáticos (matemáticos que se dedican a los modelos matemáticos) enfrentan situaciones en donde la necesidad de resolver un problema real, implica en ocasiones construir conocimiento matemático, llevando a cabo una labor investigativa doble, ya que la práctica investigativa favorece al problema de la realidad, y en ocasiones, a la generación de nuevos hallazgos matemáticos, transformándose en escenarios de integración disciplinar, situaciones clave para el análisis del proceso de transposición didáctica (Frejd y Bergsten, 2018) y la funcionalidad del conocimiento matemático.

Si bien, la literatura destaca la falta de acceso a la información sobre cómo trabajan los modeladores matemáticos, existen estudios sobre la actividad de modelación como una tarea profesional de modeladores matemáticos. Frejd y Bergsten (2016) proponen 3 actividades caracterizadas por 9 modeladores matemáticos: modelación generada por datos, modelación generada por la teoría, y modelación generada por modelos; destacando que paralelamente fomentan competencias interdisciplinares cuando existe la comunicación entre expertos (Frejd, 2017). En Huincahue y Vilches (2019) se estudiaron las reuniones de trabajo de 4 equipos de académicos compuestos por modeladores matemáticos y expertos de una disciplina de contexto, caracterizando que una acción necesaria del equipo para iniciar la actividad de modelar desde tal escenario interdisciplinar, es el constante intento y esfuerzo de entender al otro experto, y a la vez, ser capaz de lograr que éste logre entender las ideas propias, lo que los autores han denominado como un proceso de intelección. En este proceso, se ponen en juego conceptos matemáticos cuyos significados emergentes son revelados a partir del uso y su funcionalidad.

La problemática desarrollada en esta investigación atiende la profundización en los procesos de transposición del conocimiento matemático (Stillman, 2019), desde la práctica académica interdisciplinar hacia una educación matemática interdisciplinar, de tal manera de orientar la construcción de tareas matemáticas de modelización para el aula a partir de características o componentes que se destaquen en la práctica académica interdisciplinar cuando se construyen modelos matemáticos (como los que han sido identificados por Frejd y Bergsten (2016, 2018) o Huincahue y Vilches (2019)), con el fin de comprender y valorar el trabajo matemático que sucede en este tipo de tareas. Sin embargo, no se han identificado investigaciones que analicen la construcción de modelos matemáticos en escenarios interdisciplinares. Por ello, se ha definido la siguiente pregunta de investigación: *¿Qué características poseen los escenarios interdisciplinares académicos en donde se construyen modelos matemáticos?*

Atender esta pregunta, y concordando con Frejd y Bergsten (2018), será posible profundizar en una práctica esencial de la modelización matemática, casi su *raison d'être* de la modelización matemática, y por lo tanto, de la educación matemática interdisciplinar.

MARCO CONCEPTUAL

La principal fuente para comprender cómo sucede la práctica interdisciplinar, es justamente a partir de comprender cómo grupos y comunidades enfrentan problemas de tal naturaleza. Personas que trabajan en áreas como la ingeniería, ecología o agronomía y que se vinculan con modeladores matemáticos, son grupos de desarrollo científico y tecnológico que utilizan y/o construyen modelos desde necesidades presentes en sus respectivas áreas, siendo tales escenarios buenos representantes de lo que significa una práctica interdisciplinar.

Interdisciplina

Existen variadas maneras de caracterizar lo interdisciplinar. Una de ellas, es la visión teórica sociocultural y neovigotskiana de la Teoría de la Actividad, que analiza y relaciona la actividad interdisciplinar desde el modelo de Leontiev (Williams et al., 2016; Williams y Roth, 2019), reconociendo propuestas educativas para la Educación Matemática Interdisciplinaria que van más allá de STE (Science, Technology, Engineer, p.e. en Araya, 2015), con el propósito de ampliar la práctica interdisciplinar en todo el currículum escolar (Borromeo-Ferri y Mousoulides, 2017). Esta aproximación asume que la interdisciplina debe considerar la pertenencia de dos o más disciplinas, destacando el cruce que debe existir entre ellas (Roth, 2014). Sin embargo, las características de los escenarios del presente estudio, invitan a reconocer a la interdisciplina desde una óptica académica. Al respecto, desde la postura de Klein (2013), consideraremos que:

> interdisciplinarity integrates information, data, methods, tools, concepts, or theories from two or more disciplines or bodies of knowledge to address a complex question, problem, topic, or theme. Work may occur individually or in teams, though in the latter case, communication is essential to successful collaboration (p.13).

Los equipos interdisciplinarios necesariamente requieren tener relaciones con ciertos elementos en común, cumpliéndose generalmente que poseen al menos un objeto de estudio o uso o una problemática en común. Concordando con Williams et al. (2016), este objeto en común brinda una colaboración recíproca entre cada una de las disciplinas, el que no necesariamente se enmarca con el mismo significado, sino que el diálogo y la colaboración permite dirigir la labor interdisciplinar hacia un producto, siendo muchas veces el motivo de tal actividad.

Entender de mejor manera cómo suceden las prácticas interdisciplinares en entornos académicos, permitirá reconocer implicancias educativas que permitirán hacer un delineamiento de tipos de tareas matemáticas, sobre todo cuando actualmente se fomenta en los currículos mundiales los entornos interdisciplinares.

Modelos y modelos matemáticos

Los modelos poseen distintos grados de protagonismo en la educación y desde distintas áreas. En las ciencias básicas, es posible de identificar programas de investigación centrados en el aprendizaje de modelos y su enseñanza en la educación del profesor desde las ciencias experimentales (Belzen et al., 2019), reconociendo a los modelos como una impresión representacional de una situación o un organismo en cuestión, caracterizando a los modelos no como un fin en sí mismo, sino que los modelos son para objetivos de creación de sentido (Passmore et al., 2014).

En las matemáticas y su currículum en Chile, la intención de utilizar, ajustar y construir los modelos matemáticos también es un objetivo en sí mismos.

Como se mencionó anteriormente, los modelos matemáticos tienen la intención de hacer dialogar dos sistemas, comúnmente llamados realidad y matemáticas, los que pueden ser estudiados como sistemas a unir o relacionar. La primera opción ha sido la predominante en la literatura y en los currículos a nivel mundial, es decir, reconocerlos de forma separada para identificar componentes de relevancia en el acto de modelar con el fin de comprender a la actividad educativa en sus dificultades y etapas (Kaiser, 2005; Blum y Leiß, 2006). Paralelamente, distintos marcos teóricos en Didáctica de la Matemática han visualizado el modelar como la segunda opción, explorando horizontes emanados desde sus propios fenómenos y problemáticas teóricas, como son los Espacios de Trabajo Matemático (Lagrange et al., 2022) o la categoría de modelación de la Teoría Socioepistemológica (Cordero, 2016).

Modelos matemáticos y modeladores en la práctica académica

Cuando no existe una intención educativa, la generación de modelos puede poseer múltiples usos y fuentes, que dependerán de cómo se guía su construcción o manipulación. Para el caso de problemáticas de investigación en entornos académicos, los modelos matemáticos generalmente persiguen comprender algún fenómeno para ser capaz de explicar, describir o predecir alguna situación, en donde el sistema (S) es un entorno como por ejemplo la ecología, el clima o la biotecnología, reconociendo un conocimiento integrado de muchas disciplinas y dirigido por una pregunta (P), que con afirmaciones matemáticas (M) es posible de responder. Tal escenario descrito invita a considerar la siguiente definición sobre modelo matemático:

> Un modelo matemático es una tripleta (S, P, M) donde S es un sistema, P es una pregunta relacionada a S, y M es un conjunto de afirmaciones matemáticas $M=\{\Sigma 1, \Sigma 2,\ldots, \Sigma n\}$ que pueden ser utilizadas para responder P. (Velten 2009, p. 12, traducción personal)

Una forma de precisar a las personas que trabajan en modelos matemáticos en la academia, usualmente, provienen de diversas especialidades que se vinculan con modelos matemáticos. Para el contexto de este escrito, consideraremos a los modeladores matemáticos como matemáticos que trabajan con modelos; análogamente, los modeladores de la disciplina de contexto son personas que se especializaron en algún área del conocimiento (e.g. Biología, Agronomía, Ingeniería) y que trabajan con modelos. Esta caracterización ya ha sido utilizada en Huincahue y Vilches (2019).

En síntesis, la valoración de este escrito radica en el entender como ciertas comunidades cultivan y desarrollan el modelar desde entornos interdisciplinares, además, de clarificar cómo desde una transposición del conocimiento, es posible identificar qué características o componentes sostienen a la práctica interdisciplinar. A partir de esta búsqueda, es que se define y se sitúa la presente investigación, cuyos detalles vienen en la siguiente sección.

METODOLOGÍA

El Análisis Temático (Braun y Clarke, 2006) es un marco metodológico con enfoque cualitativo, cuyo fin es reconocer los significados que posee la práctica interdisciplinar en escenarios profesionales de modeladores matemáticos. Lo tradicional en la literatura, es utilizar el Análisis Temático cuando las temáticas asociadas a la pregunta de investigación tienen un carácter exploratorio o descriptivo, entendiendo que el tema no posee un suficiente desarrollo (Braun et al., 2019). Esta característica es concordante con los antecedentes determinados en la introducción.

Contexto y datos

Los participantes fueron dos modeladores matemáticos (o matemáticos que se dedican a los modelos matemáticos), un investigador en el área de la biotecnología y un estudiante; todos ellos compartieron un seminario por dos semestres en el área de Sistemas Agrónomos y Silvoagropecuarios, como una actividad curricular del Doctorado en Modelamiento Matemático Aplicado, programa de postgrado acreditado en Chile. El seminario funcionó de forma regular y bimensual durante el año 2021, con una duración promedio de 90 minutos aproximadamente cada sesión.

Usualmente, los estudiantes doctorales deben atender una problemática de la disciplina de contexto que pueda ser respondido con la construcción y/o uso de modelos matemáticos, en este caso, el problema habita en el área de la biotecnología y es atendido usualmente con la construcción de modelos dinámicos discretos, continuos o híbridos, es decir, el problema es quien dirige y demanda naturalmente la matemática acorde a atender, priorizando en todo momento el problema y buscando la matemática y el modelo matemático que mejor responde al problema.

Todas las sesiones fueron realizadas por la plataforma ®Teams, que fueron grabadas y posteriormente transcritas. Además, se recopiló documentación clave de las actividades, como es el programa académico y el libro curricular del programa doctoral. Posteriormente, todos los datos han sido analizados utilizando el software ®atlas.ti.

Procedimiento

El diseño de análisis descrito en Braun y Clarke (2006) es compuesto por seis fases, no lineales en su funcionamiento y matizadas en la dinámica propia del análisis cualitativo de datos (Creswell y Creswell, 2018): Inicialmente, la *familiarización de datos* equivale realizar una lectura general de todos los datos, con la finalidad de establecer un panorama inicial de las acciones descritas e ideas de interés que puedan inicialmente ser identificadas; posteriormente, la *generación de códigos iniciales* permite acotar o enmarcar con procesos de codificación ideas generales, y por ello, potenciales temas, luego de haber establecido un primer enfoque de codificación, es necesario realizar la *búsqueda de temas* a partir de un proceso de refinamiento de códigos con el objetivo de caracterizar patrones asociados a los objetos teóricos que se pretenden caracterizar en la construcción de modelos matemáticos. Teniendo una primera versión de los temas, es necesario realizar una *revisión* de ellos y sus asociaciones con otros códigos, que para esta investigación, fue realizado con otro/a investigador/a en paralelo, para después consensuar códigos y asociaciones discordantes; en esta revisión, además, se revisan las fases de familiarización y generación de códigos, con la finalidad de realizar un primer mapa temático. A continuación, se realiza la *definición y nombramiento de temas* en el mapa temático, para finalmente producir el reporte del procedimiento metodológico.

RESULTADOS

El proceso de codificación fue orientado hacia la identificación de características que contribuyan a la construcción de modelos matemáticos, esto, con la finalidad de caracterizar finalmente este tipo de tareas interdisciplinares y este tipo de resoluciones desde un enfoque académico del modelamiento matemático interdisciplinar.

El análisis y los resultados encontrados en las sesiones de seminario SAS fueron contrastados con documentación clave que está en torno al programa doctoral, como son la Programación de Estudios del Seminario SAS, además del libro curricular, que establece desde una perspectiva organizativamente curricular y pedagógica el *know how* del programa doctoral. Ambos documentos en conjunto con las transcripciones del seminario fueron considerados para la triangulación de los resultados identificados.

A continuación, se describen 4 temas principales luego de realizar el procedimiento del análisis temático, resultando 74 códigos en un inicio, posteriormente, y a partir de la descripción procedimental se han modificado los nombres de los temas para determinar una visión que refleje de manera más fiel lo que sucede en la práctica interdisciplinar académica, manteniendo la cantidad de temas y ajustando asociaciones, subtemas y sus respectivos nombres. Finalmente, se han formalizado 41 códigos luego del refinamiento e incorporados en la tabla 1.

Fuentes de información	Códigos
Libro curricular y plan clase a clase	Preparación disciplina de contexto, modelo mat – análisis, modelo mat – simulación computacional, modelo mat – características, modelo mat – usos, modelador mat – práctica, modelador mat – habilidades, modelador mat – conocimiento, modelamiento mat. – características, modelamiento mat -caracExtrCtxo, modelamiento mat -caracExtrMat, modelamiento mat – entornos, modelamiento mat – interdisciplina, modelamiento mat – presencia, modelamiento mat. – proceso, modelamiento mat. - validación
Seminario	Necesidad, objeto de estudio, proceso, estrategias de validación, valoración de modelos, trabajo en equipos, rol modelador matemático, rol modelador disciplina, rol estudiante, capacidad de trabajo, egos en el trabajo interdisciplinar, validación computacional, validación simplificación, validación mod. tradicionales, interpretación, retribución DiscCntxto-debilidades, retribución DiscCntxto-fortalezas, comunicación recíproca, esfuerzo comunicativo, matemática como metodología, efectos interdisciplinares-matemática, efectos interdisciplinares-disciplina de contexto, adecuación de los problemas, cruces disciplinares, valoración de otra disciplina

Tabla 1: Códigos resultantes

Reconocimiento de un problema

Inicialmente, el trabajo académico inicia con la determinación de un problema interdisciplinar. El identificar los bordes teóricos del problema tomó varias semanas al equipo, principalmente, porque el problema requiere tener ciertas características para su desarrollo, como es que el problema habite en la disciplina de contexto (en este caso en algún área de la Biotecnología) en donde la atención matemática del problema evoque la construcción de un sistema lógico e hipotético–deductivo, capaz de resolver la problemática de contexto, lo que comúnmente denominaron modelo matemático. Además, como el trabajo es acotado temporalmente, existe una programa de investigación discursivamente explícito, que invita a desarrollar el trabajo interdisciplinar analizando el uso, la modificación o la construcción de un modelo matemático orgánico al problema, que al ser analizado matemáticamente desde múltiples enfoques (cualitativo, cuantitativo o mixto), se logren obtener resultados matemáticos o estadísticos, para que su interpretación en el área biotecnológica pueda responder a un problema abierto y cuyos resultados se expresen con un alcance científico y/o de transferencia tecnológica.

Trabajo en equipo

La forma en cómo el programa de investigación se desarrolla, produce una cohesión entre las prácticas que suceden entre el modelador matemático y el biotecnólogo. Esta es una característica permanente en el tiempo, estableciendo una sistematización de tareas fundamentales para el éxito del proyecto, como es la formulación del problema, los alcances de los modelos matemáticos en la disciplina de contexto y la complejidad matemática que significa metodológicamente el desarrollo del proyecto. Todo este plan de acción es discutido de forma teórica y empírica por los académicos y el estudiante, en donde el estudiante es el encargado de llevar a cabo una serie de tareas orientadoras para la concretización de la propuesta.

Intelección en el trabajo en equipos

Existe un esfuerzo implícito de todos los involucrados en el trabajo en equipos, que se transforma en una acción motriz para trabajar mancomunadamente: el querer y tener la intención de entender el problema y su desarrollo. Esta acción es expresada principalmente en las formas de lograr atender el problema, también en reconocer cómo se desarrolla la disciplina de contexto para mostrar resultados de interés que muchas de ellas poseen un fuerte matiz experimental y distinto frente a cómo suceden las matemáticas. Tales distancias requieren la intelección de todos los participantes, de forma recíproca y constructiva.

Relaciones entre disciplina

Las expresiones del trabajo en el seminario, da cuentas del tipo de relaciones que suceden en su actuar, encontrando como un primer hallazgo que las matemáticas actúan como un andamiaje metodológico para el problema de la disciplina de contexto. En este sentido, las matemáticas quedan al servicio del problema para determinar la mejor manera de atender el problema en el marco de un proyecto doctoral. Esto significa que efectivamente la disciplina de contexto brinda un horizonte claro del problema, pero eventualmente el problema puede ser debilitado por la complejidad matemática que significa (por ejemplo un análisis de un sistema dinámico 3-dimensional con dimensión de espacio de parámetros suficientemente alto como para no ser manipulable cualitativamente), de esta manera, el diálogo entre las disciplinas es esencial para el acotamiento y la construcción del modelo matemático, visualizando una característica integradora entre ambas disciplinas para avanzar en el desarrollo del problema, siendo el problema el centro genuino de la práctica académica.

Prototipos de modelos

Una estrategia común en el desarrollo del trabajo en este seminario fue la validación permanente de decisiones menores en la prosecución constructiva de los modelos matemáticos, lo que permitió ajustar con mayor información las hipótesis consideradas y continuar la construcción con mayor grado de validez. Estas formas de validación equivalen a la creación y manipulación de prototipos de modelos matemáticos más simples, que en ocasiones solo corroboran comportamientos esperados o correspondencias que brindan coherencias a los supuestos que incorporan las estructuras matemáticas (como los modelos matemáticos).

En síntesis, el resultado principal de la investigación es el reconocimiento de 5 componentes esenciales que propician el trabajo interdisciplinar en el trabajo académicos interdisciplinar cuando se ajustan o construyen modelos matemáticos. Estos componentes han sido descritos e identificados en ambos seminarios, logrando identificar rasgos que permitirán obtener ideas educativas en el marco del proceso de transposición del conocimiento.

DISCUSIÓN

Los componentes identificados en el trabajo académico interdisciplinar para la construcción de modelos matemáticos, permiten clarificar de forma inicial algunas características que pueden ser de mucho interés para la construcción de tipos de tareas vinculadas a la educación matemática interdisciplinar, específicamente, las que conllevan la realización y manipulación de modelos matemáticos.

La complejidad que significó realizar el reconocimiento del problema, establece que las tareas deben tener una clara orientación en la problemática de interés, ya que usualmente, un problema interdisciplinar no tiene un camino predefinido para ser resuelto, por ello, es necesario que exista una clara pregunta que oriente al problema y al trabajo esperado por los estudiantes, información que es concordante con lo documentado en las investigaciones de Frejd y Bergsten (2016, 2018) y Huincahue y Vilches (2019).

Al momento de identificar el trabajo en equipo y la intelección como componentes del trabajo interdisciplinar, implica que las tareas deben necesariamente ser atractivas desde el punto de vista del estudiante, de tal manera que exista un interés y una intención por querer resolver la tarea. En ese sentido, Borromeo-Ferri (2019) ha propuesto que el situar las tareas equivale a mostrar las virtudes de la situación, tanto en su valoración propia, como en la valoración de la solución. Este tipo de prácticas pueden fomentar la intelección con otra área disciplinar para el trabajo en equipo y sostener un interés en un área a explorar y que las tareas sean capaces de promover.

Una característica de interés a considerar en una dimensión educativa, es mantener como centro de interés al problema por sobre alguna disciplina en juego, de tal manera que el desencadenamiento de conocimiento disciplinar sea posible a partir del desarrollo y el entendimiento del problema. Formas de expresar esta idea en tareas interdisciplinares, es mediante la realización de preguntas dirigidas a un contexto real, de tal manera de situar en todo momento al estudiante, para que con matemáticas y otros conocimientos a explorar o aplicar, pueda desarrollar la tarea.

Finalmente, se destaca la importancia de que exista una progresión en los problemas planteados, por ello, la pregunta consecución de preguntas que orienta la tarea o proyectos interdisciplinares, podrían ser presentados en una forma progresiva en cuanto a las dificultades que se vayan presentando, con un claro y delineado horizonte. Tomar una decisión de esta naturaleza, permitirá ir validando los resultados que sostendrán la respuesta o explicación del problema, permitiendo tener mayor grado de confianza al reconocer avances en la tarea, y por lo tanto, reforzar la idea de intelección.

Esta investigación es financiada por el proyecto Fondecyt de iniciación N°11201103.

REFERENCIAS

Araya, R. (2016). STEM y Modelamiento Matemático. *Cuadernos de Investigación y Formación En Educación Matemática*, *11*(15), 291–317.

Bell, E. (2017). *Historia de las Matemáticas*. Fondo de Cultura Económica.

Belzen, A., Krüger, D. y Driel, J. (2019). *Towards a competence-based view on models and modeling in science education*. Springer.

Blum, W. y Leiß, D. (2006). "Filling up" – The Problem of Independence-Preserving Teacher Interventions in Lessons with Demanding Modelling Tasks. En Bosch, M. (Ed.), *CERME-4 – Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Guixol.

Borromeo-Ferri, R. y Mousoulides, N. (2017). Mathematical modelling as a prototype for interdisciplinary mathematics education?-Theoretical reflections. *CERME 10* (hal–01933490), Dublin.

Borromeo-Ferri, R. (2019). Educación Matemática Interdisciplinaria en la escuela - ejemplos y experiencias. *Revista UCMaule*, (57), 25–37.

Braun, V. y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in in Psychology*, *3*(2), 77–101.

Braun, V., Clarke, V., Hayfield, N. y Terry, G. (2019). Thematic Analysis. En P. Liamputtong (Ed.), *Handbook of Research Methods in Health Social Sciences* (pp. 843-860). Springer.

Cordero, F. (2016). Modelación, funcionalidad y multidisciplinariedad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz (Coords.), *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación – Matemática Educativa*, (pp. 59-88). México DF: Editorial Gedisa.

Creswell, J-W. y Creswell, J-D. (2018). *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches*. Sage Publications.

Frejd, P. (2017). Mathematical modelling as a professional activity—lessons for the classroom. In G. A. Stillman, W. Blum & G. Kaiser (Eds.), *Mathematical modelling and applications: Crossing and researching boundaries in mathematical modelling education* (pp. 371–388). Springer.

Frejd, P., Bergsten, C. (2016). Mathematical modelling as a professional task. *Educational Studies in Mathematics*, 91, 11–35.

Frejd, P. y Bergsten, C. (2018). Professional modellers' conceptions of the notion of mathematical modelling: ideas for education. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *50*(1), 117–127.

Huincahue, J y Vilches, K. (2019). Interdisciplinarity, mathematical modelling and Poincare's work: comparing conceptions about knowledge construction. *Journal of Physics: Conference series*, 1160, 1–7.

Kaiser, G. (2005). Mathematical Modelling in School – Examples and Experiences. In Kaiser, G. & Henn, H.-W. (Eds.), *Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evaluation und Evolution* (pp. 99–108) Hildesheim: Franzbecker

Klein, J. T. (2013). Communication and collaboration in interdisciplinary research. En M. O'Rourke, S. Crowley, S. D. Eigenbrode, y J. D. Wulfhorst (Eds.) *Enhancing Communication & Collaboration in Crossdisciplinary Research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Kuzniak, A. (2022). The theory of mathematical working spaces – Theoretical characteristics. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, P. Richard (Eds), *Mathematical Work in Educational Context – The perspective of the theory of mathematical working spaces* (pp. 3–32), Springer.

Lagrange, J-B., Huincahue, J., Psycharis, G. (2022). Modeling in education: new perspectives opened by the theory of mathematical working spaces. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, P. Richard (Eds.), *Mathematical work in educational context - The perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (pp. 247–266), Springer.

Mineduc (2021). *Matemática*. Currículum Nacional. https://www.curriculumnacional.cl/portal/Educacion-General/Matematica/

Passmore, C., Gouvea, J. y Giere, R. (2014). Models in science and in learning science: focusing scientific practice en sence-making. En M. Matthews (Ed.), *International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching* (pp. 1171–1202). Springer.

Roth, W-M. (2014). Interdisciplinary Approaches in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 317–320). New York: Springer References.

Stillman, G. y Brown, J. (2019). Preface. En G. A. Stillman y J .P. Brown (eds.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education* (pp. v–vii), Springer.

Velten, K. (2009). *Mathematical modeling and simulation. Introduction for scientists and engineers*. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA

Williams, J., Roth, W-M., Swanson, D., Doig, B., Groves, S., Omuvwie, M., Borromeo-Ferri, R., y Mousoulides, N. (2016). *Interdisciplinary Mathematics Education A State of the Art*. Springer.

Williams, J. y Roth, W-M. (2019). Theoretical Perspectives on Interdisciplinary Mathematics Education. En B. Doig, J. Williams, D. Swanson, R. Borromeo Ferri y P. Drake (Eds.). *Interdisciplinary Mathematics Education The State of the Art and Beyond* (pp. 13–34). Springer.

MODELLING SOUND PHENOMENA THROUGH TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS

[1]Alejandro Cabrera Baquedano, [2]Elizabeth Montoya Delgadillo, [1]Fabrice Vandebrouck and [1]Laurent Vivier

[1]LDAR, Université Paris Cité, France, [2]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile,

The objective of this research is to study the mathematical work of first-year university students in a task of modelling periodic phenomena related to sound, which integrates technological tools. To carry out this objective, a didactic situation has been designed, consisting of three tasks that allow the achievement of the proposed objective. This report will present the results obtained in the first task of the situation. Among the results obtained in this task we highlight the process of construction of the real model from the musical physics disciplinary knowledge and the instrumental knowledge of the Audacity software, which has been used in the proposal.

INTRODUCTION

As human beings have developed, sound and communications have acquired a fundamental role in our society. Since the creation of the first phonograph in the 19th century, the first guidelines of what would later become a radio system emerged, which currently has a global reach and allows us to communicate with any part of the world in a matter of seconds. During the second half of the 20th century, technological development allowed the science of sound to expand its field thanks to the incorporation of sound reproduction devices, sound synthesizers and even the development of new musical instruments.

There are different definitions of what sound is, from a physical, musical and even philosophical point of view. Among the definitions that can be consulted, some describe it as a physical phenomenon, others focus the definition on its behavior as a mechanical wave, others focus their attention on the source that generates it, and there are even studies focused on the stimulus that it generates in the listener.

From our perspective, we will consider the definition proposed by the American Standard Acoustical Terminology, which defines sound as

> a) sound is an alteration in pressure, stress, particle displacement, particle velocity, etc, which is propagated in an elastic material, or the superposition of such propagated alterations. b) sound is also auditory sensation which is usually evoked by the alterations described above (p. 7).

From a physical point of view, sound has two main components: frequency and amplitude. The frequency of the wave is the speed at which the source that produces sound oscillates, its unit of measurement is Hertz (Hz) or cycles per second (cps). Frequency determines whether a sound is low-pitched or high-pitched. The higher the frequency, the higher the pitch of the sound, the lower the frequency, the lower the pitch of the sound.

Sound is one of the periodic phenomena that is modeled by trigonometric functions. Any sound, such as a musical note, can be described in physical terms by specifying the frequency, amplitude or air pressure, and timbre or waveform.

In addition to the above, one of the first steps that transitioned trigonometric functions away from geometry was the recognition of their periodicity. The first periodic functions taught in several countries are the trigonometric functions sine and cosine, this is due to the importance they have within mathematics and science.

Based on the above, we consider that developing a teaching proposal for the study of trigonometric functions centered on working with sound from the mathematical modeling of this, allows the student to broaden the understanding of this type of functions. We have set ourselves the objective: study the mathematical work of first-year university students in a task of modelling periodic phenomena related to sound, which integrates technological tools. This task also allows students to conceptualize trigonometric functions from variables related to time and amplitude, rather than angles.

From a mathematical modeling point of view, Pollak (1979) points out that model building requires a deep understanding of the situation, in a sense outside of mathematics and the corresponding mathematization process.

Pollak (1979) proposes a distinction between "rest of the world" and "mathematics world" which has been considered by several authors. In this sense, the modeling cycle of Kaiser (1995) and Blum (1996) presents a first transit between a real situation and a model of the real world. In this cycle, the starting point of the process is a real-world situation, which the solver reads and "understands". The situation model is idealized, simplified, or structured to obtain a real-world model (Kaiser, 1995). This real-world model is then converted into a mathematical model upon which mathematical results are produced. From these, a transition takes place in which these results are interpreted again in the context of reality. In general, this four-stage schematic process has been the dominant one in recent years, to which intermediate stages have been added to describe the modeling process more accurately.

Currently in the field of modeling cycles, the existing trend is to consider a non-linear cycle in which multiple transits between the real world and the mathematical world can take place, to refine the model developed so that it more accurately accounts for the modeled situation.

In this sense, the cycle proposed by Blum & Leiss (2007) allows a more precise description of the different phases considered in the modeling process, enriching the previously proposed cycles. The Blum & Leiss (2007) modeling cycle presents a cognitive approach to modeling for teaching and presents a detailed process of each of the phases of the modeling process, as well as the passage from the "rest of the world" to a mathematical dimension.

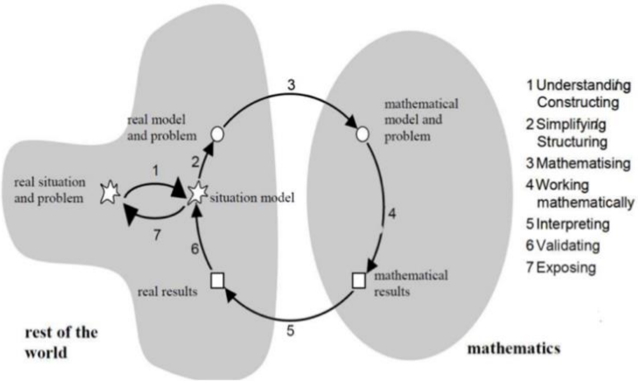


Figure 1. Modeling cycle Blum et Leiss (2007)

The transit through each phase produces different types of thoughts that can be generators of new learning, in this way, each cycle carried out entails a set of observable learning in the improvement of the model sought.

Differently from the cycle presented above, also in a cognitive perspective of modeling, Borromeo-Ferri (2010) integrates aspects that make it possible to establish a type of validation in the mental representation phase of the situation. In the process of constructing the real model, the author considers a double validation. The student towards the mental representation of the situation, the student makes decisions and filters information from the problem, bringing into play the mathematical thinking style of the modeler (Borromeo - Ferri, 2004). In general terms, the mathematical modeling process is like the one described above; however, in the construction of the actual model, the extra-mathematical knowledge possessed by the individual is included. This knowledge is also required in the mathematization process, in which the real model is described from drawings or formulas at a mathematical level.

As modeling tasks have become more complex, studying the processes that are developed in specific disciplinary fields such as physics, biology or engineering, the concept of real world and the distinction between real and mathematical world has become less evident, with tensions between where the separation between them is established. In addition to the above, in tasks developed in interdisciplinary contexts, there have been questions regarding what is understood by real model and how theoretical disciplinary knowledge is incorporated in the modeling processes.

Technological advances and the inclusion of technological tools in education area have had a sustained boom during the last decades. The incorporation of different technological tools has contributed to the diversification and enrichment of models, both real and mathematical, which can be accessed by students in secondary and higher education.

Due to the integration of technological tools, the modeling cycles have been strained because the multiplicity of models has generated intermediate processes between the transition between the real - mathematical model and vice versa.

FRAMEWORK

Based on the proposed objective and the design of the task, we used the mathematical modeling cycle (Borromeo-Ferri, 2010) and the Mathematical Working Space [MWS] (Kuzniak, Montoya-Delgadillo & Richards, 2022) articulately.

The MWS allows describing and characterizing the mathematical work of an individual from a specific task. With this approach it is possible to describe how epistemological and cognitive elements are articulated in the solution of a task, showing the circulations between the activated MWS components (Kuzniak et al., 2022).

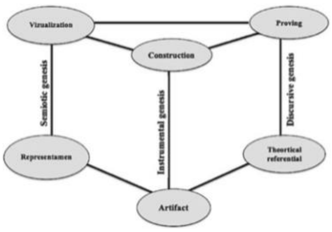


Figure 2a. Mathematical Working Spaces diagram (Kuzniak et al., 2022)

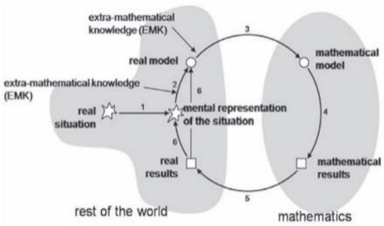


Figure 2b. Modeling cycle (Borromeo-Ferri, 2010)

We incorporate certain concepts related to mathematical modeling from the cognitive point of view, for this, we will use the Blum-Borromeo modeling cycle (Borromeo-Ferri, 2010). The author defines modeling as a cyclical process where reflections on the model and the intention to use it lead to constant redefinition.

Mathematical model is defined as a set of symbols and mathematical relations that represents, in some way (graphic, numerical or algebraic), the phenomenon in question. We incorporate certain concepts related to mathematical modeling from the cognitive point of view, for this, we will use the Blum-Borromeo modeling cycle (Borromeo-Ferri, 2010). The starting point of the modeling process is a real-world situation, which the students read and understands, then idealized (2), simplified or structured to obtain a real model. The real model is mathematized (3), i.e., translated into mathematical language to obtain a mathematical model of the initial situation. A mathematical treatment (4) leads to mathematical results, interpreted as "real results" (5) which will be validated or not in relation to the model situation (6). Then, if the results obtained seem to be coherent, they will be consistent, they will be presented as predictions about the real situation (7).

CONTEXT AND METOD

The methodology that guides this research is Didactic Engineering (Artigue, 1995). To respond to the proposed research objective, the methodology used is qualitative. The implementation is made up of 5 second semester undergraduate students in mathematical (2021-2022, period), who are taking the subject of Mini-Project de Mathématique who formed 2 work groups of 2 students and 1 student. The data has been extracted from the written productions of the students, from the geogebra and

Excel files constructed by the students. Mathematical work in the sense of the MWS will be analyzed, as the students go through the different phases of the modeling cycle. For this purpose, we have considered the methodology carried out by Reyes-Avendaño (2020).

PRESENTATION OF THE TASKS

The proposal consists of three tasks. In **first task** the objective was to recognize that pure sounds are those that are modeled by trigonometric functions. To *accomplish this objective, two subtasks were designed. Subtask 1.1 given was: Characterize the sounds present in a folder provided to the students with ten different sounds. Subtask 1.2 was: calculate the function associated with each of sounds presented in subtask 1.1*. In **Second task.** The objective was to determinate the trigonometric polynomial associated with the superposition of two pure sounds. Two subtasks were designed: Subtask 2.1 given to students is: *Using the Audacity mix tool, mix the sounds LA 440hz and DO 264hz present in the folder and determine the function that models this sound. Subsequently, subtask 2.2* given to students was: *Determine the first coefficients of trigonometric polynomial from the data set provided by Audacity*. Finally, in **Third task.** The objective of this task was to model a complex sound through a trigonometric polynomial. The students were given only one task: *Determine the function that models an instrumental sound.*

This paper presents the results obtained in the implementation of the first task. The students obtained a folder containing 10 different types of sounds: various instruments playing a musical note, whistling of a person, and digitally generated pure tones. For the reproduction of the sounds, the use of Audacity software was considered. This software not only reproduces the sounds but also provides a graphical representation of the sound.

Based on the a priori analysis performed, the role of the Audacity software allows on the one hand to reproduce the sounds that are proposed to the students to be analyzed, and on the other hand, it provides a graphical representation that the student can manipulate and analyze and that allows to obtain a first model of the reproduced sound.

It is expected that from the visualization of the software interface they will incorporate the physical and musical knowledge studied in their secondary education to enrich the models provided by the software interface, thus concluding that pure sounds are those that are modeled by sinusoidal functions and that complex sounds, although they have a periodic behavior, are not modeled by a sinusoidal function.

DATA ANALYSIS AND RESULTS

In relation to subtasks 1.1 and 1.2, the students play the sounds in Audacity, and this allows them to create a classification between pure and complex sounds due to the graph it provides them and their EMK.

In figure 4a, we can observe the graphical representation of two sounds provided by Audacity. It shows the difference in the behavior of a violin playing a musical note and a digitally created 440 hz tone.

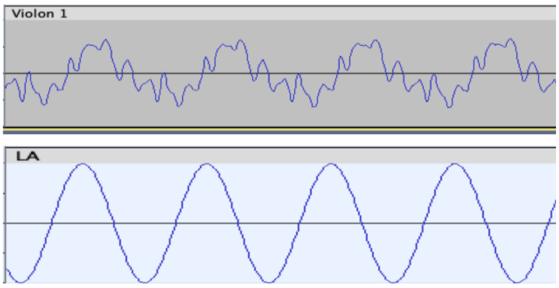


Figure 3a. Graphical view in Audacity when using the zoom in tool.

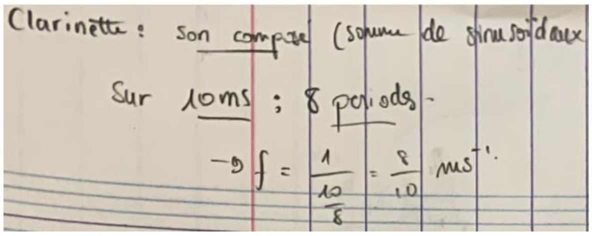


Figure 3b. Calculation of the frequency and period of a sound by E1

As shown in figure 3b, the student recognizes the sound of the clarinet and from the graphical view provided by Audacity calculates the period and frequency of the reproduced sound.

In the implementation of the task, the student reproduces each sound in Audacity generating a first classification of these from the emitting source that emits it or if each sound is deeper or sharper than another, this model construction comes from the student's experience in the daily environment. However, the physical behavior of the phenomenon in question is obtained from the Audacity interface, in which each of the sounds is modeled as a periodic wave with a certain frequency.

From the above, we recognize that two instances of knowledge converge, which have been integrated from the experience of this and the physical phenomenon itself. The model coming from experience is obtained from a process of hearing each sound and classifying it according to certain acoustically perceptible characteristics. On the other hand, the model in physical (or energy or phenomenological) terms is obtained through the visualization of the Audacity software interface, analyzing characteristics of the sound that cannot be accessed only through hearing.

Therefore, in the construction of the real model by the student, the models obtained by the acoustic and visual perception of the phenomenon are integrated, integrating knowledge from the student's experience and phenomenological reality, which is accessed through the Audacity software, generating a semiotic-instrumental dialectic for the construction of this model.

In terms of the mathematical work developed by the student, Audacity is an artifact that in the first instance allows students to make a mental classification of sounds based on their hearing. Subsequently, from the Audacity interface, the students were able to calculate approximations of the periodicity of the wave to calculate the frequency. In the construction of the real model and the passage to the mathematical world, it is the instrumental genesis that drives the audition and visualization processes.

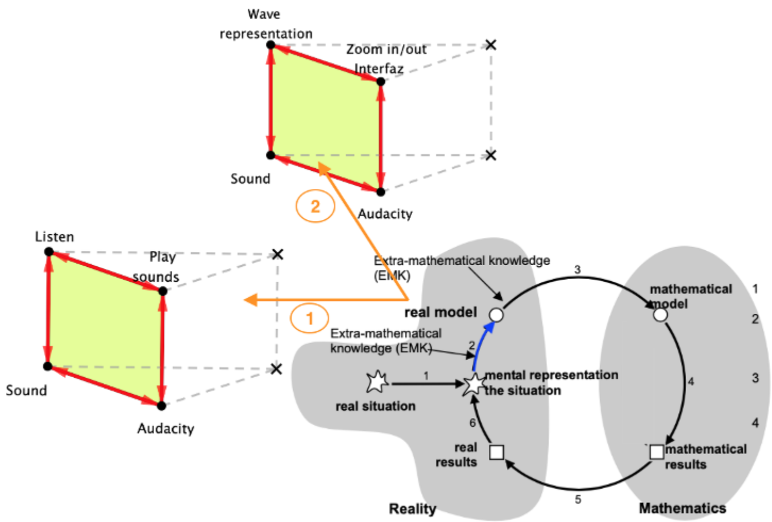


Figure 4. Semiotic - instrumental dialectics in constructing the real model.

Subsequently, from subtask 1.2 the student exports the data from the Audacity software to Geogebra, and then plots the data using the tool "regression analysis of two variables". Finally, using curve fitting, the student obtains the functions that best approximate the plotted data set.

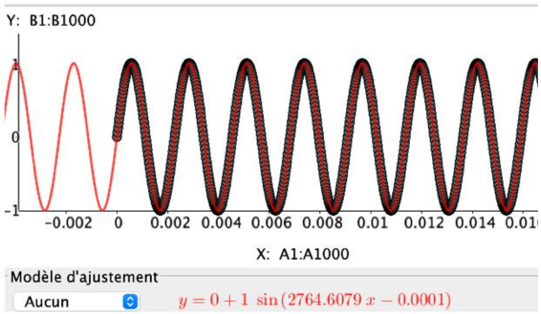


Figure 5a. Sinusoidal fitting to a pure sound in Geogebra software

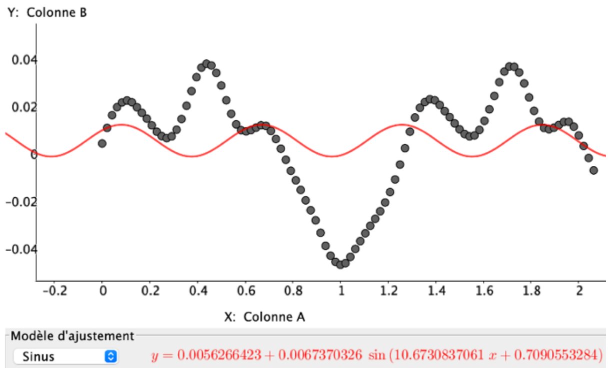


Figure 5b. Sinusoidal fitting to a complex sound in Geogebra software

In this step, we observe that the instrumental genesis is the one who leads the work from the data export from Audacity and then the process of graphing and curve fitting to obtain the function that models the behavior. In this process, the instrumental genesis is put in correspondence with the semiotic genesis from the visualization of the curve and subsequent adjustment represented in the Geogebra interface.

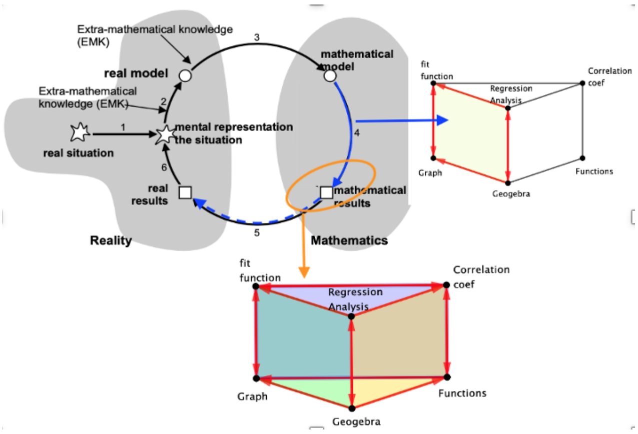


Figure 6. Analysis of the mathematical work performed by E1 in the adjustment process

Students who check from the correlation coefficient tool whether this is the best possible fit provided by the software, are also activating the discursive genesis and its justification does not rest only on the semiotic-instrumental circulation, strongly worked in these tasks.

Finally, in the passage to the real results, the students classify that the pure sounds are those approximated by trigonometric functions as expected.

CONCLUSION

Concerning the objective of the research, we can conclude that the students construct the concept of trigonometric function as that which model pure sounds. Likewise, trigonometric functions are conceptualized in relation to the variables time and amplitude, proposing an approach to these functions different from the one that uses the concepts of angles and radians. Regarding the digital artifact, Audacity generates a link between disciplines such as physics, music, and mathematics. This made it possible to understand that pure sounds were associated with trigonometric functions from the software interface. Audacity allows exporting data in Excel to be plotted in Geogebra, thus providing graphical, numerical, and acoustic representations of sounds. Geogebra also allows the development of pragmatic testing processes based on the graphical representation obtained and the fit function delivered.

REFERENCES

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 33-60.

Blum, W. (1996). Anwendung bezüge im Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven. In Kadunz, G. et al. (Eds.), *Trends und Perspektiven. Schriftenreihe Didaktik derMathematik*, Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 23, 15 – 38

Blum, W., & Leiss, D. (2007). “Filling Up” - the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1623-1633). Sant Feliu de Guixols: ERME.

Borromeo Ferri, R. (2004). Mathematical Thinking Styles and Word Problems. In Henn, Hans-Wolfgang & Blum, Werner (Eds.), *Conference Proceedings of the ICMI Study 14, Applications and Modelling in Mathematics Education* (pp. 47-52), Dortmund.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 86-95.

Borromeo-Ferri, R. (2010). On the Influence of Mathematical Thinking Styles on Learners’ Modeling Behaviour. *Journal Für Mathematik-Didaktik, 31*(1), 99–118. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8

Kaiser, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In Graumann, G. et al. (Eds.) *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematik unterricht* (pp. 66 – 84) BadSalzdetfurth: Franzbecker

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. R. (Eds.). (2022). *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (1st ed., Mathematics Education in the Digital Era, Vol. 18). Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8.

Pollak, H. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects. En UNESCO (Eds.), *New trends in mathematics teaching IV* (pp. 232-248), Paris.

Reyes Avendaño, C. G. (2020). *Enseignement et apprentissage des fonctions numériques dans un contexte de modélisation et de travail mathématique*. PhD thèses, Université de Paris.

MODELISER L'INTERVALLE DE FLUCTUATION DES FREQUENCES: UN TRAVAIL MATHEMATIQUE

Jannick Trunkenwald

Laboratoire Didactique André Revuz (LDAR, Université de Paris)

Cette communication a pour objectif de présenter une tâche adaptée à un questionnement de recherche spécifique, qui porte sur les approches combinatoire et fréquentiste de la notion de probabilité. Nous mettons en évidence un cadre théorique basé sur l'Espace de Travail Mathématique. Différentes étapes du processus de modélisation probabiliste sont analysées à travers une mise en œuvre de ce cadre théorique. La résolution de la tâche par des élèves de terminale les conduit à aborder l'intervalle de fluctuation d'échantillonnage, en procédant à des justifications probabilistes.

INTRODUCTION

Nous souhaitons dans le cadre de cette communication présenter une tâche permettant les approches combinatoire et fréquentiste de la notion de probabilité au niveau du lycée. L'étude du processus de modélisation sous-jacent est basée sur l'Espace de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011). L'étude épistémologique associée à cette question touche au lien entre probabilité et statistiques descriptives au sens où ces deux domaines mathématiques restent distincts dans l'enseignement secondaire. Ce sujet nous a entraîné vers le sujet de la fluctuation des fréquences et de sa justification probabiliste, qui mène aussi à appréhender l'intervalle de fluctuation d'échantillonnage. La mise en perspective, au niveau d'une classe de terminale, d'une observation empirique d'un phénomène concret lié au hasard, avec sa justification probabiliste s'exprimant dans un monde ensembliste constitué d'évènements abstraits, nécessite de prendre en compte l'idée de modélisation. Il s'agit donc aussi d'adapter en ce sens notre cadre théorique basé sur l'ETM. Nous présentons ci- dessous cette approche didactique. La confection d'une tâche expérimentale adaptée nous permet alors, à l'éclairage du cadre théorique choisi, d'apporter des réponses à cette question : « Quelle est le travail mathématique mis en œuvre par les élèves en abordant l'intervalle de fluctuation d'échantillonnage ».

Nous exposerons dans notre communication une illustration de l'utilité de ce cadre théorique pour analyser le travail mathématique mis en œuvre par des élèves lors de la résolution d'une tâche mathématique. Le choix de cette tâche doit permettre de mettre en évidences les interactions entre le domaine des probabilités et celui des statistiques descriptives, dans le cadre d'un processus de modélisation permettant d'appréhender l'intervalle de fluctuation d'échantillonnage. Le choix s'est porté sur la probabilité d'atteindre une certaine valeur pour la somme des résultats obtenus en lançant deux dés à 6 faces.

APPROCHE EPISTEMOLOGIQUE

L'approche dite combinatoire de la notion de probabilité peut correspondre à un travail de dénombrement permettant un emploi de la formule de Laplace pour évaluer une valeur de probabilité en appui sur une situation d'équiprobabilité. La valeur de probabilité est alors le quotient du nombre d'issues favorables par le nombre d'issues possibles. Un travail plus élaboré, faisant appel à des propriétés internes au domaine probabiliste peut aussi au besoin être mis en œuvre pour déterminer une valeur de probabilité.

L'approche fréquentiste de la notion de probabilité est quant à elle une démarche plutôt expérimentale, qui mène à une observation empirique du phénomène de fluctuation d'échantillonnage. Cette fréquence est obtenue en calculant le quotient du nombre de succès obtenus par le nombre de répétitions de l'expérience. La probabilité se manifeste alors comme une valeur limite des fréquences obtenues avec de grands échantillons. On s'appuie alors sur le référentiel de connaissances statistiques pour mettre en place un protocole permettant ce type d'observation portant sur les valeurs des fréquences.

Une bonne compréhension de la notion de probabilité semble passer par une mise en évidence de l'intervalle de fluctuation d'échantillonnage qui synthétise le lien entre ces deux approches combinatoire et fréquentiste. La mise en œuvre d'un tel objectif passe par un travail de simulation, qui est lui-même facilité par un emploi de l'informatique.

Dans son travail de thèse, Nechache (2016) avait mis en évidence l'absence au niveau 2nde d'un référentiel théorique probabiliste qui permettrait d'aborder cet intervalle de fluctuation par un raisonnement de type déductif. L'approche de cet intervalle de fluctuation reste en effet à ce stade, expérimentale et basée sur l'observation des fréquences d'échantillons de même taille. Chaque valeur de fréquence correspond à un échantillon obtenu lui-même en répétant un certain nombre de fois l'expérience aléatoire considérée. Il s'agit bien d'une démarche empirique basée sur un raisonnement de type inductif. De plus, le coût temporel correspondant à la nécessité de répéter un grand nombre de fois la même expérience entraîne un besoin d'automatisation. Cette démarche est «facilitée » par un usage de l'informatique basé sur une exploitation d'un générateur pseudo-aléatoire.

Le programme de seconde s'est adapté dès 2019 en inscrivant dans les attendus une approche algorithmique, programmée en langage Python, permettant d'évaluer le pourcentage de fréquences contenues dans ce intervalle de fluctuation.

Un environnement numérique (tableur, environnement de programmation, ou environnement de simulation préprogrammé) permet de réduire le temps dédié à la répétition de l'expérience aléatoire, en automatisant un protocole expérimental. Le savoir-faire spécifique à une utilisation d'un environnement numérique peut cependant être source de difficultés supplémentaires (algorithmique, syntaxe du langage machine) pour les élèves, et peut aussi poser un souci d'ordre métacognitif (voire d'ordre cognitif) aux enseignants. Tout cela nécessite l'usage de gestes, de syntaxes, et de modes de pensées spécifiques.

En lien aussi avec différentes pré-expérimentations menées dans le cadre de notre recherche de thèse, nous choisissons donc d'éviter d'entraîner les élèves dans un travail de nature informatique. Notre objectif étant d'observer le travail mathématique d'élèves abordant la notion de probabilité, nous les amènerons plutôt à interpréter et exploiter des données issues d'une simulation informatique déjà réalisée. Nous qualifierons d'approche empirique cette démarche d'analyse de données issues de la simulation d'une approche fréquentiste.

CADRE THEORIQUE

Selon Kuzniak (2019), l'activité liée au travail mathématique est organisée pour atteindre un but précis. L'action entreprise s'appuie alors sur les notions mathématiques disponibles, pour enrichir ce même référentiel mathématique et le mettre à disposition du sujet cognitif. Cette question de l'action du sujet nous place au cœur de l'apprentissage, où il nous importe de distinguer le savoir en tant notion universelle et la connaissance qui en est acquise par l'individu. L'idée de travail mathématique participe donc aussi d'une dialectique entre savoir et connaissance. Notre objectif lié à la notion de probabilité nous amène alors à réinterpréter des phénomènes aléatoires observables dans le monde réel à travers un modèle probabiliste constitué d'évènements abstraits et d'une mesure de leur propension à se réaliser.

Le travail mathématique peut naturellement être découpé en différentes phases successives correspondant chacune à une question qui se pose à l'élève, et la manière dont celui-ci va mobiliser le domaine mathématique pour y répondre.

La réflexion en lien avec les cycles de modélisation (Blum & Leis, 2007), nous entraîne à identifier plusieurs niveaux de mise en œuvre du processus. Le premier niveau, pseudo-concret, correspond à une description simplifiée interprétée à partir d'un « monde réel » qui est ici constitué à la fois de la description d'un jeu de dé, et de données obtenues par la simulation. Le deuxième niveau, mathématique, peut mobiliser le domaine probabiliste dans le cadre d'une approche combinatoire, ou encore le domaine des statistiques descriptives, dans le cadre d'une approche empirique. Le principe d'un cycle de modélisation correspond alors à la traduction mathématique d'un aspect du modèle pseudo-concret en se posant une question très précise, puis à l'exploitation du modèle mathématique mobilisé, pour parvenir à une réponse interprétable au niveau pseudo-concret. Ce processus permet à l'élève de résoudre la tâche en effectuant un ou plusieurs cycles de modélisations. Chacun de ces cycles de modélisation peut alors participer soit d'une approche combinatoire soit d'une approche empirique.

Outre l'importance, sur le plan épistémologique, d'identifier le domaine de savoir mobilisé lors de la phase de mathématisation, ce point de vue de la modélisation nous intéresse aussi du point de vue cognitif. En effet, chaque cycle de modélisation vise à apporter, à l'aide du modèle mathématique choisi, une réponse à la question que se pose l'élève à partir du niveau pseudo-concret. Puis après avoir exploité le modèle mathématique l'élève doit réinterpréter la réponse obtenue au niveau pseudo-concret. Et on retrouve alors ce retour à l'équilibre entre le processus conduit et le produit de l'action réalisée, au sens qu'a donné Kuzniak (2019) au travail mathématique.

D'un point de vue cognitif ce schéma d'action est basé sur l'identification d'une question, puis sa traduction dans un certain domaine mathématique, pour traiter cette question, en enfin la réinterpréter à l'éclairage de la situation initiale. Mais cela n'est pas spécifique à l'idée de modélisation. On peut aussi retrouver ce mode opératoire lorsqu'une question se pose dans un domaine mathématique, et qu'il faut changer de domaine pour passer à la résolution du problème, puis interpréter la réponse obtenue à l'éclairage de la situation initiale. Nous pouvons ici nous appuyer sur les considérations de Vivier et Delgadillo (2014) : « une telle phase de mathématisation peut s'exprimer dans un domaine de résolution, à partir d'une question qui se pose dans un domaine source ».

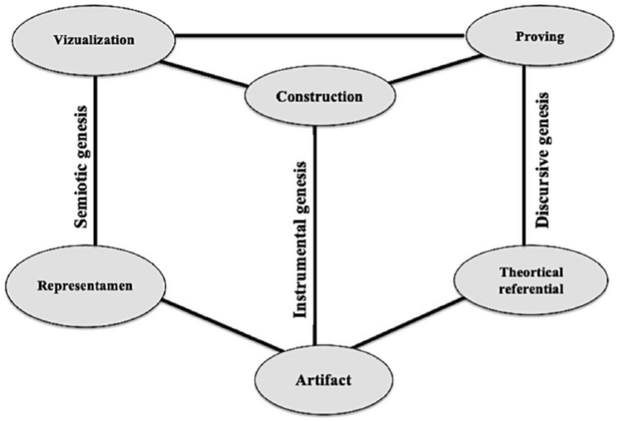


Figure 1. L'Espace de Travail Mathématique (Kuzniak, 2018)

Afin de cerner au-mieux les éléments du référentiel théorique opérant au cours du travail mathématique mené par les élèves nous allons devoir identifier leur rôle dansle processus de validation de ce travail par une preuve. Pour cela nous devronsprendre en considération les signes et symboles permettant un traitement mathématique au sein de chaque système de représentation, ainsi que la conversiondu travail mathématique d'un registre sémiotiques mis en œuvre, à l'autre. Enfin, en lien avec l'ensemble de ce processus nous devrons identifier et distinguer la dimension instrumentale basée sur l'usage de schèmes d'actions, de schèmes mentaux, ou de «boites noires », que l'on nommera artefacts. Cette dimension instrumentale n'appartient en effet ni à la discipline des mathématiques en elle-même,ni à son expression visuelle, mais participe du travail mathématique en contribuant àla connaissance. Nous sommes de ce point de vue amenés à exploiter l'Espace de Travail Mathématique (ETM) tel qu'il a été défini par

Kuzniak (2011). Les outils technologiques (*artefacts*), sémiotiques (*representamen*), et théoriques (*référentiel*)du plan épistémologique, peuvent alors être exploités à l'aide de schèmes appropriés. On parle dans ce cas respectivement de *genèses instrumentale, sémiotique,* et *discursive*. Ces genèses respectives produisent dans le plan cognitif des *constructions*, des *visualisations*, et des *preuves*. Enfin, l'activation de deux genèses peut entraîner une circulation entre les dimensions qui les portent, ce qui peut parfois être rapprochée de l'idée de modélisation.

CHOIX DE LA TÂCHE

Pour établir l'intervalle de fluctuation en 2^{nde}, l'absence de justification formelle disponible dans le référentiel théorique des élèves a été abordée par Parzysz (2009):

> L'accès à la notion de modèle qui est une finalité visée à terme par le cycle terminal, peut être préparé par l'étude et la simulation d'expériences aléatoires diverses correspondants au même modèle probabiliste. La comparaison des procédures, des tableaux et des hypothèses sous-jacentes doit permettre aux élèves de se convaincre de l'analogie que présentent ces expériences sous leurs apparences diverses, et de déboucher sur la notion de schéma d'expérience, constituant en quelque sorte une classe d'équivalenced'expériences aléatoires. (Parzysz, 2009, p. 102)

Nechache (2016) aborde aussi ces questions en présentant le cycle de modélisation d'un modèle mathématique de type numérique, l'expérience réelle est d'abord simplifiée sous forme d'une expérience aléatoire permettant d'envisager un premier modèle probabiliste réel. Celui-ci est alors éventuellement traduit en modèle numérique pour la simulation. L'exécution de ce programme de simulation peut donner une réponse, qui est d'abord interprété par rapport au modèle réel, puis interprété en regard de l'expérience aléatoire. Nechache souligne cependant une difficulté liée à ce type de modèle numérique:

> Dans l'enseignement secondaire, la construction du modèle probabiliste de type numérique est basée sur des connaissances qui ne sont pas disponibles dans l'espace de travail personnel des élèves. C'est pourquoi, la construction de ce modèle est habituellement prise en charge par le professeur qui laisse aux élèves l'exécution de la simulation. (Nechache, 2016)

Comme précisé dans notre approche épistémologique, nous souhaitons contourner la problématique spécifique d'une réalisation du programme de simulation qui serait conjointe à son exploitation d'un point de vue probabiliste. La fluctuation d'échantillonnage est abordée expérimentalement suivant plusieurs cycles de modélisations qui abordent successivement l'expérience aléatoire, la construction d'un échantillon, puis la représentation des fréquences de succès associées à une liste d'échantillons de même taille.

Mais notre objectif de focaliser notre étude sur le lien dans l'enseignement au lycée entre les statistiques descriptives et le domaine probabiliste nous amène à modifier cette perspective. Nous soumettons aux élèves des données issues d'une telle démarche empirique permettant de mettre en évidence l'intervalle de fluctuation d'échantillonnage.

Ces données se présentent sous la forme d'un nuage de 80 points en repérage cartésien qui représentent chacun la fréquence des succès pour un échantillon de taille 50. Les élèves doivent alors déconstruire ce graphique pour identifier les étapes du protocole statistique sous-jacent: 1) simulation del'expérience aléatoire, 2) Répétition à 50 reprises de cette expérience pour constituer un échantillon, 3) Production de 80 échantillons de taille 50. L'étude des données du graphique doit aussi de manière conjointe mettre en œuvre les connaissances des élèves en statistiques descriptives, afin d'en déduire empiriquement une conjecture pour la valeur de probabilité de gagner au jeu.
La situation mathématique considérée est très classique :

Un jeu consiste à lancer deux dés cubiques équilibrés numérotés chacun de 1 à 6. On gagne si la somme des deux valeurs affichées sur la face supérieure vaut au-moins 9.

On a simulé ce jeu en produisant 80 échantillons de 50 lancers des deux dés. C'est-à- dire que pour produire chacun de ces 80 échantillons, on a testé le jeu 50 fois. Les 80 fréquences de succès obtenues on été représentées dans le graphique ci-dessous. Chaque point représente un échantillon de 50 parties, avec en ordonnée la fréquence des succès. On a placé ces 80 points toutes les deux unités d'abscisse (de 1 à 160).

*Résumez les données du graphique pour situer les valeurs des 80 fréquences simulées. Peut-on estimer à partir de ce graphique une valeur approchée de la probabilité de gagner à ce jeu ?

*On souhaite déterminer la valeur exacte de cette probabilité de gagner à ce jeu. Présenter une démarche en justifiant clairement le résultat obtenu.

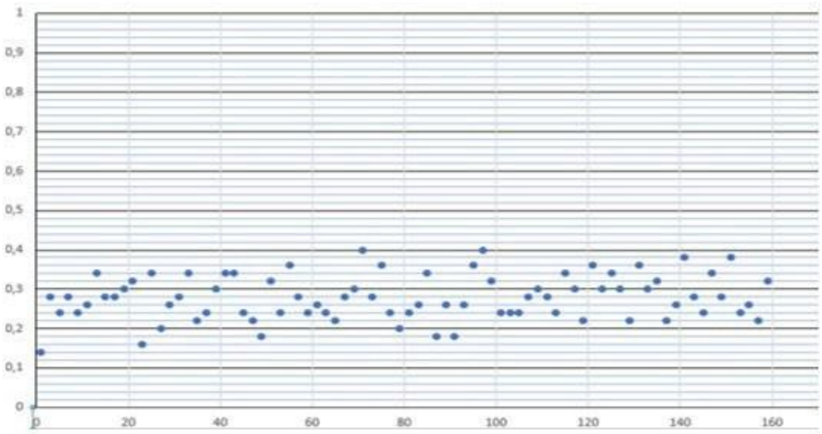


Figure 2 : Graphique présenté dans l'énoncé de la tâche soumise aux élèves

ELEMENTS DE L'ANALYSE A PRIORI DE LA TÂCHE

Approche fréquentiste simulée

La forme de l'énoncé suggère pour la première question posée aux élèves une mise en œuvre initiale de cette approche empirique basée sur l'exploitation de données issues d'une simulation informatique. Lorsque c'est le cas, les élèves mettent en œuvre un modèle mathématique issu des statistiques descriptives. Il est cependant possible que certains élèves ne soient pas influencés par cette incitation à la démarche empirique, et se lance immédiatement dans une approche de type combinatoire. Nous pourrons alors identifier un profil spécifique correspondant à ces élèves.

Présentons ci-dessous différentes formes prévisibles d'approche empirique :

Les élèves peuvent exploiter le graphique pour déterminer le minimum ou le maximum de la série des fréquences (éventuellement élaguée). Cela leur permet ensuite de considérer que la probabilité est dans cet intervalle. Ils peuvent aussi en déduire une conjecture pour la valeur de probabilité qui sera la moyenne de ces extrema.

Les élèves peuvent utiliser la médiane de la série des fréquences comme conjecture de probabilité.

Les élèves peuvent calculer la moyenne de la série des fréquences pour en déduire une conjecture de la valeur de probabilité.

Les élèves peuvent considérer le mode de la série des fréquences, ou la classe modale résultante d'un découpage en classes de valeurs, pour conjecturer la valeur de probabilité.

Suite à la prise en compte par les élèves du modèle pseudo-concret décrit par l'énoncé, ces variantes de l'approche fréquentiste simulée mettent à priori en œuvre un travail mathématique spécifique au domaine des statistiques descriptives.

Une première genèse discursive est mise en œuvre pour interpréter les données de cet énoncé.

Cette genèse active le plan DIS-SEM afin de relier les données visuelles exprimées par le graphique avec cette compréhension de l'énoncé en regard du protocole sous-jacent ayant permis de simuler la production d'échantillons.

Une deuxième genèse, sémiotique, correspond au traitement des données statistiques en interne du registre de représentation associé au nuage de points. Il est possible que certains élèves se lancent directement dans cette forme de travail visuel exploitant le graphique sans être passés par la phase précitée d'interprétation de l'énoncé.

Dans le cas où ces opérations de traitement amènent l'élève à des routines répétitives et automatisées, le plan SEM-INS est activé, pour provoquer une genèse instrumentale menant à une construction tel que par exemple la calcul d'une moyenne pondérée à partir des points du nuage.

Ce travail exploitant les signes du graphique pour produire une visualisation du résultat active à nouveau en retour le plan SEM-DIS. Cela mène à confronter en sortie du cycle de modélisation, le résultat obtenu avec les questions qui se posaient au niveau du modèle pseudo-concret explicité par l'énoncé.

Une genèse discursive doit finalement donner lieu à une réponse du type conjecture probabiliste, formulée sur la base de considérations portant sur les fréquences de succès et exploitant le référentiel des statistiques descriptives. Il s'agit, à ce stade de l'activité, d'une preuve empirique basée sur l'observation d'un phénomène.

Approche combinatoire

La forme de l'énoncé suggère pour la deuxième question posée aux élèves de passer àune approche combinatoire de la notion de probabilité. Lorsque c'est le cas, les élèvesmobilisent un modèle mathématique issu du domaine des probabilités. Ce modèle est alors basé sur la description, explicite ou implicite, d'un univers constitué d'issues et permettant de décrire des évènements mesurables. Les élèves qui ne parviennent pasà cela, correspondent à un profil spécifique suivant qu'ils ont mis en œuvre, ou non, une approche fréquentiste au cours de l'activité.

Présentons ci-dessous différentes formes prévisibles d'approche combinatoire qui mènent à produire le résultat attendu d'une probabilité valant 10/36 :

Description par énumération des issues d'un univers. Ces issues peuvent être présentées sous la forme de couples résultats du lancer des deux dés. Ces couples sontalors équiprobables, ce qui permet d'appliquer la formule de Laplace pour obtenir la valeur de probabilité. Différents types d'erreurs peuvent alors se produire en induisant un biais d'équiprobabilité, tels que les doublets de valeurs, ou encore une simple considération des différentes valeurs de sommes possibles.

Ce type d'approche reste relativement confiné au sein de la dimension discursive de l'ETM en mobilisant le référentiel théorique du domaine probabiliste. La genèse de preuve qui en résulte peut cependant s'appuyer sur une activation du plan DIS-SEM par l'emploi de signes permettant la démarche d'investigation des élèves.

Etude probabiliste basée sur un arbre 6 fois 6 branches ou sur un tableau cartésien 6 fois 6 cases. Ce style d'approche permet de visualiser de manière méthodique l'ensemble des issues d'un univers probabiliste choisi pour être équiprobable, c'est-à- dire prenant en compte les résultats respectifs des deux dés lancés.

Ce style de travail mathématique s'appuie fortement sur la dimension sémiotique de l'ETM. Le modèle pseudo-concret associé à l'énoncé correspond à un certain schéma d'expérience. L'expérience aléatoire correspondante commence donc par interrogerle domaine probabiliste dans la dimension discursive de l'ETM. Un modèle mathématique est convoqué sous la forme d'un univers, explicite ou implicite, supposé équiprobable. Le plan DIS-SEM est alors activé pour déplacer le travail mathématique au sein d'un registre de représentation spécifique (arbre ou tableau).

Une genèse sémiotique permet alors de visualiser et dénombrer les issues de cet univers. Un retour à la dimension discursive permet ensuite de mobiliser au sein du référentiel théorique la formule de Laplace pour obtenir la valeur exacte de probabilité. Du point de vue sémiotique, une nuance est à identifier entre l'élève qui entreprend une démarche d'investigation basée sur l'usage de signes, qui lui permetde découvrir certaines propriétés opératives de ces signes, et l'élève qui, connaissant déjà ces opérations de traitement, les met immédiatement en œuvre à travers une démarche automatisée activant le plan SEM-INS, et provoquant une genèse instrumentale de construction de l'arbre ou du tableau approprié.

ELEMENTS DE L'ANALYSE A POSTERIORI DE LA TÂCHE

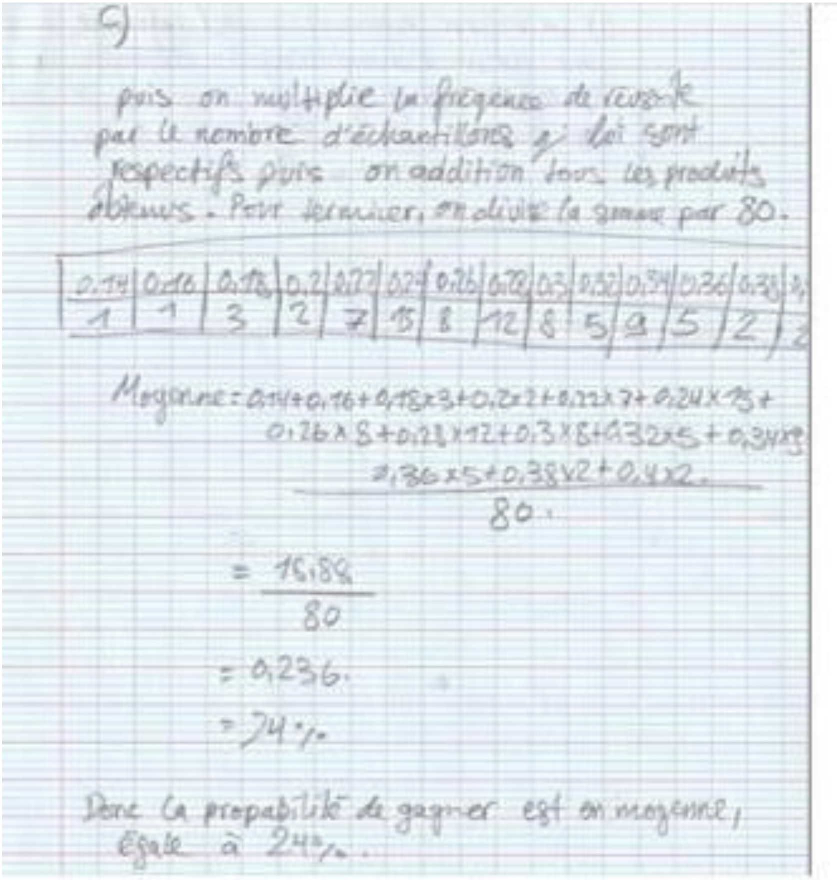
La tâche a été soumise à une classe de 20 élèves de terminale spécialité mathématiques. Ces élèves n'avaient pas encore abordé les probabilités. Ils connaissaient les probabilités conditionnelles et avaient traité des bases de la notion de variable aléatoire en classe de 1ère. Ils avaient aussi vu le chapitre dénombrement au début de l'année de terminale. L'activité s'est déroulée en deux temps d'autonomie individualisée des élèves. Un premier temps correspondant aux deux premières questions a) et b) pour analyser le graphique et en déduire une conjecture pour la probabilité. Une mise en commun est ensuite réalisée en classe avec leprofesseur. Enfin les élèves sont remis en autonomie pour les questions c) et d) qui visent un travail de nature plus formel pour déterminer la valeur exacte de probabilité.

Premier exemple: Elève n°14

Cet élève détermine d'abord les extrema des valeurs de fréquences afin d'encadrer celles-ci. Puis un calcul précis de la moyenne de toutes les valeurs de fréquences pondérées par leurs effectifs est réalisé. L'élève en déduit enfin une conjecture de la valeur de probabilité. Mais cet élève n'entrera pas vraiment dans le domaine des probabilité lors de la deuxième partie de l'activité.

D'un point de vue didactique, nous avons affaire à une approche fréquentiste qui pourrait se décrire en deux cycles de modélisation successifs mobilisant le domaine des statistiques descriptives. Un premier cycle encadrant les fréquences obtenues, ce qui traduit l'intervalle de fluctuation d'échantillonnage. Un deuxième cycle basé sur la recherche d'un paramètre statistique central, la moyenne, qui apporte une réponse plus précise intégrant l'ensemble des données initiales.

Du point de vue du travail mathématique, une première genèse discursive correspond à l'étude du graphique. Puis le plan SEM-DIS est activé afin d'émettre quelques considérations qui correspondent à la sortie du premier cycle de modélisation. Enfin les plans DIS-SEM et SEM-INS sont activés pour donner lieu successivement à une genèse sémiotique permettant de représenter la série dans un tableau d'effectifs, puis à une genèse instrumentale qui va construire avec méthode le calcul de la moyenne pondérée. Le résultat obtenu est ensuite confronté à la question initiale à travers une genèse discursive. Cette étape correspond aussi à la sortie du deuxième cycle de modélisation.



c)

puis on multiplie la fréquence de réussite par le nombre d'échantillons qui leur sont respectifs puis on additionne tous les produits obtenus. Pour terminer, on divise la somme par 80.

Moyenne = 0,14+0,16+0,18×3+0,2×2+0,22×7+0,24×15+0,26×8+0,28×12+0,3×8+0,32×5+0,34×9+0,36×5+0,38×2+0,4×2 / 80

= 18,88 / 80

= 0,236

≈ 24 %

Donc la probabilité de gagner est en moyenne, égale à 24 %.

	Dimensions pour l'approche fréquentiste			Dimensions pour l'approche combinatoire		
	Sémiotique	Instrumentale	Discursive	Sémiotique	Instrumentale	Discursive
14	[1] : LIEN EXPERIENCE GRAPHIQUE BORNES VISUALISEES INTERVALLE VISUALISE BORNES DIXIEME NOTATION POURCENTAGE GRAD FINES POUR FREQ A) [3] : TABLEAU D'EFFECTIF FREQ FRACTION FORMULE MOY	[4] : TABLEAU EFFECTIF POUR MOY C) [6] : PROTOCOLE CALCUL MOY	[2] : REPRISE ENONCE EXPERIENCE EFFECTIF VALEUR FREQUENCE MOY TOUTES FREQUENCES ENCADREMENT PAR FREQ B) [5] : LIEN FREQUENCE PROBA CALCUL MOY FREQUENCES ENCADREMENT PAR FREQ *[7] :* *LIEN PROBA FREQUENCE* *ENCADREMENT PAR FREQ* D)			

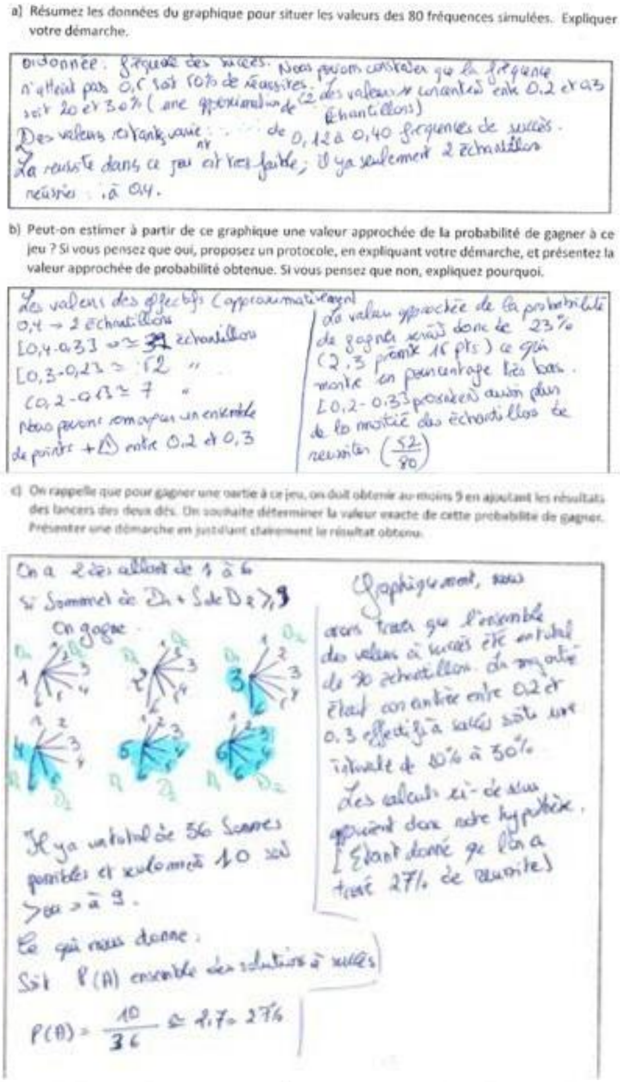
Figure 3 : Extrait des travaux et analyse brute du travail mathématique de l'élève 14

Le profil de cet élève est clairement de type « fréquentiste ». On peut aussi penser que son recours à une construction élaborée dans le domaine des statistiques descriptives avec le recours à la moyenne pondérée a fini par apporter un élément de validation satisfaisant à son niveau, confinant le travail mathématique dans ce même domaine.

Deuxième exemple : Elève n°18

Cet élève commence par visualiser les extrema de la série des fréquences. Il mentionne l'effectif de la fréquence maximum dans cette série. Puis afin de formuler une conjecture de la probabilité, l'élève effectue une sorte de découpage de la série des fréquences en classes de valeurs basée sur l'écriture décimale au dixième, et fournit les effectifs correspondant à ces classe en donnant la classe modale. Enfin il formule une conjecture de la valeur de probabilité basée sur le mode.

Lors de la deuxième partie de l'activité, cet élève va utiliser 6 arbres ayant chacun 6 branches pour dénombrer les issues possibles et les issues favorables. Il obtient ensuite la valeur de probabilité de 10/36 qu'il confronte au mode de la série statistique des fréquences obtenues.


a) Résumez les données du graphique pour situer les valeurs des 80 fréquences simulées. Expliquer votre démarche.

b) Peut-on estimer à partir de ce graphique une valeur approchée de la probabilité de gagner à ce jeu ? Si vous pensez que oui, proposez un protocole, en expliquant votre démarche, et présentez la valeur approchée de probabilité obtenue. Si vous pensez que non, expliquez pourquoi.

c) On rappelle que pour gagner une partie à ce jeu, on doit obtenir au moins 9 en ajoutant les résultats des lancers des deux dés. On souhaite déterminer la valeur exacte de cette probabilité de gagner. Présenter une démarche en justifiant clairement le résultat obtenu.

	Dimensions pour l'approche fréquentiste			Dimensions pour l'approche combinatoire		
	Sémiotique	Instrumentale	Discursive	Sémiotique	Instrumentale	Discursive
18	[1] : LIEN EXPERIENCE GRAPHIQUE BORNES VISUALISEES INTERVALLE VISUALISE FRACTIONS POURCENTAGES BORNES DIXIEMES NOTATION POURCENTAGE VARIABILITE VISUALISEE A) --- [3] : NOTATION INTERVALLE EFFECTIF PAR INTERVALLE B)		[2] : REPRISE ENONCE EXPERIENCE CALCUL NOMBRE JEUX EFFECTIF DU MAX INTUIT DIR GAGNER/PERDRE ELAGUAGE NOMBRE POINTS ENCADREMENT PAR FREQ EFFECTIF VALEUR FREQUENCE CONFUS EFF FREQ MAX PROB --- [4] : LIEN FREQUENCE PROBA --- [8] : RETOUR SUR ERREURS QUESTIONNEMENT D)	[5] : FRACTION FORMULE LAPLACE NOTATION BINOMIALE *IDEE ARBRE 6 FOIS 6* ISSUES FAVORABLES MONTREES NOTATION POURCENTAGE NOTATION LOI DE PROBA DOUBLE LISTE DES POUR SOMME C)	[6] : ARBRE 6 FOIS 6 METHODIQUE --- [10] : FACTORIEL	[7] : REPRISE ENONCE JEU DESCRIPTION UNIVERS FORMULE LAPLACE FORMULE NOMBRE LISTES NOMBRE COMBINAISONS LIEN PROBA NUAGE POINTS CHANGEMENT UNIVERS

Figure 4 : Extrait des travaux et analyse brute du travail mathématique de l'élève 18

Du point de vue didactique, le processus de modélisation apparaît découpé en 3 cycles consécutifs. Les deux premiers cycles mobilisent les statistiques descriptives, avec d'abord une recherche des extrema pour répondre à a), puis une recherche de classe modale et de mode pour répondre à b). Le troisième cycle de modélisation mobilise le domaine des probabilités pour répondre à c) et d).

Précisons davantage notre étude didactique en appui sur la théorie ETM :

Le travail mathématique donnant lieu à la recherche des extrema active le plan DIS-SEM en provoquant une première genèse sémiotique à partir de la visualisation des ordonnées correspondantes sur le graphique.

Le travail mathématique menant à la mise en évidence de la classe modale et du mode active successivement les plan DIS-SEM avec une deuxième genèse sémiotique pour visualiser les effectifs par classe sur le graphique, puis SEM-INS avec une genèse instrumentale construisant un découpage laborieux en classes de valeurs munies de leurs effectifs, et une recherche du mode. Enfin le plan INS-DIS est activé pour arriver à une genèse discursive permettant de conjecturer la valeur de probabilité.

Le travail mathématique permettant de déterminer la valeur exacte de probabilité active successivement les trois plans DIS-SEM, puis SEM-INS, puis INS-DIS, en enchaînant les trois genèses sémiotique, instrumentale, et discursive permettant à partir de la représentation de l'univers choisi sous forme d'arbres, et des opérations de traitement associées à cet arbre, de conclure sur la valeur de probabilité, et de confronter à la sortie du troisième cycle de modélisation cette valeur avec la conjecture obtenue en sortie du deuxième cycle.

CONCLUSION

Dans le cadre de notre étude sur la découverte par des élèves de l'intervalle de fluctuation, qui porte aussi sur le lien entre les statistiques descriptives et le domaine des probabilités, nous exploitons à la fois la théorie ETM et aussi, tant du point de vue de la modélisation que du point de vue de ces changements de domaines, l'idée d'une structuration du travail mathématique basée sur des étapes successives de résolution. Chaque étape de résolution se réalise alors suivant un processus ternaire en trois phases : problématisation, mathématisation, validation.

Les informations qui ressortent de ces étapes ternaires de résolution possèdent d'ailleurs une valeur double : expliciter le niveau pseudo-concret, ou bien un domaine source, permet d'identifier certains objectifs intermédiaires majeurs que se fixe consciemment l'élève, et identifier l'étape de mathématisation permet de rattacher le travail mathématique à un domaine de résolution spécifique.

Nous devons alors prendre en compte la manière dont l'outil mathématique est mis en œuvre sur le plan cognitif par l'élève, en tenant compte à la fois de l'usage d'un savoir-faire automatisé, de la démarche de preuve en appui sur des notions théoriques, et de la représentation à l'aide de signes visuels. C'est donc à ce stade de notre réflexion que nous mettons en œuvre les trois dimensions instrumentale, discursive, et sémiotique, de l'ETM. Cela permet de dépasser, au niveau de chaque étape de résolution du processus de modélisation, la seule considération de nature épistémologique menant à identifier les notions mathématiques mobilisées au cours de la phase de mathématisation.

La tâche expérimentale présentée dans cette étude est exploitée dans le cadre d'une recherche de thèse mettant en perspective les approches fréquentiste et combinatoire de la notion de probabilité. Cette tâche est adaptée à l'objectif d'éviter la mise en œuvre par les élèves d'un travail fastidieux de construction d'une simulation d'échantillonnage, qui risquerait d'être soit chronophage, soit d'utiliser l'informatique en détournant nos objectifs initiaux. Il ne s'agit pas d'une véritable approche fréquentiste puisque les données ressortent de la simulation, et sont directement soumises aux élèves sous forme d'un graphique. Mais pour analyser ces données les élèves sont amenés à percevoir, décomposer, et exploiter, les tenants et aboutissants de l'approche fréquentiste.

Dans la recherche de thèse mentionnée cette tâche menant à justifier la valeur centrale de l'intervalle de fluctuation est suivie de deux autres qui complètent l'étude de la situation probabiliste soumise aux élèves. Il s'agit alors de justifier les bornes de ce même intervalle de fluctuation.

REFERENCES

Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems. In G.- P.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *16*, 9–24.

Kuzniak A. (2018). La théorie des Espaces de Travail Mathématique. Développement et perspectives. *Actes du Sixième symposium international – Espace de Travail Mathématique* de décembre 2018, pp. 179-191. Valparaiso, Chili.

Montoya-Delgadillo, E., & Vivier, L. (2014). Les changements de domaine de travaildans le cadre des Espaces de Travail Mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *19*, 73–101.

Nechache, A. (2016). *La validation dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire*, These de doctorat, Université Sorbonne Paris Cité.

Nechache, A., Parzysz, B. (2018). Le jeu des paradigmes dans l'ETM probabiliste. *Actes du Sixième symposium international – Espace de Travail Mathématique* de décembre 2018, pp. 179-191. Valparaiso, Chili.

UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA EN PROBABILIDAD EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES EN CHILE

Katherine Machuca Pérez y Elizabeth Montoya Delgadillo

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

El objetivo de esta investigación es intervenir el espacio de trabajo matemático personal de profesores de matemáticas en formación inicial en Chile a través del diseño e implementación de una situación didáctica en el dominio de la probabilidad. El sustento teórico es el Espacio de trabajo Matemático y diseño metodológico un estudio de caso. Así, analizaremos los objetos matemáticos bajo una dimensión semiótica, instrumental y discursiva. Mostraremos como el rol de la tarea permite hacer transitar al profesor en formación por diferentes enfoques de la probabilidad; intuitivo, frecuentista y laplaciano, y tratamientos que evidencian paradigmas involucrados.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, la enseñanza de la probabilidad en Chile comienza desde los primeros años escolares de Enseñanza Básica, introduciéndose de manera progresiva desde un enfoque intuitivo, frecuentista y laplaciano (Vásquez y Alsina, 2014), para terminar con variables aleatorias binomial y normal en la Enseñanza Secundaria. Así, Chile ha seguido la tendencia internacional de una presencia cada vez mayor de la probabilidad en los currículos escolares desde hace unos 30 años aproximadamente, tiempos en los cuales se desarrollaba el enfoque clásico de la probabilidad primordialmente en las aulas escolares (Chaput et al., 2011). En Chile, la formación de profesores para la enseñanza de la probabilidad tiene una tradición incipiente, aunque actualmente el Ministerio de Educación (Mineduc) está exigiendo el conocimiento de la disciplina y su enseñanza.

El surgimiento de la probabilidad y sus diferentes interpretaciones. Según Hacking (1975), el concepto de probabilidad surgió de manera dual y repentina alrededor de 1660, relacionada, por una parte, con grados de creencia (corriente subjetivista), y por otra parte, con frecuencias relativas estables (corriente objetivista), siendo Pascal un exponente representativo de este aspecto específico dual de la probabilidad. A partir de las dos interpretaciones primarias de la probabilidad, se han desarrollado diferentes interpretaciones a lo largo de la historia; intuitivas, clásicas, frecuentadoras, subjetivas, lógicas, propensas y axiomáticas, son aquellas que coexisten en la actualidad (Batanero et al., 2005, 2016).

La probabilidad en la enseñanza de la matemática. En la enseñanza de la matemática las diferentes interpretaciones de la probabilidad no aparecen de igual manera. Actualmente se pueden identificar tres enfoques dominantes; clásico, frecuentista y subjetivo (Chernoff y Russell, 2014). Sin embargo, estos no son independientes de las opciones filosóficas, objetivistas y subjetivistas de la probabilidad (Chaput et al., 2011). Al respecto, algunos autores han enmarcado el enfoque clásico y frecuentista dentro de la concepción objetivista de la probabilidad

(Chaput et al., 2011; Borovcnik, 2011), mientras que otros han señalado la importancia de desarrollar el enfoque intuitivo de la probabilidad para su enseñanza, ya que en ocasiones los resultados en probabilidad suelen ser contrarios a la intuición (Alvarado et al., 2018; Batanero, 2005).

Por otra parte, varios autores han señalado que el enfoque de la probabilidad para su enseñanza se aborde como una forma de modelar fenómenos del mundo real (Chaput et al., 2011; Henry 2001), donde los enfoques frecuentistas y laplaciano se complementen. En este sentido, la probabilidad es un área de la matemática donde es primordial considerar la cuestión de la modelización (Parzysz, 2014), ya que "en la práctica, el modelo y la realidad están tan estrechamente vinculados que es difícil separar uno del otro" (Girard, 2001b., p. 145). Asimismo, Girard señala que es el experimento aleatorio que consideramos como modelo lo que determina en gran medida las probabilidades obtenidas (Girard, 2001).

El uso de la simulación en el aprendizaje y enseñanza de la probabilidad. Dado que en la actualidad ha surgido un gran desarrollo tecnológico, al igual que en otras áreas de la matemática, varias son las investigaciones que han señalado la importancia de considerar la simulación de experimentos aleatorios para la enseñanza de la probabilidad (Batanero et al., 2016; Henry, 2001). Al respecto, Parzysz (2014) acuña la definición inicial del término simulación como "es la sustitución de una cosa (sustituto) por otra, de manera que ocupa su lugar durante la realización de una acción determinada" (Belin, 2000, citado por Parzysz, 2014., p.69). Por otra parte, "una simulación consiste en reemplazar una prueba real aleatoria por otra física basada en un modelo que se cree representa la realidad del primer experimento" (Girard, 2001, p.144). Como se advierte, la simulación hace alusión a reproducir un experimento real por otro experimento "sustituto", de modo que los resultados que se obtengan sean "análogos". En una simulación con un artefacto digital, el modelo utilizado en la programación del experimento es lo que determinará las probabilidades obtenidas (Girard, 2001). Por su parte, Batanero et al. (2016) señala que la simulación es considerada como un punto intermedio entre la realidad y el modelo matemático probabilístico.

La formación de los profesores para la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad. Existe un reconocimiento tanto nacional como internacional de una necesidad específica en la formación de los profesores para la enseñanza de la probabilidad, puesto que no se ha prestado una atención adecuada en su formación (Batanero et al., 2016; Martin y Thibault, 2016; Parzysz, 2011; Vásquez y Alsina, 2014). Además, su enseñanza se ha basado en la exposición y aplicación de un conjunto de fórmulas a problemas estereotipados (Greer y Mukhopadhyay, 2005), a pesar de tener un lugar importante dentro del currículo de varios países.

Por todo lo anterior, nos hemos propuesto abordar la probabilidad desde el enfoque de modelización, mediante el diseño e implementación de una situación de enseñanza en la formación inicial de profesores de matemáticas en Chile. Dicha situación permite, de cierta manera intencionada, hacer transitar al profesor en formación por diferentes enfoques de la probabilidad, además de un trabajo con material concreto y simulación mediante hoja de cálculo Excel.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Nuestra investigación se sustenta a través del Espacio de Trabajo Matemático (ETM), el cual nos proporciona herramientas analíticas desde una dimensión semiótica, discursiva e instrumental para el estudio específico del **trabajo matemático** de estudiantes y profesores cuando se enfrentan a tareas matemáticas en un dominio específico de la matemática en un entorno educativo (Kuzniak et al., 2016; Kuzniak, 2022). La noción de **trabajo matemático (TM)** es el núcleo de la teoría, el cual es concebido como una actividad intelectual de producción, en constante evolución y construcción, cuyo objetivo y desarrollo está centrado en las matemáticas. Los propósitos, procesos y resultados del TM son aspectos relacionados con la realización y desarrollo de dicho trabajo, la especificidad del TM lo constituye la "importante dependencia entre el contenido matemático per se y su estrecharelación con la actividad del individuo" (Kuzniak et al., 2016., p. 724), considerando aspectos epistemológicos y cognitivos (ver Fig.1, lado izquierdo).

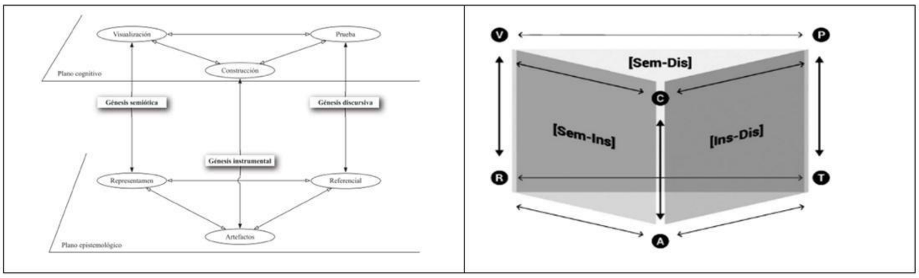


Figure 1: Diagrama del modelo ETM (Kuzniak, 2011., p.20) y planos verticales (extracto del póster del congreso ETM 5)

Plano epistemológico y cognitivo. Según Kuzniak (2022) y Kuzniak et al. (2016), cada plano está organizado de forma tríadica. El plano epistemológico está compuesto por tres polos; representamen o signo, artefactos y el referencial teórico que para definirlos dependen del dominio específico de la matemática, que, en nuestro caso, es la Probabilidad. Así, el desafío es reconocer de acuerdo con las tareas los procesos de visualización (en relación con signos como diagrama de árbol, tablas y otros), construcción (en relación con acciones originadas por el uso de artefactos tradicionales o digitales, dando lugar a gráficos o resultados de cálculo asociado a un algoritmo) y por último el proceso de prueba (en relación con razonamientos de validación basados en definiciones indistintas de la probabilidad). La articulación entre estos dos planos es permitida a través de la génesis semiótica, instrumental y discursiva, la cuales son esenciales tanto para codificar signos como para comprender validaciones y razonamientos, la selección de artefactos y sus usos, que en nuestro caso se centran en el dominio de la Probabilidad.

Planos verticales en el modelo. Los planos verticales se configuran cuando se articulan dos de las génesis descritas anteriormente, denominados semiótico-instrumental ([Sem-Ins]), semiótico- discursivo ([Sem-Dis]) e instrumental-discursivo ([Ins-Dis]) en Fig.1 lado derecho. El desarrollo y evolución del TM se puede visualizar mediante la circulación entre estos diferentes planos.

Diferentes tipos de ETM. Con la finalidad de comprender la complejidad TM en un contexto educativo se distinguen tres tipos de ETM: referencia, idóneo y personal, y en las investigaciones se observa que estos tipos de ETM pueden interferir (o tensionar) unos con otros.

En esta investigación nos interesamos en estudiar el ETM personal del profesor de matemáticas en formación inicial en el dominio de la probabilidad. Dicho estudio tiene relación con la forma en que un sujeto resuelve una tarea matemática con sus propios conocimiento y capacidades cognitivas y, también con la construcción y evolución de su ETM personal. En términos teóricos, el objetivo de nuestra investigación **es intervenir el ETM personal en probabilidad del profesor de matemáticas en formación inicial**, ya que no solo nos proponemos caracterizar su ETM personal, si no que estudiar la formación (o transformación) del mismo.

Los paradigmas en probabilidad. Es el conjunto de ideas, valores, convicciones, técnicas que determinan una determinada etapa del dominio específico (en nuestro caso probabilidad) compartida por una comunidad escolar, y permiten caracterizar el trabajo matemático, o de otra disciplina, que se está analizando, a partir del tipo de desarrollos, artefactos, pruebas, símbolos y construcciones, etc. Kuzniak (2022). En el dominio de la probabilidad nos basamos en el planteamiento de (Parzysz, 2014; Nechache, 2016) y proponemos:

Paradigma 1 (P1): se caracteriza porque existe una modelización inicial de la realidad. Se habla de un experimento aleatorio concreto y de hipótesis que originan un experimento pseudo-concreto.

Paradigma 2 (P2): se caracteriza porque existe una modelización con preponderancia en modelos matemáticos, se deja de lado la "realidad". Se habla de un experimento aleatorio genérico y la probabilidad se estudia mediante álgebra de eventos, modelos clásicos y distribuciones de probabilidad.

Paradigma 3 (P3): se caracteriza porque la modelización se basa en modelos matemáticos, y se deja de lado la realidad. En este caso, no necesariamente se habla de un experimento aleatorio, sino que la probabilidad se estudia a través de la concepción axiomática.

En las investigaciones se ha evidenciado que cohabiten paradigmas, P1/P2 (o P2/P3), esto significa que el trabajo matemático no es exclusivo de un solo paradigma.

DISEÑO METODOLÓGICO

Dado que nuestra investigación se interesa en intervenir el espacio de trabajo matemático personal en el dominio de probabilidad en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria en Chile, la investigación se posiciona desde un enfoque *cualitativo* cuyo paradigma de investigación es *interpretativo* (Bisquerra, 2004). Consideramos el método estudio de *caso instrumental*, pues se nos presenta “una necesidad de comprensión general y consideramos que podemos entender la cuestión mediante el estudio de un caso particular” (Stake, 1998., p. 16).

El caso. Conformado por 5 profesores en formación inicial, el trabajo de cada uno de ellos lo identificaremos como T-E1, …, T-E5. En su mayoría cursando el 8º semestre de formación (de un total de 9) pertenecientes a una universidad de Valparaíso, Chile. Los profesores fueron convocados e invitados a participar vía correo electrónico mediante la jefa de carrera de pedagogía en Matemática. El perfil de cada uno de ellos se presenta en la tabla 1, donde se indica el semestre que estaba cursando al momento de la implementación y cursos aprobados de estadística y su didáctica. En esta universidad, la probabilidad y su didáctica es tratada en asignaturas por separado, y dentro del curso de didáctica de la Estadística.

Profesor en formación	Semestre cursado	Cursos aprobados de Estadística	Curso aprobado de Didáctica de la Estadística
T-E1	8	Estadística 1 y 2	Si
T-E2	8	Estadística 1 y 2	Si
T-E3	8	Estadística 1 y 2	Si
T-E4	8	Estadística 1 y 2	Si
T-E5	10	Estadística 1 y 2	Si

Tabla 1: Perfil de los profesores en formación inicial que participaron en la implementación

Contexto de la experimentación y rol de la investigadora. La experimentación se llevó a cabo en tres sesiones (todas durante una misma semana) fuera de un curso formal en formato taller online durante la tercera semana de noviembre del 2020. La primera sesión se realizó un lunes cuya duración fue de 90 minutos, la segunda sesión se realizó el miércoles y duró aproximadamente 100 minutos y, finalmente la tercera sesión se realizó el viernes en 150 minutos. Las investigadoras son a su vez las profesoras que realizaron la implementación.

Fuente y análisis de datos. La técnica de recogida de datos es mediante la situación didáctica implementada en formato de un taller online (producto de la pandemia mundial), cuyo registro es escrito y oral (mediante grabación de video). Posterior a la implementación, se realizó una *entrevista semi-estructurada*, a todos los sujetos participantes, buscando corroborar algunas interpretaciones sobre las producciones. De esta manera, nuestra fuente de datos es:

- **Las producciones de los profesores.** Constan tanto de las resoluciones (enviadas mediante fotografía por correo electrónico durante las sesiones) de los profesores a las dos tareas planteadas en la situación didáctica, así como también las diferentes respuestas a las preguntas diseñadas en cada momento de la situación (enviadas mediante formulario Google durante las sesiones). Realizamos una revisión de las producciones por cada uno de los sujetos participantes de la investigación.

- **Los videos de las implementaciones.** Realizamos una revisión del video de cada una de las sesiones. Nos centramos en aquellas reflexiones que realizan los profesores en cuanto a las nociones probabilísticas involucradas en las situaciones, así como también de aquellos aspectos relacionados con la enseñanza de estas. Se consideraron fragmentos de aquellas reflexiones que complementan los análisis de los datos de las producciones.

- **La entrevista semi-estructurada.** Realizamos una entrevista a cada uno de los sujetos participantes. En ellas, se invitó a los profesores a reflexionar sobre las nociones matemáticas involucrados en el desarrollo de sus resoluciones, también se buscó indagar sobre algunas interpretaciones sobre su trabajo realizado en la resolución de las tareas. La entrevista se realizó de la siguiente manera: se llevó a cabo de forma individual (un total de cinco entrevistas) y online, debido al contexto de pandemia mundial, durante la tercera semana de diciembre del 2020, con previa coordinación entre cada profesor y la investigadora (entrevistadora). Tuvo una duración aproximada de 30 minutos, se grabada mediante video y se realizó la transcripción en su totalidad. El diseño de la entrevista se realizó en base a las producciones de los profesores, contiene preguntas generales, comunes a todas las entrevistas, y preguntas particulares en relación con cada producción. Durante la entrevista, la investigadora realizó reformulaciones para profundizar en el discurso y reflexión de los profesores.

Realizamos un *análisis cualitativo* de los datos, a través de un proceso de categorización bajo el constructo teórico ETM, analizaremos los objetos matemáticos, bajo una dimensión semiótica, instrumental y discursiva, identificando planos verticales que son privilegiados y el paradigma probabilístico en juego. En el proceso de análisis, estudiamos aquellos datos que surgieron en cada momento de la implementación, complementando estos con reflexiones orales obtenidos durante la implementación y en las entrevistas semi-estructuradas, obteniendo así una triangulación de los datos.

Descripción de la situación didáctica. La situación didáctica contempla diferentes momentos y dos tareas matemáticas, "Los bancos del cerro Barón" y "Los cortes al azar de la lana", en este escrito presentaremos sólo la situación que contempla la segunda tarea. Al respecto, la situación con la tarea de la lana tiene dos objetivos: por una parte, determinar la probabilidad de un evento en un contexto continuo bivariado desde la perspectiva de modelización y por otra, establecer el vínculo entre distintas interpretaciones de la probabilidad considerando la simulación del experimento aleatorio.

Momento 1: se realiza un trabajo individual de carácter experimental con material concreto. La **tarea** es la siguiente:

Toma una lana de 2 metros de largo con un nudo en cada extremo y córtala en dos puntos al azar

Se realizan diferentes preguntas; (1.1) Describe como elegiste los lugares donde cortar la lana. (1.2)

¿Qué tan probable es que el trozo de lana entre los puntos donde cortaste sea de largo igual o menor a 1 m? (1.3) Calcula la longitud del trozo de lana entre los dos puntos donde cortaste. (1.4) Con los datos que ustedes proporcionaron, ¿Qué puede decir sobre la probabilidad que el trozo de lana entre los puntos donde cortaste sea de largo igual o menor a 1 m?

Momento 1.1. Se realiza un cierre de la primera parte, se aborda en conjunto con los estudiantes las preguntas ¿Cuál (o cuales) enfoque de la probabilidad se ha utilizado? ¿Qué podemos hacer para asegurarnos que estamos repitiendo la situación en condiciones similares?, surge la noción experimento aleatorio y protocolo experimental. Se solicita a los estudiantes que contesten la siguiente pregunta; (1.5) Describe el experimento aleatorio asociado a la tarea y el protocolo experimental. La respuesta esperada a (1.5) es la siguiente:

El **experimento aleatorio** es cortar una lana de 2 metros de longitud en dos puntos al azar. La redacción de esta declaración no es lo suficientemente precisa, de ahí la necesidad de considerar supuestos adicionales. Hipótesis 1: la elección al azar de un punto en la lana para realizar el corte, la consideraremos análogamente a la elección de un punto en un segmento de longitud 2 metros, el cual sigue una distribución uniforme en [0,2]. Hipótesis 2: la elección del primer corte no influye en la elección del segundo corte. Nos interesa el evento D: "la longitud del trozo de cuerda entre los dos puntos es igual o menor a 1 m". El espacio muestral de este experimento es $\Omega = [0,2]\times [0,2]$.

En **términos del ETM**, en este primer momento se espera que el trabajo se guíe por P1, ya que se espera que el estudiante realice una descripción de la realidad, en términos del experimento aleatorio y sus supuestos, además de realizar un trabajo empírico para determinar una aproximación de la probabilidad buscada y un trabajo desde el enfoque intuitivo de la probabilidad.

Momento 2: se realiza un trabajo individual guiado mediante simulación en Excel de la tarea. Se pregunta (2.1) Describe el protocolo experimental que consideraras para realizar la simulación (2.2) Repitamos el experimento 1000 veces mediante simulación del experimento aleatorio. ¿Qué puede decir sobre la probabilidad que el trozo de lana entre los puntos donde se corto sea de largo igual o menor a 1 m? (2.3) Cómo se relaciona su respuesta intuitiva, dada en (1.2), con el valor obtenido mediante la simulación.

Momento 2.1: Se realiza un cierre abordando con los estudiantes ¿Que podemos decir sobre la probabilidad, mediante simulación por computador del experimento aleatorio? ¿Qué es lo que se está simulando? ¿El experimento real o el experimento aleatorio?

En **términos del ETM**, en este segundo momento se espera que se active el plano **[Ins-Dis],** cuya entrada en la resolución de la tarea es a través del eje discursivo para construir la programación del experimento en la hoja de cálculo y se guía por **P2**. Posteriormente, para realizar la simulación, calcular y/o visualizar la frecuencia relativa del evento D, se activa el plano **[Sem-Ins]** y el trabajo se guía por **P1**. Finalmente, para estimar el valor de la probabilidad, se utiliza la herramienta teórica de la ley de los grandes números. El paradigma que guía este trabajo es **P1** articulado con **P2**.

***Momento 3*:** se realiza un trabajo individual teórico sobre la tarea planteada. Se realizan diferentes preguntas: (3.1) Describe el experimento aleatorio involucrado en el problema. (3.2) Registra los supuestos que considerarás… (3.3) Explicita el conjunto de todos los resultados posibles (3.4) Representa gráficamente el conjunto de todos los resultados posibles. (3.5) ¿Cuál es el evento alcuál se esta buscando la probabilidad? (3.6) Representa gráficamente el evento al cuál se está buscando la probabilidad (3.7) En base al trabajo desarrollado determina la probabilidad buscada, justificando tu respuesta.

Momento 3.1: Se realiza un cierre de esta tercera parte, se aborda en conjunto con los estudiantes las preguntas ¿Cuál es la probabilidad? ¿Cuál enfoque de la probabilidad se ha utilizado? ¿Cómo podemos determinar la probabilidad mediante la utilización de funciones de densidad? Si consideremos la misma situación ¿Cuál es la probabilidad que el trozo de lana entre los puntos donde se corto sea de largo igual 1 m?

En **términos de ETM**, se espera que se active el plano **[Sem-Dis]** a través del eje discursivo, considerando nociones de variables aleatorias continuas e independientes y realizando cambios de dominio, geométrico y algebraico, activándose el plano **[Sem-Ins]** en la resolución de las inecuaciones y determinar la región azul. Se espera se active el plano **[Sem-Dis]** para determinar la probabilidad buscada. El paradigma que guía sería P2 y P3.

Al **cierre de la implementación,** los profesores se habrán enfrentado a la tarea a través de tres enfoques; intuitivo, experimental y teórico. En **términos del ETM**, habrá una circulación por los tres planos verticales del ETM y transitado por los distintos paradigmas en probabilidad. Además, pensamos que se podrá generar un cambio de dominio (probabilístico y geométrico) utilizando conjuntamente herramientas semióticas, tecnológicas y teóricas del ETM a medida que evoluciona en el desarrollo de la situación didáctica.

ANALSIS Y RESULTADOS

A continuación, se presentan los principales resultados y análisis datos obtenidos en cada momento de la implementación de la situación de enseñanza descrita anteriormente.

Del momento 1. En cuanto a 1.1) Describe como elegiste los lugares donde cortar la lana, podemos señalar lo siguiente; un estudiante (T-E1) no señala cómo realizo los cortes, sino más bien dónde realizó los cortes, por lo que en este caso no podemos saber cómo generó el azar al realizar los cortes, tres estudiantes (T-E2, T-E4 y T-E5) realizan el segundo corte condicionado al primer corte, es decir, la relación entre el primer y segundo corte es de dependencia. De estos, uno (T-E2) señala que para la realización de los cortes cerro los ojos, lo cual coincide con una de nuestras respuestas esperadas. Otro estudiante (T-E3) señala "intentando que sean similares los cortes", no queda del todo claro qué significa que sean similares.

Finalmente, un estudiante (T-E5) señala que contó 3 y 4 segundos para el primer y segundo corte respectivamente. Durante este momento se cuestiona el azar (*...cortar la lana en dos puntos al azar*), y los estudiantes ponen en duda que algo sea realmente al azar. Al respecto, T-E2 señala lo siguiente:

> *T-E2: yo quería decir que, si bien la técnica que yo intente usar no es algo que uno haría confines prácticos,* ***tampoco fue totalmente al azar****…****o sea yo decido hacerlo así en cierto modo.***

También se pregunta ¿Podemos decir que hemos repetido la situación 5 veces en condiciones similares? Al respecto T-E3 señala que no, específicamente señala lo siguiente:

> *T-E3: yo creo que no…****porque es difícil llegar y cortar al azar realmente****, va a depender de comolo vea cada persona…*

Surge entonces la noción de experimento aleatorio y protocolo experimental que se trabajó previamente con la tarea de los bancos.

Sobre la pregunta (1.5) ***Describe el experimento aleatorio asociado a la tarea y el protocolo experimental,*** podemos dar cuenta que ***surgieron diferentes espacios muestrales*** (ver tabla 2); dos en forma de intervalo (T-E2 y T-E4), dos en forma de conjunto con números naturales (T-E3 y T- E5), y uno (T-E1) en forma de {V, F} donde V significa que se cumple la condición y F que no se cumple. En algunos espacios muestrales asociados a sus respuestas (T-E1, T-E2, T-E3) consideran como resultados del experimento aleatorio la distancia entre los dos puntos de corte. En T-E4 se puede notar un espacio muestral algo similar a lo que nosotros esperábamos, sin embargo, podemos observar que el estudiante confunde el conjunto del espacio muestral, con un elemento del espacio muestral. Finalmente, T-E5 considera un espacio muestral discreto, pero las desigualdades están mal escritas, ya que considera los valores que son mayores que 100 y menores que 1. Por otra parte, todos los estudiantes consideraron la independencia entre los dos ensayos.

Profesor en formación	Espacios muestrales considerados
T-E1	El **espacio muestral será {V, F}** con V= a que se cumpla que es menor o igual al metro y F que no se cumpla.
T-E2	En este caso, el *espacio muestral* M del experimento es **M= [0,200]** dado que la **longitud del trozo de lana central** puede corresponder a cualquier valor entre 0cm y 200 cm, ambos inclusive.
T-E3	…Se puede definir que el **espacio muestral de las medidas posibles será {1,2,3, 4, ...,198,199}**
T-E4	El **espacio muestral asociado a la longitud donde se realizan 2 cortes corresponde a: A×B donde A y B están entre]0-200[** (Ya que 0 corresponde al inicio y 200 al final de la lana) - (los casos en que A=B)
T-E5	**Espacio muestral**: **{xeN/100<x<1}**

Tabla 2: Espacio muestrales considerados por los profesores en formación

Se puede observar, que el experimento aleatorio asociado a la tarea se entiende de dos formas diferentes, por una parte, cortar la lana en dos puntos al azar, y, por otra parte, cortar la lana en dos puntos al azar y medir la longitud del trozo central de lana. Por esta razón se obtienen espacio muéstrales diferentes, según nuestro entender.

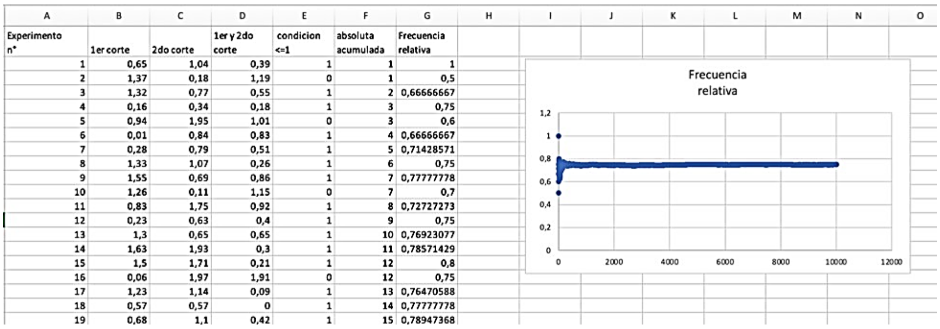
En términos del ETM, podemos señalar que el trabajo está guiado por P1, dada la descripción en términos de la realidad y el trabajo empírico realizado para cortar la lana en dos puntos al azar. También podemos señalar que el espacio muestral cuando están involucrado dos ensayos se presenta como una dificultad, ya que en esta tarea (y en la anterior con los bancos), los estudiantes presentaron dificultades para definir explícitamente el espacio muestral, elemento importante a considerar en el referencial teórico en probabilidad para su formación.

Del momento 2. Como señalamos anteriormente, durante este momento se realizó un trabajo individual guiado mediante simulación usando Excel. Antes de comenzar con este proceso, se preguntó si alguien ha escuchado hablar sobre simulación mediante hoja de cálculo Excel, en general la respuesta que obtuvimos es que no saben bien de qué se trata. Algunas respuestas fueron:

T-E5: no, yo por lo menos no

T-E2: yo si había escuchado, pero no se lo que es en concreto

En la pregunta en 2.2) *Repitamos el experimento 1000 veces mediante simulación del experimento aleatorio ¿Qué puede decir sobre la probabilidad que el trozo de lana entre los puntos donde se corto sea de largo igual o menor a 1 m?* Podemos señalar que todos los estudiantes desarrollaron, a través de un trabajo guiado, la simulación mediante hoja de cálculo Excel, en Fig.1 se puede observar la simulación realizada por el estudiante T-E2.



Experimento n°	1er corte	2do corte	1er y 2do corte	condicion <=1	absoluta acumulada	Frecuencia relativa
1	0,65	1,04	0,39	1	1	1
2	1,37	0,18	1,19	0	1	0,5
3	1,32	0,77	0,55	1	2	0,66666667
4	0,16	0,34	0,18	1	3	0,75
5	0,94	1,95	1,01	0	3	0,6
6	0,01	0,84	0,83	1	4	0,66666667
7	0,28	0,79	0,51	1	5	0,71428571
8	1,33	1,07	0,26	1	6	0,75
9	1,55	0,69	0,86	1	7	0,77777778
10	1,26	0,11	1,15	0	7	0,7
11	0,83	1,75	0,92	1	8	0,72727273
12	0,23	0,63	0,4	1	9	0,75
13	1,3	0,65	0,65	1	10	0,76923077
14	1,63	1,93	0,3	1	11	0,78571429
15	1,5	1,71	0,21	1	12	0,8
16	0,06	1,97	1,91	0	12	0,75
17	1,23	1,14	0,09	1	13	0,76470588
18	0,57	0,57	0	1	14	0,77777778
19	0,68	1,1	0,42	1	15	0,78947368

Figure. 1. Simulación realizada por T-E2

Respecto de ¿*Qué puede decir sobre la probabilidad que el trozo de lana entre los puntos donde se corto sea de largo igual o menor a 1 m?* Cuatro estudiantes contestaron que la probabilidad es cercana (aproximadamente o tiende) al valor que obtuvieron en la simulación. En dos respuestas (T-E2 y T-E3) se menciona el enfoque frecuentista de la probabilidad, y en dos respuestas (T-E1 y T- E3) se señala que el valor aproximado de la probabilidad es cercano al valor teórico. Finalmente, unestudiante no responde (T-E5).

Respecto de 2.3) En relación con la respuesta intuitiva y el valor obtenido, podemos decir que en tres respuestas (T-E1, T-E2 y T-E3) se obtuvo un valor numérico aproximado que no se condice conla respuesta intuitiva, en dos de ellas (T-E1 y T-E3) se pensó desde el enfoque intuitivo de la probabilidad que ésta estaba más cercana a uno. Un estudiante no responde (T-E5).

Finalmente, consideramos pertinente señalar que, a pesar de que a estos estudiantes tienen asignaturas de TIC y programación, en las entrevistas realizadas posterior a la implementación, los estudiantes declararon lo dificultoso que resultó usar la planilla Excel para hacer una simulación, y en general señalaron que su formación es débil en este tema, ya que no han realizado actividades que involucre simulación con Excel. A continuación, se muestra la respuesta de T-E5:

> TL-E5: En lo personal me cuesta un poco el uso de tecnología para probabilidad… Excel siento que no hemos tenido una formación en estadística o probabilidades en el instituto por lo menos… **como no entendía me costó un mundo hacer el Excel, demasiado**.

En **términos del ETM**, el trabajo probabilístico se inicia en el plano **[Ins-Dis]**, cuya entrada en la resolución de la tarea es a través del eje discursivo para realizar la programación del experimento en el Excel y el trabajo se guía por **P2**. Posteriormente, para realizar la simulación, calcular y/o visualizar la frecuencia relativa del evento D, se activa el plano **[Sem-Ins]** y el trabajo se guía por **P1**. Finalmente, para estimar el valor de la probabilidad, se utiliza la herramienta teórica de la ley de los grandes números. Podemos señalar que en la formación de los profesores la **génesis instrumental** se encuentra debilitada (en el sentido ascendente), ya que los estudiantes no se han apropiado de las diferentes técnicas asociadas al artefacto digital “hoja de cálculo Excel”.

Del momento 3. Recordemos que en este momento los estudiantes realizaron un trabajo individual para calcular la probabilidad teóricamente. Respecto de 3.1) Describe el experimento aleatorio involucrado en el problema, cuatro (T-E1, T-E2, T-E3 y T-E5) de los cinco estudiantes responde que el experimento consiste en cortar la lana de 2 metros de largo en dos puntos al azar, tal como nosotros esperábamos. Un estudiante (T-E4) señala que el experimento consiste en “obtener una longitud menor o igual a un metro al restar las longitudes de los cortes en la lana”, confundiendo el experimento aleatorio con el procedimiento para para calcular la probabilidad.

Respecto de 3.2) Registra los supuestos que considerarás en el experimento aleatorio, identificando la (o las) variable(s) aleatoria(s) involucrada(s), su distribución y la relación entre ellas en términos de independencia o dependencia, podemos señalar que todos los estudiantes consideran que tanto el primer como el segundo corte corresponden a dos variables aleatorias continuas uniformemente distribuidas. Sin embargo, en dos respuestas (T-E3 y T-E5) se menciona que el dominio de las variables es el espacio muestral, sin definir este. Además, en una respuesta (T-E5) se menciona que el recorrido de la variable es R, y luego señala que se distribuye uniformemente, entonces no queda claro si el estudiante comprende el recorrido de la variable aleatoria.

Sobre 3.3) Explicita el conjunto de todos los resultados posibles del experimento aleatorio, cuatro de los cinco estudiantes señalan que el espacio muestral será $\Omega =$

[0,2]× [0,2] como nosotros esperábamos. Un estudiante (T-E4) señala que el espacio muestral es A-B, con A y B perteneciente a [0,2], observemos que esta resta el estudiante la considera como una resta entre el punto A y B, no como una resta de conjuntos, por lo que no queda claro en su respuesta cuál es el conjunto que considerará como espacio muestral.

Con relación a 3.4) *Representa gráficamente el conjunto de todos los resultados posibles*, podemos señalar que todos los estudiantes graficaron el espacio muestral en un sistema cartesiano. En Fig.10 se presentan dos producciones.

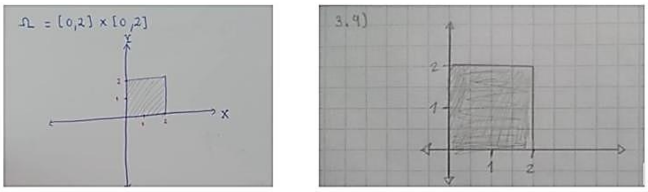


Figure 10: Producciones de los estudiantes T-E2 (izquierda) y T-E1 (derecha) en relación con 3.4)

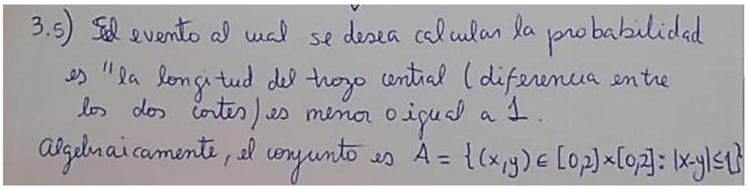


Figure 11: Producción del estudiante T-E2

Respecto a 3.6) *Representa gráficamente el evento al cuál se está buscando la probabilidad*, dos estudiantes (T-E4 y T-E5) presentaron dificultades para representar gráficamente el evento en cuestión, en ambos casos, la resolución de inecuaciones con valor absoluto se presenta como una dificultad para representar gráficamente el evento en cuestión, específicamente T-E5 menciona:

> T-E5: … yo sé que cuando uno tiene la recta la lleva al tema de la gráfica, pero tengo una dificultad en eso. Ecuaciones si las sé llevar a una gráfica, pero **cuando son inecuaciones no…siempre he tenido un problema con el valor absoluto**.

En la Fig. 14, se presentan dos de las tres producciones que realizaron la representación gráfica de forma correcta del evento en cuestión.

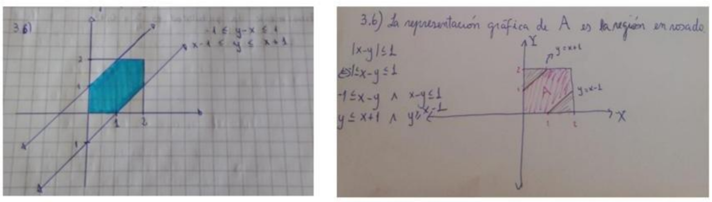


Figure.14: Respuesta a 3.6) de estudiantes T-E3(izquierda) y T-E2(derecha)

Finalmente, en relación con 3.7) *En base al trabajo desarrollado determina la probabilidad buscada, justificando tu respuesta*, podemos señalar que en tres producciones (T-E1, T-E2 y T-E3) se evidencia un trabajo probabilístico de acuerdo con lo esperado en nuestra situación de enseñanza y que les permitió a los estudiantes, obtener el valor teórico de la probabilidad buscada. En la Fig.15, se muestra el trabajo realizo por T-E2, el cual es similar al realizado por T-E1 y T-E3.

En **términos de ETM**, en el trabajo de estos tres estudiantes se activó el plano **[Sem-Dis]** a través del eje discursivo, como nosotros esperábamos, considerando nociones de variables aleatoriascontinuas e independientes y realizando cambios de dominio, geométrico y algebraico, activándose el plano **[Sem-Ins]** en la resolución de las inecuaciones y determinar gráficamente el evento de interés. Finalmente se activa el plano **[Sem-Dis]**, para determinar la probabilidad buscada y el trabajo se guía por **P2.**

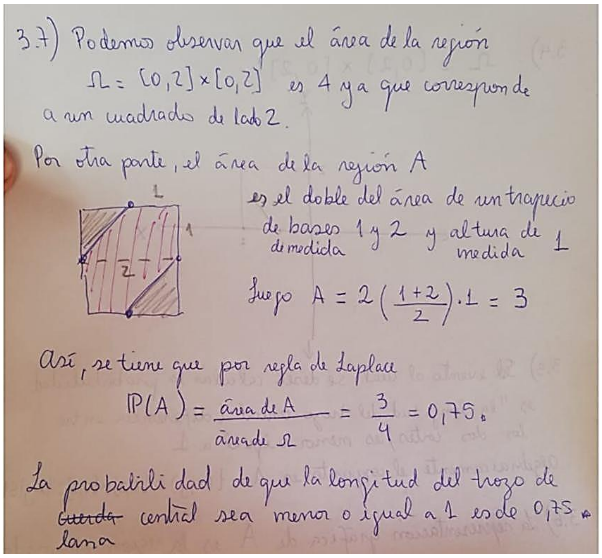


Figure.15: Respuesta a 3.7) de T-E2

CONCLUSIONES Y PROYECCIONES

Los resultados nos indican que, en general, una situación de enseñanza que contempla una tarea matemática que integra progresivamente diferentes enfoques de la probabilidad, así como también el uso de simulación computacional y material concreto, tuvo un papel positivo en el desarrollo de la comprensión de la probabilidad por parte de los futuros profesores de matemáticas, donde su ETM personal evoluciona notablemente a medida que transcurre la situación de enseñanza en concordancia con lo que plantea (Parzysz, 2014).

En termino de los datos, los cinco profesores lograron el objetivo trazado, pero señalamos que tres de ellos realizaron un trabajo probabilístico correcto que les permitió determinar la probabilidad experimental con simulación y también teóricamente utilizando un cuadrado como soporte para realizar el cálculo de la probabilidad. Los otros dos profesores tuvieron más dificultades a causa de las resoluciones de las inecuaciones con valor absoluto. Al hacer transitar por los distintos enfoques de la probabilidad al estudiante nos parece que es una puesta acertada para el aprendizaje, ya que, en términos teóricos, permitió una circulación del trabajo por los diferentes planos verticales y a la vez por los diferentes paradigmas de la probabilidad, cobrando sentido en su ETM personal, ya que como señala T-E2:

> T-E2…he podido no solo recordar algunos conceptos fundamentales, sino que he podido tener una visión integrada de ellos y comprender la importancia que tiene para la enseñanza de la probabilidad, tener claros estos conceptos fundamentales como el espacio muestral, el experimento aleatorio, o las potencialidades de la simulación.

La simulación por computador para el cálculo de la probabilidad también nos parece relevante destacar, pues fue una especie de transición entre lo concreto y comprender una generalidad para que emergiera en forma natural la ley de los grandes números y pasar, a la necesidad de obtener una probabilidad teórica. El uso del artefacto digital Exel para modelar el experimento aleatorio en cuestión, no estaba disponible en los ETM personales de este grupo de profesores en formación inicial. Como señalaron en la entrevista, no tuvieron, hasta ese entonces, experiencias en su formación donde pudiesen simular experimentos aleatorios por computador. El proceso de programación de un experimento aleatorio requiere una adaptación del experimento para que sea comprendido por el artefacto tecnológico, proceso que también requiere un tiempo de aprendizaje (Nechache & Parzysz, 2022). Cuestión importante a considerar en su formación, pues en ocasiones, como la presentada aquí, el uso de simulación juega el rol de facilitador en la resolución teórica de la probabilidad por parte del sujeto (Batanero, 2003), así como también una herramienta en el proceso de modelización en probabilidad (Parzysz, 2014) y favorece la cohabitación de diferentes dominios; probabilidad, estadística e informática (Nechache & Parzysz, 2022).

Con todo, podemos decir que esta situación compuesta por tareas intencionadas ha influido en el ETM personal e incluso en el ETM idóneo del profesor de matemáticas en formación, ya que dos de los cinco estudiantes realizaron el trabajo final en probabilidades (que les conduce al título de profesor), diseñando e implementado una situación de enseñanza en el aula escolar de enseñanza secundaria en Chile. La situación de enseñanza realizada por estos profesores en formación inicial ha intencionado los diferentes significados de la probabilidad, un trabajo con material concreto y simulación computacional, de forma muy similar a como la vivenciaron en nuestra implementación, dando cuenta de una clara influencia de su ETM personal hacia su ETM idóneo potencial y efectivo. El estudio del ETM idóneo potencial y efectivo del profesor en formación inicial forma parte del trabajo doctoral de una de las investigadoras.

En cuanto a las proyecciones de la investigación, nos parece interesante estudiar el ETM idóneo de estos profesores en su práctica en el aula, como profesores nobeles, al enseñar la probabilidad.

RECONOCIMIENTOS

Financiamiento parcial de beca doctoral Nº**21191607** ANID y proyecto Fondecyt Nº1171744, Chile.

REFERENCIAS

Alvarado, H., Estrella, S., Retamal, L., & Galindo, M. (2018). Intuiciones probabilisticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativan Matemática Educativa*, *21*(2), 131–156.

Batanero, C. (2003). La simulación como instrumento de modelización en probabilidad. *Educacióny Pedagogía*, *15*(35), 39–54.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *RELIME, Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *8*(3), 247–264.

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H., & Sánchez, E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability*. Springer Nature.

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In G. Jones (Ed.), *Exploring probablity in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15–37). Springer, Boston, MA.

Bisquerra, R. (2004). *Metodología de la Investigación Educativa* (2nd ed.). Editorial La Muralla. Borovcnik, M. (2011). Strengthening the role of probability within statistics curricula. In *Teaching*

Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education (pp. 71-83). Springer, Dordrecht.

Chaput, B., Girard, J. C., & Henry, M. (2011). Frequentist Approach: Modelling and Simulation in Statistics and Probability Teaching. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study* (Vol. 14, pp. 85–95). New York: Springer.

Chernoff, E., & Russell, G. L. (2014). Preface to Perspective I: Mathematics and Philosophy. In E. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probablistic Thinking* (pp. 3–5). Springer, Dordrecht.

Eichler, A., & Vogel, M. (2014). Three Approaches for Modelling Situations with Randomness. In

E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probablistic Thinking* (pp. 75–99). Springer, Dordrecht.

Girard, J.C. (2001). Qu’est-ce qu’une expérience aléatoire? In *Autour de la modélisation en probabilités* (pp. 141–144).

Girard, J.C. (2001b). Un exemple de confusion modèle-réalité. In *Autour de la modélisation en probabilités* (pp. 145–148).

Greer, B., & Mukhopadhyay, S. (2005). Teaching and learning the mathematization of uncertainty: historical, cultural, social and political contexts. In *Exploring probability in school* (pp. 297- 324). Springer, Boston, MA.

Hacking, I. (1975). *The emergence of probability: a philosophical study of early ideas about probability induction and statistical inference*. Cambridge University Press.

Henry, M. (2005). Notion d'experiénce aleatoire. Vocabularie et modèle probabiliste. In M. Henry (Ed.), *Autour de la modélisation en probabilités* (pp. 173–186). Presses universitaires deFranche Comté.

Kuzniak, A. (2011). L ' espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique etde Sciences Cognitives*, *16*, 9–24.

Kuzniak, A. (2022). The Theory of Mathematical Working Spaces—Theoretical Characteristics. In A Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, & P. R. Richard (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context. Mathematics Education in the Digital Era*. Springer, Cham.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM - Mathematics Education*, *48*(6), 721–737.

Martin, V., & Thibault, M. (2016). Regards québécois sur sept décennies de recherche liée à l'apprentissage et à l'enseignement des probabilités. In *Annales de didactiques et de sciences cognitives* (Vol. 21, p. 79-116).

Nechache, A., & Parzysz, B. (2022). Le rôle de la simulation informatique dans l´articulation des domaines probabiliste et statistique. *PädiUAQ*, *5*(10), 1–13.

Parzysz, B. (2011). Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. In *Annales de didactique et des sciences cognitives* (Vol. 16, pp. 127-147).

Parzysz, B. (2014). Espaces de travail en simulation d'expérience aléatoire au lycée : Une étude de cas. *Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa*, *17*(4), 65–82.

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos* (4th ed.). Editorial Morata.

Vásquez, C., & Alsina, Á. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en educación primaria. Un desafíopara la formación inicial y continua del profesorado. *Números*, *85*, 5–23.

VERS LA MATHEMATISATION DE SITUATIONS ANCREES DANS LE REEL : UNE PROPOSITION DE GRILLE D'ANALYSE

Charlotte Derouet, Sonia Yvain-Prébiski

Université de Strasbourg, UL, UHA, LISEC UR2310 ; CY Cergy Paris Université, Université de Paris, Univ Paris Est Créteil, Univ. Lille,UNIROUEN, LDAR

Dans les prescriptions curriculaires à tous les niveaux, en France comme internationalement, le développement de compétences liées à la modélisation de situations extra-mathématiques est mis en avant. L'objectif de cette contribution est de présenter un outil théorique et méthodologique d'analyse a priori et a posteriori *permettant d'étudier la prise en compte ou non par les acteurs (élèves, enseignants, formateurs) de la nécessité de mathématiser une situation ancrée dans le réel pour pouvoir envisager un traitement mathématique. Après avoir présenté notre cadre théorique, nous montrerons l'opérationnalité de notre outil pour conduire une analyse a priori d'une situation intitulée « Aire de baignade ».*

Le travail de modélisation prend une place de plus en plus importante dans les programmes de mathématiques en France comme à l'international. Dès l'école primaire, les enseignants sont invités à proposer des situations réelles ou tout au moins ancrées dans une certaine réalité. Cependant, de telles situations amènent les élèves à mettre en œuvre une démarche différente de celle rencontrée dans la résolution de problèmes intra-mathématiques, dans la mesure où ces situations nécessitent au préalable d'être rendues accessibles par un traitement mathématique. Cette étape, qui relève de la mathématisation horizontale, est constitutive de l'activité de modélisation comme nous le détaillerons plus loin.

Dans cette contribution, nous allons présenter un outil théorique et méthodologique que nous avons élaboré et nous montrerons son opérationnalité pour analyser a priori une situation ancrée dans le réel. Cet outil a été construit pour étudier a posteriori la prise en compte (ou non) par les élèves, les enseignants et/ou formateurs de la nécessité de ce travail de mathématisation horizontale. Cette recherche s'inscrit dans un projet plus vaste sur l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation au sein d'un dispositif de formation continue français inspiré des Lesson Study (Derouet & Yvain-Prébiski, 2021), que nous ne présenterons pas ici.

CADRAGE THEORIQUE

Nous faisons le choix de définir un modèle mathématique et la modélisation mathématique à partir des travaux d'Israël (1996). Ainsi dans notre étude, un modèle mathématique est « un fragment de mathématique appliqué à un fragment de réalité, […] non seulement un seul modèle peut décrire différentes situations réelles, mais le même fragment de réalité peut être représenté à l'aide de modèles différents. » (Israël, 1996, p. 11). De là, la modélisation mathématique est une démarche de construction d'un modèle exprimé en langage mathématique permettant de mettre en relation les éléments choisis d'un fragment de réalité en lien avec la question à étudier (Yvain-Prébiski, 2018).

D'une situation ancrée dans le réel, nous nous intéressons à comment rendre cette situation accessible par un traitement mathématique, processus que Treffers repris par Freudenthal (1991) dans le cadre de la Realistic Mathematics Education (RME) appelle mathématisation horizontale (MH) :

> Treffers, in his thesis of 1978, distinguished horizontal and vertical mathematising not sharply but with due reservations : Horizontal mathematising, which makes a problem field accessible to mathematical treatment (mathematical in the narrow formal sense) versus vertical mathematising, which effects the more or less sophisticated mathematical processing. (Freudenthal, 1991, p. 40)

De notre étude sur la mathématisation horizontale dans le cadre de la RME et en appui sur les travaux d'Israël (1996), nous dégageons deux étapes intermédiaires pour passer de la situation extra-mathématique à un problème mathématique (Yvain-Prébiski, 2021) :

- Le choix d'un fragment de réalité à partir duquel on va se questionner, et le choix d'aspects pertinents (éléments de contexte, grandeurs…) du fragment de réalité pour envisager un traitement mathématique conduisant à un problème susceptible d'un traitement mathématique (PSTM),
- La mise en relation des aspects pertinents retenus conduisant au problème mathématique qui va être étudié.

Ces deux étapes relèvent de la mathématisation horizontale au sens de Treffers dans la mesure où elles permettent de rendre accessible une situation extra-mathématique par un traitement mathématique.

La figure 1 illustre ces premières étapes à partir d'une situation ancrée dans le réel (Yvain-Prébiski, 2021).

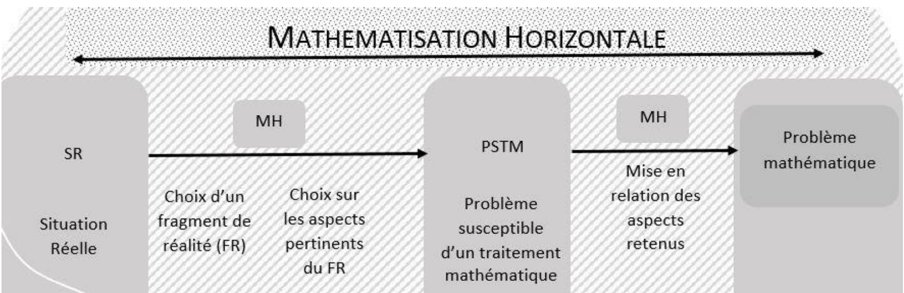


Figure 1. Etapes relatives à la mathématisation horizontale (MH)

Cycle de modélisation de départ

Nous prenons comme point de départ le cycle de modélisation proposé par Blum et Leiss (2007) qui est, selon Hankeln et Hersant (2020), « reconnu comme le plus pertinent pour l'analyse cognitive ». Dans ce cycle, le point de départ du processus est une situation du monde réel, que le solveur lit et « comprend », qui va amener (phase 1) à la construction d'une représentation mentale de la situation réelle (Borromeo Ferri, 2006), appelé *situation model*, que l'on pourrait traduire par modèle de situation. Le modèle de situation est simplifié pour ne garder que ce qui est important pour le solveur, au regard de la question qu'il se pose. Les simplifications sont plus ou moins automatiques ; ils sont le fait de choix conscients ou non du solveur. Le modèle de situation est ensuite idéalisé, simplifié ou structuré (phase 2) pour obtenir un *real model* (Kaiser, 1995). Le *real model* est mathématisé (phase 3), c'est-à-dire traduit en langage mathématique pour obtenir un modèle mathématique de la situation de départ. Un traitement mathématique (phase 4) entraîne des résultats mathématiques, interprétés en « résultats réels » (phase 5) qui seront validés ou non par rapport au modèle de situation (phase 6). Puis, si les résultats obtenus semblent cohérents, ils seront présentés comme prédictions sur la situation réelle (phase 7).

Pour compléter ce cycle, nous avons fait le choix comme Coulange (1998) de séparer, dans la démarche de modélisation, le domaine réel (extra-mathématique) du domaine mathématique par un troisième domaine, le domaine « pseudo-concret » (Derouet, 2022). Cette idée de « pseudo-concret » est empruntée à Henry (1999) qui définit un modèle pseudo-concret comme « une sorte d'abstraction et de simplification de la réalité perçue dans sa complexité, dans la mesure où certains choix sont faits pour ne retenir que ce qui semble pertinent de cette situation vis-à-vis du problème étudié » (p. 28). Le domaine pseudo-concret ne relève donc plus de la réalité mais ne relève pas encore du domaine mathématique, notamment car il n'est pas exprimé en langage mathématique.

De cette description de la démarche de modélisation, nous retenons le domaine pseudo-concret et le modèle pseudo-concret, associé à un problème pseudo-concret (problème réel modifié du fait des simplifications/idéalisations), qui nous paraissent plus appropriés que le terme *real model* dans le cycle de modélisation de Blum et Leiss (2007). Cela nous amène à considérer le cycle de modélisation en figure 2 (Derouet, 2022).

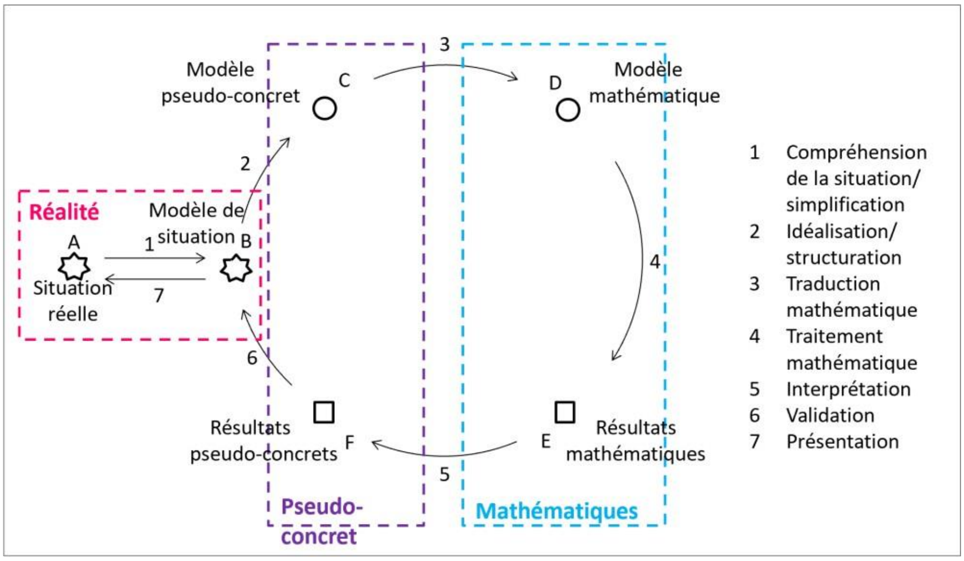


Figure 2. Cycle de modélisation (Derouet, 2022)

Associées à ce cycle de modélisation, nous distinguons les hypothèses de travail et les hypothèses de modèle (Derouet, 2022). Henry (2003) a introduit ses deux types d'hypothèses dans le cadre de la modélisation en probabilités. Selon nous, ces types d'hypothèses peuvent être généralisés au-delà du domaine des probabilités. Les hypothèses simplificatrices[36] de travail (HST) sont à relier au modèle pseudo-concret. Elles permettent de lister l'ensemble des choix faits permettant de décrire un modèle pseudo-concret dans un langage courant. Les hypothèses simplificatrices de modèle (HSM), à relier au modèle mathématique, permettent quant à elles de définir le modèle dans le langage mathématique approprié. Les hypothèses de modèle sont la traduction mathématique plus ou moins directe des hypothèses de travail. Il n'est pas exclu que certains choix restent encore à faire lors de la phase 3. Il faut avoir conscience que plusieurs choix différents peuvent être faits quant aux hypothèses de travail/modèle, qui peuvent donc amener à des modèles pseudo-concret/mathématique différents.

Cycle de modélisation et mathématisation

Le cycle considéré ci-dessus ne permet pas de mettre suffisamment en évidence les spécificités de la mathématisation horizontale ; nous proposons donc dans cette contribution de combiner l'approche de Yvain-Prébiski (2021) et de Derouet (2022), qui nous semblent complémentaires, pour affiner notre cycle de modélisation.

Le travail associé aux phases 1, 2 et 3 relèvent de la mathématisation horizontale. L'étape de modèle de situation met en évidence la nécessité d'émettre des premières hypothèses simplificatrices sur la situation réelle avant d'émettre des hypothèses simplificatrices de travail, sur l'identification des variables qui influent sur la situation réelle puis de les mettre en relation, pour décrire un modèle pseudo-concret. Plusieurs choix différents d'hypothèses sont possibles, qui génèrent autant de problèmes susceptibles d'un traitement mathématique (certains autres ne permettant pas de traitement mathématique, tout du moins à un niveau scolaire donné). Une combinaison de plusieurs hypothèses simplificatrices de travail amène à un modèle pseudo-concret particulier, associé à un problème mathématique (figure 1) mais encore en langage courant d'où le fait que nous utiliserons la terminologie problème pseudo-concret, qui sera associé à un problème mathématique, une fois celui-ci en langage mathématique.

Nous pouvons alors enrichir notre cycle de modélisation (figure 3) en mettant en évidence les étapes relatives au travail de MH (figure 1).

[36] Nous avons ajouté le qualificatif « simplificatrices » pour être en cohérence avec les termes employés par Yvain-Prébiski (2021) et pour montrer que ces deux types d'hypothèses précisent ce qu'elle appelle hypothèses simplificatrices.

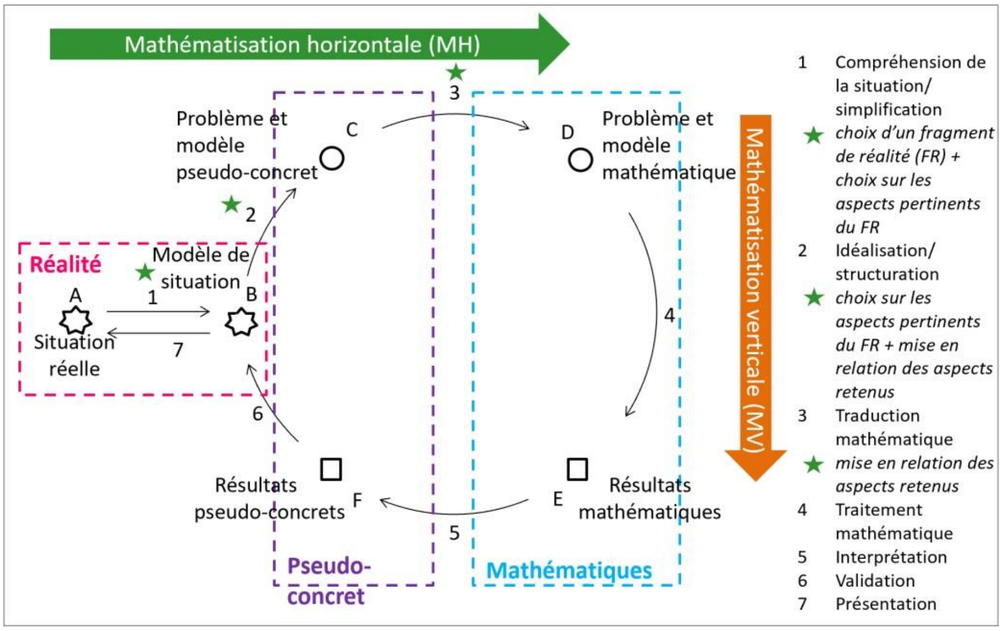


Figure 3. Cycle de modélisation mathématique pour notre étude

Nous ne faisons pas apparaître les interconnexions possibles entre les deux aspects de la mathématisation et les différentes phases car nous considérons ce cycle comme un outil pour le chercheur, mais bien entendu dans le travail effectif de l'élève ou même dans les pratiques du modélisateur expert toutes les phases ne sont pas forcément explicitées ou visibles et des allers-retours sont possibles entre ces différents aspects (Yvain-Prébiski, 2021). En revanche, même si les choix faits par le solveur ne sont pas nécessairement visibles, ils sont sous-jacents au choix d'un modèle.

L'objectif de cette contribution est de montrer comment notre cadrage théorique présenté ci-dessus nous outille pour piloter des analyses de situations ancrées dans le réel. Nous nous restreignons ici à montrer l'opérationnalité de notre outil théorique et méthodologique pour analyser *a priori* une situation ancrée dans le réel, en mettant en évidence les choix et les hypothèses simplificatrices sous-jacents aux modèles mathématiques. La visée de cet outil est d'étudier *a posteriori* la prise en compte ou non par les élèves, les enseignants et/ou les formateurs d'enseignants de la nécessité de mathématiser une situation ancrée dans le réel pour pouvoir envisager un traitement mathématique. Comme l'illustre notre cycle de modélisation (figure 3), cette mathématisation qui relève principalement de la MH nécessite de faire des choix avant l'élaboration d'un modèle mathématique. Nous visons, dans le projet plus global (non étudié ici), à donner à voir si ces choix sous-jacents au modèle mathématique sont explicites ou implicites pour les élèves, les enseignants et les formateurs.

PRESENTATION ET MISE A L'EPREUVE D'UN OUTIL D'ANALYSE DE SITUATION DE MODELISATION

A l'aide de notre cadrage théorique, nous allons mener une analyse *a priori* d'une situation ancrée dans le réel intitulée « Aire de baignade » issue d'une formation continue (Derouet et Yvain-Prébiski, 2021). Cette situation a été choisie et conçue par l’équipe de formation du groupe Activités de l’IREM de Rouen, et non par les chercheuses.

La situation « Aire de baignade »

La situation de modélisation « Aire de baignade » (figure 4) est analysée ici dans une perspective de mise en œuvre dans une classe de troisième ou seconde en France (grade 9-10). Nous focaliserons notre analyse sur l’ensemble du processus permettant de passer de la situation ancrée dans le réel (situation réelle) à un problème mathématique.

Aire de baignade

Les moniteurs d’une colonie de vacances souhaitent amener 120 enfants se baigner tous ensemble dans un lac.
Pour délimiter une aire de baignade, ils disposent d’une ligne d’eau de longueur 25 m.

> Article D1332-10 Transféré par Décret n°2008-990 du 18 septembre 2008 - art. 1
> Modifié par Décret n°2006-676 du 8 juin 2006 - art. 2 () JORF 10 juin 2006 (extrait)
>
> La fréquentation maximale instantanée en baigneurs présents dans l'établissement ne doit pas dépasser trois personnes pour 2 mètres carrés de plan d'eau en plein air et une personne par mètre carré de plan d'eau couvert.

Pourront-ils respecter la législation ?

Figure 4. Énoncé de la situation étudiée

Analyse mathématique de la situation

Afin de clarifier notre propos, nous définissons plusieurs termes que nous allons utiliser par la suite :

- Zone de baignade : contrairement au vocabulaire employé dans la situation, nous utiliserons le terme « zone de baignade » pour désigner la partie du lac délimitée pour la baignade ;
- Aire de la zone de baignade : pour parler de la superficie de la zone de baignade (et non aire de baignade, pour ne pas provoquer de confusion entre grandeur et objet) ;
- Plage : partie terrestre accolée à la zone de baignade (un bord du lac).

Voici quelques éléments mathématiques pour aborder ce problème en troisième ou seconde (grades 9 ou 10). Nous prenons le parti dans cette section de ne pas détailler les choix sous-jacents, mais d’aller directement au problème et au modèle mathématique (nous y reviendrons ensuite). Pour ne pas dépasser 3 personnes pour 2 mètres carrés dans l’aire de baignade, il faut au minimum une zone de baignade de 80 m², en utilisant un modèle de proportionnalité. On peut ensuite envisager plusieurs formes de zone de baignade : rectangulaire, polygonale quelconque, demi-circulaire… Avec une ligne d’eau de 25m, la zone de baignade en demi-cercle a une aire supérieure à 80m², en revanche la zone rectangulaire a une aire inférieure.

Deux approches sont possibles pour aborder ce problème : soit on teste des formes de zone de baignade et on vérifie si on peut mettre les 120 enfants à l'intérieur en respectant la loi (approche 1), soit on cherche pour quelle aire de zone de baignade on peut mettre 120 personnes puis on vérifie si on peut atteindre cette aire suivant les formes de zone de baignade choisie (approche 2).

Dans le cadre de notre recherche, nous cherchons quels sont les éléments relevant de la mathématisation horizontale sous-jacents à ces modèles mathématiques et donc quels sont les choix, les hypothèses simplificatrices sous-jacents. Nous cherchons aussi à mettre en évidence d'autres modèles mathématiques possibles, liés à d'autres choix faits.

De la situation réelle au modèle de situation

Les premiers éléments de la mathématisation horizontale se situe au niveau du passage de la situation réelle donnée au modèle de situation (phase 1) : celle-ci demande déjà de faire des choix sur différents aspects de fragments de réalité considérés.

Les choix et les simplifications en lien avec la compréhension du problème réel notamment, portent sur différents fragments de réalité et sont liées à des questions sur la situation :

- Le lac : Dans quel lac les enfants vont-ils se baigner ? Un lac est-il en plein air ? Quelle est l'aire du lac ?
- Contexte de la baignade : Quels âges ont les enfants de la colonie[37] ? Tous les enfants veulent-ils se baigner ? Les animateurs se baignent-ils avec les enfants ? Combien y a-t-il d'animateurs qui se baignent ? Quelle interprétation du « tous ensemble » ? Les enfants se baignent-ils tous au même moment ? Y a-t-il d'autres personnes extérieures au groupe qui se baignent au même moment dans la zone de baignade ?
- Règlementations : Quelles règlementations prenons-nous en compte pour résoudre ce problème ?
- Le décret : S'applique-t-il ici ? La règle des 3 personnes pour 2 m² s'applique-t-elle pour les personnes dans l'eau ou aussi à proximité ?
- La zone de baignade : Comment comprendre « aire de baignade » de l'énoncé ? Qu'est-ce qu'une zone de baignade ? Quelles contraintes pour former la zone de baignade ? Y a-t-il une zone de baignade aménagée et surveillée déjà existante sur le lac ? Ou est-ce une zone de baignade à construire ?
- La ligne d'eau : Qu'est-ce qu'une ligne d'eau ? A quoi sert la ligne d'eau ? Comment la ligne d'eau tient-elle en place ? Quelle est la longueur de la ligne d'eau ?

[37] L'âge des enfants influence, en France, la règlementation en termes d'encadrement de baignade.

En faisant des choix et hypothèses qui sont raisonnables d'être attendus dans le contexte scolaire lors de cette phase et en les combinant, nous pouvons aboutir à un nouveau problème simplifié : 120 personnes exactement veulent se baigner au même moment, sans autres personnes extérieures, dans une zone de baignade à construire sur un lac (en plein air) très grand, en respectant le décret. Pour délimiter la zone de baignade, elles disposent d'une ligne d'eau de 25 m (la zone de baignade est attenante à la plage et la ligne d'eau n'est pas à disposer le long de la délimitation plage/lac). Pourront-ils respecter les contraintes du décret donné, à savoir construire une zone de baignade pour laquelle il est possible de ne pas dépasser 3 personnes pour 2m² ?

Les choix effectués portent sur la compréhension du problème et pour certains relèvent clairement d'une simplification de la réalité : en dehors du décret qui n'est en fait pas applicable en l'état sur un lac[38], il n'est en vérité pas raisonnable que 120 enfants se baignent simultanément en colonie et encore moins sans animateurs…

Le nouveau problème débouchant sur une question principale, peut amener deux sous-questions (si l'on se place dans l'approche 2) :

- Quelle aire doit faire la zone de baignade pour respecter le décret ? (Q1)
- Existe-t-il une forme de zone de baignade dont l'aire est supérieure à celle nécessaire pour respecter le décret ? (Q2)

Pour aborder ces questions, de nouveaux choix vont être nécessaires.

Du modèle de situation au modèle pseudo-concret

La question Q1 porte essentiellement sur le fragment de réalité « Le décret » mais qui a été au préalable mis en relation avec les choix faits dans « Règlementations » et « Contexte de la baignade » lors de la phase précédente. Pour aborder cette question, reste alors à supposer une relation de proportionnalité entre le nombre de personnes dans l'eau et l'aire de la zone de baignade. Nous ne développerons pas davantage cette question car le travail de modélisation associé est moins riche que pour la question Q2.

Lors de cette phase, les choix à effectuer pour la question Q2 sont beaucoup plus nombreux et il y a plus de possibilités d'hypothèses simplificatrices de travail.

Pour plusieurs fragments de réalité, des questions se posent. Par exemple, pour le fragment de réalité « Le lac », les questions suivantes sont à prendre en compte : Comment prendre en compte les mouvements de l'eau du lac ? Quelle est la forme globale du lac ? Pour « La zone de baignade » : A-t-elle une aire qu'elle ne doit pas dépasser ? Quelle forme doit prendre la zone de baignade ? Pour le fragment de réalité « La plage » : La délimitation plage/lac doit être de quelle forme ? Pour « La

[38] En réalité, ce texte de loi s'applique seulement pour des lieux de type « piscine extérieure » ou « plan d'eau aménagée », avec une entrée payante ou au moins contrôlée, et il signifie que le nombre de personnes présentes dans ces lieux ne doit pas dépasser 3 personnes pour 2m² (pour les bassins extérieurs).

ligne d’eau » : Peut-on la plier ? la courber ? la tordre ? La ligne d’eau est-elle sécable ? A-t-on suffisamment de matériel (flotteurs) pour que la zone de baignade ait n’importe quelle forme ? Doit-on prendre en compte l’épaisseur de la ligne d’eau ou non pour déterminer l'aire de la zone de baignade ? Quelle forme prend la ligne d'eau ?

Bien entendu, les questions portant sur des fragments de réalité différents peuvent faire doublon. Ces différentes questions peuvent aboutir à différentes hypothèses simplificatrices et différentes combinaisons de choix sont alors possibles (certaines hypothèses sont dépendantes, d’autres non).

Le tableau 1 présente un modèle pseudo-concret envisageable et sous-jacent à un des modèles mathématiques attendus des enseignants (grades 9 ou 10). Il est décrit par les différentes hypothèses simplificatrices de travail associées ainsi que les choix déjà faits à la phase précédente, qui peuvent relever notamment de données de l’énoncé du problème. Dans le tableau sont présentés des choix, nous n’argumentons pas ici les raisons de ces choix. Certaines hypothèses peuvent sembler redondantes mais nous les avons gardées car elles portent sur des fragments de réalité différents.

	Hypothèses simplificatrices de travail (HST) et données de l’énoncé retenus
1	Le lac est aussi grand que l’on veut (en termes de superficie), au-delà de $1km^2$: à savoir il est beaucoup plus grand que l’aire nécessaire pour accueillir les 120 enfants
2	On considère que l'eau du lac est immobile (pas de vague).
3	Le lac est supposé de forme "globalement" arrondie.
4	La zone de baignade doit être délimitée (fermée). La zone doit être accolée à un bord du lac (ce bord est appelé la plage). La délimitation plage/lac constitue une partie de la délimitation de la zone de baignade.
5	La zone de baignade est à construire à l’aide d'une ligne d'eau de longueur 25 m.
6	Il n'est pas concevable que l'aire de la zone de baignade soit « trop grande ».
7	La zone de baignade est nécessairement rectangulaire.
8	La délimitation plage/lac est considérée rectiligne.
9	La ligne d'eau sert à délimiter la zone de baignade. Elle n'est pas à disposer le long de la délimitation plage/lac.
10	La ligne d'eau tient à l'aide de flotteurs reliés au sol.
11	La ligne d'eau a une longueur de 25 m.
12	On considère que la ligne d'eau peut prendre toutes les formes que l'on souhaite.
13	On considère que la ligne d'eau n'est pas sécable.
14	On considère que l'on a autant de flotteurs que l'on veut.
15	On considère que la ligne d'eau n'a pas d'épaisseur.
16	La ligne d'eau est composée de lignes droites seulement.

Tableau 1. Description d’un modèle pseudo-concret pour aborder la question Q2

Du modèle pseudo-concret au modèle mathématique

Les hypothèses simplificatrices de travail pourraient être encore plus précises. Par exemple pour l'hypothèse 16 : on pourrait préciser que la ligne d'eau est composée de 3 lignes droites, mais ce choix peut survenir seulement lors des hypothèses simplificatrices de modèle (à la phase 3).

En tout cas, le modèle pseudo-concret décrit dans le tableau 1 amène à un modèle mathématique « modèle rectangulaire » (figure 5) qui prend appui notamment sur trois hypothèses simplificatrices de modèle mises en relation, issues des HST exposées ci-dessus :

- La délimitation plage/lac est un segment.
- La zone de baignade est un rectangle.
- La ligne d'eau est une ligne brisée composée de 3 lignes rectilignes.

Figure 5. Le modèle mathématique rectangulaire

Pour arriver à ce modèle mathématique, on aurait pu envisager un autre modèle pseudo-concret par exemple en modifiant l'hypothèse 12 par l'hypothèse simplificatrice de travail « la ligne d'eau est partiellement rigide », et donc ne peut pas prendre toutes les formes possibles. Ce qui n'empêcherait pas d'aboutir à une HSM qui permettrait d'envisager le modèle mathématique rectangulaire. Cela met bien en lumière que plusieurs modèles pseudo-concret différents peuvent conduire à un même modèle mathématique.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

A travers cette analyse a priori, nous avons mis en évidence l'opérationnalité de notre outil théorique et méthodologique. Selon nous, il permet de bien identifier les choix et les hypothèses simplificatrices sous-jacents à un choix de modèle mathématique. Que ces choix soient explicites ou implicites, qu'ils soient conscients ou inconscients pour l'élève, l'enseignant ou le formateur, ces choix sont nécessairement embarqués dans un modèle mathématique. Ils sont nécessaires pour réussir à traiter mathématiquement une situation ancrée dans le réel. Ce travail qui relève de la mathématisation horizontale est un enjeu majeur dans la démarche de modélisation.

Dans le cadre de notre projet de recherche plus vaste (Derouet & Yvain-Prébiski, 2021), une de nos questions de recherche est : Comment est prise en compte, dans la formation continue étudiée, la nécessité de mathématiser la situation ancrée dans la vie réelle pour la rendre accessible par un travail mathématique (si cela est pris en compte) ? Nos hypothèses de recherche sont, dans le contexte d'une situation ancrée dans le réel, que les enseignants et les formateurs :

- Soit, n'ont pas toujours conscience des choix sous-jacents à un modèle mathématique.
- Soit, en ont conscience, mais n'en font pas un enjeu de formation ou d'enseignement (Yvain-Prébiski & Chesnais, 2019).

Dans le cadre de ce projet, l'outil d'analyse présenté dans cette communication devrait nous permettre de mettre en évidence la prise en compte ou non de la mathématisation horizontale au sein d'un dispositif de formation d'enseignants, à la fois au niveau de la formation et au niveau des classes. Cela donnera à voir dans quelles phases du cycle de modélisation sont prises en compte ou non les hypothèses simplificatrices et si cela engendre des difficultés ou des blocages de formation (côté formateur), d'enseignement (côté enseignants) ou d'apprentissage (côté élèves).

Nous faisons l'hypothèse qu'il convient de choisir le modèle de situation avec la classe, et même certaines hypothèses simplificatrices de travail, avant d'aller plus loin dans le processus de modélisation (au risque de compliquer le travail de l'enseignant). En effet, il y a beaucoup de choix à faire. Certains choix sont moins « importants » que d'autres ou tout au moins impactent dans une moindre mesure le travail de modélisation. Si on laisse autant de choix ouverts, la première mise en commun doit revenir sur ces choix possibles avant de rentrer dans le travail mathématique adossé à ces choix. En effet, cela permettra d'éviter de se focaliser sur le traitement mathématique (mathématisation verticale) sans comprendre, ni même savoir, quels choix ont été faits pour les mises en relation réalisées. Impossible alors de confronter le résultat mathématique à la situation « réelle » puisqu'on ignore les choix réalisés dans le réel avant le traitement mathématique.

Pour conclure, les recherches sur la modélisation mathématique sont souvent axées sur la pertinence du modèle mathématique choisi, mais rarement sur la mathématisation horizontale et donc sur les choix à faire sous-jacents à l'élaboration ou à l'utilisation d'un modèle mathématique. Cet outil théorique détaillé ici nous semble pertinent pour se centrer sur les hypothèses simplificatrices inhérentes au choix d'un modèle mathématique.

REFERENCES

Blum, W. et Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems ? The example "Sugarloaf" and the DISUM Project. Dans C. Haines, P. L. Galbraith, W. Blum et S. Khan (Dir.), *Mathematical modelling (ICTMA12) – Education, engineering and economics* (p. 222–231). Horwood.

Coulange, L. (1998). Les problèmes « concrets » à « mettre en équation » dans l'enseignement. *Petit x, 47*, 33-58.

Derouet, C. (2022). Caractérisation de démarches de modélisation probabiliste. *Les annales de didactique et de sciences cognitives, 27*, 89-131.

https://journals.openedition.org/adsc/1349

Derouet, C., & Yvain-Prébiski, S. (2021). Premiers jalons d'une recherche sur l'enseignement et l'apprentissage de la modélisation au sein d'un dispositif de formation continue français inspiré des Lesson Study. Dans N. S. Anwandter Cuellar, C. Corriveau, V. Robert, & F. Venant (Dir.), *La formation continue en enseignement des mathématiques dans le contexte sociopolitique actuel : entre contraintes et libertés. Actes du Colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec 2021* (pp. 84–96). Université du Québec enOutaouais. https://www.dropbox.com/s/89jrb7tnl2ysovt/2021%20Actes%20GDM%20Avec%20R%C3%A9f%C3%A9rences.pdf?dl=0

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Kluwer Academic.

Hankeln, C., & Hersant, M. (2020). Processus de modélisation et de problématisation en mathématiques à la fin du lycée. Une étude de cas dans une perspective de didactique comparée. *Education et Didactique*, *14*(3), 39– 67.

Henry, M. (1999). L'introduction des probabilités au lycée : un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie. *Repères-IREM*, *36*, 15–34.

Henry, M. (2003). Des lois de probabilité continues en terminale S, pourquoi et pour quoi faire ? *Repères - IREM*, *51*, 5–25.

Israël, G. (1996). *La mathématisation du réel : essai sur la modélisation mathématique*. Seuil Eds.

Yvain-Prébiski S. (2018). *Étude de la transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation mathématique dans les sciences du vivant. Analyse des conditions de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves* [Thèse de doctorat, Université de Montpellier]. https://tel.archives- ouvertes.fr/tel-01956661v1

Yvain-Prébiski S. & Chesnais A. (2019) Horizontal mathematization : A potential lever to overcome obstacles to the teaching of modelling. Dans U.T Jankevist & M. Veldhuis (Dir.), *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1284–1291). Freudenthal Group Freudenthal Institute, ERME.

Yvain-Prébiski, S. (2021). Didactical adaptation of professional practice of modelling : a case study. Dans F.K.S. Leung, G.A. Stillman, G. Kaiser, & K.L. Wong (Dir.), *Mathematical Modelling Education in East and West. International Perspectives on the Teaching and Learning of MathematicalModelling*. (pp. 305-319). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996- 6_26

RÉSOLUTIONS D'EQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ EN IUTGEII - ETM PERSONNEL DES ETUDIANTS

Philippe Hoppenot

Université Paris-Saclay, Univ Evry - LDAR, Université de Paris, Univ Paris Est Créteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN

À l'entrée en IUT, certains étudiants rencontrent des difficultés dans la manipulation des expressions algébriques en général et pour la résolution des équations du premier degré en particulier. L'objectif de ce travail est de mesurer si ces étudiants ont conscience qu'ils sont en présence d'une équation du premier degrélorsqu'ils se retrouvent face à certaines questions. Il montre qu'un nombre importantd'étudiants ne reconnaissent pas les équations qui leur sont proposées comme des équations du premier degré.

INTRODUCTION

En IUT Génie Électrique et Informatique Industrielle, les étudiants sont régulièrement amenés à manipuler des expressions algébriques et à résoudre des équations simples, en particulier du premier degré. Ces étudiants sont issus, pour une part importante (45% à 50% ces dernières années), de bacs technologiques STI2D. Dans la pratique, il s'avère que plusieurs d'entre eux ont des difficultés pour obtenir des résultats corrects. Un exemple typique est le suivant:

Sachant que $A_v = 1 + \frac{R_{27}+P_5}{R_{26}} = 9{,}75$, calculer P_5 avec $R_{27} = 15\ k\Omega$ et $R_{26} = 2{,}2\ k\Omega$.

CADRE THÉORIQUE

Une étude historique (Sirejacob, 2018) montre que "l'usage d'un symbolisme algébrique a mis longtemps à émerger dans la résolution de problèmes, d'abord solutionnés en langage naturel ; de même, pendant longtemps, des théorèmes généraux ont été énoncés mais uniquement illustrés ou expliqués sur des exemples numériques" (ibid, p.187). Cela peut expliquer les difficultés des élèves et des étudiants à qui on demande d'intégrer un symbolisme complexe rendant compte de notions abstraites complexes. Ils semblent développer des conceptions (au sens de Tall et al,1981) erronées sur ces notions. Dans son étude, Sirejacob se pose les questions suivantes : "qu'est-ce qui est au cœur de la génération des équations et de leur manipulation ? Qu'est-ce qui leur donne des raisons d'être et du sens chez les élèves ? Comment prennent-elles place au sein des curricula ?" (ibid, p.225). Bien souvent, en physique et en électricité en particulier, la question de la modélisation (aussi présente dans Blum, 2007) est éludée étant hors de portée des élèves.

La question de la dialectique entre numérique et algébrique est aussi très présente dans la littérature déjà depuis de nombreuses années (Chevallard, 1989). Il constate que :

> La manipulation des expressions algébriques au cours du premier apprentissage organisé au collège, en effet, n'est tendue vers aucun but (mathématique) extérieur au

calcul algébrique, lequel doit alors trouver en lui-même la source de ses propres exigences. Aussi les « règles » de cette manipulation sont-elles immotivées, purement formelles, s'exprimant par des consignes elles-mêmes standardisées (développer, factoriser, etc.) (p. 47).

Pour des étudiants ayant suivi un cursus technologique au lycée, trouver dans le calcul algébrique "la source de ses propres exigences" est une gageure.

Dans leur article de 1981, David Tall et Shlomo Vinner (1981) les difficultés des élèves sont interprétées en termes de représentation erronée des concepts auxquels ils sont confrontés. Tall et Vinner s'appuient sur deux notions, celle de concept-image et celle de concept-définition. La première, celle de concept-image, est définie comme la "structure cognitive complète associée au concept qui inclut toutes les images mentales et les propriétés et processus associés". La seconde, celle de concept-définition, est définie comme "l'ensemble de mots utilisés pour spécifier le concept". Lorsque les mots et les images ne sont pas en totale concordance, un conflit cognitif survient chez l'élève : une "partie de l'image ou de la définition du concept qui peut être en conflit avec une autre partie de l'image ou de la définition du concept".

Dans toutes ces études, une question est absente : les élèves reconnaissent-ils qu'ils sont en présence d'une équation du premier degré lorsqu'ils se retrouvent face à l'énoncé donné ci-dessus ? C'est à cette question que l'on apporte des éléments de réponse dans ce papier. Un questionnaire a été proposé à des étudiants de première année de DUT en septembre 2018 et en septembre 2019. L'idée directrice de ce questionnaire est de demander aux étudiants de dire ce qu'ils savent sur les équations du premier degré mais aussi de reconnaitre certaines formes et les moyens de se ramener à des formes connues. Sans proprement parler de la résolution de ces problèmes. Pour chacune des questions, l'ETM idoine est décrit. L'analyse des réponses des étudiants permet d'expliciter les ETM personnels des étudiants.

MÉTHODOLOGIE

Contexte de l'étude

Le département Génie Électrique et Informatique Industrielle de l'IUT d'Evry val d'Essonne accueille des étudiants issus, pour une part importante (45% à 50%), de bacs technologiques STI2D. Leur habileté dans la manipulation des expressions algébriques n'est pas toujours à la hauteur des attendus à l'entrée à l'université. Néanmoins, ils sont régulièrement amenés à manipuler des expressions algébriques et à résoudre des équations simples, en particulier du premier degré. Ces étudiants sont issus, pour une part importante (45% à 50% ces dernières années), de bacs technologiques STI2D.

Au premier semestre de leur cursus, ils ont un cours de mathématiques portant sur la trigonométrie, les nombres complexes et l'étude de fonctions (polynômes, fractions rationnelles, logarithme et exponentielle). Le constat fait depuis plusieurs années de leurs difficultés dans la manipulation des expressions algébriques a conduit à retravailler cette question.

Description de l'expérimentation

L'expérimentation s'est déroulée dans un groupe de TD (26 étudiants), en tout début des années universitaires 2018-2019 et 2019-2020. L'enseignant a présenté le questionnaire aux étudiants, en insistant sur le fait que ce questionnaire ne donnait paslieu à une évaluation. Il a insisté sur l'intérêt que chaque étudiant travaille seul afin derécupérer des informations les plus fidèles possibles. Les questionnaires sont anonymes.

Les questions posées dans le questionnaire cherchent à mesurer la capacité des étudiants à énoncer les formes génériques classiques des équations du premier degré,à les reconnaitre dans des formes complexes, à les transformer dans les formes génériques. Ce travail est inhabituel et néanmoins indispensable.

Les équations à reconnaitre proviennent de documentations techniques de composantsélectroniques, de mécanique. Elles font intervenir plusieurs lettres, une seule étant l'inconnue les autres ayant des valeurs fixées par l'objectif à atteindre et les contraintesdu contexte. Elles sont de deux types :

- des équations du premier degré, l'inconnue étant dans le membre de droite de l'équations (les équations 1, 4, 7 et 8 de la question 2) ;
- des équations n'étant pas du premier degré (les équations 2, 3, 5 et 6 de la question 2) ; l'équation 2 est en fait un système, la 3 peut être résolue comme uneéquation du premier degré mais la variable apparait au dénominateur, les équation5 et 6 étant du second degré.

ETM IDOINE

La première question, "Donnez toutes les formes qui vous viennent à l'esprit pour une équation du premier degré", fait référence au **référentiel théorique**.

Dans la seconde, "Parmi les problèmes suivants, lesquels selon vous reviennent-ils à résoudre une équation du premier degré ?", deux types de problèmes sont présents : dans les premiers, l'équation est déjà sous la forme d'une équation du premier degré (on l'appellera écriture directe) et c'est alors la **genèse sémiotique** qui est activée ; dans les seconds, l'écriture de l'équation doit être modifiée pour que la forme du premier degré apparaisse (on l'appellera écriture indirecte) et le travail mathématique est donc dans le plan **[Ins-Dis].**

La troisième question, "Si de nouvelles formes d'équation du premier degré vous viennent à l'esprit, rajoutez-les ici", permet d'enrichir le **référentiel théorique** de la question 1.

La quatrième question, "Donnez le maximum de formes d'équation qui vous viennent à l'esprit et qui reviennent selon vous à résoudre une équation du premier degré", aborde les problèmes dont les mises en équation ne sont pas formellement de la forme du premier degré mais leur résolution revient à une équation du premier degré. Le travail mathématique est alors dans le plan **[Sem-Dis]**.

La cinquième question, "Quels critères pourriez-vous donner pour déterminer si une équation donnée est du premier degré ou non ?", aborde précisément la question de la reconnaissance du type de travail mathématique qui sera mis en jeu dans la résolution du problème. Les techniques de transformation des écritures algébriques étant travaillées dès le collège (Ministère de l'éducation nationale, 2008), on peut considérer que leur mise en œuvre correspond à la genèse instrumentale ; ainsi, le travail mathématique est ici dans le plan **[Ins-Dis]**.

Les questions 6 et 7, "Pour chacune des formes d'équation du premier degré citées en 1 et 3, expliciter les transformations que vous jugez nécessaires pour se ramener à une équation de la forme : $ax + b = 0$" et "Pour chacune des formes d'équation revenant à résoudre une équation du premier degré citées en 4, expliciter les transformations nécessaires pour se ramener à une équation de la forme : $ax + b = 0$", le travail mathématique a encore lieu dans le plan **[Ins-Dis]**. Le travail des étudiants attendu ici est celui d'un technicien au sens de Nechache (2017).

La figure 1 montre le travail circule dans toutes les genèses : le questionnaire permet aux étudiants de s'engager dans un travail complet.

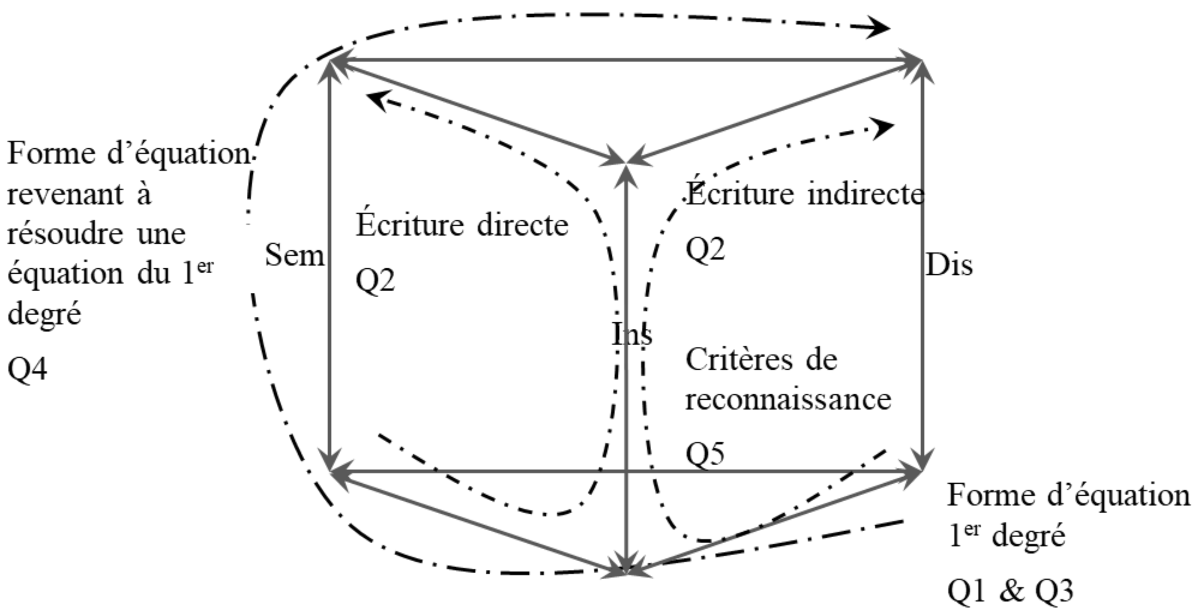


Figure 1. Circulation dans l'ETM idoine

ETM PERSONNELS DES ÉTUDIANTS

L'analyse des ETM personnels des étudiants révèle des écarts, parfois importants, avec l'ETM idoine. Concernant la première question sur les formes possible d'une équation du premier degré, sur 26 questionnaires dépouillés, 16 étudiants donnent des formes d'équation avec des coefficients littéraux (RTL), dont 2 seulement contiennent l'inconnue dans les deux membres. 4 étudiants ne donnent que des expressions avec des coefficients numériques (RTN). 6 ne donnent aucune réponse. La question 3 invitant à compléter ce référentiel permet à un étudiant de donner une forme littérale et un autre à donner une forme avec des coefficients numériques. Le **référentiel théorique** n'est donc pas au niveau attendu.

Pour la question 2 sur le type de résolution à mettre en œuvre pour résoudre un problème donné, 17 étudiants (dont 13 ont donné une réponse de type RTL à la question 1) reconnaissent les 4 écritures directes proposées, 4 n'en reconnaissent pas plus de la moitié. 10 étudiants (dont 6 ont donné une réponse de type RTL à la question 1) reconnaissent les 2 écritures indirectes proposées et les 2 équations qui ne sont pas du premier degré, 11 (dont 8 ont donné une réponse de type RTL à la question 1) n'en reconnaissent pas plus de la moitié. Il semble que la réponse à la question 1 ne soit par liée à la reconnaissance des types de résolution attendus.

À la question 5 sur les critères permettant de reconnaitre qu'une équation est du premier degré, 12 étudiants seulement parlent de la puissance 1, 6 l'associant à l'inconnue. Seuls ces 6 étudiants fournissent un travail à la fois complet, correct et conforme (au sens de Kuzniak et al., 2016).

Les questions 4, 6 et 7 n'ont reçu que très peu de réponses.

ELÉMENTS D'ANALYSE

Ces premiers résultats montrent que les étudiants qui ont répondu à ce questionnaire ne sont pas familiers avec les équations du premier degré telles qu'elles sont utilisées dans le l'enseignement supérieur. On voit même que certains ne donnent pas la forme littérale $ax + b = 0$ étudiée au collègue.

L'analyse des ETM personnels des étudiants montrent d'abord que le référentiel théorique n'est pas au niveau attendu : seuls 2/3 des étudiants proposent des réponses avec des écritures littérales. Cette base étant déficiente, le reste du travail mathématique ne peut pas se dérouler correctement ; en effet, comment un étudiant peut-il résoudre une équation s'il n'en reconnait pas la forme ? Question que l'on peut formuler différemment pour se rapprocher d'une question de recherche : un rappel des formes génériques d'une équation du premier degré permet-il à des étudiants de mieux reconnaitre des équations de ce type dans une formulation différente ?

La réponse à cette question pourrait sembler évidente. Néanmoins, quelques observations sur l'échantillon analysé nous montrent que ce n'est pas si clair. Un seul étudiant a fourni un ensemble de formes d'équations du premier degré de niveau attendu, littérales et numériques, avec l'inconnue dans les deux membres. Cet étudiant n'a reconnu qu'une équation avec écriture directe et deux avec écriture indirecte ou n'étant pas du premier degré ; c'est un des résultats parmi les plus faibles. A contrario, deux étudiants sur six n'ayant fourni aucune forme d'équation du premier degré en reconnaissent 8 sur 8, et deux autres en reconnaissent 6 sur 8 (deux fois 3 sur 4, en écriture directe et en écriture indirecte). On peut se demander si les étudiants font un lien entre une partie de leur référentiel théorique, en l'occurrence les formes possibles d'équations du premier degré, et le travail mathématique qui leur est demandé, en l'occurrence reconnaitre dans des formes plus complexes des équations du premier degré. N'est-ce pas là en définitive un point clé de leurs difficultés ? Pour y apporter des éléments de réponse, une question pourrait être : demander à des étudiants de relier chaque fois que c'est possible des formes génériques d'une équation du premier degré avec des équations de ce type ou non exprimées dans une formulation différente leur permet-il de mieux reconnaitre ces équations dans une formulation différente comme étant du premier degré ?

Les réponses à la question 5 (critères pour déterminer si une équation donnée est du premier degré ou non) apportent un éclairage sur les réponses aux questions 1 et 3 (formes qui vous viennent à l'esprit pour une équation du premier degré). En effet, seuls 12 étudiants parlent de puissance 1, la moitié seulement d'entre eux l'associant à une inconnue. Ici, deux questions peuvent se poser :

1. La connaissance de critères permettant de déterminer si une équation est du premier degré ou non favorise-t-elle la capacité à donner des formes d'équation du premier degré ?
2. A l'inverse, est-ce que donner différentes formes d'équation du premier degré favorise l'expression de critères pour déterminer si une équation est du premier degré ou non ?

Ces deux questions renvoient aux notions de concept-image et concept-definition définies par Tall et Vinner (1981). La capacité des étudiants à exprimer les deux d'unepart et à les mettre en concordance d'autre part est un moyen pour éviter les conflits cognitifs.

Certaines équations, même si elles ne sont pas strictement parlant du premier degré, peuvent se ramener à une équation du premier degré. C'est le cas de l'équation 3 du questionnaire donné en annexe. Le problème n'est pas ici de déterminer le domaine d'existence de ces équations. Le nombre très faible de réponses à la question 4 (formesd'équation qui reviennent selon vous à résoudre une équation du premier degré) n'est pas très étonnant sur une population ayant déjà du mal à reconnaitre des équations à proprement parler du premier degré. Néanmoins, elles sont fréquemment rencontrées en électricité ; il est donc indispensable que les étudiants les reconnaissent. Pour le moment, nous n'avons pas réfléchi précisément à des moyens de guider des étudiants vers cette reconnaissance.

Enfin, la quasi absence de réponse à la question 6 (de même qu'à la question 7) illustre que les étudiants ne maitrisent pas les transformations pour se ramener à une équation de la forme ax+b=0, qu'ils savent résoudre. Même des étudiants reconnaissant le type d'équation auquel ils ont affaire ne proposent pas de transformation. On peut émettre l'hypothèse que l'utilisation de nombreuses lettres, avec des indices, est une difficulté pour ces étudiants. Une étude des curriculums et des manuels, tant en sciences physique, électricité qu'en mathématiques, pourrait permettre de valider cette hypothèse.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Le bilan de cette première étude montre que 6 étudiants sur 26 ne donnent aucune forme générique d'équation du premier degré et que 4 ne donnent que des formes avec des coefficients numériques. La reconnaissance du type d'équation (premier degré, pouvant se ramener à une équation du premier degré, ou second degré) est de même réussie par 2/3 des étudiants, sans lien avec la capacité à donner les formes génériques.Au-delà de ces deux aspects, les critères pour déterminer si une équation est du premier degré ou non ne sont explicités correctement que par 6 étudiants. Quant aux transformations d'une écriture complexes (rencontrée dans le contexte spécifique de l'électronique) vers l'écriture générique ax+b=0, elles ne sont données que par 2 étudiants. En définitive, les étudiants se retrouvent face à des équations dont ils ne reconnaissent pas toujours la forme et ne connaissent les transformations qui mènent à la forme générique ax+b=0, équation qu'ils savent résoudre (ce n'est pas montré dans cette étude, mais c'est vérifié très généralement en classe).

L'idée de ce travail de mesurer la reconnaissance des équations par les étudiants semble donc pertinente. Toutes les questions évoquées dans le paragraphe précédent sont des pistes pour prolonger ce travail. L'idée est d'amener les étudiants à prendre conscience des équations auxquelles ils sont confrontés, espérant ainsi les mettre dans des conditions plus favorables à leurs résolutions.

RÉFÉRENCES

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education: The 14 th ICMI study*. New York: Springer.

Chevallard Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Seconde partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x 19*, 43-72

Kuzniak A., Tanguy D., Elia I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: anintroduction. *ZDM Mathematics Education (vol 48)*, p. 721-737.

Kuzniak A., Montoya E., Vandebrouck F., Vivier L. (2015). Le travail mathématique en Analyse de la fin du secondaire au début du supérieur : identification et construction. Cours 2, Ecole d'été, Brest.

Ministère de l'éducation nationale. (2008). Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008, programme du collège, http://www.education.gouv.fr/pid20484/special-n-6-du-28-aout-2008.html

Nechache, A. (2017). La catégorisation des tâches et du travailleur-sujet : un outil méthodologique pour l'étude du travail mathématique dans le domaine des probabilités. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives (22)*, 67-90.

Sirejacob S. (2018). *Le rôle de l'enseignant dans l'organisation de l'étude personnellehors la classe de collégiens : le cas des équations du premier degré à une inconnue.* Thèse de doctorat, Université Paris 7 Denis-Diderot, 2018.

Tall David and Vinner Shlomo. (1981). Concept-image et Concept-définition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics (vol. 12)* p.151-169.

ANNEXES

Questionnaire. Équations du premier degré

En électricité, en électronique, en automatique… vous devez fréquemment résoudre des équations du premier degré. Elles sont souvent cachées sous une forme un peu particulière. L'expérience nous montre que vous butez régulièrement sur ces résolutions.

Ce questionnaire est pour nous un moyen de tenter de comprendre où se situent vos difficultés, sachant que vous savez tous résoudre l'équation ax+b=0 ! Il ne comporte aucun piège. Et même, toutes les réponses sont correctes puisqu'on cherche à comprendre vos difficultés et pas à évalue votre niveau. Par exemple, en réponse à la question 1 ci-dessous, si vous proposez une équation qui selon vous est du premier degré et qui ne l'est pas, c'est une information utile pour nous afin de vous aider à progresser.

Ce questionnaire est anonyme. Il n'a pas vocation à évaluer vos connaissances individuellement mais à avoir une vision globale de vos difficultés. Répondez donc cequi vous semble correct, sans échanger avec votre voisin(e) !

1. Donnez toutes les formes qui vous viennent à l'esprit pour une équation du premier degré.
2. Parmi les problèmes suivants, lesquels selon vous reviennent-ils à résoudre une équation du premier degré ?

	Oui	Non	?
$T_H = 0{,}693\, R_8 C_6$. Calculer R_8 avec $C_6 = 15\mu F$ et $T_H = 0{,}332 s$			
$T_H = 0{,}693\, R_6 C_6$. Calculer R_6 avec $C_6 = 15\mu F$ et $T = T_H + T_L = 1{,}2 Hz$			
$f = \frac{1{,}44}{(R_A+2R_B)C}$. Calculer R_A avec C=1nF, RB=5,6kΩ et f=48,5kΩ			
$x = \frac{1}{2} g t^2 - V_0 t + x_0$. Calculer t pour x=2 m, V_0=1,2 ms^{-1}, x_0=0 m et g=10 ms^{-2}.			
$A_V = 1 + \frac{R_{27}+P_5}{R_{26}} = 9{,}57$. Calculer P_5 avec R_{27}=15 kΩ et R_{26}=2,2 kΩ			
$R_{eq} = \frac{R_3 \times R_{18}}{R_3 + R_{18}} = 5k\Omega$. Calculer R_3 avec R_{18}=10kΩ			
$x = \frac{1}{2} g t^2$. Calculer t pour x=2 m et g=10 ms^{-2}.			
$15V = R_1 \times I_1 + R_2 \times I_1$. Calculer R_1 avec R_2=1,5 kΩ pour avoir I_1=3,43 mA			

3. Si de nouvelles formes d'équation du premier degré vous viennent à l'esprit,rajoutez-les ici.

4. Donnez le maximum de formes d'équation qui vous viennent à l'esprit et quireviennent selon vous à résoudre une équation du premier degré.
5. Quels critères pourriez-vous donner pour déterminer si une équation donnée est dupremier degré ou non ?
6. Pour chacune des formes d'équation du premier degré citées en 1 et 3, expliciter lestransformations que vous jugez nécessaires pour se ramener à une équation de la forme : ax+b=0.
7. Pour chacune des formes d'équation revenant à résoudre une équation du premier degré citées en 4, expliciter les transformations nécessaires pour se ramener à une équation de la forme : ax+b=0.

TAREAS DE EVALUACIÓN EN UNA EDUCACIÓN NO PRESENCIAL: CARACTERIZACIÓN EN EL MARCO DEL ETM

Rosa-Elvira Páez-Murillo[a], Víctor Larios-Osorio[b]

[a]Universidad Autónoma de la Ciudad de México, [b]Universidad Autónoma de Querétaro

rosa.paez@uacm.edu.mx, vil@uaq.mx

Dada la necesidad de evaluar los conocimientos y competencias adquiridas por los estudiantes en un curso de cálculo diferencial bajo la modalidad de educación no presencial debido a la pandemia, tuvimos que afrontar diferentes retos. Uno de ellos corresponde al diseño de tareas de evaluación, las cuales son implementadas en un ambiente totalmente autónomo y con el apoyo de todo tipo de herramienta tecnológica. En este contexto, se presenta el diseño de dos tareas de evaluación y el análisis del trabajo matemático de un grupo de 14 estudiantes de ingeniería. Desde un punto de vista metodológico, los diagramas elaborados en el marco de la teoría ETM permiten presentar la caracterización de estas tareas de evaluación.

INTRODUCCIÓN

En el contexto escolar tenemos el compromiso de identificar si el estudiante ha adquirido los conceptos matemáticos que se estipulan en el programa académico. También, identificar sus logros y sus dificultades. Por ello, nos interesa comprender el trabajo matemático que realiza. Así que para ello nos apoyamos de la Teoría de Espacios de Trabajo Matemático. Entendiendo que el trabajo matemático corresponde al proceso intelectual que realiza el individuo en el desarrollo de la tarea, apoyado de sus conocimientos y su cultura matemática, y en el cual hay una movilización de recursos (materiales y/o conceptuales) (Kuzniak, Nechache y Richard, 2022). El cuestionamiento sería ¿cómo evidenciar este proceso intelectual que realiza el individuo?

De acuerdo a lo que Kuzniak (2019) especifica en términos metodológicos, para entender el trabajo matemático de los individuos que se enfrentan a tareas matemáticas tenemos que tomar en cuenta el contenido matemático (naturaleza epistemológica) y los procesos y formas que ellos utilizan en la resolución de la misma (naturaleza cognitiva). Esta organización que se realiza para cada tarea y que se presenta a través de diagramas, nos permite confrontar el trabajo realizado por el estudiante e identificar sus aciertos y dificultades en el desarrollo de la misma. Asimismo, el análisis cognitivo de las tareas nos permite reflexionar acerca de su caracterización. Es decir, nos cuestionamos acerca de ¿cómo es la ruta cognitiva en tareas no rutinarias?, ¿qué características presentan estos tipos de tareas?

ANALISIS COGNITIVO DE LAS TAREAS DE EVALUACIÓN

De los aspectos que se consideraron al momento de contemplar el diseño de las tareas, el primero corresponde a que su resolución permitiera una infinidad de respuestas. Esto con la intención de evitar la reproducción de respuestas idénticas entre los estudiantes, independiente de la comunicación que pudiera existir entre ellos. El análisis cognitivo de cada tarea permite precisar que para reproducir una respuesta es necesario que el estudiante tenga un buen dominio de su referencial teórico.

Una segunda característica es que dada la manera como se aplicó este instrumento de evaluación, el estudiante podía apoyarse de toda herramienta tecnológica, iniciando desde una búsqueda en la red, así como cualquier aplicación que le permitiera explorar y proponer una respuesta posible. Estas tareas no son para evaluar el desarrollo de la técnica, es decir, no existe como tal un algoritmo específico para su resolución. Los cálculos a efectuar son mínimos y el uso de artefactos tecnológicos es de exploración y de apoyo, mas no para encontrar una única respuesta o para que le proporcione los pasos de desarrollo de la misma, como lo hace Photomath o Symbolab, por mencionar alguna de estas aplicaciones que actualmente se encuentran disponibles en la red.

Análisis cognitivo tarea uno (T1):

La tarea proporcionada a los estudiantes es la siguiente:

Proponga (si es posible) **la expresión algebraica** y **la representación gráfica de una función** $h(x)$ que cumpla las siguientes condiciones:

i. $D_h = (-\infty, -\pi] \cup [\frac{3}{2}, 4]$

ii. $h(-\pi) = 0$

iii. $h(\pi) = 1$

iv. $h(x)$ es una función por intervalos

v. $h(x)$ tiene función inversa. No necesita encontrar la función inversa. Pero si debe argumentar por qué tiene función inversa.

En el diagrama de la Figura 1 precisamos los elementos dentro del plano epistemológico relacionados con el contenido matemático que en este caso corresponde al de función y que conciernen con el desarrollo de la tarea de evaluación. También se identifican los procesos en relación a la actividad que tiene que desarrollar el estudiante, las génesis que se activan y los planos que articulan dicha génesis.

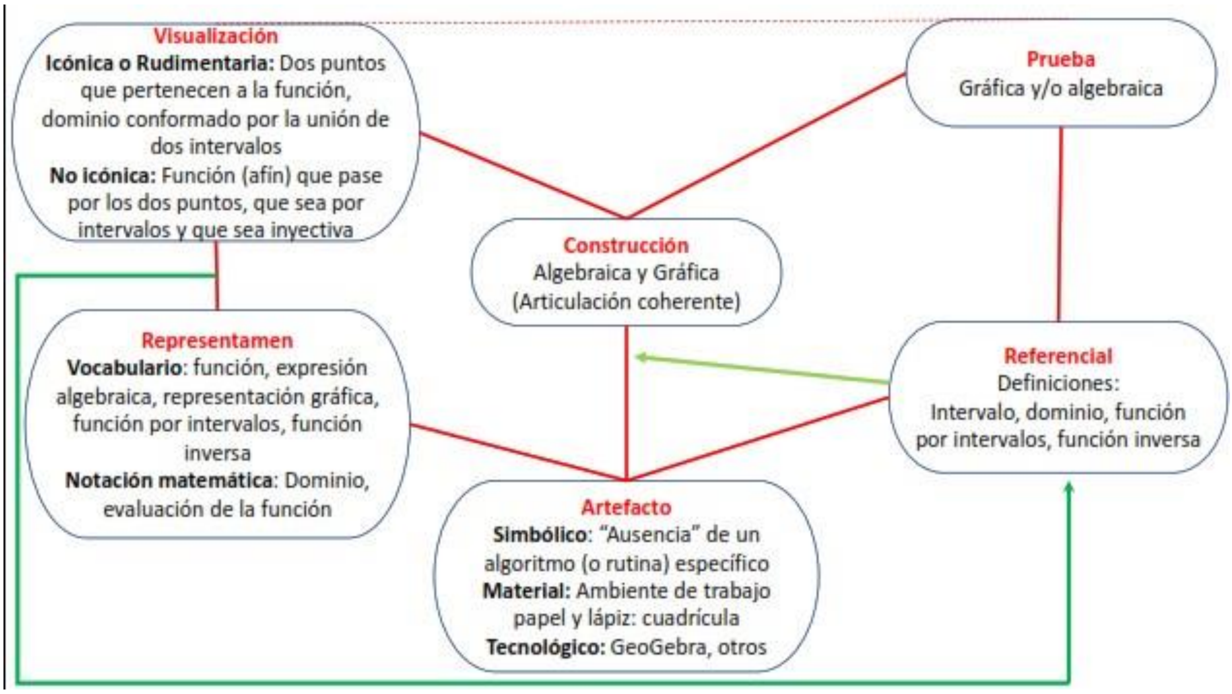


Figura 1. Espacio de trabajo matemático T1

Este análisis cognitivo de la tarea nos permite evidenciar de antemano el trabajo matemático que tiene que realizar el estudiante para lograr un desarrollo satisfactorio. En este caso, con la proposición de la tarea se activa la génesis semiótica, que requiere de un acompañamiento del referencial teórico, seguido de la activación de la génesis instrumental. Es como una ruta inicial del trabajo matemático a desarrollar y que luego se posiciona entre los planos SEM-INT-DIS.

Análisis cognitivo tarea dos (T2):

La tarea proporcionada a los estudiantes es la siguiente:

Proponga (si es posible) y justifique **la expresión algebraica** y **la representación gráfica de una función** $h(x)$ que cumpla las siguientes condiciones:

i. $h(x)$ es una función racional

ii. $\lim_{x\to\infty} h(x) = 5$

iii. $\lim_{x\to\sqrt{2}^+} h(x) = \infty$

iv. Tiene una asíntota vertical en $x = -\sqrt{2}$

v. Especificar el dominio de la función $h(x)$

De la misma manera como se hizo con la T1, en el diagrama de la Figura 2 presentamos los elementos dentro del plano epistemológico relacionados con el contenido matemático que corresponde al de función racional.

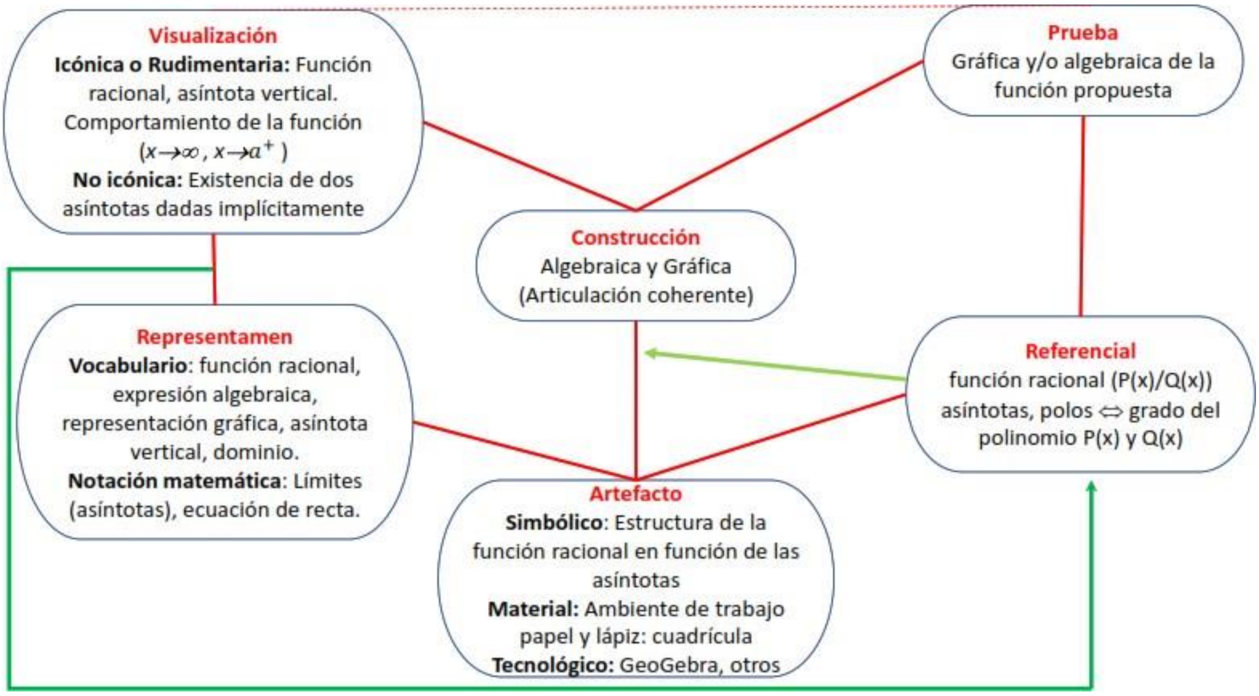


Figura 2. Espacio de trabajo matemático T2

La ruta que hay que seguir para tener éxito en la T2 es igual que en T1. Al igual que también en la tarea presentada en Páez, Pluvinage y Vivier (2019). Aunque el punto de partida para activar la génesis semiótica está en diferentes registros de representación (Duval, 2006). Así, otros cuestionamientos alrededor de las dos tareas propuestas, estará alrededor sobre el registro semiótico por la cual comienzan su trabajo matemático, ya que se les solicita la representación gráfica y algebraica de la función. ¿El inicio en un registro semiótico específico influye en el éxito de la tarea?

PARTICIPANTES Y CONTEXTO

Las dos tareas de evaluación presentadas hacen parte de los instrumentos utilizados para certificar el curso de cálculo diferencial en la licenciatura de ingenierías, en el semestre 2021-I, en una universidad pública en México. Este curso está considerado en el primer semestre y se llevó a cabo de manera no presencial, dada las circunstancias de pandemia.

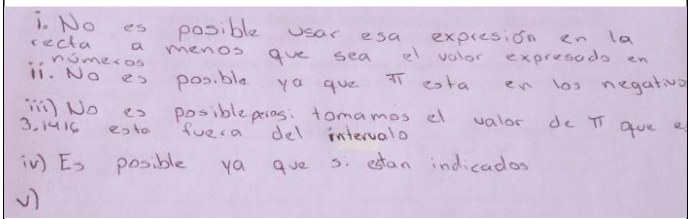
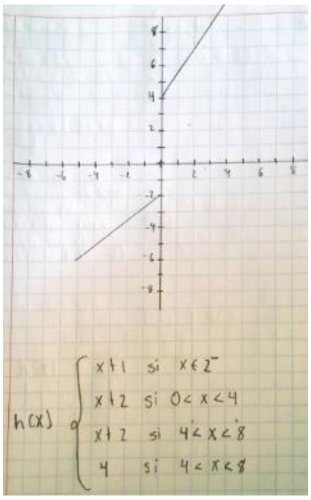
Las tareas de evaluación son desarrolladas en plena autonomía por 14 estudiantes. Es decir, no hubo supervisión por parte del profesor en que existiera comunicación o no entre los estudiantes. Además, podían consultar cualquier tipo de referencia bibliográfica y de apoyo tecnológico en cuanto a softwares y/o aplicaciones para Android, que les ayudara en la resolución de la misma. Lo que si se les informó que no podía haber dos propuestas idénticas de respuestas. Para la entrega y devolución de la tarea fue a través de la plataforma Moodle. El tiempo otorgado para el desarrollo del instrumento de certificación fue de 4 horas.

RESULTADOS

La presentación de los resultados se realiza de acuerdo al trabajo matemático desarrollado por los estudiantes en cada una de las tareas seleccionadas, con la confrontación respectiva de la ruta sugerida por el análisis cognitivo de la tarea.

Resultados obtenidos en la T1

En la Tabla 1, mostramos la caracterización del trabajo matemático en términos de niveles, en relación a la movilización de recursos (materiales y/o conceptuales). De 14 estudiantes que regresaron el primer instrumento de certificación, solo 11 presentan evidencias escritas de su trabajo, 3 no proporcionaron ningún tipo de respuesta.

Nivel del trabajo matemático	Ejemplo de respuesta	Estudiantes
Nivel 1 La movilización del recurso conceptual para desarrollar la tarea, es muy frágil: su trabajo matemático no muestra un referencial teórico que le permita integrar las condiciones dadas para proporcionar función.	 i. No es posible usar esa expresión en la recta a menos que sea el valor expresado en números ii. No es posible ya que π esta en los negativ iii) No es posible pues tomamos el valor de π que e 3.1416 esta fuera del intervalo iv) Es posible ya que si estan indicados v) Respuesta de E6	E1*, E2, E4, E6*, E7, E8, E10
Nivel 2 Existe una movilización del recurso conceptual para desarrollar la tarea, pero se limita anociones ligeras del concepto en cuestión.	 Respuesta de E12	E9 y E12

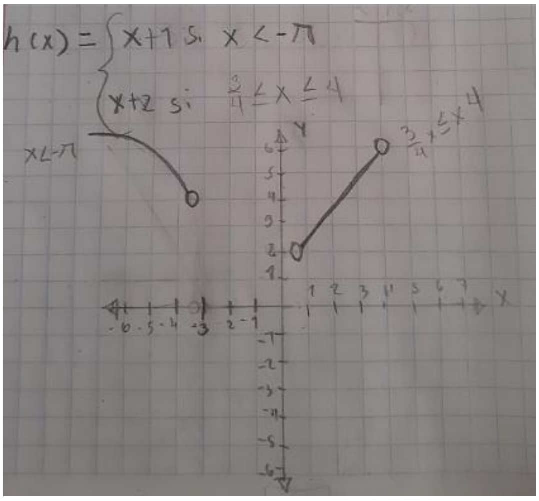
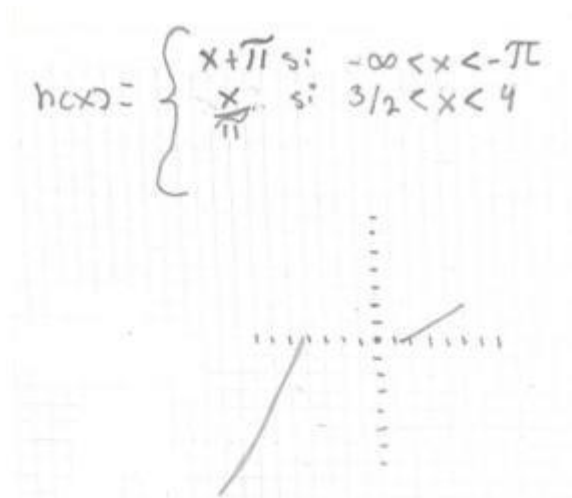
Nivel del trabajo matemático	Ejemplo de respuesta	Estudiantes
Nivel 3 La movilización del recurso conceptual y material, para desarrollar la tarea es más refinado, pero hayevidencia de una ausencia de control entre el registro de representaciones solicitados	 Respuesta de E5	E5
Nivel 4 La movilización del recurso conceptual y material, para desarrollar la tarea es firme y existe un control entre el registro de representaciones solicitados	 Respuesta de E11	E11

Tabla 1. Categorización del trabajo matemático realizado por los estudiantes en T1

En el nivel uno, se tienen 7 estudiantes, lo cual nos lleva a reflexionar sobre la comprensión de la consigna, o sobre el tipo de tarea a desarrollar. En este caso corresponde a un tipo de tarea no rutinaria o una tarea rica (Nechache & Gómez-Chacón, 2022) en la que como se evidencia en el análisis cognitivo, se requiere de una integración de elementos teóricos y de conversión entre los diferentes registros de representación, que permitan la construcción de la función solicitada. Además de tener un control entre los dos registros de representación solicitados.

En este nivel uno, dos estudiantes son influenciados por la presencia del número irracional π, dado que, en los tres primeros incisos especifican "no es posible" y hacen referencia específica a este número.

En el trabajo matemático realizado por los estudiantes, la movilización del recurso tecnológico queda en la *caja negra*. Además, que el uso del artefacto tecnológico muy probablemente haya sido utilizado como apoyo en la representación gráfica. Requiriendo para ello, como es en el caso de GeoGebra, el comando “Si” para el cual es indispensable no solo de un tecleo de la regla de correspondencia para obtener la representación gráfica, sino de un control teórico.

Confrontando el trabajo matemático desarrollado por los estudiantes en esta tarea con el análisis cognitivo mostrado en la Figura 1, podemos precisar que uno de los elementos del referencial teórico que no se activó corresponde al de definición de función inversa. En el proceso de visualización (icónica y no icónica) hay una ausencia de integración entre las características de una función afín con las condiciones solicitadas en esta tarea. Ésta corresponde a la función más simple que hubieran podido proporcionar. Asimismo, evidenciamos en el trabajo intelectual de los estudiantes la presencia o ausencia de control semiótico en los diferentes registros de representación semióticos utilizados.

Resultados obtenidos en la T2.

Del grupo de 14 estudiantes que presentaron la primera evaluación, en la segunda evaluación se redujo a 7. En el caso de la T2, solo 3 estudiantes realizaron un trabajo matemático y su clasificación se muestra en la Tabla 2.

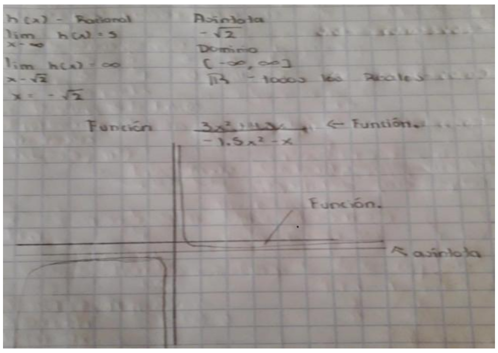
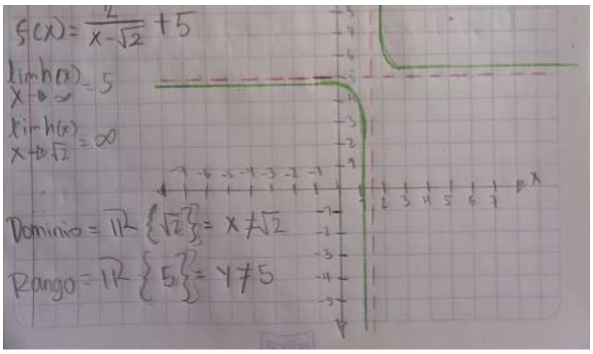
Nivel del trabajo matemático	Ejemplo de respuesta	Estudiantes
Nivel 2 Existe una movilización del recurso conceptual para desarrollar la tarea, pero se limita a nociones ligeras del concepto en cuestión.	 Respuesta de E7	E7
Nivel 3 La movilización del recurso conceptual y material, para desarrollar la tarea es más refinado, pero hay ausencia de identificación de asíntotasexpresadas con la notación de límite	 Respuesta de E5	E5, E11

Tabla 2. Categorización del trabajo matemático realizado por los estudiantes en T2

En el proceso de confrontación del trabajo matemático desarrollado por los estudiantes en esta tarea con el análisis cognitivo mostrado en la Figura 2, podemos precisar que uno de los elementos del referencial teórico que no se activó corresponde a la identificación de la asíntota vertical expresada a través de la notación de límite. El proceso de visualización se quedó en lo icónico expresado a través del lenguaje natural.

De acuerdo a como lo manifiesta Kuniak (2019), y como lo ejemplificamos en este trabajo, el uso de diagramas ETM proporciona ventajas para analizar el trabajo matemático de los estudiantes e identificar sus dificultades y logros. El análisis cognitivo realizado de la tarea nos permite precisar con exactitud qué elementos no se movilizaron.

REFLEXIONES FINALES Y PERSPECTIVAS

Las características consideradas en el diseño de las tareas de evaluación permitieron efectivamente un trabajo autónomo por parte de los estudiantes en el que pudieron apoyarse de cualquier herramienta tecnológica sin que ello afectara en la demostración del dominio de su referencial teórico. En el análisis de la presentación de su trabajo matemático se evidencia cierta tendencia a iniciar por el registro algebraico más que el gráfico.

Este tipo de "tareas no rutinarias" analizadas en el marco de ETM pareciera que siguen un camino establecido. Es decir, hay una activación de la génesis semiótica que exige apoyo de un referencial teórico para realizar la construcción (activación de la génesis instrumental). Una génesis discursiva es activada dentro de un registro algebraico. Entonces surge el cuestionamiento que nos planteamos ¿es este el camino que debemos de concebir al momento de diseñar tareas de evaluación y tareas de aprendizaje?

Tanto en el análisis cognitivo realizado en estas dos tareas, como en el mostrado en Páez, Pluvinage y Vivier (2019), los procesos relacionados con la visualización no icónica de los representámenes proporcionados en las tareas, son de dificultad para los estudiantes. Por lo que nos cuestionamos sobre ¿qué acciones didácticas realizar para activar el proceso de visualización que concierne a lo no icónico?

Como perspectiva de un trabajo teórico-practico en el que la investigación y la docencia están integradas, aunado al propósito de la teoría ETM (Kuzniak, Nechache y Richard, 2022), en el que a través de los diagramas, nos permitió comprender y describir el trabajo matemático realizado por los estudiantes, nos resta como siguiente paso, planear la transformación del trabajo en el aula de clase, en el que el diseño de tareas de aprendizaje, la manera cómo se implementen y se desarrollen, faciliten que un mayor número de estudiantes lleguen a alcanzar el éxito esperado.

REFERENCIAS

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.

Kuzniak, A. (2019). La théorie des Espaces de Travail Mathématique – Développement et perspectives. In L. Vivier & E. Montoya-Delgadillo (Eds.). *Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático* (pp 21-60). Valparaiso: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. https://etm7.sciencesconf.org/data/Actes_ETM6.pdf

Kuzniak, A., Nechache, A. & Richard, P. (2022). The Theory of Mathematical Working Spaces in brief. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo & P. Richard (eds.), *Mathematical work in educational context. The perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8

Páez Murillo, R. E., Pluvinage, F. & Vivier. L. (2019). Analyse cognitive d'une tâche d'évaluation dans le cadre de la théorie des espaces de travail mathématique. *Actes du séminaire de didactique des mathématiques*. Paris, Francia. 160-162. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03041140/document

ETM DE UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA SOBRE TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS Y EL USO DE GEOGEBRA EN ESTUDIANTES ENTRE 12 Y 15 AÑOS

Marcela Muñoz Lira

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

La presente experiencia de aula muestra los resultados observados de una situación didáctica con el objeto matemático transformaciones isométricas y el uso del software GeoGebra en estudiantes chilenos entre 12 y 15 años. La participación del estudiantado se mira bajo los lentes del marco teórico Espacio de Trabajo Matemático (ETM). La metodología fue analizar la articulación entre la génesis instrumental, semiótica y discursiva en una actividad lúdica llamada "tetris". El principal resultado de esta investigación se presenta en la activación de los planos horizontales del ETM, apreciando articulaciones entre las génesis semiótica-instrumental y, discursiva-instrumental, donde el uso de GeoGebra en el proceso de aprendizaje activa la génesis instrumental. Una proyección de este trabajo es implementarlo, y debido a la pandemia, en formato presencial ya que, de esa manera, se puede fortalecer la coevaluación y la autoevaluación.

INTRODUCCIÓN

Cada día cobra más fuerza el uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en el mundo escolar. La pandemia, trajo un séquito de factores: barreras y facilitadores. El uso de las TIC en la educación se transformó en un facilitador, un aliciente, que fomentó su uso y promoción en el ámbito escolar.

Por otro lado, uno de los marcos teóricos que han aportado a la didáctica de la matemática es el Espacio de Trabajo Matemático (ETM), marco que busca desarrollar y preservar estrechamente los puntos de vista epistemológico y cognitivo (Kuzniak, Tanguay y Elia, 2016; Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier, 2016).

Este marco teórico cuenta con variadas experiencias de aula, mostrándose íntimamente ligado a las prácticas docentes, así como al desarrollo del aprendizaje en el aula, surgiendo la "noción de paradigma y espacio de trabajo matemático en dos artículos sobre la geometría de Houdement y Kuzniak" en el año 1999, tal como lo señala Kuzniak (2018, p. 44)

El ETM se compone de dos planos compuestos de tres génesis (figura 1):

- Semiótica, que se asocia con las representaciones de los objetos matemáticos,
- Instrumental, donde se realizan las operaciones matemáticas manipulando artefactos, y
- Discursiva, donde se otorga importancia al uso del referencial teórico, es decir, al uso de definiciones, teoremas, propiedades, todo para situarlo al servicio del razonamiento matemático.

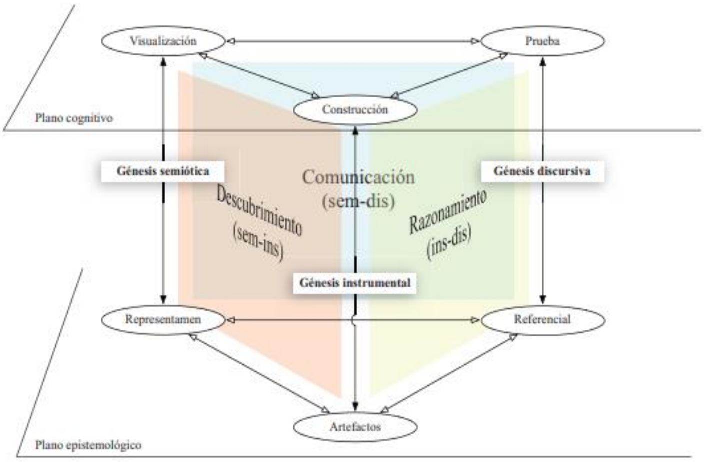


Figura 1: ETM y sus génesis (Kuzniak, 2011).

Este marco teórico se puede entender como una red donde se permite interactuar y organizar espacios de trabajo estrechamente matemáticos, entendiéndolo como un conjunto sintáctico y semántico, debido a que es una forma de trabajo intelectual, marcado de forma particular con la racionalidad inherente a las matemáticas (2018, p. 47). Por lo tanto, este es un trabajo a largo plazo que requiere de esfuerzo, permanencia y compromiso de parte de los estudiantes y docente.

Tal como señala Kuzniak (2018) el objetivo del ETM es "entender cómo el trabajo matemático se desarrolla y se despliega en un contexto educativo cuando las personas se enfrentan a tareas matemáticas" (p. 50). Por este motivo, el ETM se refiere a un espacio abstracto que permite su organización y su distribución de los diversos elementos que lo componen.

Además, es importante señalar que existen diferentes tipos de ETM, sobre los cuales no detallaremos. Es esta ocasión nos remitiremos al ETM personal del estudiante, el cual refleja la realidad de su trabajo, de tal manera que se apropien y transformen la tarea en relación a su ETM personal.

Considerando lo precedente se expone la siguiente experiencia de aula, la cual se desarrolló en dos realidades escolares: por un lado, con un grupo de estudiantes talentosos de un programa chileno llamado BETA y, por otro lado, con un grupo de estudiantes de un 8vo básico de un colegio subvencionado de la quinta región. En ambos grupos esta actividad se realizó con estudiantes entre 12 y 15 años. No obstante, para el segundo grupo esta actividad se realizó de manera voluntaria, de tal forma que las y los estudiantes no se sintieran presionados y se propiciará el ETM para la realización de un trabajo matemático adecuado activando el ETM personal del estudiante.

La actividad planteada fue con el objetivo matemático transformaciones isométricas. A los y las estudiantes se les presentó una situación de Aprendizaje Basado en problemas (ABp) con el juego *Tetris*, donde debían realizar movimientos isométricos a dos figuras y lograr responder las preguntas planteadas. En este sentido es importante distinguir entre Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) del

Aprendizaje Basado en problemas (ABp). No obstante, ambos son metodologías de enseñanza y aprendizaje que buscan que el estudiantado desarrolle conocimientos y habilidades del siglo XXI trabajando a partir de un Proyecto o bien de un Problema, la diferencia radica en el tiempo de ejecución. Un ABP puede desarrollarse a lo largo de un año escolar, en cambio un ABp tiene una ejecución menor en tiempo, pudiendo concretamente en 1 o más sesiones. La característica más innovadora del ABp es justamente el uso de problemas y situaciones de la vida real, donde el estudiante es el protagonista de su proceso de aprendizaje y el problema es el motor de partida para la adquisición de nuevos conocimientos.

En la figura 2 se presenta la situación didáctica:

Figura 2: situación didáctica planteada

Nota: extraída del texto del estudiante de matemática de 8vo básico (MINEDUC, 2021, p.164)

Se puede observar en la Figura 2 que las resoluciones son variadas y responden a un ABp donde el estudiante, a través de un proceso de indagación, resuelve y se inserta como un sujeto que "trabaja" en matemáticas.

Con la intención de implementar esta actividad que, además, vincula el uso de las TIC (GeoGebra) con el objeto matemático: transformaciones isométricas, inserto bajo los lentes del ETM, se formuló la siguiente pregunta de investigación:

Bajo el lente del ETM ¿qué génesis y planos se activan con la implementación de esta actividad lúdica de ABp?

DESARROLLO

Este marco teórico se inspira en los trabajos de Brousseau, con su Teoría de las Situaciones Didácticas, y en Duval (1995) con su Marco de Representaciones Semióticas (Montoya, Mena y Mena, 2014). Los protagonistas, bajo la luz de este marco, puede ser desde un estudiante hasta un experto matemático. Aunque los problemas no son parte del espacio de trabajo, son el catalizador que permite tratar y resolverlos debido a su estructuración (Kuzniak, 2011).

"En el ETM se concibe la reflexión como el fruto de una interacción entre un individuo y los problemas matemáticos" (Muñoz, 2019). En este sentido, es relevante descubrir cuáles son los planos (cognitivo y epistemológico) y génesis (semiótica, instrumenta, discursiva) que se activan cuando él o la estudiante actúa como un matemático al momento de enfrentarse a un problema con carácter de desafiante.

Este marco teórico se puede entender como una red, donde interactúan y se organizan los espacios de trabajo, ya que estas interacciones son fundamentales para comprender el funcionamiento global del trabajo matemático (Kuzniak, 2014), además entre la función de las reflexiones se pueden identificar tres: referencial, idóneo y personal. En esta experiencia de aula la reflexión se realizó desde el ETM personal, que es propio de cada individuo donde emerge, desde la reflexión, sus conocimientos matemáticos y los utiliza para resolver el ABp.

Sobre el "talento académico", Rodríguez, Gregori, Riveros y Aceituno (2017) señalan que "el talento es reconocido como una habilidad o desempeño excepcional que posee un niño o joven" (p. 165). Por otro lado, Aretxaga (2013), indica que, como el concepto de inteligencia ha sufrido una evolución, éste ya no se centra en medirlo a través de pruebas estandarizadas. Esto ha propiciado que el constructo inteligencia sea entendido de forma más amplia, permitiendo que nos refiramos, ahora, en términos de talento académico y no solo a genialidad o dotación.

Dentro de este marco teórico se planteó, a ambos grupos, la ABp *Tetris*, actividad extraida del texto de matemática del estudiante de 8vo básico (MINEDUC, 2021, p.164), donde los y las estudiantes debieron observar, categorizar, comprender, aplicar, analizar para luego, evaluar su desarrollo apuntando hacia la metacognición, orientadas bajo el lente de evaluaciones formativas, fomentando la retroalimentación para lograr, de esta manera, acortar la brecha entre el aprendizaje obtenido y el aprendizaje estándar (Anijovich, 2010). Esta actividad, además, cumple con las habilidades matemáticas que exige el currículo: modelar; argumentar y comunicar; representar; resolver problemas y habilidades digitales.

En esta instancia, participaron 9 estudiantes del programa BETA y 17 del colegio subvencionado.

A continuación, se presentan cuatro (4) productos del estudiantado (desde la figura 3 a la figura 6), sin hacer distinción entre los grupos y mostrando variedad en el desarrollo de la actividad propuesta.

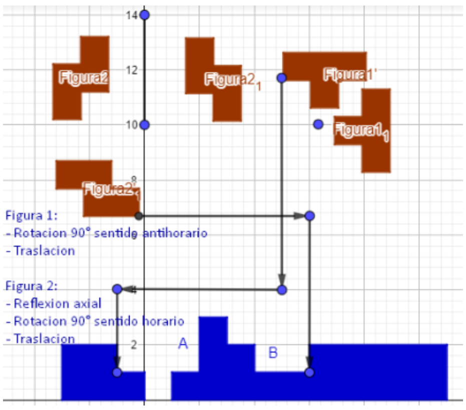


Figura 3: producto estudiante 1

En la figura 3 se puede observar el proceso que realizó el estudiante. Primero rotó en 90° la figura 1, en sentido antihorario, luego la trasladó tres veces: vertical, horizontal y finalmente vertical, logrando ubicarla de forma correcta. Sobre la figura 2, primero le aplicó una reflexión axial con el eje vertical, luego la rotó en 90° en sentido horario, para trasladarla horizontal y después verticalmente, y así lograr de forma correcta ubicarla.

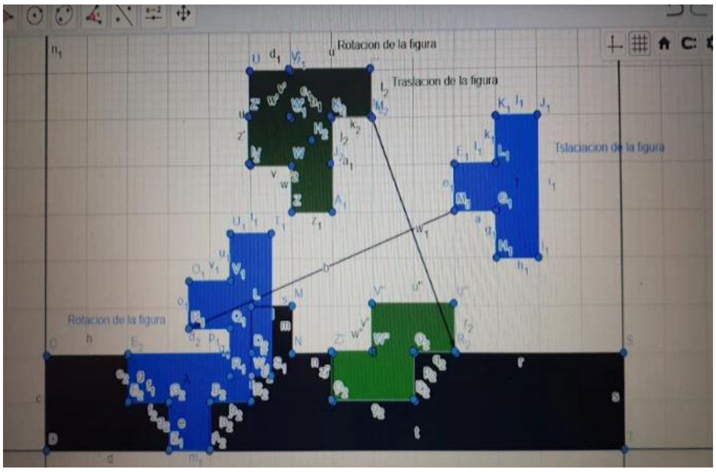


Figura 4: producto estudiante 2

En la figura 4, el estudiante aplicó una traslación diagonal, luego rotó la figura en 90° en sentido antihorario. En este caso el estudiante no reparó en la posibilidad que su pieza quedara topada en el montículo de la base, lo cual evitaría colocar la pieza de forma correcta. Con la segunda pieza este estudiante primero la rotó 90° en sentido horario, para trasladarla diagonalmente a su ubicación final.

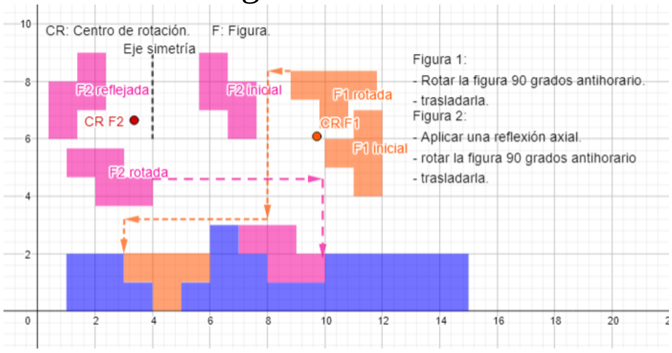


Figura 5: producto estudiante 3

En la figura 5, se puede observar que este estudiante siguió un proceso similar al estudiante 1. Su diferencia radica en los colores utilizados y en la disposición de los textos.

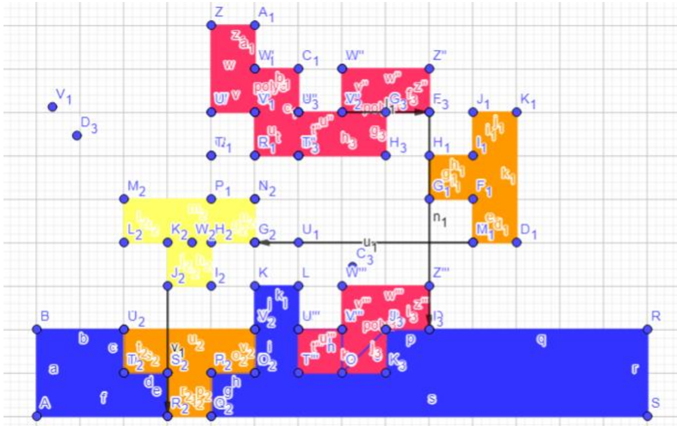


Figura 6: producto estudiante 4

Finalmente en la figura 6, se puede observar que este estudiante primero traslada horizontalmente, con dirección a la izquierda, la pieza 1. Luego la rota en 90° en sentido antihorario y después la traslada verticalmente en sentido abajo. Con la pieza 2 primero la rota en 90° en sentido horario. Después la rota en 90° sentido horario y luega la traslada verticalmente en sentido abajo.

Los cuatro productos expuestos muestran desarrollos con el uso de la composición de transformaciones isométricas.

Para el programa BETA esta actividad correspondió a dos sesiones de 120 minutos de un curso que dura 1 semestre, y para el curso 8° básico del colegio subvencionado, correspondió a una actividad insertada en el eje Geometría, lección 3: transformaciones isométricas, con una extensión de 1 semana, lo cual es equivalente a 3 clases de 90 minutos.

Ambos grupos mostraron activación de los planos verticales y de las componentes, apreciando articulaciones entre las génesis semiótica-instrumental y, discursiva-instrumental, donde el uso del software GeoGebra en el proceso de aprendizaje activa la génesis instrumental.

Primero, cada estudiante diseñó la actividad de la figura 2 en GeoGebra, colocando colores a su libre disposición así como el uso de textos. En las producciones es evidente pesquisar el uso del ETM desde los estudiantes, porque se enfrentaron a un problema determinado y activaron sus génesis, mostrando la génesis semiótica en las representaciones de los objetos matemáticos, relacionando la sintaxis, semántica, función y estructura de esta actividad, la génesis instrumental a través de la manipulación del software matemático GeoGebra, y la génesis discursiva al usar propiedades de las transformaciones isométricas al servicio de su razonamiento matemático.

REFLEXIONES O CONCLUSIONES

El principal resultado de esta investigación se presenta en la activación de los planos horizontales del ETM, apreciando articulaciones entre las génesis semiótica-instrumental y, discursiva-instrumental, donde el uso de GeoGebra en el proceso de aprendizaje activa la génesis instrumental.

Sin embargo, durante el desarrollo de esta actividad, hubo estudiantes que intentaron resolverlo con material concreto sin resultados exitosos debido al orden y prolijidad del ETM. Con GeoGebra esta barrera se transforma en un facilitador porque los errores, en su ejecución, no significan un uso extenso del tiempo, ya que no deben comenzar desde el inicio, tal como suele ocurrir al usar lápiz y papel. No obstante, primero se debe introducir al estudiante al uso del GeoGebra. Este proceso necesita de sesiones previas donde el docente entregue actividades de indagación usando GeoGebra, de otra manera la fortaleza mencionada se transformaría en una barrera, ya que el tiempo que destinarían los y las estudiantes a la actividad de la figura 2 se utilizaría en conocer este programa y no en ejecutarlo con el foco en la ABp presentada en esta investigación.

Volviendo a los resultados expuestos, sobre lo precedente se logró responder a la pregunta planteada al inicio de este artículo que daba cuenta sobre el ETM con un ABp, identificando cómo el estudiantado transita por diferentes génesis. Incluso la génesis semiótica se articula de forma explícita con las otras pues el problema propuesto nace desde una actividad geométrica con enfoques algebraicos, actividad que activa y otorga sentido al ETM personal del estudiante. En este sentido, es relevante mencionar que la interacción entre problemas matemáticos y el estudiante conduce a una reflexión en su ETM.

Además, a la luz de lo mencionado por García, Romero y Gómez-Chacón (2014) se plantea que cuando el estudiante trabaja de manera colaborativa o en entornos virtuales, influye en su ETP personal, tal como ocurrió con esta actividad debido a las transiciones entre las génesis semiótica, discursiva e instrumental ya que supone un proceso complejo al desarrollar problemas a distintos ritmos y con distintos niveles de conocimientos adquiridos.

Finalmente, una proyección de este ABp es implementarlo en formato presencial, de esa manera es posible fortalecer y evidenciar la coevaluación y la autoevaluación, pues, debido a la pandemia, el ETM personal en el desarrollo de esta actividad se transformó en un proceso individual y no fue posible evidenciar de manera explícita evaluaciones del tipo mencionada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anijovich, R. (2010). La retroalimentación en la evaluación. En R. Anijovich, *La evaluación significativa* (págs. 129-146). Buenos Aires: Paidós.

Aretxaga, L. (coord.). (2013). Orientaciones educativas. Alumnado con altas capacidades intelectuales. Consultado el 18 de agosto de 2021 en: http://www.hezkuntza.ejgv.
euskadi.eus/contenidos/informacion/dig_publicaciones_innovacion/es_escu_inc/adjuntos/16_inklusibitatea_100/100012c_Pub_EJ_altas_capacidades_c.pd.

Duval, R. (1995), Semiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels, Berna, Peter Lang. (Traducción al castellano: Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales (1999), Cali, Colombia, Universidad del Valle, Grupo de Educación Matemática).

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., & Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, 30(54), 1-22.

Garcia, M. M., Romero, I., & Gómez-Chacón, I. (2014). Argumentation processes in secondary students: cognitive and affective influences. In *Paper accepted at Forth ETM Symposium: Mathematical Work Space*.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et sa genèse. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9-24.

Kuzniak, A. (2014). Travail mathématique et domaines mathématiques. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. México, *14(4),* 385-399.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM-Mathematics education*,48(6), 721-737.

Kuzniak, A. (2018). La Teoría de los Espacios de Trabajo Matemáticos desarrollo y perspectivas. Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático (Eds. Montoya, Richard, Vivier, Gómez-Chacón, Kuzniak, Maschietto, Tanguay (págs.41-60). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso: Chile.

MINEDUC (2021). Texto de estudiante Matemática 8° básico. Santiago: Santillana.

Montoya, E., Mena, A., y Mena, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. *17*(4-1), 181-197.

Muñoz, M. (2019). Una secuencia didáctica sobre multiplicación de números complejos. Una mirada desde el marco teórico ETM. España: Editorial Academia Española.

Rodríguez, M., Gregori, P., Riveros , A., & Aceituno, D. (2017). Análisis de las estrategias de resolución de problemas en matemática utilizadas por estudiantes talentosos de 12 a 14 años. *Educación Matemática*, *29*(2), 159-186. doi:10.24844/EM2902.06.

ENSEÑANZA DE LA DERIVADA EN UN CONTEXTO INTERDISCIPLINAR EN EL NIVEL SUPERIOR

Flor Isabel Carrillo Lara.

Pontificia Universidad Católica de Valparaísoflor.carrillo.l@mail.pucv.cl

Esta comunicación presenta los aspectos iniciales de una propuesta de enseñanza de la derivada en un contexto interdisciplinar, se tiene como objetivo estudiar el aprendizaje de estudiantes de Licenciatura en Matemática frente a situaciones de contexto económico respecto a la derivada. Nuestra preocupación es fortalecer la formación de los futuros Licenciados en Matemática para que puedan movilizar sus conocimientos en la enseñanza de la matemática de otras especialidades cuando se desempeñen como profesionales. Se presenta la problemática, la pregunta, el objetivo de investigación, estos basados en el marco teórico Espacio de Trabajo Matemático y algunos aspectos metodológicos. Se considera antecedentes relacionados a la enseñanza de la derivada en contexto económico, y sobre la Interdisciplinariedad. Finalmente, algunas reflexiones.

ASPECTOS INICIALES DE LA INVESTIGACIÓN

Nuestra sociedad tiene diversos problemas sociales y estos son afrontados desde las distintas disciplinas, ello involucra las ciencias; sociales, económicas, políticas, medioambientales, jurídicas entre otras. Nuestro objetivo es realizar una propuesta de enseñanza en contexto interdisciplinar, para estudiantes de nivel superior, con respecto a la derivada. Consideramos un contexto interdisciplinar, debido a que el diseño de las situaciones tienen características complejas y es necesario la integración de más de una disciplina para su solución. Por lo expuesto, nos basamos en García (2006) cuando define los sistemas complejos, ya que estos están fuertemente relacionados con la interdisciplinariedad; y en Venegas (2019) en el sentido que emplea a la integridad de disciplinas para enfrentarse a propuestas interdisciplinarias. Por otro lado, consideramos al objeto matemático la derivada debido a la importancia en el desarrollo del cálculo diferencial en las distintas carreras del nivel superior. Así, esta investigación va proponer y experimentar una situación didáctica sobre la derivada en contexto económico.

Con respecto a estudios de la derivada, según Nurwahyu, et al. (2020) y Syah, et al. (2020) se identifican dificultades en relación al concepto de límite, aspectos geométricos y físicos; además de interpretar las diferentes percepciones (límite de la razón, propiedades, relaciones con las gráficas de funciones, entre otros). Asimismo, en Mkhatshwa (2018) y Feudel y Biehler (2021) mencionan de estudiantes de Ciencias Económicas no logran la comprensión del análisis marginal en las diferentes situaciones.

En el Perú, la carrera profesional de Licenciatura en Matemática tiene establecido una malla curricular formada por cursos de formación básica, formación profesional, formación complementaria y especializada. De acuerdo a nuestro interés, fortalecer la formación de estudiantes en Licenciatura en Matemática, y teniendo en cuenta su campo laboral en el Perú, podemos evidenciar que las diversas universidades públicas y particulares, ofrecen las capacidades de desarrollar un razonamiento lógico, tanto inductivo como deductivo, además de estar preparados para desempeñarse tanto en la investigación como la formulación y aplicación de modelos matemáticos en la industria y en las finanzas, que busquen soluciones eficientes a problemas concretos; esto se acredita en los planes curriculares de las Licenciaturas de Matemática. Por ejemplo: Plan de estudios de la carrera profesional de Matemática (2019) de la Universidad Nacional del Callao, Propuesta de diseño curricular (2017) Escuela Profesional de Matemática de la Universidad Mayor de San Marcos, Plan de Estudios (2018) Escuela Profesional de Matemáticas de la Universidad Nacional de Ingeniería y, Plan de estudios de Matemáticas (2022) y su perfil de egresado de Matemática de la Pontificia Universidad Católica del Perú (2022). Sin embargo, estos espacios no son generados desde los primeros ciclos de estudio, ya que se emplea una enseñanza tradicional, dejando de lado darle un sentido a las matemáticas sin considerar problemas que emplean modelos matemáticos. Esta falta de conexión de las matemáticas con la realidad, trae consigo lejanía y distanciamiento por parte de los estudiantes, así como dificultades con las notaciones algebraicas de entes abstractos y, muchas veces genera la deserción por parte de los estudiantes en los primeros ciclos de la carrera. En relación a lo mencionado, estos problemas que relacionan a la matemática con problemas concretos como son las ciencias humanas o ciencias sociales, entre otras, se considera fundamental para la formación de un Licenciado en Matemática.

Es decir, para su formación académica y profesional no es suficiente tener conocimientos matemáticos, si no también tener conocimientos sobre como interactúan las matemáticas con otras disciplinas, como, por ejemplo, biología, física o economía para proponer y resolver problemas extramatemáticos. En ese sentido, identificamos una necesidad de fortalecer su desempeño académico y profesional; además se espera intervenir en la no deserción de los estudiantes de Licenciatura en Matemática. Para nuestra investigación consideramos el objeto matemático la derivada ya que es un tema que se estudia en las diversas carreras profesionales de nivel superior, con diferentes concepciones e interpretaciones según la naturaleza de cada disciplina. De manera particular en Economía, en el desarrollo del tema análisis marginal. El interés de revisar la transversalidad de la derivada en las Ciencias Económicas surge motivado por el trabajo realizado en Carrillo (2013), que consta de una revisión de dos libros usados en la Escuela Profesional de Economía de una Universidad Pública de Perú.

Diversas concepciones y/o significados de la noción derivada son de interés en la Didáctica de la Matemática; entre algunos marcos teóricos como la Socioepistemología (Cantoral y Farfán, 1998; Dolores, 2007), Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Pino-Fant et al., 2013), El Espacio de trabajo Matemático (Montoya, Viola y Vivier, 2017), así como otros modelos, Pensamiento Variacional (Villa-Ochoa y Mesa, 2010), Modos de Pensamiento (Pinto y Parraguez, 2015, 2016, 2017) y Modelo de la comprensión de la derivada de Zandieh (Feudel y Biehler, 2021). En las investigaciones mencionadas, los autores identifican errores y dificultades en la resolución de problemas que involucran la noción de derivada, así como dificultades en que los estudiantes logren comprender los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el centro del análisis matemático (Artigue, 1995). Además, de acuerdo a los diferentes marcos teóricos y modelos presentados desde la Didáctica de la Matemática, mencionamos concepciones comunes en relación a la derivada: i) Límite de razón, ii) Función derivada, iii) Aspectos geométricos (gráfica de funciones, pendiente de una recta tangente), y iv) Tasa de cambio. Consideramos a la derivada debido a la importancia en el desarrollo del cálculo diferencial en las distintas carreras del nivel superior, esto debido, a que la derivada se interpreta como la variación de una función según una variable de estudio. Su estudio en los diversos contextos como la Geometría diferencial, la Optimización, la Cinemática, el Análisis Marginal, entre otros.

Este interés, de estudiar las diversas concepciones de la derivada en estudiantes de Licenciatura de Matemática se fundamenta, debido a que, en los perfiles de egreso de estudiantes de Matemática, se menciona que uno de sus ámbitos es intervenir en proyectos de naturaleza interdisciplinaria como Biología matemática, Economía matemática, Física matemática, entre otros.

En el siguiente apartado presentamos el marco teórico que será de sustendo para nuestra investigación.

MARCO TEÓRICO: ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO

Lo expuesto en el apartado anterior, se pretende analizar desde el Espacio de Trabajo Matemático (ETM), donde Kuzniak, Montoya & Richard (2022) mencionan que el ETM consta de dos planos: el Plano epistemológico se da la interacción de tres componentes puramente matemática (representamen, artefactos y referencial teórico); y el plano cognitivo se centra en el sujeto que, a su vez, se contempla como sujeto cognitivo, se precisan tres componentes cognitivas (visualización, construcción y prueba). Estos planos se articulan a través de la activación de tres génesis: semiótica, instrumental y discursiva. La activación de estas tres génesis sustenta la activación de los planos verticales: Semiótico-Instrumental [Sem-Ins], Semiótico-Discursivo [Sem-Dis] e Instrumental-Discursivo [Ins-Dis]. En el dominio del análisis, el trabajo matemático está caracterizado por tres paradigmas: análisis aritmético-geométrico (AG), análisis calculatorio (AC) y análisis real (AR).

Además, se definen el ETM de referencia (el espacio de trabajo definido de manera ideal), ETM idóneo (concibe la reflexión sobre la reorganización didáctica) y ETM personal (donde en una determinada institución escolar, un individuo atiende un problema matemático). En base al ETM, para esta investigación se va a considerar un conocimiento matemático sobre la derivada en contexto económico.

Para el ETM, el desarrollo por parte de un individuo, el trabajo matemático adecuado es un proceso gradual, entre el plano epistemológico y el plano cognitivo. Cada individuo evoluciona de acuerdo con diferentes desarrollos generativos específicos:

génesis semiótica, instrumental y discursiva. Estas génesis pueden describirse según dos perspectivas: una se centra en las componentes epistemológicas (perspectiva descendente), y la otra se orienta hacia los procesos cognitivos (perspectiva ascendente). Según Kuzniak, Montoya & Richard (2022), se define: la génesis semiótica, la génesis instrumental y la génesis discursiva.

Los estudios en el ETM pretenden dar cuenta del progreso del aprendizaje de los estudiantes. Sirven para precisar las validaciones utilizadas para resolver las tareas: Interacción de la Génesis Semiótica y la Génesis Discursiva [Sem-Dis], Interacción de la Génesis Semiótica y la Génesis Instrumental [Sem-Ins], y Interacción de la Génesis Instrumental y la Génesis Discursiva [Ins-Dis].La comprensión de las diferentes génesis y de los tres planos de interacción entre estas génesis [Sem-Ins], [Ins-Dis] y [Sem-Dis] está relacionado con la metodología, pero también con estudios más detallados del trabajo matemático.

La articulación entre las diferentes génesis y lo planos verticales, y las interacciones entre todos los planos del ETM, hace referencia de una obra matemática completa. El trabajo matematico es completo cuando cumple las siguientes condiciones: Una relación real entre los planos epistemológicos y cognitivo. Esto significa que los estudiantes son capaces de elegir las herramientas pertinentes para resolver un problema y luego utilizarlas adecuadamente como instrumentos para resolver la tarea dada (Kuzniak, 2018)

En nuestra investigación se pretende promover y potenciar el trabajo matemático de estudiantes de Licenciatura en Matemática cuando enfrentan a situaciones de la deriva en un contexto de la economía, por ello, nos realizamos las siguientes preguntas: ¿Cómo interactúan las disciplinas de matemática y economía con respecto a la derivada en un contexto del análisis marginal? ¿Cuáles son las características que debe tener una situación didáctica de derivadas que promueva una concepción de contexto económico en estudiantes de Licenciatura en Matemática? ¿De qué manera se puede promover en los estudiantes de Licenciatura de Matemática la resolución de situaciones de derivada en un contexto de economía? y para responder a nuestras preguntas nos planteamos el siguiente objetivo general: Estudiar el aprendizaje de estudiantes de Licenciatura en Matemática frente a situaciones de contexto económico respecto a la derivada y, los objetivos específicos: OE1. Describir las características de una intervención donde se presenta la derivada en contextos de economía para estudiantes de Licenciatura en Matemática. OE2. Promover en los estudiantes de Licenciatura de Matemática la comprensión y análisis de tareas de la derivada en un contexto de la economía.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

La presente investigación es cualitativa ya que su meta es describir, interpretar y analizar el trabajo personal de estudiantes de Licenciatura de Matemática, cuando se enfrentan a las tareas de la derivada en un contexto económico.

Por otro lado, manifestamos que el trabajo de investigación corresponde al enfoque interpretativo, ya que Pérez, Llórente y Cano (2002) mencionan que dicho enfoque está interesado en explicar, describir, comprender, caracterizar e interpretar los fenómenos sociales y los significados individuales en la profundidad y complejidad que los caracteriza. También considera los contextos naturales donde se desarrollan y bajo la perspectiva de los intereses, la índole y las motivaciones particulares de cada uno de los agentes intervinientes.

A continuación, se presentan las cuatro fases a considerar en esta investigación, ellas son: planeación, recolección de datos, análisis y elaboración de resultados.

Fase 1: *Planeación*

En esta primera fase se desarrolla la problemática (conformada por los antecedentes, el problema de investigación, preguntas y objetivos de investigación), así como los elementos teóricos, en nuestro caso conceptos de Economía relacionados al análisis marginal y del Espacio de Trabajo Matemático.

Un primer apartado para la fase 1, es la revisión de literatura, para esta investigación se considera el objeto de estudio la derivada, así como trabajos relacionados a la derivada en contexto de economía. Además, se busca resaltar la importancia del objeto matemático en estudio, así como la derivada en contexto de la economía.

Un aspecto necesario es declarar el diseño de esta investigación, por ello manifestamos que la presente investigación se considera el estudio de caso, ya que tiene como característica básica abordar de forma intensiva una unidad, ésta puede referirse a una persona, una familia, un grupo, una organización o una institución (Stake, 2007). Así también, Bisquerra (2009, p. 311) define el estudio de casos como un método de investigación cualitativa que se ha utilizado ampliamente para comprender en la profundidad la realidad social y educativa.

El estudio de caso es de tipo instrumental, porque se examina un caso en particular, con un objetivo diferente al de simplemente conocer el caso elegido. Los sujetos de estudio son estudiantes de primer año en la Escuela Profesional de Matemática, que ya hayan llevado el curso de Cálculo I, y como se pretende trabajar las sesiones en grupos de tres integrantes, el caso sería los grupos de los estudiantes que participen.

Diseño de tareas para la propuesta de enseñanza

Para la propuesta de enseñanza de la derivada en un contexto económico, se emplean tareas adecuadas que promuevan la activación de las génesis y los planos verticales del ETM. En relación al ETM y la Economía, cuenta con el ETM de referencia en el que se propone los aspectos matemáticos y nociones económicas relacionados a la derivada, como el caso del análisis marginal. Por ejemplo, veamos las siguientes tareas extraidas de libro de Arya y Lardner (ver figura 1).

Tarea 1: Suponga que el fabricante de cierto artículo descubre que, a fin de producir x de estos artículos a la semana, el costo total en dólares está dado por $C(x) = 200 + 0.03x^2$, ¿cuál es costo promedio?

Solución 1: Según la función dada, si se producen 100 artículos a la semana, el *costo total* está dado por $C(100) = 200 + 0.03(100)^2 = 500$. A partir de ello, podemos hallar el *costo promedio* por artículo. Entonces al producir 100 artículos se tiene $500/100 = 5$ dólares.

Tarea 2: Si el fabricante considera cambiar la *tasa de producción* de 100 a $(100 + \Delta x)$ unidades por semana, en donde Δx representa el incremento en la producción semanal, ¿cuál es el costo extra?

Solución 2: El costo total es lo que se explica a continuación

$$(C + \Delta C) = 200 + 0.03(100 + \Delta x)^2 = 200 + 0.03[10\,000 + 200.\Delta x + (\Delta x)^2] = 500 + 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2$$

Por consiguiente, el costo extra determinado por la producción de los artículos adicionales es

$$\Delta C(x) = (C + \Delta C)(x) - C(x) = 500 + 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2 - 500 = 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2$$

Entonces el costo extra, cuando el incremento es Δx, se tiene $\Delta C(x) = 6\Delta x + 0.03(\Delta x)^2$

Tarea 3: Respecto a la tarea 2, halle el costo promedio por artículo de las unidades extras.

Solución 3: El costo promedio por artículo de las unidades extras es $\frac{\Delta C}{\Delta x} = 6 + 0.03\Delta x$

De manera particular, si la producción crece de 100 a 150 por semana (de modo que $\Delta x = 50$), se sigue que el costo promedio de los 50 artículos adicionales es igual a $6 + 0.03(50) = 7.50$ *dólares* por cada uno. Si el incremento es de 100 a 110 (modo que $\Delta x = 10$), el costo promedio extra de los 10 artículos es igual a 6.30 dólares por cada uno.

Se define el *costo marginal* como el *valor límite del costo promedio* por artículo extra cuando este número de artículos extra tiende a cero. Así, podemos pensar el costo marginal como el costo promedio por artículos extra cuando se efectúa un cambio muy pequeño en la cantidad producida. De la tarea 3, el Costo marginal es $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6 + 0.03\Delta x) = 6$, en el caso de una función de costo general $C(x)$ que representa el costo de producir una cantidad x de cierto artículo, el costo marginal se define en forma similar por Costo marginal: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x+\Delta x) - C(x)}{\Delta x}$, es claro que el costo marginal no es otra cosa que la derivada de la función de costo con respecto a la cantidad producida. Costo marginal: $\frac{dC}{dx}$. El costo marginal mide la tasa con que el costo se incrementa con respecto al incremento de la cantidad producida.

Figura 1. Costo Marginal. (Adaptado de Arya y Lardner, 1992, p. 511-512)

En la revisión del texto Arya y Lardner (1992) se observa que el contenido matemático (la derivada) en los problemas de análisis marginal, como el ejemplo de la Figura 1, están integradas. Una de las razones es que la función derivada se desarrolla en el cálculo diferencial y este estudia cómo calcular la función que describe el cambio de otra función de variables continuas. Las Ciencias Económicas tienen como fundamento la Ciencia Básica, Matemática; esta evolución y desarrollo en los modelos matemáticos se emplean para realizar sus estudios de mercado, pronósticos y toma de decisiones. En relación a lo mencionado, el identificar las relaciones entre los problemas y modelos empleados en el análisis marginal y la derivada, nos permite sustentar el ETM de referencia de los planos epistemológicos de la Matemática y los conceptos de la Economía.

Fase 2: Recolección de datos

En esta fase, se considera la recolección de datos, estos datos están orientados al ETM de referencia, ETM idóneo y respecto al ETM personal de los estudiantes participantes de la investigación.

Con respecto a esta sección se va a considerar recopilar información de diferentes fuentes, como los documentos curriculares de los programas de estudio (de la Escuela Profesional de Matemática y de la Escuela Profesional de Economía), los sílabos de los cursos (Cálculo I y Economía I), los libros de textos seleccionados para la revisión bibliográfica (específicamente en los capítulos de la derivada y análisis marginal), el material de clase de los profesores de los cursos de Cálculo I y Economía I, todos estos forman parte del ETM de referencia extendido en la Economía, ya que no solo se consideran nociones matemáticas sino también nociones específicas de las ciencias económicas. Así como las soluciones de situaciones realizadas por los estudiantes y las entrevistas semiestructuradas.

En relación al marco teórico en nuestra tesis ETM, cuenta con el Espacio de trabajo matemático de referencia en el que se va a proponer los aspectos matemáticos y además, se consideran nociones económicas relacionados a la derivada, como el caso del análisis marginal. Por ejemplo, esto se podrá visualizar en la revisión de textos seleccionados (de ambas disciplinas), programas de los cursos, entre otros.

Con respecto al contenido de la disciplina de la Economía en el tema Análisis Marginal se considera el Costo marginal, para tener una idea de cómo se relaciona la matemática con las ciencias económicas mediante la derivada en contexto de la economía.

En la revisión del texto Arya y Lardner (1992) se observa que el contenido matemático (de la derivada) en los problemas de análisis marginal, como el ejemplo de la Figura 1, las nociones de economía y matemática están integradas. Una razón es que la función derivada se desarrolla en el cálculo diferencial y este estudia cómo calcular la función que describe el cambio de otra función de variables continuas. Asu vez, el cálculo diferencial se fundamentan con el concepto de límite para poder calcular cambios infinitesimalmente pequeños (Mateus, 2011).   Además, otra razón de la integración de ambas disciplinas, en Sydsaeter, Hammond y Carbajal (2012) en un breve recuento histórico sobre las ciencias económicas menciona que al inicio los cálculos económicos se basaban en las operaciones aritméticas y que mitad del siglo XIX.

Es decir, las Ciencias económicas tiene como fundamento la ciencia básica, Matemática; esta evolución y desarrollo en los modelos matemáticos se emplean para realizar sus estudios de mercado, así como sus pronósticos y toma de decisiones. En relación a lo mencionado, el identificar las relaciones entre los problemas y modelos empleados en el análisis marginal y la derivada, nos permite sustentar el ETM de referencia del plano epistemológico de la Matemática y los conceptos de Economía.

También, consideramos la observación de la aplicación de la propuesta (actividad extraescolar), donde se desarrolla la situación de la derivada en un contexto económico para estudiantes de Licenciatura de Matemática. Así, como los materiales de clase empleados por los docentes del curso Cálculo I y Economía I. Con respecto a nuestra propuesta, se pretende promover y fortalecer la resolución de situaciones en contexto económico de estudiantes de Licenciatura en Matemática, así como emplear situaciones adecuadas que promuevan la activación de las génesis y los planos verticales del ETM. Por último, se espera realizar una entrevista individual semiestructurada según, Bisquerra (2009), a los estudiantes seleccionados para realizar el análisis según el estudio de caso, para poder profundizar sobre sus respuestas e identificar con claridad su ETM personal en el plano cognitivo.

A partir de la aplicación de la situación diseñada para esta investigación, a partir de la resolución de los estudiantes se espera ciertas acciones matemáticas como la activación de las génesis *semiótica*, *instrumental* y *discursiva*. De acuerdo a los antecedentes percibimos que las génesis *semiótica* e *instrumental* se activarán con mayor frecuencia.

Asimismo, a partir de la activación de las génesis en los diferentes episodios, se espera la activación de los planos verticales *Semiótico-Instrumental*, *Semiótico-Discursivo* e *Instrumental-Discursivo*. De acuerdo a los antecedentes percibimos que los más comunes son la activación del plano vertical *Semiótico-Discursivo y Semiótico-Instrumental*.

Fase 3: Análisis

Para esta fase se realizan criterios de análisis del ETM personal de los estudiantes.

Para nuestro análisis de datos se va a usar el ETM. Por ello, describimos el trabajo matemático en un marco escolar. Los ETM se clasifican en ETM de referencia, ETM personal y ETM idóneo. Para nuestra investigación consideramos el ETM personal, debido a que el ETM personal es el espacio de trabajo donde en una determinada institución escolar, un estudiante atiende un problema matemático. Está condicionadoal conocimiento y las capacidades cognitivas del sujeto que lo atiende (Kuzniak, Montoya & Richard, 2022). De esa manera ETM logra realizar vigilancias (didácticas, epistémicas y cognitivas) que son básicas para el buen funcionamientodel sistema educativo y brindan elementos para su intervención en el mismo (Cosmes, 2020).

Para la investigación se va a considerar una solución ideal, en ese sentido se espera por parte de los estudiantes: que se trabaje la visualización de los signos asociados a las propiedades del Análisis marginal (G. Semiótica), que en las soluciones de las tareas propuestas empleen las propiedades y procesos algorítmicos para la resolución de tareas (G. instrumental) y, además, se recurra a la Validación y/o justificaciones (G. Discursiva) en los casos necesarios.

El estudio de la derivada en contexto de economía que se pretende realizar pertenece al dominio de análisis. Una categoría que da cuenta de los procesos de construcción que pueden intervenir cuando el estudiante se enfrenta a la solución de alguna tarea: Análisis Geométrico/Aritmético (AG) que permite interpretaciones nacidas de la geometría, del cálculo aritmético o del mundo real, probablemente, con muchos implícitos. Análisis-Calculatorio (AC) donde las reglas de cálculo son definidas, más o menos explícitamente, y se aplican independientemente de la reflexión de la existencia y naturaleza de los objetos introducidos. Análisis real (AR) es caracterizado por un trabajo de aproximación: supremos e ínfimos, cotas, una entrada a trabajos de proximidad (o una entrada más topológica) (Delgadillo y Vivier, 2016). En base a lo mencionado sobre el ETM, en nuestra propuesta se va a considerar no solo un conocimiento matemático sobre la derivada sino también un contexto de economía, en este caso el análisis marginal.

Fase 4: Elaboración de resultados

En esta última fase se presenta los resultados producto del análisis realizado en la fase anterior. Dicha fase se realiza en base a los resultados del ETM personal de los estudiantes de matemática analizados según los criterios considerados en la fase 3.

Algunas reflexiones

En esta investigación se considera el objeto matemático la derivada, ya que es un tema transversal en las Ciencias básicas, Ciencias sociales, Ingeniería entre otras. La pertinencia de las matemáticas en una propuesta interdisciplinaria, se puede manifestar en Williams, et al. (2019) y Venegas (2019) ya que las matemáticas juegan un papel importante en el desarrollo académico y profesional de todas las carreras a nivel superior. Esto debido a los modelos matemáticos se puede observar el desarrollo de las distintas ciencias, como es caso de las Ciencias Económicas. Cuando se identifican las relaciones entre los problemas y modelos empleados en el análisis marginal y la derivada, nos permite sustentar las conexiones entre la Matemática y la Economía.

Además, para esta investigación se va a considerar una solución ideal de las tareas propuestas, se espera por parte de los estudiantes: que se trabaje la visualización de los signos asociados a las propiedades del Análisis marginal (Génesis Semiótica), que en las soluciones de las tareas propuestas empleen las propiedades y procesos algorítmicos para la resolución de tareas (Génesis Instrumental) y, que se recurra a las validaciones y/o justificaciones (Génesis Discursiva) en los casos necesarios.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Arya, J. y Lardner, R. (1992). Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía. Prentice Hall Hispanoamericana, S.A

Bisquerra, R. (2009). *Metodología de la Investigación Educativa*. Madrid, España: Editorial La Muralla S.A.

Carrillo, F. (2013). *Un estudio de las organizaciones matemáticas del objeto función cuadrática en la enseñanza superior*. Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú. http://tesis.pucp.edu.pe/ repositorio/handle/123456789/4634

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon* (42), 353-369.

Cosmes, S. (2020). *La modelización matemática en la formación de ingenieros. El caso de Ingeniería Civil*. Tesis doctoral. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. http://opac.pucv.cl/pucv_txt/Txt-0500/UCB0533_01.pdf

Delgadillo, EM. y Vivier, L. (2016). El espacio de trabajo matemático y los paradigmas como herramienta de análisis para la enseñanza y el aprendizajedel análisis. *ZDM Mathematics Education* 48**,** 739–754 (2016). https://doi.org/10.1007/s11858-016-0777-9

Dolores, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada.*

México D.F: Ediciones Dias de Santos - Universidad Autónoma de Guerrero.

Feudel, F. y Biehler, R. (2021). Comprensión de los estudiantes del concepto derivado en el contexto de las matemáticas para la economía. *J Math Didakt 42,* 273-305 (2021). https://doi.org/10.1007/s13138-020-00174-z

Frank, R. (2005). Microeconomía y Conducta (5a. ed.) España: McGraw-Hill. http://bibliografiadigital.pucv.cl.pucv.idm.oclc.org/index.php/bibliotecapucv/catalog/view/150/174/5931-1

García, R. (2006). Sistemas complejos. Conceptos, método y fundamentación epistemológica de la investigación interdisciplinaria. Barcelona: Gedisa. https://repositorio.esocite.la/364/1/Garcia2006-SistemasComplejos.pdf

Kline, M. (1985). El florecimiento de las verdades matemáticas. *Matemáticas: la pérdida de la certidumbre*.

Kuzniak, A. (2018). La teoría de los espacios de trabajo matemático desarrollo y perspectivas. Conferencia inaugural del simposio ETM6.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. R. (Eds.). (2022). *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (1st ed., Mathematics Education in the Digital Era, Vol. 18). Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8.

Mateus, E. (2011). Epistemología de la derivada como fundamento del cálculo diferencial. Voces y silencios. *Revista Latinoamericana de Educación, Bogotá, 2,* 3-21.https://revistas.uniandes.edu.co/doi/pdf/10.18175/vys2.especial.2011.01

Mkhatshwa, T. (2018). Business Calculus Students' Interpretations of Marginal Change in Economic Contexts. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Paper presented at the Annual

Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (40th, Greenville, SC, Nov 15-18, 2018). https://eric.ed.gov/?q=derivative&pr=on&ft=on&pg=2&id=ED606719

Montoya Delgadillo, E., Viola, F. & Vivier, L. (2017). Choosing a Mathematical Working Space in a modelling task: The influence of teaching. En Dooley, T., & Gueudet, G. (Eds.) Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. CERME10. Dublin, Ireland.

Nurwahyu, B., Tinungki, G. y Mustangin (2020). Imagen conceptual de los estudiantes y su impacto en el razonamiento hacia el concepto de derivada. *Revista Europea de Investigación Educativa*, v9 n4 p1723-1734 2020

Pérez, J., Llórente, T., y Cano, A. (2002). Los estudios de caso en la lógica de la investigación interpretativa. *Arbor*, *171*(675), 533-557.

https://arbor.revistas.csic.es/index.php/arbor/article/view/1045/1052

Pino-Fan, L., Castro, W., Godino, J. y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el curriculo de bachillerato. *Paradígma*. *34*. 129- 150.

https://www.researchgate.net/publication/262626935_Idoneidad_epistemica_del_significado_de_la_derivada_en_el_curriculo_de_bachillerato

Pinto, I. y Parraguez, M. (2015). El concepto de derivada desde la teoría los modos de pensamiento, sustentada en la epistemología de Cauchy. En Flores, Rebeca (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 337-344). México, DF: Comité Latinoamericano de

Pinto-Rojas, I. & Parraguez, M. (2017). Articulators for Thinking Modes of the Derivative from a Local Perspective. *IEJME-Mathematics Education*. *12*(10), 873-898.

Pinto, I. y Parraguez, M. (2016). Elementos articuladores para los modos de comprender el concepto de derivada. En Mariscal, Elizabeth (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 124-129). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Stake, R. (2007). Investigación con estudio de casos. Ediciones MORATA, S.L. https://www.nelsonreyes.com.br/LIVRO%20STAKE.pdf

Syah, R., Chin, Y., Chee, K, Moi, H. & Siew, C. (2020). Bridging the Gap between the Derivatives and Graph Sketching in Calculus: An Innovative Game-Based Learning Approach. *Asian Journal of University Education, v16 n4 spec* ISS p121-136 diciembre de 2020.

https://eric.ed.gov/?q=derivative&pr=on&ft=on&ff1=dtySince_2017&id=EJ1288043

Sydsaeter, Hammond y Carbajal (2012). Matemáticas para el análisis económico. Pearson Educación, S.A. Madrid, 2012.

Venegas-Thayer MA (2019) Integración desde una perspectiva cognitiva: una experiencia con estudiantes de matemáticas y música. En: Doig B., WilliamsJ., Swanson D., Borromeo Ferri R., Drake P. (eds) Educación matemática interdisciplinaria. Monografías ICME-13. Springer,Cham.

https://doi.org/10.1007/978-3-030-11066-6_4

Villa-Ochoa, J. y Ruiz, M. (2010). Pensamiento variacional: seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de nociones variacionales. Educação Matemática Pesquisa, 12(3). 514-528. http://funes.uniandes.edu.co/1545/1/3750.pdf

Williams, J., Roth, W., Swanson, D., Doig, B., Groves, S., Omuwie, M. et al. (2019). Interdisciplinary Mathematics Education: State of the art. Cham: Springer. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-11066-6

FUNCIÓN EXPONENCIAL: CARACTERIZACIÓN DEL TRABAJO MATEMÁTICO DE ESTUDIANTES DE HUMANIDADES

Jorge Luis Vivas Pachas, Jesús Victoria Flores Salazar

Pontificia Universidad Católica del Perú/Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático RIITMA/Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas IREM-PUCP

jorge.vivas@pucp.edu.pe, jvflores@pucp.pe

Se presenta un recorte de la tesis de maestría del primer autor y tiene como objetivo mostrar el análisis del trabajo matemático de estudiantes de humanidades cuando resuelven una tarea sobre función exponencial. En la investigación se toman aspectos de la teoría del Espacio de Trabajo Matemático y del método de análisis del trabajo matemático personal. El análisis de la producción matemática de los estudiantes evidenció la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva y, los planos verticales Semiótico-Instrumental, Semiótico-Discursivo e Instrumental-Discursivo, lo que permitió identificar que el trabajo matemático del estudiante se realiza en el paradigma del Análisis Aritmético-Geométrico.

CONSIDERACIONES INICIALES

Se realizó un levantamiento bibliográfico con el propósito de entender mejor el trabajo matemático de estudiantes cuando resuelven tareas sobre función exponencial. Así, Brucki (2011) analiza como una actividad relacionada a la función exponencial favorece su aprendizaje. Esta actividad se llevó a cabo con estudiantes brasileños del primer año de nivel secundario y tenía como propósito relacionar el modelo algebraico de la función exponencial con el término general de la progresión geométrica. Dentro de sus conclusiones, la autora afirma que las actividades extra-matemáticas favorecerán el aprendizaje en la medida que contengan ideas *ancla* para fundamentar el concepto de función exponencial y/o de progresión geométrica.

Asimismo, Sureda y Otero (2013) analizan la conceptualización en el aprendizaje de la función exponencial. Las investigadoras consideran que la enseñanza de función exponencial demanda un diseño de situaciones que articulen más de un sistema de representación. Por ello, planificaron, diseñaron, implementaron y analizaron un conjunto situaciones constituidas en cinco sistemas de representación diferentes con el propósito de reconstituir el campo conceptual de la función exponencial para estudiantes de cuarto año de nivel secundario. Posterior a ello, las autoras mencionan que la investigación no les proporciona los subsidios necesarios para afirmar que el proceso de conceptualización atraviesa necesariamente por cada una de las etapas consideradas. No obstante, concluyeron que la explicitación, discusión y formalización de los conceptos, en cada sistema de representación, tienen vital importancia en la transformación de la etapa lineal a la etapa exponencial.

ASPECTOS DE LA TEORÍA DEL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO

Se toman aspectos de la teoría del Espacio de Trabajo Matemático (ETM), en los que Kuzniak y Richard (2014) explican que el ETM está constituido por los planos epistemológico y cognitivo. En el plano epistemológico se reconocen tres componentes: *representamen*, *artefactos* y *referencial teórico*. Por su parte, en el plano cognitivo se identifican tres procesos: *visualización*, *construcción* y *prueba*. Estos planos se articulan a través de la activación de tres génesis: *Semiótica*, *Instrumental* y *Discursiva*. La activación de estas tres génesis sustenta la activación de los planos verticales: *Semiótico-Instrumental* [Sem-Ins], *Semiótico-Discursivo* [Sem-Dis] e *Instrumental-Discursivo* [Ins-Dis]. En el dominio del Análisis, el trabajo matemático está caracterizado por tres paradigmas: Análisis Aritmético-Geométrico (AG), Análisis Calculatorio (AC) y Análisis Real (AR).

ASPECTOS METODOLÓGICOS

La investigación que desarrollamos es cualitativa, porque se prioriza el análisis del fenómeno didáctico en cuestión. En ese sentido, para el análisis del trabajo matemático del estudiante, empleamos el método diseñado por Kuzniak y Nechache (2018), en el cual señalan que la acción matemática es objetivada y tomada del discurso escrito u oral y que un episodio está constituido por una serie de acciones matemáticas que el estudiante realiza para llevar a cabo una tarea. Este método tiene dos etapas que permiten realizar un análisis detallado de la producción matemática del estudiante. La primera etapa consiste en identificar las acciones matemáticas presentes en la producción matemática para luego agruparlas en episodios e interpretarlas en términos del ETM, es decir, identificar la activación de las génesis y los planos verticales. La segunda etapa consiste en dar una idea global de la circulación del trabajo matemático y utiliza el esquema del ETM. En el presente trabajo, mostramos el análisis de la primera etapa del método.

LA TAREA

La investigación consta de una parte experimental que se llevó a cabo en una sesión de clase con estudiantes del primer ciclo de carreras de humanidades de una universidad privada en Lima, Perú. En esta clase, la resolución de problemas sobre función exponencial exige el uso de su representación algebraica y gráfica. Por ende, esta tarea consta de dos preguntas basadas en problemas que requieren el uso de estos dos tipos de representación. A continuación, se presenta el análisis del trabajo matemático de un estudiante cuando resuelve la pregunta 1 de la tarea (Figura 1).

Pregunta 1

Esboce la representación gráfica de la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ con $x \in \mathbb{R}$. Indique su rango, su asíntota e sus interceptos con los ejes coordenados.

Figura 1. Pregunta 1 de la tarea. Fuente: Adaptado de Vivas (2020, p. 41)

ANÁLISIS DEL TRABAJO MATEMÁTICO DEL ESTUDIANTE

Se presenta el análisis del trabajo matemático de un estudiante, al que llamamos Guido, que consiguió desarrollar la tarea de forma individual en un tiempo aproximado de 40 minutos.

Para el análisis del trabajo matemático, con base en el método de Kuzniak y Nechache (2018), cada episodio es representado en una tabla que contiene dos columnas. La primera muestra las acciones matemáticas y la segunda, corresponde a la interpretación de cada una de estas acciones en términos del ETM.

En el episodio 1 (representación tabular de f), se identifica una acción (Figura 2).

<table>
<tr><th>Acciones matemáticas</th><th>Interpretación</th></tr>
<tr><td>Acción 1. Elabora una tabla que contiene algunos valores para f.
tabulación<table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>y</td><td>5</td><td>3</td><td>2</td><td>1,5</td><td>1,25</td></tr></table></td><td>La regla de correspondencia de f es empleada como un artefacto simbólico y se realiza un proceso de construcción al obtener tabla de algunos valores para f. Se comprueba la activación de la génesis instrumental.</td></tr>
</table>

Figura 2. Episodio 1. Fuente: Adaptado de Vivas (2020, p. 63)

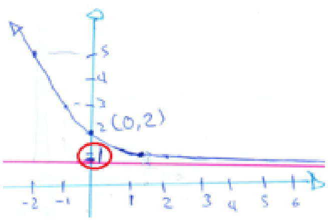
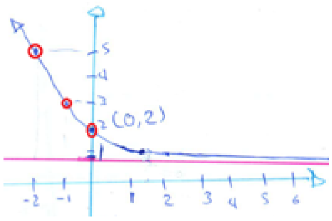
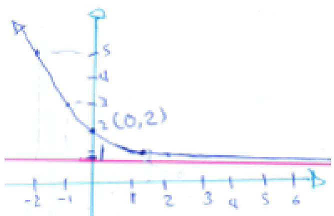
<table>
<tr><th>Acciones matemáticas</th><th>Interpretación</th></tr>
<tr><td>Acción 2. Representa gráficamente la asíntota de f.
</td><td>El parámetro con valor 1 de la regla de correspondencia de f es usada como representamen y se realiza un proceso de visualización al representar gráficamente la asíntota de f. Se evidencia la activación de la génesis semiótica.</td></tr>
<tr><td>Acción 3. Representa gráficamente los puntos de paso de f.
</td><td>Cada par ordenado de la forma $(x; f(x))$ obtenida de la representación tabular de f es utilizada como representamen y se realiza un proceso de visualización al identificarlo como un punto de paso la representación gráfica de f. Se evidencia la activación de la génesis semiótica.</td></tr>
<tr><td>Acción 4. Realiza el esbozo de una curva que constituye la representación gráfica de f.
</td><td>Las características de f (dominio, comportamiento asintótico y puntos de paso) son empleadas como referencial y se realiza una prueba de tipo pragmática que consiste en encontrar una curva que cumpla con estas condiciones y en consecuencia sea la representación gráfica de f. Se evidencia la activación de la génesis discursiva.</td></tr>
</table>

Figura 3. Episodio 2. Fuente: Adaptado de Vivas (2020, p. 63-64)

CONCLUSIONES

A partir de la interpretación de las acciones matemáticas del estudiante, se evidencia la activación de la génesis *Instrumental* en el episodio 1 y la activación de las génesis *Semiótica* y *Discursiva* y, del plano vertical [Sem-Dis] en el episodio 2.

También, el estudiante realiza interpretaciones y suposiciones implícitas obtenidas a partir de la regla de correspondencia de f. En ese sentido, se puede afirmar que su producción matemática, expresada en sus acciones matemáticas identificadas, describe un trabajo matemático que se posiciona en el paradigma del Análisis AG.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP; a la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático, RIITMA y al Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas, IREM-PUCP por el apoyo brindado.

REFERENCIAS

Brucki, C. (2011). *O uso de Modelagem no ensino de função exponencial* (tesis de maestría) Recuperado de: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10900

Kuzniak, A., y Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Relime*, *17*(4), 9–10. doi: https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1741a

Kuzniak, A. y Nechache, A. (2018). Una metodología para analizar el trabajo personal de los estudiantes en la teoría de los espacios de trabajo matemático. En E. Montoya (Presidencia), *Espacio de Trabajo Matemático*. Simposio llevado a cabo en el Sexto Simposio Internacional ETM, Valparaíso, Chile.

Sureda, P. y Otero, M. (2013). Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial. *Educación Matemática*, *25*(2), 89-118. Recuperado de: http://www.revista-educacion-matematica.com/pdf/documentos/REM/REM25-2/Vol25-2-4.pdf

Vivas-Pachas, J. (2020). *Trabajo matemático de estudiantes de humanidades en tareas sobre sobre función exponencial* (tesis de maestría) Recuperado de: http://hdl.handle.net/20.500.12404/18104

TRACING CREATIVITY IN GEOMETRY: FIGURAL, INSTRUMENTAL AND DISCURSIVE GENESES OF REASONINGIN A GEOMETRY MULTIPLE-SOLUTION TASK

Iliada Elia*, Eleni Deliyianni**, Athanasios Gagatsis*, Evgenios Avgerinos*** andPanayiotis Gridos***

*University of Cyprus, Cyprus, **Cyprus Ministry of Education, Sports and Youth,Cyprus, *** University of the Aegean, Greece

The aim of this study is to describe the nature of the geometric work done in a geometry multiple-solution task. We rely on some theoretical aspects of GWS with creativity in geometry and the term of flexibility related to it. Qualitative data were collected by a student during the emergence of various solutions. The results reveal that in the case of a student who has a quite high creativity, the mathematical workis considered complete and coherent. The findings suggest a correspondence between various geneses of GWS and the variety of multiple solutions: the different representations correspond to figural and semiotic genesis; the different propertiesof mathematical concepts related to a mathematical topic correspond to discursive genesis; finally, the different mathematical tools, properties, and theorems from different branches of mathematics correspond to instrumental genesis. Teaching practices are suggested.

INTRODUCTION

A significant causal relationship was found between mathematical creativity and mathematical problem-solving performance (Tyagi, 2016). Silver (1997) claimed that three components need to be developed for creativity to be fostered through problem solving: a. Fluency is developed when an individual think of multiple ideas to easily arrive to different valid solutions. b. Flexibility has to do with the facility of an individual to move from one solution to another c. Novelty (or originality) is nurtured when a new solution, different to those already known to an individual at the time is produced by him/her. Leikin and Levav-Waynberg (2007) defined multiple solution tasks (MSTs) as tasks that explicitly require more than one solution to a specific mathematical problem. Recently, the relation between creativity in Geometry and spatial ability (Gridos et al. 2021a) and creativity and its relationship with visualisation and geometrical figure apprehension (Gagatsis et al., 2022) were examined. The first research study concentrated on three spatial abilities: spatial visualization, spatial relations, and closure flexibility. As for students' creativity, it was investigated through a multiple solution problem in Geometry regarding the three components of creativity. The results revealed that spatial visualization predicted flexibility and originality, and closure flexibility predicted all creativity components. Findings indicated that the auxiliary constructions played an essential role in the problem-solution process (Gridos et al., 2021a). Concerning the second research study, the relations between creativity, visualization and geometrical figure apprehension were examined through four geometry MSTs given to high school students. The geometrical tasks were divided into two categories depending on whether their wording was accompanied by the relevant figure or not. The results of the Gagatsis' et al. (2022) study indicated a multidimensional character of relations among creativity, visualization, and geometrical figure apprehension. To be more precise, in tasks whose wording is not accompanied by the relevant figure, two levels of visualization are needed. The first one involves visualizing that enables the sketch to be produced based on the problem's verbal description and producing the sketch. Thus, discursive apprehension of the figure is required, leading to the geometric construction, which here is conceived both as the mental process of making the figure and as the actual production of the sketch. The second level of visualization has to do with the interpretation and mental process of operating on the figure to solve the geometrical MST. Thus, operative figure apprehension is essential as the students modify the figure and produce different configuration(s) to provide solutions. Findings also revealed that when the relevant figure is given, although fluency and flexibility were higher, originality was not influenced neither positively nor negatively. In tasks that are presented only verbally and, thus, students must construct the geometrical figure to solve them, originality was higher.

THEORETICAL BACKGROUND

GWS describes the specific activity of students solving problems in geometry and is organized into two planes or levels. The first, "epistemological" plane defines apriori expectations concerning the activity according to the requirements of the mathematical domain. As regards geometry, three interacting components are characteristic of geometric activity in its purely mathematical dimension:

- A real and local space as material support, with one set of concrete and tangibleobjects such as figures or drawings.
- A set of artefacts such as drawing instruments or software.
- A theoretical reference system based on definitions and properties.
- The geometry that is taught and learnt at school is not a disembodied set of properties and objects reduced to signifiers which can be manipulated by formal systems but mainly a human activity. This implies a second, "cognitive" level centered about solving problems. The idea of three cognitive processes involved in geometrical activity is adapted from Duval (2005) as follows:
- A visualization process connected to the representation of space and materialsupport.
- A construction process determined by instruments (ruler, compass, etc.) and geometrical configurations.
- A discursive process which conveys argumentation and proofs.

Both planes, cognitive and epistemological need to be articulated to ensure a coherent and complete geometric work. This process assumes the presence of some transformations that may be defined through three fundamental geneses:

- A figural and semiotic genesis that gives the tangible objects their status of operating mathematical objects
- An instrumental genesis that transforms artefacts into tools within the construction process, which is crucial in the case of geometry
- A discursive genesis of proof that gives a meaning to the properties used withinmathematical reasoning
- The makeup of a GWS will vary according to the education system, the school circumstances, and the students' and teachers' personal GWS (Kuzniak, 2018; Kuzniak, Tanguay, & Elia, 2016).

METHODOLOGY

Qualitative data were collected by a student during the emergence of various solutions. The student was among the sample of a large-scale research study (see Gagatsis et al., 2022 and Gridos et al., 2021a), which involved 147 eleventh graders and 94 ninth graders, and his solutions were representative of the solutions that were provided by a large number of these students. In the present study the student was asked by one of the authors to describe his approaches as he was solving the problem in Figure 1. The researcher also asked for clarifications during the solution process. The construct of solution spaces was used to analyze the student's solutions. A solution space is a group of solutions to a mathematical problem. Collective solution spaces characterize solutions produced by groups of individuals (Leikin, 2009). The five distinct collective solution spaces that encompass ten different solutions for this task were produced by the sample in Gagatsis et al. (2022).

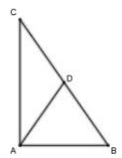
Prove in as many ways as possible, that the median (AD) of the righttriangle BAC, equals half of the hypotenuse.	

Figure 1: Geometry multiple-solution task

RESULTS

The main part of the interaction between the student (S) and the researcher (R) as well as the analysis of student geometric work is presented in Table 1. Leikin (2009) uses a specific score scheme for calculating creativity that has been followed and presented in Gridos et al. (2021a) and Gagatsis et al. (2022). The student as indicated in Table 1 solved the problem in six different ways which belong to four different solution spaces according to Gagatsis et al. (2022). One of its solutions, the last one, is among the three most innovative ones. In fact, he is a student with a quite high creativity (fluency score: 6, flexibility score: 22,2, originality score: 11,4, total creativity score: 253.08).

Sessions	Input in geometric work
<u>Solution 1 and 2</u> S: If I construct a parallel from D to AC, then this new straight line DM will be perpendicular to AB. Taking into accountthe theorem, if D is in the middle of AC thenM is the middle of AB. Similarly, I constructa parallel line from D to AB *(the student make the constructions)*. R: Very good. M: From these I conclude that DM is a median and an altitude. I compare the triangles ADM and MDB, which are congruent (M=90^{O} the same, DM=common side and AM=MB). Thus, all their elements are the same (AD=DB).	*The student proceeds to a construction after modelling the problem. The use of instrumentsstrongly depends on the properties of a triangle. Once the task is interpreted, the geometric work is mainly located in the plane [Ins-Dis] using the theoretical referential: thecomparison of the triangles appears as a theoretical tool to build the solution. The dataare provided in the semiotic register and the triangle properties ensure the validity of the solution.* *[Sem-Dis]→[Ins- Dis]*
<u>Solution 2</u> R: Nice. Have you realized that you solved the problem in two different ways? S: No, I have not realized it. Why? R: Look at your solution. As you mention DM is both a median and an altitude. S: Indeed! If one of the altitudes of a triangle is also a median, then the triangle is isosceles. Thus, AD and DB are the same. So no comparison was needed. R: Very nice, two ways which look the same but they are different. How, will we continue?	*The input into the work is first semiotic but the use of a discursive proof is required to validate the solution.* *[Sem-Dis]*
<u>Solutions 3 and 4</u> S: I want to think a bit…I think I will compare the triangles ADB and ACD… No, this comparison will not lead anywhere … I remember that I noticed it from the beginning. I will do the same with the parallel we construct to AB. R: If we do this, what will we find? S: We will find other two ways that look	*From visual analysis of the figure, the studentfocuses on the subfigures which are viewed from a theoretical viewpoint as the starting point of a deductive reasoning.* *[Sem-Dis]*

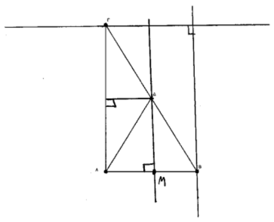
like the other two. *(The student writes thathe does the same as in the first solution for the triangle CAD. Then he writes that he does the same as in the second solution for the triangle CAD)* R: Will you find another way to solve the problem?	
<u>Solution 5</u> S: I will sketch a parallel line from C to AB and from B to AC. We will construct a rectangle because A = 90 .  *(the student construct auxiliary elements on the existing figure given to him)* The diagonals of the rectangle are of equal size and bisect each other, thus AD=1/2BC.	*The student constructs auxiliary elements on the existing figure that satisfy some conditions. The identification of properties and definitions is included into the reference frame after instrumental or visual treatments.* *Ins → [Sem-Dis]*
<u>Solution 6</u> S: I find another way to solve the problem.R: What is the other way? S: I may construct a circle. The angle in a semicircle is a right angle, BC is a diameter and D is the centre of a circle. Thus, DC, DB and DA are radius and have the same length.	*Instruments are set aside. The focus is on a hypothetical and deductive proof based on properties thus the figure and visualization play a heuristic role.* *[Sem-Dis]*

Table 1: The analysis of student geometric work

It is also evident that the personal GWS of the student and the researcher are in congruence. This has a positive result for the student who makes full use of his potential to find new ways of solving the problem. It is worth mentioning that in Gridos et al. (2021a), Gridos et al. (2021b) and Gagatsis et al. (2022) a variety of results based on different statistical analysis are presented and they validate the above ones.

CONCLUSIONS

In the present study, we explore creativity in the light of geometrical working space (GWS). Based on the recent studies, we move as step forward and describe the nature of the geometric work done by a student during a multiple-solution geometrical problem that the wording is accompanied by the relevant figure. In fact, it is worth mentioning that Kuzniak (2018) indicates that the aim of the theory of GWS is not only to observe and describe existing activities but also to develop some tasks and implement them in classroom to integrate the three dimensions of the model into a complete understanding of geometric work according to the perspective expected by teachers. Our findings suggest that the use of MSTs during the lesson and their inclusion in textbooks may contribute to this direction.

Findings reveal that high creativity students' mathematical work is considered complete and coherent. Even though the geometric work is supported strongly by the discursive genesis of proof, a genuine relationship exists between epistemological and cognitive aspects, and an articulation of a rich diversity between the different geneses and vertical planes of the model. In fact, it is firstly related to the figural or the semiotic genesis. The student works on the level of Geometry II (Coherent GII Workspace) and switches to discursive genesis of proof through instrumental genesis. Instrumental genesis acts as a means of proving and producing different solutions. The geometric work is also supported by an analytical visual work on the figure. In fact, it is related to the figural genesis used to recognize the subfigures and identify properties in configurations.

Leikin (2009) pointed out that the differences among the solutions can be categorized according to the following criteria: "(a) different representations of a mathematical concept; (b) different properties (definitions or theorems) of mathematical concepts from a mathematical topic; or (c) different mathematical tools and theorems from different branches of mathematics". We suggest an alignment between Leikin's categorization and the fundamental geneses: different representations correspond to figural and semiotic genesis, different properties (definitions or theorems) of mathematical concepts from a mathematical topic to discursive genesis and different mathematical tools and theorems from different branches of mathematics to instrumental genesis.

Moving a step forward, we strongly believe that among the three terms related to the MSTs and creativity, "flexibility" is the most important, and is related to the three vertical axes of the model of GWS(MWS). The term "representational flexibility" has been associated with a model of three dimensions: the recognition of a mathematical concept among different representations of it, the treatments in the same semiotic register, and the conversion between different semiotic registers (Deliyianni & Gagatsis, 2013; Deliyianni et al., 2016). Taking into consideration the fact that three different semiotic registers intervene in geometry, that is natural language, the symbolic language, and the graphical register, there are different forms of a geometrical task presentation based on the different combinations of elements from the three registers. For example, the task used in the present research study may be presented in six alternative ways (Gagatsis et al., 2022). Thus, recognition in a geometrical task may be related to the geometrical figure proposed to the student or to the different figures constructed by himself. Treatment may be related to the algebraic symbols that intervene in the solution of the task. Finally, conversion is related not only to the moving from one form of a figure designed by the student to another (by the using of auxiliary lines, for example) but also to the wording of the proof of a task by the alternative use of the natural and the symbolic language.

Moreover, it would be interesting to investigate the nature of the geometric work done by students and their correspondent flexibility during a multiple-solution geometrical problem that the wording is not accompanied by the relevant figure considering that according to Gridos et al. (2021b) and to Gagatsis et al. (2022) two levels of visualization are needed in this case. Another approach is to explore the solutions proposed by the students in the case that dynamic geometry software is used in the classroom.

REFERENCES

Deliyianni, E., & Gagatsis, A. (2013). Tracing the development of representational flexibility and problem solving in fraction addition : A longitudinal study. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology, 33*(4), 427–442.

Deliyianni, E., Gagatsis, A., Elia, I., & Panaoura, A. (2016). Representational Flexibility and Problem-Solving Ability in Fraction and Decimal Number Addition: A Structural Model. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14,* 397-417.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l’apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5–53.

Gagatsis, A., & Geitona, Z. (2021). A multidimensional approach to students' creativity in geometry: spatial ability, geometrical figure apprehension, and multiple solutions in geometrical problems. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *18*, 5-16.

Gagatsis, A., Elia, I., Geitona, Z., Deliyianni, E., & Gridos, P. (2022). How could the Presentation of a Geometrical Task Influence Student Creativity? Journalof Research in Science, *Mathematics and Technology Education. 5*(1), 93-116. https://doi.org/10.31756/jrsmte.514

Gridos, P., Avgerinos, E., Deliyianni, E., Elia, I., Gagatsis, A., & Geitona, Z. (2021a). Unpacking The Relation Between Spatial Abilities and Creativity in Geometry. The European Educational Researcher, 4(3), 307- 328.

Gridos, P., Avgerinos, E., Mamona-Downs, J., & Vlachou, R. (2021b). Geometrical Figure Apprehension, Construction of Auxiliary Lines, and Multiple Solutions in Problem Solving: Aspects of Mathematical Creativity in School Geometry.

International Journal of Science and Mathematics Education, 20, 619–636, https://doi.org/10.1007/s10763-021-10155-4.

Kuzniak A. (2018) Thinking about the Teaching of Geometry through the Lens ofthe Theory of Geometric Working Spaces. In: Herbst P., Cheah U., Richard P., Jones K. (eds) *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools.* ICME-13 Monographs. Springer, Cham

Kuzniak, A., Tanguay, D. & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction, *ZDM Mathematics Education*, 48(6), 721-737.

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations andschool practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 349-371.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman and B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129–145). Rotterdam: Sense Publisher.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM, 3*, 75–80.

Tyagi, T. K. (2016). Is there a causal relation between mathematical creativity and mathematical problem-solving performance? *International Journal ofMathematical Education in Science and Technology, 47*(3), 388-394

TRABAJO MATEMÁTICO DE DOCENTES EN FORMACIÓN INICIAL: UNA TAREA DE MODELIZACIÓN EN CÁLCULO

Leslie Jiménez, Alain Kuzniak Universidad de Chile, Universidad de París

Esta contribución muestra el estudio del trabajo matemático que desarrollan docentes en formación inicial en un curso de cálculo de primer año al momento de resolver una tarea de modelización matemática. La tarea se implementa en contexto de pandemia, en 3 etapas biendefinidas; dos de ellas sincrónicas, en una sesión de taller grupal del curso con el uso de pizarras colaborativas, y una asincrónica. Tiene como objetivo central comparar el trabajo matemático personal de un grupo de estudiantes, Grupo A, en ambas modalidades, presentando el análisis y caracterización de los espacios de trabajo matemático de este grupo en cada modalidad.

TRABAJO MATEMÁTICO DE DOCENTES EN FORMACIÓN INICIAL EN CLASES DE CÁLCULO

El marco teórico de los Espacios de Trabajo Matemático ETM (Kuzniak at al., 2022) nos permite abordar cuestiones de enseñanza y aprendizaje de la matemática en distintos niveles educacionales, a partir de las relaciones genuinas entre los aspectos epistemológicos y cognitivos, y cuando distintas dimensiones del modelo están adecuadamente articuladas a través de los planos verticales del modelo. Un espacio de trabajo matemático se activa a través de una tarea (Kuzniak, Nechache y Drouhard, 2016).

Dentro del contexto de la enseñanza del cálculo a nivel universitario, Artigue (2003) da cuenta de las dificultades que se presenta en el proceso de enseñanza/aprendizaje para conceptualizar ciertas ideas matemáticas y que éstas sean comprendidas por el estudiantado, en particular en los cursos de cálculo y sobre todo a medida que se avanza de nivel. Gómez-Chacón (2014), Souto y Gómez-Chacón (2016), Cantoral y Montiel (2001), estudian distintos conceptos del cálculo desde la visualización matemática, Oktaç y Vivier (2016), desde la conversión, cambio y transición en el cálculo y análisis. En cuanto a investigaciones sobre profesores en formación inicial, Montoya (2014) ha investigado sobre el proceso de prueba, Font (2011), lo ha hecho sobre las competencias profesionales de profesores de matemáticas de secundaria. Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier (2016) investigan sobre el rol del profesor desde el ETM, y Kuzniak y Nechache (2021) estudian su espacio de trabajo matemático personal desde la propuesta de una tarea en una clase de geometría. En cuanto a la modelización, destacamos debido al contexto de nuestra contribución, los trabajos de Verdugo-Hernández (2020), Salazar et al. (2018) y Lagrange et al. (2022).

Desde un punto de vista de los paradigmas en el ETM, Montoya y Vivier (2016) han definido los del análisis, los cuales son: Análisis aritmético/geométrico (GA), que permite interpretaciones con supuestos implícitos basados en geometría, cálculos aritméticos o el mundo real. Análisis de cálculo (CA), donde las reglas de cálculo se definen más o menos explícitamente y se aplican independientemente de la reflexión sobre la existencia y naturaleza de los objetos introducidos. Análisis real (AR), que se caracteriza por el trabajo involucrando aproximación y vecindades, incluso topológicas; la definición y las propiedades se establecen teóricamente que permite un "trabajo ε" propio de este paradigma; límites, desigualdad, "lo insignificante", los cuales utilizaremos para nuestra discusión y estudio.

CONTEXTO

En esta contribución presentamos una tarea de modelización, siguiendo lo discutido en (Lagrange et al., 2022), su clasificación en el currículum nacional chileno según sus objetivos de aprendizaje (MINEDUC, 2020), y de acuerdo al modelo propuesto en el trabajo de Blum y Leiss (2005).

La tarea es propuesta en un sesión virtual de trabajo de taller grupal del curso de Cálculo de primer año para docentes en formación inicial. Este curso cuenta con 3 sesiones de cátedra a la semana, en las cuales, al menos 1 vez al mes se desarrolla un trabajo grupal. La aplicación de esta tarea se realizó de manera online vía zoom, y duró 1 hora y 15 minutos de manera sincrónica, durante los cuales, los distintos grupos de trabajo, formados aleatoriamente por 3-4 personas, pudieron dar una aproximación inicial al problema, trabajando colaborativamente y discutiendo sobre el mismo con su respectivo grupo. La profesora junto a una ayudante del curso visitaron los grupos, yendo de sala en sala virtual, cumpliendo un rol de mediadoras y respondiendo preguntas sobre el enunciado. Luego de esto, de manera asincrónica, se dió un tiempo de aproximadamente 8 horas (hasta finalizar el día, donde lo/as estudiantes tenían además otras actividades curriculares) para entregar la versión final de la solución propuesta para la tarea. En total consideramos 13 grupos para este estudio; los que cumplieron con el tiempo de entrega y participaron en ambas etapas.

La tarea corresponde a una adaptación de un problema propuesto en el currículo nacional chileno, como aplicación del tópico derivadas (MINEDUC, 2020). Éste es visto en 3ro y 4to año de la enseñanza media en Chile desde el año 2020 en el electivo de matemáticas y no es parte de la formación general. Los/as estudiantes que participaron en este taller salieron del liceo el ese mismo año o antes, por lo que con alta probabilidad no conocen el problema. La mayoría cursó algún electivo de matemáticas o estuvo en alguna universidad antes, en carreras de ingeniería. Les va muy bien calculando y aplicando fórmulas, pero les cuesta mucho no saber a simple vista cómo resolver una tarea y discutirla para llegar a una posible solución consensuada.

METODOLOGÍA PARA IDENTIFICAR EL TRABAJO MATEMÁTICO

El Problema y su implementación

La siguiente tarea fue presentada en lenguaje natural, castellano, para ser leída.

Una empresa de construcción de conductos de agua ganó la licitación de una obra que conecta una casa rural a un servicio de agua y desagüe ya existente. El terreno donde se encuentra la casa es rectangular y colinda con una calle vecinal. El servicio existente de agua y desagüe llega hasta la esquina del terreno que intersecta con dicha calle. La distancia desde la casa hasta la calle vecinal es de 300 m. Desde la esquina del terreno que intersecta con la calle vecinal hasta la altura de la casa yendo por la misma calle hay 500 m. Debido a la situación geológica del suelo, los costos estimados por metro de la nueva conexión yendo por el lado de la calle son de 3 UF y por el terreno hacia la casa son de 6 UF. ¿Cuántos metros de conductos de agua deben ir por la calle y cuántos por el terreno para que el costo sea el menor posible?

La tarea se implementó en tres etapas; dos de manera sincrónica y una asincrónica.

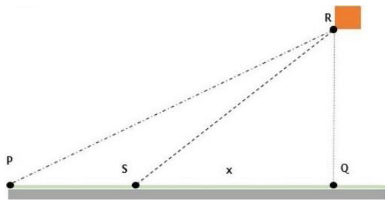
<u>La primera: espacio para la discusión</u>. Dada para que las y los estudiantes buscaran y descubrieran en grupo un buen diagrama que represente la situación dada. Aquí se recorrieron los grupos que levantaron la mano a través de las salas virtuales, con ayuda de una ayudante del curso. Aquí se dijo a los/as estudiantes que todas las hipótesis del problema debían estar en el diagrama final acordado, por tanto, que el problema debe ser leído cuantas veces sea necesario para asegurar eso.

<u>La segunda: tanteo de caminos posibles para la construcción del conducto</u>. Una vez que el diagrama estuviera listo, llegó el turno de experimentar cómo se relacionan los metros de conducto por calle o por terreno con el costo del mismo. A los grupos que preguntaron se les dijo que podían relacionar las distancias y costos de irse por la calle y terreno usando la figura encontrada. Otros grupos lograron en esta etapa definir una variable y una función que modela el costo del conducto.

<u>La tercera: etapa asincrónica</u>. Dado que las etapas 1 y 2 demoraron más de lo esperado (toda la clase), tuvimos que dar más tiempo para que todos los grupos pudieran modelar una función del costo y responder a la pregunta. Antes de comenzar esta etapa se les dijo que debían elegir alguna variable conveniente antes de definir la función.

Problema original y su modificación

Una empresa de construcción de conductos de agua ganó la licitación de una obra que conecte una casa rural a un servicio de agua y desagüe ya existente, que está lejos de la casa. En el dibujo esquemático de abajo, se muestra la ubicación de la casa, cuyo terreno se extiende hacia una calle vecinal dibujada por la franja gris.



Como la empresa quiere maximizar las ganancias, se modela la conexión determinando el punto S al lado de la calle, en el cual se debe iniciar la bifurcación del conducto hacia la casa rural.

Determina los costos que se generarían en la construcción mediante el trazado directo PR

a. *Determina los costos que se generarían en la construcción mediante el trazado compuesto PQ y QR.*
b. *Determina los costos que se generarían en la construcción mediante el trazado compuestoPS u SR con x = 450m.*
c. *Determina los costos que se generarían en la construcción mediante el trazado compuestoPS u SR con x = 350m.*
d. *Elabora la ecuación de la función C, que modela los costos de la conexión a la casa endependencia de x.*
e. *Determina la derivada C' de la función C, aplicando la regla de la función compuesta.*
f. *Determina los valores para el cual los costos lleguen a un mínimo.*
g. *Conjetura acerca de la condición bajo la cual la conexión directa PR del conducto es la más barata. Argumenta y comunica la conjetura.*
h. *Si los costos en la construcción del conducto a través del terreno aumentan más y más en comparación con los costos al lado de la calle, ¿en qué dirección se mueve el lugar en el dibujo esquemático que determina el punto S de la bifurcación? Explica y argumenta sin realizar cálculos. (MINEDUC, 2020).*

Modificamos este problema con el fin primero de contribuir a reducir la brecha existente entre la secundaria y la universidad en el área matemática, a través del diseño de tareas válidas para la institución donde se propondrán y cercanas a las propuestas en el currículum nacional, siguiendo con el trabajo realizado en (Jiménez, 2021; Jiménez et al., 2019). Dada la experiencia docente de la autora en la institución donde se quiere proponer la tarea, el problema original no representa una tarea válida para ser propuesta tal cual a primer año en la institución en cuestión, pues no promueve un trabajo discursivo ni deductivo fuerte. Desde el punto de vista del marco teórico de los ETM, el trabajo matemático que se propone al estudiantado es cerrado y potencialmente poco enriquecido matemáticamente.

El problema modificado se presenta usando solamente el registro de lenguaje natural (para ser leído, en castellano), se elimina el diagrama esquemático (nombrado así en el enunciado) del problema original y se plantea una pregunta abierta a responder con el objetivo de abrir las posibilidades de desarrollar trabajos matemáticos variados y no delinear un único camino a seguir. Dada la descripción del mismo, se motiva la búsqueda de un diagrama que permita dar una representación esquemática (siguiendo la terminología del problema original) a las hipótesis. En este sentido, al eliminar el diagrama como información dada del problema, permite que el estudiantado trabaje de manera colaborativa; que discuta, argumente y comunique lo que comprende del enunciado, y que lo convierta en un diagrama útil para la resolución de la tarea.

La tarea invita a un cambio de registro de representación del lenguaje natural al figural. Potencialmente las y los estudiantes pueden convertir la tarea y sus hipótesis en un registro figural, registro algebraico, registro analítico o registro gráfico, además de hacer tratamientos dentro de estos mismos y explorar hasta encontrar el diagrama que represente mejor la situación dada en la tarea, consensuado según cada grupo.

MÉTODO DE RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE LOS DATOS

Los 13 grupos de trabajo utilizaron las pizarras colaborativas Jamboard de google para las etapas 1 y 2 descritas antes (trabajo sincrónico), las cuales fueron subidas como borradores de pizarra a una carpeta drive del curso. Además, las sesiones grupales fueron grabadas y subidas a la misma carpeta. Luego de las 8 horas dadas para trabajar de manera asincrónica, cada grupo subió su tarea resuelta a la plataforma docente usada por la universidad. A ésta le llamamos entrega formal.

Acciones	Objetivo
Mostrar un diagrama esquemático	Para representar la situación dada (crear modelo)
Usar el teorema de Pitágoras	Relacionar distancias dadas
Definir una variable	Representar la cantidad de metros de conducto
Definir función	Representar el costo en UF por metro de conducto
Derivar la función definida	Desarrollar cálculo de puntos críticos
Igualar a cero	Obtener candidato a valor mínimo
Comprobar valor mínimo	Concluir problema

Tabla 1. ***Acciones (mínimas) previstas para ser mostradas por el estudiantado***

Leplat (2004) señala que dado que las actividades cognitivas no son observables, entonces éstas deben inferirse de acciones visibles. Según este punto de vista, las acciones son las huellas reales y observables de la actividad de cada grupo. Se basa en los datos recopilados durante la resolución de la tarea. A continuación, exponemos las acciones previstas que creemos son las mínimas que tendría que hacer visible el estudiantado para dar solución a la tarea.

Dado esto, nuestro trabajo de recopilación consistió en leer todas las resoluciones entregadas e identificar las acciones tomadas por el estudiantado para dar una resolución a la tarea. Consideramos las acciones previstas (ver Tabla 1) como punto de partida y las comparamos con las dadas en sus resoluciones, a éstas las llamaremos acciones reproducidas. Muchos grupos dan lugar a acciones reproducidas no consideradas en la Tabla 1, lo cual hace que el trabajo matemático expuesto por el estudiantado sea más diverso del previsto.

Luego, consideramos la unión de las acciones previstas y las reproducidas por todos los grupos y las escribimos en un archivo excel, asignando por cada grupo los valores 1 o 0, dependiendo si la acción se consideraba en la resolución o no (ver Tabla 2). Hicimos esto considerando dos hojas; una con los borradores de pizarra y otra con las entregas formales. Para el caso de las entregas formales hicimos un resumen de los episodios claves en coherencia con las acciones reproducidas y previstas, y clasificamos los caminos como C1, C2, C3, C4 y C5 (ver Tabla 3).

Este análisis, el cual comienza con este artículo, busca caracterizar los espacios de trabajo matemático de los distintos grupos participantes e identificar cómo se ven las acciones tomadas con los lentes del ETM. Nos interesa en particular en esta contribución, comparar el trabajo matemático desarrollado por el grupo A en la fase sincrónica y la asincrónica, y caracterizar los espacios de trabajo propuestos en ambas modalidades.

LAS DIFERENTES ACCIONES QUE HACEN VISIBLE EL TRABAJO MATEMÁTICO DEL ESTUDIANTADO

Resolución de estudiantes

<u>Borradores de pizarra colaborativa</u>

Puntos comunes

- *Búsqueda de un buen diagrama:* proceso para encontrar un buen diagrama que represente lasituación dada por el problema, para esto el grupo necesita verificar todas las hipótesis dadas. Una a una deben ser chequeadas para argumentar que el dibujo es correcto.
- *Uso del Teorema de Pitágoras:* para relacionar distancias y datos del problema.

Puntos no comunes

	Diagrama	Pitágoras	Costospor bordes	Elecciónde una variable	Idea de función	función	derivar	igualar a cero	mínimo
G1	1	1							
G2	1	1	1	1	1	1	1		
G3	1	1		1	1				
G4	1	1	1	1	1	1	1	1	1
G5	1	1		1	1	1	1	1	1
G6	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Group A	1	1	1						
G8	1	1	1	1	1				
G9	1	1	1	1	1	1	1		
G10	1	1	1	1	1				
G11	1	1		1	1	1	1	1	
G12	1	1		1	1	1			
G13	1	1	1						

Tabla 2. ***Caminos no comunes para borradores de pizarra según acciones previstas. Caso grupo A enverde.***

Entregas formales

Puntos comunes

- *Diagrama*: representa de buena manera la situación descrita en el problema (de buenamanera sería que satisface todas las hipótesis).
- *Uso del teorema de Pitágoras* para relacionar variables en una dirección y la perpendicular
- *Elección de una variable x*
- *Modelar* una función
- *Derivar* la función

Puntos no comunes: diversidad de caminos seguidos para el desarrollo del problema

C1	C2	C3	C4	C5
Modelar función directamente después del dibujo		Comprobar el precioque cuesta irse por ladiagonal y por los catetos		
Calcular usando pitágoras y reemplazando		Modelar la función luego de ver caminos posibles		Usar cotas para dar valores máx y min y modelar f
Derivar e igualar a cero		Derivar e igualar a cero		Calcular derivada e igualar a cero para encontrar x
Encontrar el candidato a x para que f(x) sea mínimo (descartar el que no perteneceal dominio)		Encontrar el x decir que es mínimo de manera algebraica (con def o sin def)	Encontrar el candidato a x para que f(x) sea mínimo (descartar el que no pertenece al dominio)	Encontrar el candidato a x para que f(x) sea mínimo (descartar el que no pertenece al dominio)
Argumentar mínimo de manera gráfica	Argumento comparativo para encontrar mínimo	Concluir según la pregunta de la tarea	Encontrar x, y comprobar que es mínimo con gráfico	Graficar la función en Geogebra para ver si tiene mínimo
Concluir según la pregunta de la tarea	Graficar para verificar y concluir		Concluir según la pregunta de la tarea	Concluir según la pregunta de la tarea

Tabla 3. Resumen de caminos utilizados por los grupos en la entrega formal

Caso del grupo a

Elegimos presentar el análisis del caso del grupo A porque dada la clasificación de acciones realizada, éste es uno de los grupos que tiene una mayor brecha de acciones reproducidas entre los borradores de pizarra y la entrega formal (Ver Tabla 2 y Tabla 3). Además, este grupo se ve bastante complicado en un principio ya que el no concluir un diagrama rápidamente les produce ansiedad.

Borrador de pizarra

El grupo comienza su trabajo leyendo el problema y luego explora realizando diferentes bocetos (ver Figura 1). Definimos como bocetos los dibujos realizados como intento de encontrar el diagrama esquemático (buen diagrama con todas las hipótesis del problema).

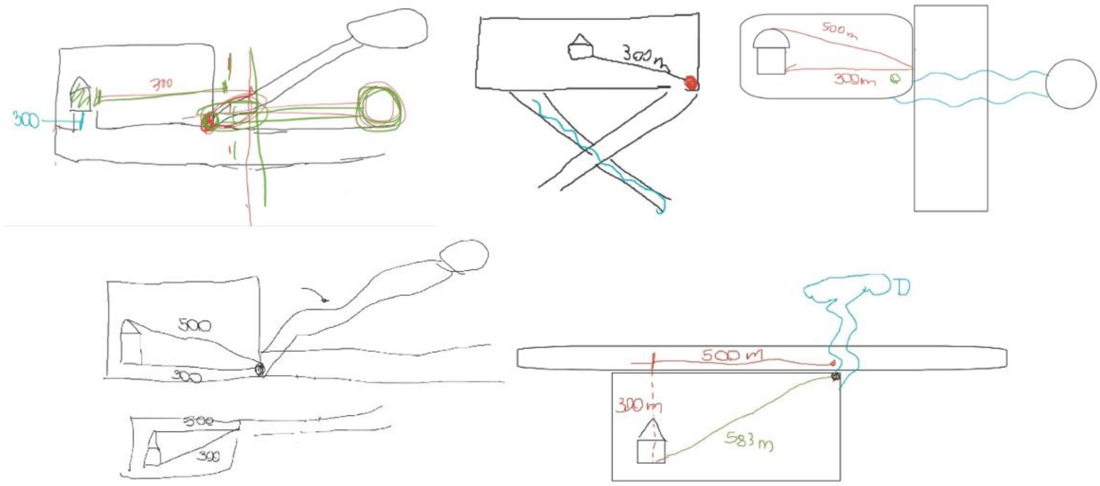


Figura 1. ***Bocetos***

Luego de 1 hora aproximadamente, logran ponerse de acuerdo y definen un diagrama que representa la situación de buena manera (ver Figura 2).

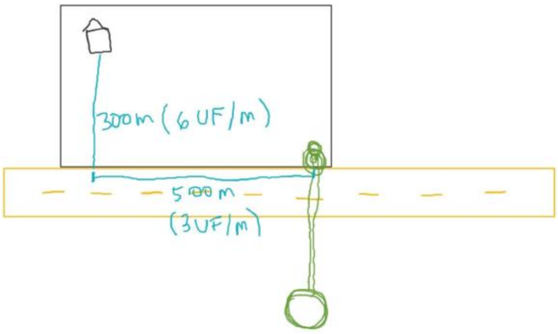


Figura 2. ***Diagrama esquemático***

Una vez que obtienen el diagrama que los/as convence, usan el teorema de Pitágoras para calcular el costo de construcción del desagüe yendo por la hipotenusa, por los catetos y por un camino intermedio (ver Figura 3).

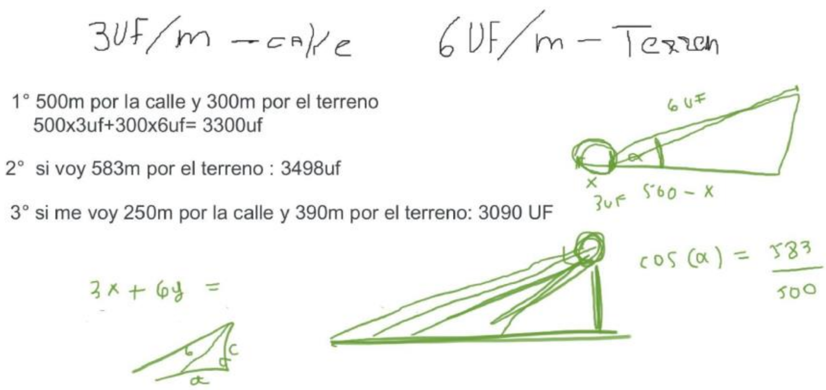


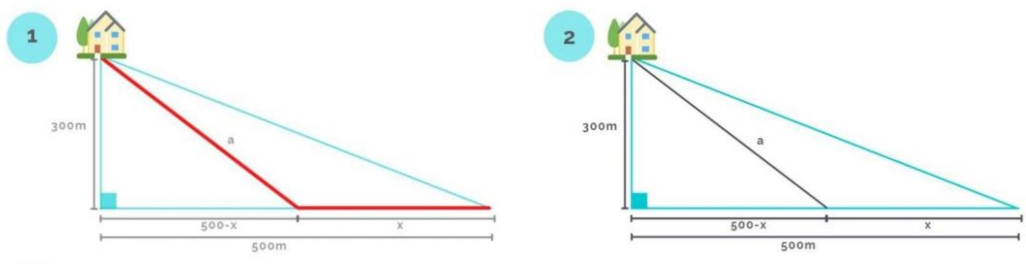
Figura 3. ***Costos de construcción yendo por los bordes***

Entrega formal:

Inician esta parte presentando un diagrama esquemático realizado con algún programa computacional como paint por ejemplo, el cual da una representación concreta (cercana a la realidad) de la situación de la tarea.

Figura 4. ***Diagrama esquemático: representación concreta***

Continúan notando que en la Figura 4 se observa un triángulo rectángulo. Dicen:



"en la primera imagen de la figura la línea roja representa el paso de la cañería, de tal forma que recorrerá una distancia "x" por la calle, la cual tendrá un costo de 3UF, y una distancia "a" que pasa por el terreno con un costo de 6 UF. Lo que queremos hallar es la medida de "x" y "a" de tal forma que el costo en UF sea el menor posible." En Figura 5 se observan dos diagramas, un poco más abstractos que el de la Figura 4, es por eso que les llamamos pictóricos (siguiendo la nomenclatura de método Singapur).

Figura 5. ***Diagramas esquemático: representaciones pictóricas***

Por medio del teorema de Pitágoras, el grupo calcula el valor del a para que quede expresado en términos de la variable x y de esta forma hallan la función (ver Figura 6).

Los catetos del triángulo son 300 y (500 - x), mientras que la hipotenusa es a. Escribimos la expresión:

$$a^2 = 300^2 + (500 - x)^2$$

$$(3) \qquad a = \sqrt{(500 - x)^2 + 300^2}$$

Considerando que el conducto de agua pasa por (x + a), podemos expresar "a" como (3), obteniendo:

$$(4) \qquad a + x = \sqrt{(500 - x)^2 + 300^2} + x$$

Y recordando que el trayecto en la calle corresponde a 3UF y en el terreno a 6UF, agregamos las constantes correspondientes. De esta forma obtenemos una expresión en función de x que modelará el costo total de UF que deberán pagar por la obra:

$$(5) \qquad f(x) = 6\sqrt{(500 - x)^2 + 300^2} + 3x$$

Figura 6. ***Pitágoras para encontrar relación algebraica entre variables***

Luego de esto, calculan la derivada de la función, argumentando que el problema pide conocer un punto crítico, después la igualan a cero. Notan que x debe pertenecer al intervalo [0, 500], siendo éste el dominio de la función f.

$$0 = \frac{-6(500 - x)}{\sqrt{(500 - x)^2 + 300^2}} + 3$$

$$-3 = \frac{-6(500 - x)}{\sqrt{(500 - x)^2 + 300^2}} \qquad \textit{multiplicamos } -1$$

$$3 = \frac{6(500 - x)}{\sqrt{(500 - x)^2 + 300^2}}$$

$$3 = \frac{6(500 - x)}{\sqrt{(500 - x)^2 + 300^2}} \qquad \textit{multiplicamos por } \sqrt{(500 - x)^2 + 300^2}$$

$$3\sqrt{(500 - x)^2 + 300^2} = 6(500 - x) \qquad \textit{multiplicamos por } \frac{1}{3}$$

$$3\sqrt{(500 - x)^2 + 300^2} = 6(500 - x) \qquad \textit{Multiplicamos por } \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{(500 - x)^2 + 300^2} = 2(500 - x) \qquad \textit{Elevamos a } 2$$

$$(500 - x)^2 + 300^2 = 4(500 - x)^2 \qquad \textit{Restar } (500 - x)^2$$

$$300^2 = 3(500 - x)^2 \qquad \textit{Multiplicamos por } \frac{1}{3}$$

$$30000 = (500 - x)^2 \qquad \textit{Aplicamos raíz cuadrática}$$

$$\pm\sqrt{30000} = 500 - x$$

Los dos posibles valores para x son:

$$x_1 = 500 + \sqrt{30000} \approx 673$$

$$x_2 = 500 - \sqrt{30000} \approx 327$$

Figura 7. ***Cálculo de los puntos críticos***

Descartan el valor mayor a 500, ya que habían notado anteriormente que el dominio de la función es [0, 500]. Así el único punto crítico candidato a ser mínimo es x=327. En el siguiente paso prueban usando el gráfico de f dado por Geogebra, que efectivamente en este punto la función alcanza el mínimo (ver Figura 8).

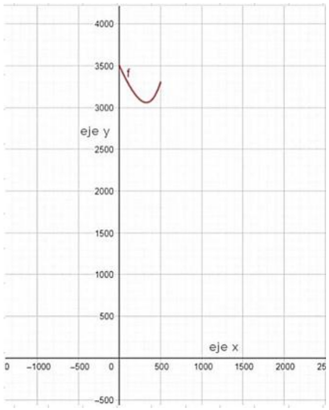


Figura 8. ***Mínimo de la función f***

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DEL GRUPO A

Borradores de Pizarra grupo A

Reconocemos un trabajo matemático de exploración de las hipótesis dadas en el registro de lenguaje natural con el fin de obtener un buen diagrama para descifrar la situación descrita en la tarea (el diagrama esquemático, como lo hemos llamado antes). Dado esto, se produce una circulación en el plano [Sem-Ins] (ver Figura 9), utilizando como herramientas semióticas tanto las hipótesis en registro de lenguaje natural como los bocetos que se van construyendo.

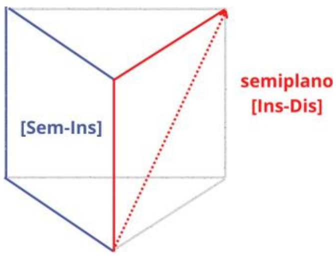


Figura 9. ***Planos verticales activados en el borrador de pizarra***

La activación de la génesis instrumental también está presente a través del uso del teorema de Pitágoras como una herramienta de origen referencial, para relacionar cantidades y variables, además en algunos casos exploran los posibles costos de construcción del desagüe. Por lo que en esta parte se activa el semiplano superior [Ins-Dis] (ver Figura 9). La flecha punteada roja va dirigida debido a que se parte por el artefacto y se llega a la prueba de los costos (ver (Menares, 2019)).

Entrega formal

Observamos que una vez acordado un buen diagrama, el grupo A propone una representación concreta del problema, luego, la transforma a una representación pictórica-simbólica (siguiendo lenguaje usado en método Singapur) para representar de manera más abstracta la situación. Aquí, es claro para nosotros que la génesis semiótica está activada. Después, usa el

teorema de Pitágoras como parte del referencial teórico para relacionar algebraicamente cantidades en una dirección y la perpendicular. Escoge una variable x de la cual dependerá la función que modelan en el siguiente paso, usando la relación encontrada. En esta etapa, vemos la activación del plano [Sem-Dis]. El grupo se mantiene activando la génesis discursiva (en ambas direcciones) cuando nota el dominio de la función f y en la siguiente etapa, cuando usando la definición de mínimo vista en clases, calculan la derivada de f e igualan a cero. Usan su propia conclusión de dominio de f y descartan uno de los valores para concluir el candidato a mínimo. Luego, tomando su referencial teórico dado por la f modelada y usando geogebra construyen el gráfico de f para argumentar que es realmente el mínimo de la función. En esta última parte es clara la dirección del trabajo por eso se representan las líneas rojas dirigidas en la Figura 10.

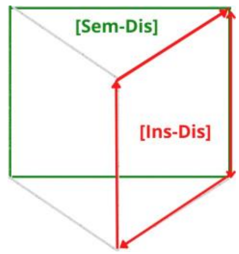


Figura 10. ***Planos verticales activados en la entrega formal***

Discusión y conclusiones

Nuestro objetivo principal en esta contribución es comparar el trabajo matemático entre las etapas sincrónicas (borradores de pizarra) y asincrónica (entregas formales) del grupo A. En este sentido, podemos señalar que el trabajo desarrollado por este grupo en el borrador de pizarra es mayoritariamente de entendimiento de la tarea, considerando una pequeña parte de estructuración de la misma, los cuales corresponden a los pasos 1 y 2 de la teoría de Modelización de Blum y Leiss (2005). Desde el lado del trabajo matemático lo que vemos mayoritariamente es un trabajo de visualización e instrumentalización de las hipótesis. Es decir una activación mayor en el plano [Sem-Ins]. Además, desde la teoría de visualización de Duval (1999), el grupo realiza una conversión del registro de lenguaje natural al registro figural, luego otra hacia el registro algebraico al utilizar el Teorema de Pitágoras. Por último, en el borrador de pizarra presentado por el grupo A identificamos un trabajo matemático en el paradigma GA (análisis geométrico/aritmético), dados los objetos utilizados y el proceso de visualización predominante.

En la etapa formal, notamos que el trabajo matemático cambia a uno mayormente cargado a lo discursivo, articulado con procesos semióticos e instrumentales en distintos momentos de la resolución. Desde ahí en nuestro criterio se activan los planos [Sem-Dis] e [Ins-Dis]. Identificamos principalmente un trabajo en el paradigma CA (análisis de cálculo) dados los cálculos de f, f’, punto crítico, etc., y hacia el final, un trabajo en el paradigma GA (análisis geométrico/aritmético) dada la validación por medio de la gráfica y uso de geogebra. En relación al ciclo de modelización, hay un trabajo de matematización de la situación presentada, un desarrollo algebraico y analítico basado en las definiciones, y finalmente una interpretación y respuesta final validada en el contexto concreto del curso y la tarea.

Considerando las fases sincrónicas y asincrónicas, vemos que el trabajo realizado por el grupo A es completo, ya que se desarrolla a través de una relación genuina entre las génesis y planos, en el contexto de una clase dada por la institución (Kuzniak, Nechache, y Drouhard, 2016). Creemos que la decisión de quitar el diagrama de la tarea original y presentarla solo para ser leída ayuda a promover un espacio de trabajo matemático donde la visualización se articula con la instrumentalización y que esa circulación no se desarrollaría teniendo la figura dada, asimismo, siguiendo el plan paso a paso dado en la tarea original, porque lo que se debe hacer está dado en el enunciado de la tarea, no debe deducirse. Por tanto la etapa de entendimiento y de estructuración en el ciclo de modelización también quedaría debilitada en el contexto de trabajo universitario del tema, al menos. Además, desde el punto de vista de los paradigmas, nos quedaríamos en este caso, mayormente y casi únicamente en el CA.

En lo que sigue, como proyección de este artículo nos queda comparar el trabajo matemático matemático previsto en la tarea modificada y en el problema original. Así como también comparar el trabajo de todos los grupos participantes de este estudio en ambas modalidades. Para esto último seguiremos la metodología propuesta por Kuzniak y Nechache (2021).

REFERENCIAS

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, *1*(1), 40-55.

Blum, W., & Leiss, D. (2005). Filling Up "-the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In *CERME 4–Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1623-1633). Sant Feliu de Guíxols: FUNDEMIIQS–Universitat.

Cantoral Uriza, R., & Montiel Espinoza, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*.

Gómez-Chacón, I. M., Kuzniak, A., & Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(54), 1-22.

Gómez-Chacón, I. M. (2014). Visualización y razonamiento, creando imágenes para comprender las matemáticas. *Proceedings of the XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática*, 9-10.

Jiménez, L. (2021). *Transitando desde la secundaria a la universidad en las sesiones de taller de matemática para estudiantes de pedagogía*. En R. vom Hofe, E. Puraiván, E. Ramos-Rodríguez, P. Reyes-Santander, J. Soto-Andrade, C. Vargas (Eds.). Aportes para la articulación entre teoría y práctica en la educación matemática (pp. 235-254). Barcelona: Grao (2021).

Jiménez, L., Menares, R., & Pomareda, R. (2019). Tareas que activan un trabajo matemático completo en los estudiantes de pedagogía. In E. Montoya, & L. Vivier (Eds.), *Proceedings of 6th Symposium on Mathematical Work* (pp. 245–256). Valparaíso, Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Richard, P. R. (Eds.). (2022). *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces* (1st ed., Mathematics Education in the Digital Era, Vol. 18). Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8.

Kuzniak, A., & Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of Mathematical Working Spaces. *Educational Studies in Mathematics*, *106*(2), 271-289.

Kuzniak, A., Nechache, A., & Drouhard, J. P. (2016). Understanding the developmentof mathematical work in the context of the classroom. *ZDM*, *48*(6), 861-874.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, *48*(6), 721-737.

Lagrange, J. B., Huincahue, J., & Psycharis, G. (2022). Modeling in Education: New Perspectives Opened by the Theory of Mathematical Working Spaces. In *Mathematical Work in Educational Context* (pp. 247-266). Springer, Cham.

Leplat, J. (2004). L'analyse psychologique du travail. Revue européenne de psychologie appliquée, 54, 101–108.

Menares, R. (2019). Planos dirigidos en el ETM personal de profesores en formación: una herramienta metodológica. In E. Montoya, & L. Vivier (Eds.), *Proceedings of 6thSymposium on Mathematical Work* (pp. 245–256). Valparaíso, Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Montoya-Delgadillo, E. (2014). El proceso de prueba en el espacio de trabajo geométrico: profesores en formación inicial. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 227-247.

Montoya, E., Vivier, L. (2016). Mathematical Working Spaces as an analysing tool forthe teaching and learning of calculus. ZDM, 48(6), 739-754.

Ministerio de Educación de Chile (2020). 3° y 4° Medio. *Formación Diferenciada Humanista-Científico.*

https://www.curriculumnacional.cl/portal/Curso/Educacion-General/3-y-4-Medio/

Oktaç, A., Vivier, L. (2016). Conversion, change, transition… in research about analysis. In *The didactics of mathematics: Approaches and issues* (pp. 87-121). Springer, Cham.

Salazar, J. V. F., Fernández, V. N., Lara, F. I. C., & Delgadillo, E. M. (2018). Dominios de la Geometría y del Análisis y su articulación por medio de la modelización y la tecnología digital. In *XV Conferencia Interamericana de EducaciónMatemática*.

Souto, B., & Gómez-Chacón, I. (2011). Visualization at University Level: The Concept of Integral. In *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 217-246.

Verdugo-Hernández, P. (2020). Un posible enfoque de complementariedad entre espacios de trabajo matemático y modelización. *UCMaule*, (59), 12-30.

IMPLICACIONES DE LOS AMBIENTES DIGITALES EN LOS PROCESOS DE MODELIZACIÓN

Guerrero-Ortiz, Carolina

Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

En esta comunicación se presenta una discusión sobre algunos tipos de tareas que han sido consideradas como tareas de modelización con especial atención en los contextos, modelos, modelos matemáticos y procesos de solución que son fomentados por las mismas. A partir de la identificación de características de las tareas, se describen y contrastan las rutas de aprendizaje que se potencian cuando los individuos trabajan con tareas que han sido diseñadas para ser implementadas en ambientes digitales. De esta manera, los resultados permiten dar cuenta de aquellos elementos de las tareas pertinentes de considerar en su diseño y la influencia del ambiente de Geometría Dinámica en el desarrollo del proceso de modelización.

INTRODUCCIÓN

La investigación en modelación en la educación matemática ha sido categorizada de acuerdo a las temáticas que se han presentado en algunas conferencias del International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA): Epistemological, Realistic or applied modelling, Educational, Cognitive, Contextual, Socio-crítica (Blomhøj, 2009). En estas perspectivas un tema de interés ha sido el estudio del tipo de tareas que potencian la actividad de modelización, donde se han considerado distintas disciplinas, objetivos de aprendizaje, desarrollo de competencias matemáticas y otras habilidades necesarias para afrontar situaciones que se presentan en la vida diaria, tales como el desarrollo del pensamiento crítico y reflexivo, entre otros (Blum & Borromeo, 2009; Guerrero-Ortiz & Camacho-Machín, 2022b; Maaß, 2010). Basta mirar los libros que han emergido de estas conferencias en donde podemos encontrar una gran variedad de tareas con distintos objetivos y matices, los cuales se pueden caracterizar de acuerdo a la postura conceptual que se adopte en el diseño. Por otro lado, el estudio de los procesos de modelización ha constituido la base de diversas investigaciones para estudiar el desempeño de los estudiantes cuando se involucran en estas actividades (Borromeo, 2006). En este contexto un punto de discusión se sitúa sobre lo que se entiende por tarea de modelización, situación problema, problema de palabras y el otro punto de discusión apunta hacia el tipo de actividades que se fomentan con estos tipos de tareas y cómo varían los procesos de modelización en función de la tarea que les da lugar.

Para aportar al desarrollo del conocimiento en el área, se presentan en este trabajo algunos resultados obtenidos a partir de investigar cuál es el proceso de modelización que desarrollan futuros profesores de matemáticas cuando diseñan tareas de modelización, contrastando estos procesos con los procesos de modelización que estas tareas incentivan en los estudiantes (Guerrero-Ortiz, 2021a, 2021b), de esta forma en esta comunicación se pone especial atención a las características de las tareas y en función de ellas a los procesos de modelización desarrollados en contextos digitales.

ELEMENTOS CONCEPTUALES

Las tareas para el aprendizaje de las matemáticas se pueden clasificar de diferentes maneras, dependiendo de las actividades tanto cognitivas como procedimentales que promueven (Nechache, 2017; Sullivan, Clarke & Clarke, 2013; Yeo, 2017). Para el desarrollo de la investigación que se presenta en esta comunicación, una tarea de modelación se define como aquella que fomenta la actividad de modelado, entendiendo el modelado como una transición entre la realidad y las matemáticas para abordar un problema que tiene sus raíces en situaciones de la vida real y procesarlo matemáticamente para obtener una respuesta al problema (Borromeo, 2018, Guerrero-Ortiz, & Camacho-Machín, 2022b). Las situaciones en la vida real, además pueden involucrar, desde un hecho que se suscita en el mundo que habitamos y que es perceptible por otros hasta aspectos como sensaciones, sentimientos, pensamientos, etc., experimentados por un individuo. Además, los procesos de modelización pueden ser interpretados y representados de formas diversas (Doerr, Ärlebäck, & Misfeldt, 2017). En este trabajo debido a la ventaja que ofrece reconocer la representación mental sobre la situación, se asume la perspectiva cognitiva (Borromeo, 2006) para analizar los procesos de modelización que se pueden potenciar con determinadas tareas. Esta perspectiva reconoce las fases: situación real, representación mental de la situación, modelo real, modelo matemático, resultados matemáticos y resultados reales.

El abordaje de tareas de modelación permite distintas estrategias de solución, las cuales a su vez pueden involucrar diversos conocimientos tanto del ámbito matemático (en distintos dominios, Montoya-Delgadillo & Vivier, 2014), como conocimiento extra-matemático (distintas disciplinas y el cotidiano, Mazzitelli & Aparicio, 2010; Guerrero-Ortiz, 2021a). Además, como se ha mostrado en otros estudios, el uso de las tecnologías (Greefrath, Hertleif, & Siller, 2018; Guerrero-Ortiz & Camacho-Machín, 2022a; Molina-Toro, Rendón-Mesa, & Villa-Ochoa, 2019), incide en formas distintas en el desarrollo de los procesos de modelización. Se identifican las tecnologías que se integran como herramientas que intervienen en algunas de las fases del proceso de modelización. También se ha observado el uso de las tecnologías como herramientas para explorar los modelos una vez que estos han sido construidos y traducidos a un lenguaje propio de las tecnologías. En Guerrero-Ortiz (2021a) y Guerrero-Ortiz & Camacho-Machín (2022b) se plantea el uso de un sistema de geometría dinámica, como herramienta para la creación de un micromundo en el cual tiene lugar el desarrollo de procesos de modelización. Otro elemento que genera discusión es la conceptualización de modelo, modelo matemático y modelo computacional. De acuerdo con Guerrero-Ortiz & Camacho-Machín (2022b), entendemos como modelo a una representación simplificada de una parte de la realidad que refleja algunos de sus aspectos particulares, mientras que un modelo matemático es una representación de una parte de la realidad que permite la aplicación de métodos matemáticos. En el contexto del trabajo en un Sistema de Geometría Dinámica (SGD), el modelo computacional está dado por la configuración geométrica que representa la situación en una especie de simulación o representación de una parte de la realidad, que permite explorar los resultados de una serie de acciones dentro de los límites del modelo, previamente definidos por el diseñador. Por lo tanto, el modelo computacional representa las características y comportamientos de la situación en un SGD, mientras que el modelo matemático recoge las relaciones entre los objetos del software establecidas con una intención matemática.

METODO

Con las ideas anteriores como base se estudiaron y caracterizaron las tareas diseñadas en ambientes digitales por futuros profesores de matemáticas, particularmente aquí se presentan dos casos que consideran el uso de un software de geometría dinámica. El caso 1, fue diseñado e implementado por un participante (G1) y el caso 2 se trabajó en grupo por tres participantes (G2). Todos los participantes eran estudiantes de pedagogía en matemáticas y tenían un dominio medio del software. En el contexto de este trabajo, entre otros elementos, se espera que en un nivel intermedio de dominio del DGS, los participantes puedan utilizar botones y deslizadores para controlar las animaciones de varios objetos simultáneamente (Guerrero-Ortiz (2021a). El diseño y la implementación responden a la tarea de crear situaciones de enseñanza de las matemáticas cercanas a la modelización involucrando el uso de tecnología.

Para el análisis de las producciones de los participantes se consideró una metodología cualitativa. Inicialmente se identificaron de acuerdo al ciclo de modelización (Borromeo, 2006), las fases que consideraron relevantes para la implementación de las tareas. Posteriormente, se caracterizó la intencionalidad del uso de las herramientas del SGD que el diseñador promovió por parte de los estudiantes.

Análisis de resultados

En esta sección se presenta el análisis de las tareas que diseñaron los participantes. Inicialmente se muestra una descripción de la tarea, después se expone el análisis en relación con el proceso de modelización donde se discute el rol de los modelos cuando las actividades se desarrollan en un ambiente de geometría dinámica.

Caso 1 (G1)- Planificación de un viaje.

Esta tarea solicita a los estudiantes planificar un viaje. Para ello deberán elegir y buscar en google maps el punto de partida y el punto de destino. Con esta información los estudiantes deben reconocer aquellos elementos o situaciones que deben tener en cuenta para realizar el viaje. Entre ellos, determinar el camino más corto, prever el consumo de combustible y los puntos para recarga de este, los costos asociados al consumo y los peajes, entre otros. El desarrollo de la tarea se orienta mediante un conjunto de preguntas que los estudiantes deberán responder conforme avanzan en la exploración. La figura 1 esquematiza el proceso de modelización que dirigió las actividades de los estudiantes.

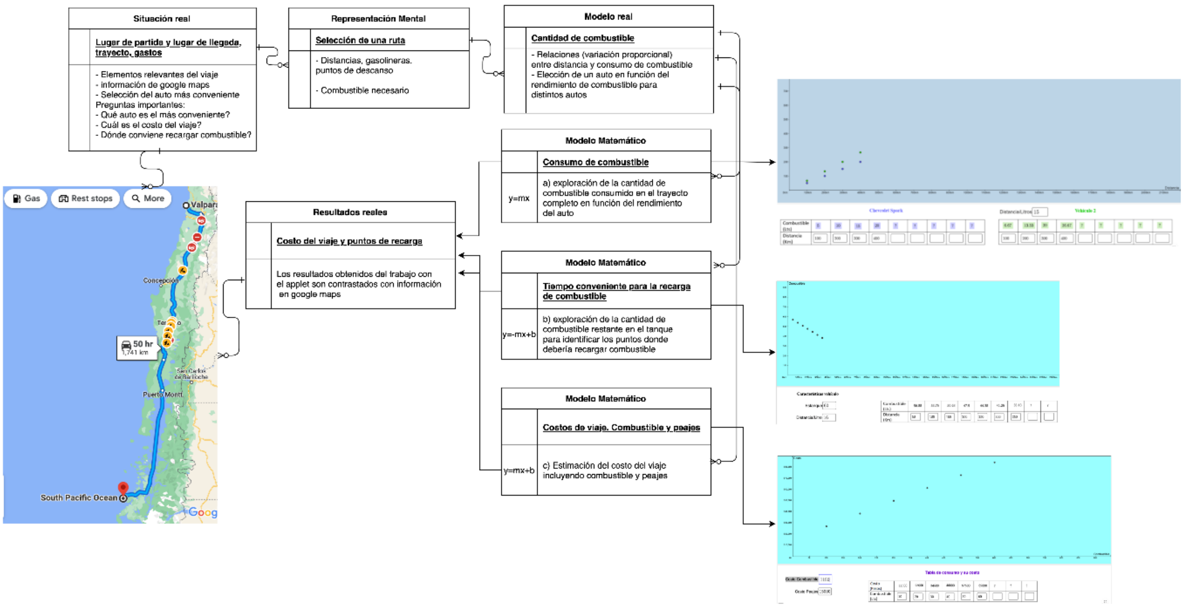


Figura 1. Proceso de modelización desarrollado por los estudiantes

En esta tarea, los estudiantes en grupos abordaron la discusión de la situación real dada por la planificación del viaje. En la discusión identificaron el cálculo de costos y los sitios donde realizar la recarga de combustible como elementos relevantes del viaje. Durante la planificación del viaje siempre estuvo presente la representación mental de la situación, por ejemplo, cuando eligieron los puntos de partida y de llegada, y al buscar en la web los sitios que pueden visitar en el trayecto. El modelo real destacó cuando los estudiantes seleccionaron un auto para realizar el viaje e identificaron y realizaron anotaciones sobre las relaciones entre la distancia, consumo de combustible, rendimiento del auto y los gastos económicos asociados al viaje. Debido a la falta de infraestructura donde se implementó la actividad, el diseñador de la tarea decidió construir los Applets con los que trabajaron los estudiantes (estos se descargaron en sus teléfonos móviles). En este caso, el modelo matemático responde a un modelo inmerso en el micromundo del SDG, en una especie de caja negra para los estudiantes, donde ellos pueden explorar la variación entre distancia y rendimiento del auto, cantidad de combustible en el estanque y distancia mínima para realizar la recarga y, costo incluyendo peajes y consumo de combustible. Pero como en el caso de la caja negra desconocen las reglas de construcción del applet que les permite obtener retroalimentación respecto de los datos que ingresan. Aunque, intuitivamente, en la fase del modelo real reconocieron que se trata de una situación que describe un comportamiento lineal. Finalmente, los resultados matemáticos son obtenidos del trabajo con el applet y contrastados con la información que los estudiantes pueden obtener en la web.

Caso 2 (G2)- Terreno de cultivo

La consigna que acompaña la tarea es la siguiente:

> Don Ramón Moya tiene un terreno sembrado de 25 m, donde sembró papas, tomates y acelgas, de tal manera que todos los sectores tienen la misma área y el sector de tomates y papas son de la misma forma, como se muestra en la siguiente imagen [Figura 2].
>
> Don Ramón te pide que lo ayudes a:
>
> a. Calcular cual es el área de cada sector.
>
> b. Calcular cuánto miden los lados de cada sector, ya que próximamente quiere cercarlos.
>
> c. Saber cuál será la producción aproximada que obtendrá sabiendo que…..
>
> d. Por último si agrandará el sector de las acelgas manteniendo el hecho de que el sector de tomates y papas tiene que ser igual, como irá cambiando la proporción, busca una manera para representarlo.

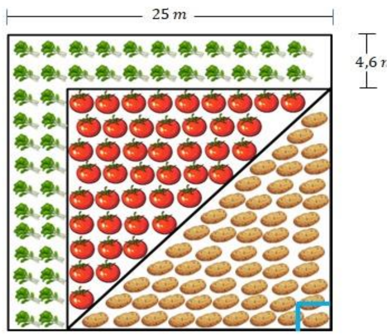


Figura 2. Sectores del terreno

En el siguiente esquema (Figura 3) muestra el proceso intencionado para los estudiantes.

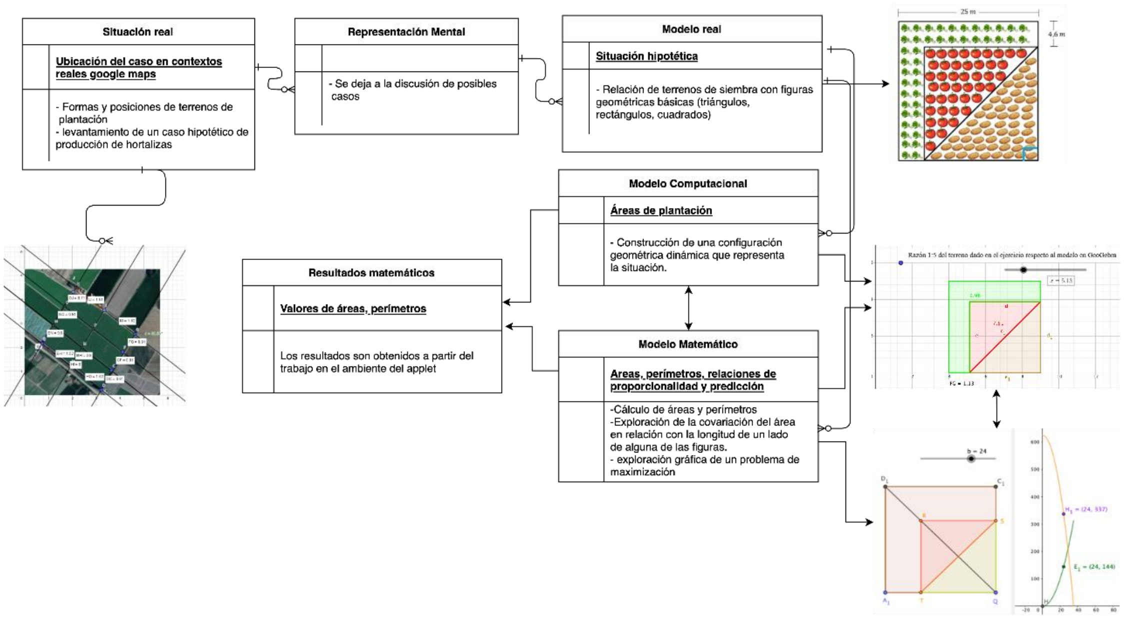


Figura 3. Proceso de modelización intencionado para los estudiantes

En esta tarea, podemos cuestionar si efectivamente hay un proceso de modelización por parte de los estudiantes. Durante su diseño se analizó el proceso que desarrollan los futuros profesores (Guerrero-Ortiz & Camacho-Machín, 2022) donde se encontró que inicialmente analizan una situación relevante que podría conducir a la reflexión y discusión de diversos contenidos asociados al estudio de una situación de siembra, pero la tarea finalmente para los estudiantes se desarrolla en un contexto idealizado, tal como se puede observar en el texto que la acompaña. Respecto al proceso de modelización se tiene que las fases *situación real* y *representación mental de la situación* se desarrollan en una actividad de discusión grupal entre el docente y los estudiantes, por lo que el caso que abordan en la tarea corresponde a un modelo real, ya idealizado de la situación. Puesto que, la intención de los diseñadores es que los estudiantes construyan la representación de la situación en el SGD, decimos que se presenta la fase de construcción de un *modelo computacional*, el cual es manipulable para experimentar con distintas áreas de la representación de los terrenos, este modelo es constituido por elementos geométricos del software. En este caso, el modelo computacional busca representar únicamente las características visuales de la situación y, por supuesto su construcción y el uso de las herramientas involucradas puede considerar propiedades o definiciones en forma consciente o inconsciente para el usuario, pero el foco de atención en este momento no se centra en los aspectos matemáticos. Luego, la noción de *modelo matemático* se hace evidente cuando la representación de las partes del terreno adquiere un significado matemático al ser reconocidas las formas que lo componen como figuras geométricas relacionadas. Identificando, longitudes de los lados, perímetros, áreas y sus relaciones en la configuración geométrica. Posteriormente, la construcción que representa las áreas del terreno, tanto en la pantalla que muestra el terreno compuesto por figuras geométricas, como en la pantalla que muestra el sistema de coordenadas y su representación funcional, conduce mediante la exploración de las relaciones de variación a dar respuesta a las preguntas planteadas (*resultados matemáticos*). Dada la naturaleza de la tarea, ofrece oportunidades a los estudiantes para verificar sus resultados solo en términos algebraicos. La idea de modelación en este caso podría parecer cercana a la idea de modelación instrumentada propuesta en Salazar & Carrillo (2019), aunque de acuerdo a la interpretación presentada en esta comunicación existen ciertas sutilezas en la conceptualización de los modelos.

REFLEXIONES Y CONCLUSIONES

Los resultados que se discuten en esta comunicación forman parte de un proyecto de investigación más amplio, en donde se ha explorado el conocimiento de los profesores y futuros profesores en relación con el uso de la tecnología, la pedagogía y el contenido, y las manifestaciones de este conocimiento en el diseño de tareas de modelización y su implementación en actividades de enseñanza. Los resultados en otros trabajos nos han mostrado evidencias de que los procesos intencionados para las actividades de los estudiantes están sustentados en el conocimiento del profesor sobre el contenido a enseñar y la tecnología, y sobre sus creencias respecto a la integración de estos dos elementos, razón por la que los procesos mostrados aquí no debieran considerarse como aislados de los objetivos de modelización que el profesor reconoce en las tareas.

Las actividades y el trabajo matemático potenciado en los estudiantes a partir de una tarea, naturalmente dependen de la situación que se plantea en la tarea y del objetivo de modelar. En el primer caso, el tránsito por las primeras tres fases del ciclo de modelización es más rico por la discusión que desarrollan los estudiantes durante la planificación. Mientras que, en la fase del trabajo con el modelo matemático, la actividad que desarrollan los estudiantes está asociada con la interpretación de la información que el Applet les ofrece. Por otro lado, en el caso 2, las primeras tres fases del proceso de modelización son desarrolladas en la discusión con la clase completa y guiadas por el profesor. En cuanto al trabajo con el SGD se puede observar que se propone un trabajo completo, tanto en la construcción del modelo computacional, como en la construcción del modelo matemático por parte de los estudiantes. De esta manera, al analizar la modelización en ambientes digitales, en función de la situación estudiada y la actividad que el docente promueve, nos permite re-conceptualizar la idea de modelo, modelo matemático y modelo computacional, en función del uso que tienen los artefactos tecnológicos.

REFERENCES

Blomhøj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling: Categorising the TSG21 papers. Institut for Studiet af Matematik og Fysik samt deres Funktioner i Undervisning Forskning og Anvendelse. Tekster, (461), 1-19. http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/pdf/461.pdf

Borromeo, F. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38 (2), 86-95.

Blum, W. & Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?. *Journal of Mathematical Modelling and Application,* 1(1), 45-58. Available at: <https://proxy.furb.br/ojs/index.php/modelling/article/view/1620>. Date accessed: 06 dec. 2021.

Doerr, H., Ärlebäck, J., & Misfeldt, M. (2017). Representations of modelling in mathematics education. In *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education*; Springer: Cham, Switzerland, 71–82.

Greefrath, G., Hertleif, C. & Siller, H. (2018). Mathematical modelling with digital tools -a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *ZDM*, 50, 233–244.

Guerrero-Ortiz, C. (2021a). Pre-service Mathematics Teachers' Technological Pedagogical Content Knowledge: The Case of Modelling. In Leung, F.K.S., Stillman, G.A., Kaiser, G., Wong, K.L. (Eds.) (eds.). *Mathematical Modelling Education in East and West, International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp.141-151). Springer Nature, Switzerland.

Guerrero-Ortiz, C. (2021b). Modelación y tecnología como parte del conocimiento del futuro profesor de matemáticas. En Guerrero-Ortiz, C., Ramos, E. & Morales, A. (Eds). *Aportes desde la didáctica de la matemática para investigar, innovar y mejorar.* Modelacion matemática. Grao, España.

Guerrero-Ortiz, C & Camacho-Machín, M. (2022). Design modelling tasks in digital environments. In *Proceedings of CERME 6. European Society for Research in Mathematics Education*.

Guerrero-Ortiz, C. & Camacho-Machín, M. (2022). Characterizing Tasks for Teaching Mathematics in Dynamic Geometry System and Modelling Environments. *Mathematics* 2022, *10* (8), 1-20. https://doi.org/10.3390/math10081239

Maaß, K. (2010). Classification Scheme for Modelling Tasks. *J Math Didakt*, 31, 285–311.

Mazzitelli, C., & Aparicio, M. (2010). El abordaje del conocimiento cotidiano desde la teoría de las representaciones sociales. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 7 (3), 636-652.

Molina-Toro, J.F., Rendón-Mesa, P.A., & Villa-Ochoa, J.A. (2019). Research Trends in Digital Technologies and Modeling in Mathematics Education. *Eurasia J. Math. Sci. Technol. Educ.*, 15, em1736.

Montoya-Delgadillo, E. & Vivier, L. (2014). Cambios de dominio en el contexto de los espacios de trabajo matemáticos. *Anales de Didáctica y Ciencias Cognitivas* 19, 73–101.

Nechache, A. (2017). La catégorisation des tâches et du travailleur-sujet : Un outil méthodologique pour l'étude du travail mathématique dans le domaine des probabilités. *Annales deDidactique Et De Sciences Cognitives*, 19, 67–90.

Sullivan, P., Clarke, D., & Clarke, B. (2013). Teaching with tasks for effective mathematics learning. New York: Springer.

Salazar, J. V. F., & Carrillo, F. I. (2019). Espacio de Trabajo Matemático Personal de profesores en relación a la función definida por tramos. Uni-Pluriversidad, 19(2), 144–160.

Yeo, J.B.W. (2017). Development of a Framework to Characterise the Openness of Mathematical Tasks. *Int J of Sci and Math Educ*, 15, 175–191. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9675-9

LE JEU DES MODELES MATHEMATIQUES DANS LE TRAVAIL MATHEMATIQUE : UNE APPROCHE PLURIDISCIPLINAIRE

Alain Kuzniak[1] et Claudia Reyes[2]

[1]Université de Paris, Laboratoire de Didactique André Revuz, Paris.

[2]UNAM, Ciudad de Mexico, Mexique

Dans cette contribution, nous abordons la question de la modélisation mathématique en relation avec des situations réelles qui font partie d'autres domaines scientifiques. Après avoir précisé ce que nous entendons par modélisation, mathématisation et modèles, nous présentons la perspective de la théorie des ETM, sur les différentes phases de la modélisation dans un cadre plurisdiciplinaire. Notre réflexion est illustrée à partir d'une situation de modélisation portant sur la combinaison d'un Mouvement Circulaire Uniforme (MCU) et d'un Mouvement Rectiligne Uniforme (MRU) en cinématique. La présentation est structurée grâce aux différentes phases de la modélisation (description, mathématisation, validation et communication). L'étude articule le travail mathématique et le travail cinématique. Elle s'appuie sur l'analyse de la circulation du travail dans les Espaces de Travail Cinématique et sur le jeu entre modèles qui renvoient à des paradigmes différents.

INTRODUCTION

Dans cette contribution, nous nous intéressons à la modélisation mathématique dans un cadre pluridisciplinaire. Nous souhaitons utiliser la perspective de la théorie des ETM pour explorer des situations associées à des domaines scientifiques autres que mathématiques. Une des particularités de ces situations est qu'elles peuvent être décrites d'un point de vue phénoménologique par des modèles non mathématiques. De ce fait, on doit pouvoir tenir compte d'une éventuelle double modélisation, la première relève des mathématique, la seconde de la science mise en jeu dans la tâche.

Les recherches sur la modélisation à travers la perspective de la théorie des ETM sont récentes et encore peu nombreuses. Cependant, comme le soulignent Lagrange et al. (2022), elles ouvrent de nouvelles voies pour étudier, dans un contexte scolaire, des tâches qui combinent une approche mathématique avec une autre approche scientifique.

Nous commençons par expliciter les liens que nous établissons entre modélisation, mathématisation et modèles (Section 1). Cela nous conduit à préciser ce que nous entendons par modèle dans le cadre de la théorie des ETM (Section 2). Dans la Section 3, nous développons notre réflexion sur la modélisation basée sur la construction de situations didactiques fondées sur des jeux de modèles. L'étude s'appuie sur une ingénierie didactique développée par Reyes-Avendaño (2020) portant sur la combinaison d'un Mouvement Circulaire Uniforme (MCU) et d'un Mouvement Rectiligne Uniforme (MRU) en cinématique.

MODELISATION, MATHEMATISATION ET MODELES

Modélisation et mathématisation

A partir des années 2000, l'enseignement de la modélisation dans l'enseignement obligatoire a pris une importance de plus en plus grande dans la plupart des pays développés. Cela est dû, pour partie, à l'influence prédominante d'une approche utilitariste des mathématiques qui s'est accompagnée d'un accroissement de l'importance donnée aux compétences autour de la modélisation comme thème d'enseignement. Le but assigné à cette réforme est de donner du sens à des notions mathématiques qualifiées d'abstraites et ainsi de rendre les mathématiques plus attractives. Mais, de fait, certains des enjeux propres aux mathématiques semblent avoir été délaissés pour faire place à une approche plus générale formulée en termes de résolution de problèmes où peuvent éventuellement intervenir les mathématiques. Le risque d'une évanescence progressive des contenus mathématiques est préoccupant. Nous souhaitons privilégier la question de la mathématisation pour aborder la modélisation pour garder la spécificité de l'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire. Cette approche n'exclut pas, bien au contraire, les interactions avec d'autres disciplines. Dans ce cas, il importe de ne pas perdre de vue les objectifs propres à chacune des disciplines en jeu.

Dans sa recherche sur la modélisation de situations probabilistes et sur la validation des résultats obtenus, Nechache (2018) propose une reconfiguration du modèle de Blum et Leiss (2007) basé sur trois phases en interaction.

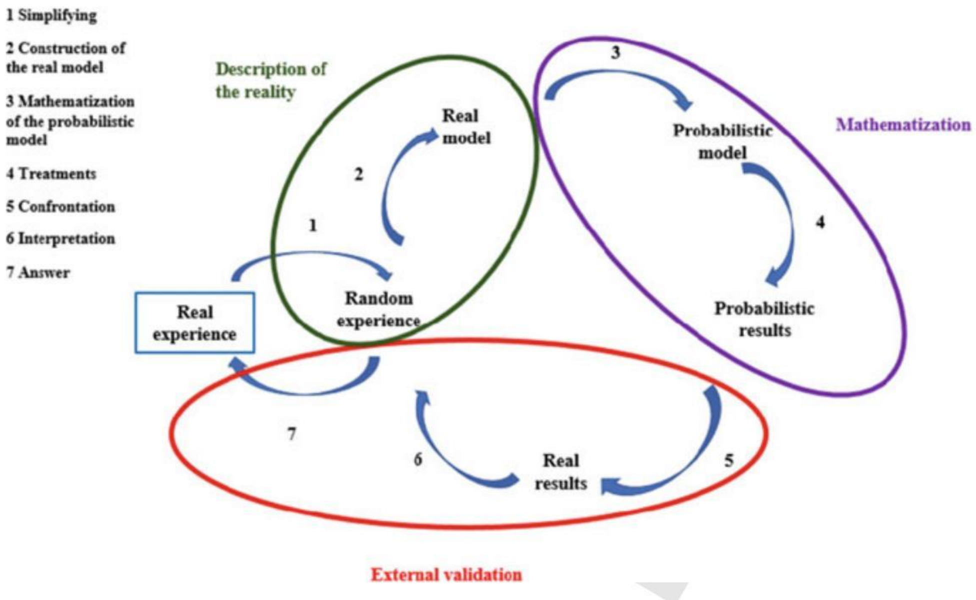


Figure 1. Le cycle de modélisation dans la theorie des ETM suivant Nechache (2018)

La première phase vise à une description du problème et du contexte dans lequel il s'inscrit. Une phase de mathématisation vise à développer, parfois, des modèles nouveaux, mais, le plus souvent, elle se propose d'implémenter et d'améliorer des modèles mathématiques existants. Enfin, la troisième phase s'inscrit dans un processus de validation externe, en relation avec le monde non mathématique, des résultats produits à l'intérieur des mathématiques.

Nus retenons et élargissons cette vision globale de la modélisation qui commence par une description du problème sous formes d'un ou plusieurs modèles de la situation (1). Ces modèles sont décrits à l'aide de données, de variables quantitatives ou qualitatives. Ils peuvent être de nature empirique ou relever de disciplines non mathématiques. Dans un deuxième temps (2), ces modèles sont mathématisés, puis développés et exploités pour produire des résultats par un calcul ou par un raisonnement déductif. Cette partie est spécifique du travail mathématique. Une validation externe confronte la conformité des résultats avec les données issues de la réalité (3). Les conclusions obtenues sont communiquées en dehors de la sphère mathématique et apportent une réponse à la question initiale (4).

Cette description rend compte de la modélisation mathématique et de la spécificité du travail mathématique mis en jeu. Cependant, elle ne peut s'appliquer telle quelle à des tâches de modélisation mettant en jeu plusieurs domaines scientifiques avec leurs propres règles de fonctionnement et nous verrons dans la section 3 comment articuler cette double modélisation dans un cadre pluridisciplinaire.

Mathématisation et travail mathématique

Dans le schéma (Fig.1) qui vient d'être décrit, la mathématisation peut être assimilée, comme le souligne Israel (1996), à la modélisation mathématique. Nous considérons que la mathématisation est constitutive du travail mathématique dont elle aide à préciser les enjeux épistémologiques. Le travail mathématique s'applique à s'approprier, à préciser, développer ou à généraliser des modèles mathématiques. Il s'agit aussi de faire fonctionner les modèles pour produire des résultats grâce à des traitements, des techniques et des raisonnements en relation avec les théories mathématiques associées aux modèles. Les modèles ont un rôle pivot et central pour faire avancer et former le travail mathématique, en relation avec la notion d'ETM. Cependant, la spécificité du domaine source dans lequel se situe la situation initiale conduit à considérer également des modèles qui ne sont pas nécessairement mathématiques. Les formes de travail peuvent alors relever de ces domaines et donc d'autres disciplines.

QUELQUES CARACTERISTIQUES DES MODELES IMPORTANTES POUR DEFINIR LEUR USAGE DANS LES ETM

Nous utilisons les recherches d'Israel (1996) mais aussi la synthèse effectuée dans le cadre de la ThETM par Lagrange avec Psycharis et Huincahué (2022).

De la progressivité des modèles

Pour rendre compte des nombreuses approches qui permettent de résoudre un problème complexe, il est nécessaire d'envisager différents modèles. Ces derniers peuvent s'appuyer sur des domaines mathématiques différents voire provenir de domaines non mathématiques. De ce fait, des variables, des outils technologiques ou des manières de travailler différentes sont mis en œuvre.

Le plus souvent, les modèles ne sont pas construits par les utilisateurs qui s’approprient des modèles existant. Il peut cependant être nécessaire, soit pour des étudiants plus jeunes, soit pour avancer dans l’élaboration de modèles de plus en plus complexes, de s’appuyer sur la notion de modèle émergents comme le propose la théorie didactique de la Realistic Mathematics Education. Dans ce cadre, un chaînage de modèles rend compte de ce que les auteurs appellent les mathématisations horizontale et verticale.

Pour rendre compte de cette progressivité des modèles, on peut distinguer trois niveaux de paradigme en fonction du lien des théories associées à ces modèles avec la réalité et la constitution axiomatique. Le premier paradigme proche du réel s'inspire, en partie, de la philosophie aristotélicienne dans laquelle les perceptions, les convictions, les expériences antérieures, les contextes et les connaissances préalables du sujet sont des éléments fondamentaux de son travail. Le second paradigme dégage un ensemble de modèles, distinct de la réalité, sur lesquels s’appuie le travail de preuve et le contrôle des expériences. Le troisième niveau renvoie à un travail d’abstraction et d’idéalisation qui dans le cas des mathématiques peut parfois couper tout lien avec la réalité. Dans toutes les études, il sera nécessaire de clarifier la nature précise de chacun des ces paradigmes qui donne des formes de travail très différentes (Voir annexe 1, les paradigmes de la cinématique).

Localité des modèles et lien avec les ETM

De par leur origine, les modèles sont liés à des problèmes particuliers. Parfois, par la suite et dans un processus de généralisation, ils peuvent être associées à des classes de problèmes où deux problèmes sont considérés comme semblables si on peut leur associer le même modèle. Les modèles ont généralement un caractère local (Israel, 1996) et fragmentaire à la fois par leur domaine de définition et par leur domaine d’opérationnalisation.

Un modèle mathématique peut-être mis en correspondance avec un ensemble de propriétés et de définitions homogènes et cohérentes qui font partie d’un référentiel théorique associé à un domaine mathématique. De ce fait, il est possible d’associer un modèle mathématique à un ETM particulier, que l’on peut étudier grâce à tous les ingrédients habituels de la théorie des ETM. Pour décrire un modèle particulier, on pourra se limiter aux entités épistémologiques et unités cognitives qui sont mobilisées dans le travail mathématique sur ces modèles. Elles dépendent des objets mathématiques employés pour résoudre le problème.[39]

[39] Nous avons ici limité notre description aux modèles mathématiques, mais dans un premier temps, nous considérerons que le même genre de considération s’applique à des modèles non mathématiques.

Opérativité

L'opérativité de la modélisation – et à travers elle, celle des modèles – est introduite dans le cadre de la modélisation (Israel 1996, Lagrange et al. 2022) pour insister sur l'importance et l'intérêt des résultats au-delà de la seule sphère mathématique. La mathématisation se distingue ici de la modélisation orientée vers l'action et la solution de problèmes posés dans le monde du travail et dans la société (operativity). Cette opérativité aide à comprendre et à justifier l'intérêt des tâches ou des problèmes dits de modélisation dans l'enseignement des mathématiques. En effet, on peut espérer donner une motivation supplémentaire aux élèves en les faisant chercher sur des problèmes issus de leur environnement social et culturel et dont la solution peut avoir un lien ou une influence sur leur vie quotidienne.

Au-delà de son intérêt pour une approche plus problématisée de l'enseignement, l'idée d'opérativité nous conduit à valoriser une quatrième phase dans la vision cyclique de la modélisation. Cette phase de communication externe, que Penrose appelle « Write the report », permet aux étudiants ou chercheurs engagés dans une modélisation de rendre compte aux non chercheurs des résultats de leur travail. Elle peut supposer aussi une reformulation des questions initiales.

Vers une définition des modèles et de leur rôle dans la théorie des ETM

Israel (1993), repris par Lagrange et al. (2022), insiste sur l'idée de la localité des modèles dans l'enseignement. Les modèles sont des fragments des mathématiques et ne sont pas une traduction évidente de la réalité. La théorie des ETM prend en compte cette complexité de la modélisation sans réduction à une translation et à un usage du langage mathématique.

Nous proposons une définition des modèles qui prend en compte ces différents éléments dans une perspective orientée vers l'enseignement.

> Un modèle mathématique est un fragment de théorie mathématique organisé au sein d'un ou plusieurs domaines mathématiques qui peut s'appliquer à décrire, comprendre ou agir sur le monde, qu'il soit réel ou déjà modélisé au sein d'autres champs scientifiques.

Cette définition des modèles mathématiques insiste sur leur caractère local avec la nécessité d'une réorganisation à l'intérieur des mathématiques. Elle prend aussi en compte le fait qu'un modèle a un potentiel d'application en dehors des mathématiques. Ce potentiel d'opérativité permet de considérer que la modélisation sera orientée vers l'action et la solution de problèmes qui se posent dans la société.

Le jeu des modèles dans les ETM : impact sur les genèses et les paradigmes

Un modèle mathématique peut être mis en correspondance avec une sous partie (ou domaine) des mathématiques associées à un ETM particulier. Mais, un seul modèle ne suffit pas à rendre compte d'un problème complexe et nous serons amenés à considérer plusieurs modèles et plusieurs ETM dans un jeu d'Espaces de Travail Mathématique. Dans une étude de situation pluridisciplinaire, il peut être nécessaire d'introduire des Espace de Travail plus généraux qui articulent différentes disciplines. Par exemple, dans des études mettant en jeu mathématiques et physique, il pourra être intéressant de mobiliser des ET relevant de la physique, voire de considérer des Espaces de Travail mixtes : ET physico-mathématique (Moutet 2019 ou Pluvinage 2019) ou Espaces de Travail Cinématique (Reyes-Avendaño, 2020).

Une fois identifiés les modèles et les Espaces de Travail associés qui sont mis en œuvre autour de la tâche de modélisation, il est possible de les décrire et de les caractériser grâce à la ThETM. Il est alors possible d'étudier et de comprendre leur organisation et leurs connexions. L'étude des connexions entre les différents ET associés à différent modèles, et aussi à différents artefacts et systèmes de signes, repose sur les outils théoriques de la ThETM. Ainsi, en cinématique, Reyes-Avendaño (2020) distingue trois ETC qui permettent de décrire et de caractériser le travail progressif qui émerge, au cours des activités de modélisation. Pour dégager ces trois ETC, Reyes-Avendaño s'appuie sur trois paradigmes qu'elle a obtenu à partir d'une approche historique et épistémologique des mouvements en cinématique au fil du temps. Chacun de ces ETC se caractérise par un usage de signes, d'artefacts et d'outils théoriques qui modifient profondément chacune de ces dimensions.

CONSTRUIRE DES SITUATIONS DIDACTIQUES POUR FORMER LE TRAVAIL MATHEMATIQUE ET L'ARTICULER AVEC D'AUTRES FORMES DE TRAVAIL SCIENTIFIQUE

Dans cette partie, nous montrons sur l'exemple d'un travail de modélisation articulant les domaines de la cinématique et des fonctions numériques, comment les outils que nous avons dégagés, nous aident à concevoir des situations d'enseignement basées sur le jeu entre différents modèles dans l'ETM idoine. Pour cela, nous avons introduit une double modélisation (Fig. 2) qui articule travail mathématique et travail physique. Cette articulation s'appuie sur une connexion entre des Espaces de Travail (Lagrange et al.) qui dépendent des modèles introduits.

Le choix des tâches de modélisation, entre mathématiques et sciences

L'approche scolaire dominante de la modélisation mathématique met l'accent sur l'authenticité des problèmes choisis. Cette idée a été fortement contestée dans l'approche des Realistic Mathematics Education qui préfère choisir les problèmes en fonction de leur potentiel pour avancer dans la mathématisation de concepts mathématiques (Gravenmeijer et al. 2002). Nous partageons ce point de vue qui devient encore plus nécessaire lorsqu'on souhaite aborder une articulation entre mathématiques et sciences qui distingue les modèles mathématiques des autres types de modèles.

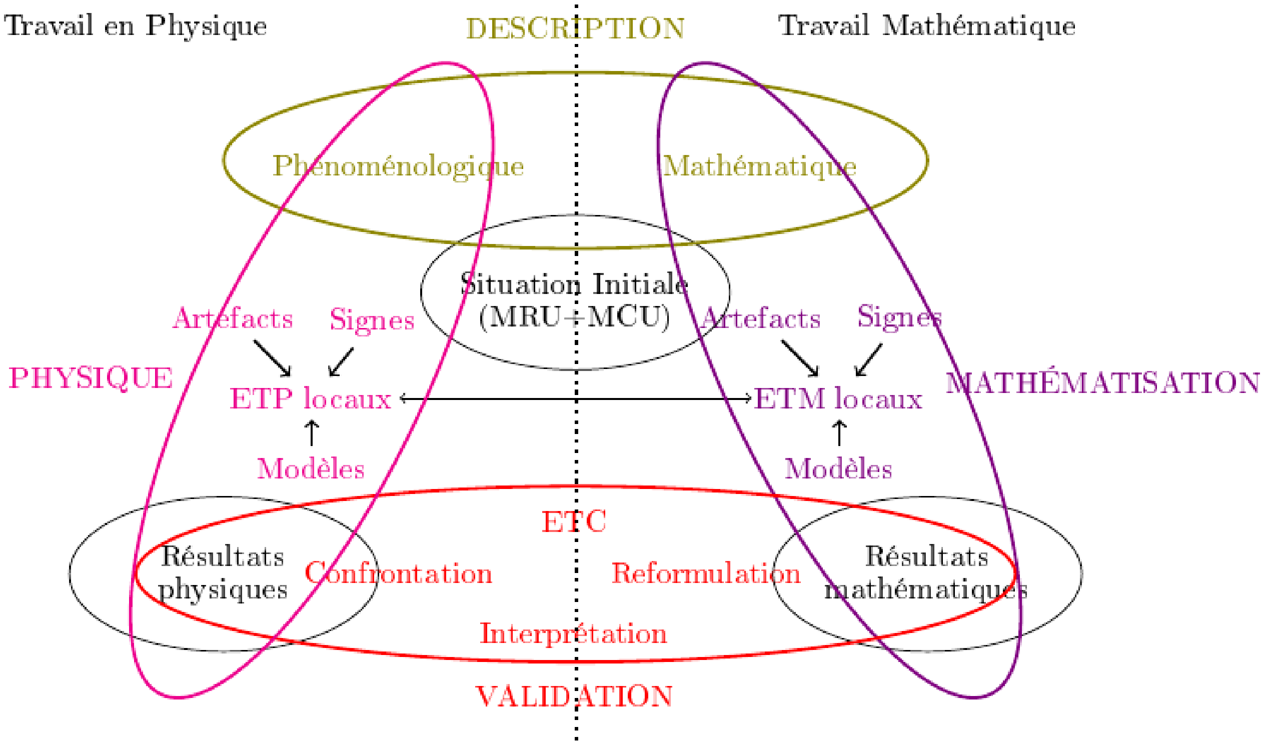


Figure 2. Une double modélisation entre mathématiques et physique

Pour préciser le choix des tâches de modélisation dans le cadre de la ThETM, nous utiliserons aussi la distinction opérée par Simondon (1989) entre objets techniques abstraits et objets techniques concrets. Simondon note que dans les premiers temps de leur existence, la création des objets techniques s'appuie clairement sur un ensemble de principes et de propriétés qu'il est possible de reconnaître dans la composition des objets ainsi obtenus. Il qualifie ces objets techniques d'*abstrait* car leur conception est visible et apparente lorsqu'on effectue la description des différentes parties qui constituent cet objet technique. Par contre, au cours de leur évolution, il devient de plus en plus difficile de reconnaître les différents points théoriques qui ont permis d'élaborer les objets techniques. Les différentes composantes de l'objet initial peuvent être fusionnées pour des raisons qui ne sont plus d'ordre théorique mais qui peuvent être liées à des processus de fabrication liés à l'économie de place ou de matériaux, voire au coût financier. Dans ce cas, il parle d'objets techniques qui ont un autre type d'existence et les qualifie d'objet *concret*. Il devient alors plus difficile d'en faire une description fonctionnelle.

L'exemple des ponts suspendus (Lagrange et al., 2022) illustre cette distinction. Les câbles de suspension sont bien visibles contrairement à la passerelle du pont du Diable créée par Ricciotti en 2009 où cette fois la passerelle est constituée de 15 voussoirs préfabriqués en Ductal, posés sur cintre et assemblés par précontrainte. Il est alors impossible d'identifier par la seule visualisation les éléments qui permettent de comprendre comment peut tenir cette passerelle. Les câbles ont disparu dans le béton de la passerelle. Ce n'est pas l'authenticité des situations et problèmes choisis qui importe mais plutôt les possibilités de pouvoir reconnaître l'armature mathématique ou scientifique qui a guidé la modélisation. Cette reconnaissance dépend des connaissances des étudiants et varie en fonction de leur niveau d'études.

Dans le cas de la recherche (Reyes-Avendaño 2020) sur laquelle nous nous appuyons, il s'agit de réaliser une modélisation d'un phénomène physique complexe qui est décrite aux étudiants comme combinant un Mouvement Rectiligne Uniforme (MRU) et un Mouvement Circulaire Uniforme (MCU). Les étudiants ont des connaissances sur ces deux types de mouvement qui ont été chacun introduits en physique. Par ailleurs, il s'agit de la troisième étape d'un processus d'enseignement qui a commencé par la modélisation par les étudiants de chacun des mouvements, MRU puis MCU. A l'issue de ces premières séances, les étudiants sont censés connaître les fonctions trigonométriques et les équations paramétriques des courbes mais aussi les modèles physiques associées à ces mouvements et qui intègrent les vitesses tangentielles et horizontales. Ils ont également utilisé certains des artefacts technologiques qui sont utilisés dans l'ingénierie (GeoGebra et Tracker). Cette troisième séquence d'enseignement a aussi pour but de vérifier si les étudiants sont capables d'articuler maintenant les différentes composantes de l'ETC à travers cette nouvelle tâche de modélisation.

Description phénoménologique et description mathématique

Dans l'approche de la ThETM, la description d'une situation réelle est première et peut être ou non mathématique. De nos jours, et même depuis un temps assez long, il est difficile d'identifier un problème (ou une situation) qui ne s'appuie pas sur des artefacts. Suite à l'évolution scientifique et technologique, ces artefacts sont souvent des objets techniques dont le développement et la mise au point supposent une importante mobilisation de savoirs en mécanique, physique, chimie, etc. et de modèles pas forcément mathématiques. La description du monde n'est plus naïve et la moindre situation lorsqu'on l'envisage du point de vue de la modélisation contient déjà une élaboration et une modélisation préalable, plus ou moins visible. De ce fait, la description initiale d'une situation est légitimement une description mathématique qui peut s'appuyer sur des données mais aussi des modèles préexistant qui ne sont pas nécessairement mathématiques.

Dans le cas qui guide notre exposé, la définition même de la situation repose sur un ensemble de connaissances puisqu'il s'agit de décrire un mouvement combinant MCU et MRU. La compréhension de la consigne suppose un appui à la fois sur des modèles physiques et des modèles mathématiques.

Dans un premier temps, il est demandé aux étudiants :

1. Comment exécuteriez-vous un mouvement qui combine MRU et MCU ?
2. Quels sont les phénomènes que vous identifiez qui présentent cette combinaison de mouvements.

Les étudiants introduisent différents artefacts du monde réel comme par exemple une roue de bicyclette, un diabolo qui roule sur une table, etc.

Mathématisation et physique du problème

Pour réaliser une mathématisation et la modélisation en physique[40] de cette situation, différentes approches sont possibles mais dans le cadre de la théorie des ETM, l'accent est porté sur la mise en relation de plusieurs modèles dont l'apparition est rendue possible par l'usage d'artefacts utilisés en Physique comme Tracker ou bien en Mathématiques comme GeoGebra. Chacun de ces deux logiciels présente des caractéristiques propres à la discipline avec des notation et des variables différentes Les étudiants disposent aussi des modèles mathématique et physique associés tant aux mouvements (MRU et MCU) qu'aux fonctions numériques. Ces modèles qui sont des fragments de théorie plus large comme la cinématique ou les courbes paramétrées.

Plusieurs modèles peuvent être mis en œuvre dans cette situation et vont permettre une variété de formes de travail associées à des paradigmes cinématiques différents (Reyes-Avendaño 2020). Lorsque les élèves essaient de recréer le mouvement en utilisant des artefacts matériels, ils génèrent des processus cognitifs liés au caractère pragmatique de la situation, qui peuvent être décrits, principalement, par le type de raisonnement mentionné dans CI. Ensuite, en utilisant Tracker, un processus de quantification du mouvement commence avec des représentations graphiques et des tableaux de valeurs, qui utilise des concepts et des variables de la physique. Ce logiciel induit chez les élèves un travail conforme au paradigme CII. Enfin, l'utilisation de GeoGebra, logiciel principalement utilisé en mathématiques, déclenche un processus plus abstrait avec des concepts et des processus mathématiques qui incite les élèves à un type de travail principalement décrit par CIII.

Quatre itinéraires didactiques différent associées à des ETM différents peuvent être introduits, ils reposent sur des modèles, des artefacts et des signes différents. Les deux premiers itinéraires reposent sur des modèles mathématiques des mouvements :

- T1a. Un travail basé uniquement sur les modèles mathématiques des deux mouvements MCU et MRU (équations paramétriques de ces mouvements) et une intuition de la composition des mouvements. Le travail mathématique est a priori situé dans le plan [Sem-Dis].
- T1b. Une forme de travail qui prend en compte les modèles mathématiques MCU et MRU mais introduit l'artefact GeoGebra dans le plan épistémologique. De cette façon le travail mathématique peut s'articuler autour de la dimension instrumentale et il peut être complet en mobilisant les trois plans verticaux de l'ETC

Deux autres itinéraires didactiques sont possibles en orientant les étudiants vers une voie plus expérimentale qui articule Tracker et GeoGebra. Grâce à Tracker, les étudiants peuvent observer et produire différents graphes illustrant les trajectoires de points choisis sur les objets étudiés. Ces graphes peuvent être mis intuitivement en

[40] Il faut noter que l'équivalent de mathématisation pour la physique n'existe pas en français. Le terme physicalisation existe en informatique mais n'a aucun rapport avec l'idée que nous avançons ici.

correspondance avec des fonctions connues comme les fonctions trigonométriques ou les fonctions linéaires. Le problème est ici compliqué par la nouveauté des courbes obtenues (une cycloïde, une cycloïde ralentie ou accélérée) que les élèves ne connaissent pas.

Deux modèles peuvent être alors proposés aux élèves.

- T2a. Ce modèle est associé par exemple au mouvement d'un point sur le cercle (jante de la bicyclette) qui roule sans glisser sur le plan. Dans ce cas, on obtiendra une cycloïde classique.
- T2b. En prenant un point à l'intérieur de la roue (ou en travaillant directement dans GeoGebra avec des points extérieurs à la roue), on obtient des courbes qui ne correspondent pas à la cycloïde. Il s'agit d'une cycloïde ralentie

Une description fine du travail mathématique des élèves peut être obtenue grâce aux diagrammes des ETM. Elle permet aussi d'expliciter la différence entre les productions attendues dans l'ETM idoine potentiel et celles obtenues dans l'ETM idoine effectif. Le travail mobilise les trois genèses en interaction (il est complet), il s'appuie sur une grande variété de registres sémiotique, cette variété est provoquée par la situation didactique conçue par les chercheurs, enfin il y a une mobilisation des trois paradigmes de la cinématique pour progresser dans la mathématisation du problème puis dans sa validation.

Validation des résultats

Comme nous venons de le voir, les artefacts et les modèles ont ainsi un double rôle parfois a priori, ils permettent d'anticiper les résultats, parfois a posteriori, ils permettent d'avancer vers de nouveaux modèles et confirmer certaines intuitions. Il reste à s'assurer du lien global avec le modèle phénoménologique qui a servi de base à la situation.

Le travail de validation qui se met alors en route est ici complexe du fait que les courbes obtenues ne sont pas toutes de la même forme en fonction de la place du point choisi sur le cercle mais aussi des différents aleas liés à la régularité de la rotation ou bien de la vitesse rectiligne. L'organisation de la classe en différents groupes peut permettre de discuter de ces différentes solutions.

Un enrichissement de la situation initiale

L'articulation entre physique et mathématiques se produit lors de la validation à partir de l'interprétation des résultats de la physique et des mathématiques dans le monde réel. Il est alors nécessaire de réinterpréter et de discuter les différents résultats obtenus. Nous avons vu que les trois premiers modèles permettent d'identifier a priori une cycloïde. Celle-ci correspond exactement à la trajectoire d'un point du cercle qui roule sans glisser sur une droite. Mais, ce résultat n'est pas forcément en phase avec les résultats expérimentaux obtenus avec T2b voire avec T2a.

Une façon de le faire est de reprendre le problème dans le cadre d'une nouvelle situation de modélisation comparant les vitesses des deux mouvements : Vmcu = Vmru ; Vmcu > Vmru ; Vmcu < Vmru. Dans sa thèse, Reyes a choisi de poser cette question dès le début de son expérimentation La réalisation pratique des différents mouvements mis en œuvre par les étudiants a permis de dégager les trois types de trochoïde : cycloïde normale, ralentie ou accélérée.

Sur l'organisation de la classe

L'organisation de la classe est très importante pour déterminer les situations didactiques qui se proposent d'introduire différents modèles. Il est possible comme l'a fait Reyes dans sa thèse, de faire travailler les étudiants par groupe dans le cadre d'un atelier de travaux pratiques. Le travail des élèves est guidé par une série de questions qui dégagent progressivement les points essentiels. Tous les élèves travaillent sur les mêmes tâches et la situation didactique est rythmée par des institutionnalisations régulières

Une deuxième approche, développée par Kuzniak, Vivier et Parzysz (2014), propose que les groupes utilisent des artefacts différents ce qui les conduits à mettre en place des modèles différents. Une dernière approche, plus élaborée, a été développe par Lagrange et al., elle utilise une disposition de la classe de type jigsaw education. Dans notre cas, quatre groupes d'élèves (idéalement de 4 élèves) sont mis en place et travaillent chacun sur un des quatre modèles précédemment présentés. Ils ont donc à leur disposition des logiciels et des questions différentes. Une fois ce premier travail terminé, les élèves sont répartis à nouveau en quatre groupes composés chacun d'un des spécialistes d'un modèle travaillé par chacun des quatre groupes initiaux. Ils doivent proposer une synthèse de leur travail qui relève à la fois de la validation externe et d'une première communication à des experts puisqu'ils devront ensuite expliquer leur résultat au groupe classe dans son entier.

CONCLUSION

Dans cette communication, nous avons donné une approche de la modélisation mathématique qui prend en compte des modèles préexistant et qui ne sont pas nécessairement mathématiques. Le cycle de modélisation que nous mettons en œuvre passe par quatre phases qui maintiennent les spécificités de chacune des disciplines concernées. La description de la situation initiale est à la fois phénoménologique et mathématique de façon par la suite à développer un travail mathématique sur des modèles mathématiques dont les résultats pourront être confrontés à des expérimentation bâties et étudiés grâce à des outils provenant de la discipline scientifique source.

Cette manière de penser la progression change la perspective sur la validation et aussi donne toute son importance à une dernière phase de communication pour conclure la modélisation. Elle propose également une réinterprétation du problème qui peut relancer le processus de modélisation une fois de nouveaux paramètres introduits dans le problème. Cette nouvelle formulation va enrichir a description phénoménologique et ainsi relancer un processus de modélisation plus complexe.

REFERENCES

Flores González, M., Masselin, B. & Reyes, C. (2022). Modélisation mathématique d'une situation physique et d'une situation probabiliste. Atelier de *l'école d'été de didactique des mathématiques.* Ile de Ré.

Gravemeijer, K, Lehrer, R., Oers, B., & Verschaffel, L. (2002). *Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Education.* Kluwer.

Israel, G. (1996). *La mathématisation du réel. Essai sur la modélisation mathématique.* Editions du Seuil.

Kuzniak, A. (2021). Enseignement de la modélisation mathématique et construction du travail mathématique : une dynamique problématique. *Cours donné à l'école d'été de didactique des mathématiques.* Ile de Ré.

Kuzniak, A, Tanguay, D & Iliada.Kuzniak, A., Nechache, A. & Richard, P (2022). The theory of mwsi n Brief. In A. Kuzniak, E. Montoya Delgadillo, P.R. Richard (Eds). *Mathematical Work in Educational Contex*t. Springer.

Kuzniak, A., Parzysz, B., & Vivier, L. (2013). Trajectory of a problem: a study in Teacher Training. *The Mathematical Enthousiast. 10 1-2, 407-431.*

Nechache, A. (2018). Le rôle des dimensions de l'etm dans l'élaboration du travail mathématique dans le cadre de la résolution de tâches probabilistes. *Menon (4),* 40-53.

Lagrange, J.-B. (2021). Les espaces de travail connectés : une perspective nouvelle pour la modélisation dans le secondaire? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education.* 10.1007/s42330-020-00130-6.

Lagrange, Jb., Huincahue, J., & Psycharis, G. (2022). Modeling in Education: New Perspectives Opened by the Theory of MWS. In A. Kuzniak, E. Montoya Delgadillo, P.R. Richard (Eds). *Mathematical Work in Educational Contex*t. Springer.

Moutet, L. (2019). The extended theoretical framework of Mathematical Working Space (extended MWS): potentialities in physics. In U. T. Jankvist (Ed.) / *Proceedings of Cerme 11(pp. 1240-1247).* Utrecht.

Reyes Avendaño, C-G. (2020). Enseignement et apprentissage des fonctions numériques dans un contexte de modélisation et de travail mathématique. *Thèse de doctorat, Université de Paris*. Https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03211997.

Simondon, G. (1989). *Du mode d'existence des objets techniques, seconde édition.* Aubier.

Dépôt légal : Février 2024

LDAR

LABORATOIRE DE DIDACTIQUE ANDRÉ REVUZ

INSPÉ Institut national supérieur du **professorat** et de l'**éducation**

Université de Strasbourg

ETM7

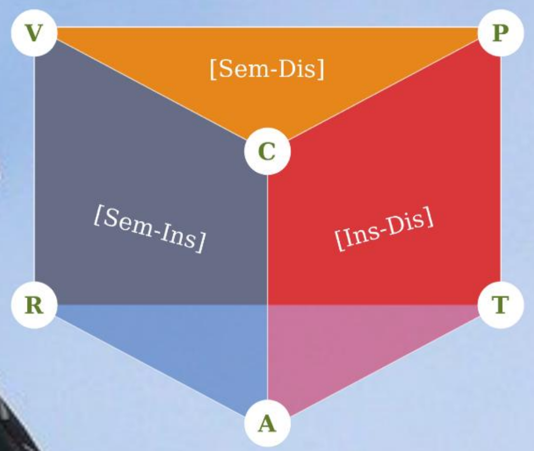
Etude sur le Travail Mathématique

Study on Mathematical Work

Estudio sobre el Trabajo Matemático

Du 27 juin au 2 juillet 2022

Strasbourg, France



etm7.sciencesconf.org

CY ADVANCED STUDIES

IREM STRASBOURG

lisec UR 2310

Université Paris Cité

Avec le support de l'Association pour la Diffusion et le Développement de la Recherche sur les Espaces de Travail Mathématique