Institut
de recherche
sur l'enseignement
des mathématiques
IREM

Rallye
2012

Rapport du 39ème Rallye Mathématique d'Alsace

IREM de
Strasbourg

UFR de mathématique
et d'informatique
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
Tél. : (33) 03 68 85 01 30
Fax : (33) 03 68 85 01 65
Bibliothèque : (33) 03 68 85 61 01
http://irem.u-strasbg.fr
irem@math.u-strasbg.fr

Sommaire

Présentation du Rallye Mathématique d'Alsace

Comité organisateur : Patrick GENAUX, Claudine KAHN, Marie-Laure KOSTYRA,
Christiane OSWALD.

Le Rallye Mathématique d'Alsace, organisé par l'IREM de Strasbourg, s'est déroulé pour la 39ème fois en 2012. Crée en 1973, le Rallye Mathématique d'Alsace est la plus ancienne compétition mathématique de France.

Directement inspiré des Olympiades Internationales, il s'adresse à tous les élèves volontaires de l'Académie de Strasbourg et des établissements à l'étranger qui lui sont rattachés (Copenhague, Belgrade, Berlin, Düsseldorf, Francfort, Fribourg, Hambourg, Munich, Oslo, Sofia, Stockholm, Vienne) ainsi que d’autres partenaires de notre IREM (Washington et Zurich.)

Tous les élèves des classes de Première et de Terminale sont prévenus de l'existence du Rallye et de ses modalités. Chacun peut consulter les rapports contenant les sujets, les corrigés, les commentaires ainsi que les palmarès des années précédentes. Ils sont disponibles à la rubrique « rallye » sur le site de l’IREM (http://irem.u-strasbg.fr/php/index.php). Les inscriptions se font sur la base du **volontariat** et les épreuves se déroulent sur le **temps libre** des candidats.

Cette compétition comprend deux épreuves : l'une concerne les élèves de Première, l'autre ceux de Terminale ; elle a réuni environ sept cent quatre vingt participants dont trente cinq de l'étranger.

Les candidats sont amenés à résoudre, pendant quatre heures, individuellement ou par équipes de deux (formule généralement retenue) trois problèmes originaux faisant appel à leurs connaissances bien sûr, mais essentiellement au raisonnement et à leurs capacités inventives.

Les sujets sont très différents de ceux proposés dans l'évaluation traditionnelle. Ils font davantage appel à l'intuition, à l'aspect ludique de la recherche qu'à une suite de connaissances utilisées de manière algorithmique ou répétitive. Les énoncés sont souvent courts, rédigés de manière non scolaire et présentés parfois sous forme d'énigmes ; ils ne contiennent aucune indication de méthode et ne précisent pas le champ de connaissances mises en jeu.

L'objectif est de donner aux élèves l'occasion de faire des mathématiques autrement. Ils peuvent alors réinvestir leur savoir scientifique dans un cadre inhabituel pour eux. Nous développons ainsi leur curiosité, le sens du travail en équipe, le goût pour la recherche. Nous participons ainsi à la promotion de notre discipline auprès des jeunes, des enseignants, des décideurs, de nos partenaires et des médias.

Le Rallye permet aux professeurs des lycées de proposer dans leurs classes, grâce aux rapports des années précédentes, des activités scientifiques différentes de l'entraînement usuel : traduction d'un énoncé en langage mathématique, recherche d'outils possibles, résolution, rédaction d'une solution avec le souci d'une argumentation précise et rigoureuse.

Les élèves, au départ parfois un peu déconcertés par ces énoncés où la démarche n'est pas imposée, trouvent du plaisir à élaborer une construction intellectuelle et par là même gagnent en autonomie de pensée. L'élaboration des sujets suppose une bonne maîtrise de la didactique des mathématiques : l'IREM fournit les éléments nécessaires à ce travail.
Avec la participation au concours commence une série d'activités, extra-scolaires souvent, qui aiguisent la curiosité mathématique des jeunes, encouragent leur esprit d'initiative et créent un

climat favorable à l'ouverture culturelle. Cette incitation au développement de la culture scientifique s'inscrit entièrement dans le cadre des directions actuelles à ce sujet.

En Première, quinze binômes sont primés : un premier prix exceptionnel, trois premiers prix, six deuxièmes prix et cinq troisièmes prix.

En Terminale, seize binômes ont été sélectionnés : un premier prix exceptionnel, six premiers prix, cinq deuxièmes prix et sept troisièmes prix.

Nous renvoyons à la suite de ce rapport pour des commentaires plus détaillés sur les exercices.

La remise des prix, présidée par Madame Armande LE PELLEC MULLER, Recteur de l'Académie de Strasbourg et Chancelier des Universités d'Alsace, a lieu au Conseil Général du Bas-Rhin. Elle est suivie d'une réception offerte à l'Hôtel du Département par Monsieur Guy-Dominique KENNEL, Président du Conseil Général du Bas-Rhin.

Remerciements

Nous remercions vivement les donateurs qui nous permettent de récompenser les lauréats par des livres, des calculatrices, du matériel informatique pour fêter la 39ème édition :

- ◊ Le Rectorat de l'Académie de Strasbourg
- ◊ L'Université de Strasbourg
- ◊ Le Département de Mathématiques de l'Université de Strasbourg
- ◊ L'A.P.M.E.P
- ◊ Le Conseil Général du Bas-Rhin
- ◊ Le Conseil Général du Haut-Rhin
- ◊ La Ville de Strasbourg
- ◊ Le S.I.A.S. d'Altkirch
- ◊ La Ville de Barr
- ◊ La Ville de Colmar
- ◊ La Ville d’Erstein
- ◊ La Ville de Niederbronn-les-Bains
- ◊ La Ville d'Obernai
- ◊ Ville de Ribeauvillé
- ◊ La Ville de St Louis
- ◊ La Communauté des Communes du Val d’Argent
- ◊ La Communauté de Communes du pays de Thann
- ◊ Les Dernières Nouvelles d’Alsace
- ◊ L’Électricité de Strasbourg
- ◊ La société CASIO
- ◊ La société Texas Instruments
- ◊ Le Maillon
- ◊ Le Musée Bartholdi de Colmar
- ◊ Le Musée de l’Énergie Électrique Électropolis
- ◊ Le Musée de l’Image Populaire de Pfaffenhoffen
- ◊ Les Musées de la Ville de Strasbourg
- ◊ La Société d’Histoire Naturelle et d’Ethnographie de Colmar

Nous remercions tout particulièrement le Conseil Général du Bas-Rhin pour son soutien et la mise à disposition de la salle des séances plénières pour la cérémonie de remise de prix et pour la réception à l'Hôtel du Département qu'il organise en l'honneur de nos lauréats.

A tous les lauréats du Rallye Mathématique d'Alsace de Première

Le Rallye Mathématique d'Alsace
et
ANIMATH (Association pour l'animation des Mathématiques)

Proposent de participer au **Club France**

Pendant l'année de Terminale, vous serez suivi par des tuteurs, essentiellement des élèves d'Écoles Normales Supérieures, qui vous proposeront régulièrement des exercices de Mathématiques du type de ceux que vous avez rencontrés au Rallye Mathématique d'Alsace ou aux Olympiades Académiques. Si vous vous distinguez, vous serez éventuellement invité à représenter la France aux Olympiades Internationales de Mathématiques.

Pour plus d'information sur toutes les activités proposées, vous pouvez également consulter le site d'Animath **: http://www.animath.fr**

Nous vous souhaitons une bonne poursuite mathématique de vos études.

CÉRÉMONIE DE LA REMISE DES PRIX

Mardi 26 juin 2012 à 17 heures 30

RÉCEPTION À L'HÔTEL DU DÉPARTEMENT

A l'issue de la remise des prix
à 19 heures

✓ Allocutions

Monsieur Philippe MEYER, Conseiller Général du Bas-Rhin, Président de la Commission de la Jeunesse représentant Monsieur Guy-Dominique KENNEL Président du Conseil Général du Bas-Rhin.

Monsieur Rutger NOOT
Directeur de l'UFR de Mathématique et d'Informatique

Monsieur Philippe NUSS
Directeur de l'IREM

Monsieur Nicolas MATT, Conseiller municipal en charge du développement économique et enseignement supérieur, représentant Monsieur Roland RIES, Maire de Strasbourg.

Madame Armande LE PELLEC MULLER
Recteur de l'Académie de Strasbourg, Chancelier des Universités d'Alsace

♦ Compte rendu des épreuves

Membres du Comité Organisateur du Rallye Mathématique d'Alsace – IREM

♦ Présentation du Cercle Mathématique
Tatiana BELIAEVA (Maître de Conférences – IUFM de Strasbourg)

♦ Lecture du palmarès et distribution des prix

Membres du Comité Organisateur du Rallye Mathématique d'Alsace – IREM

✓ Ouverture de la réception

Monsieur Philippe MEYER, Conseiller Général du Bas-Rhin, Président de la Commission de la Jeunesse représentant Monsieur Guy-Dominique KENNEL Président du Conseil Général du Bas-Rhin

Rallye Mathématique d'Alsace 2012

Dates des épreuves

—

Terminales

mercredi 14 mars 2012

—

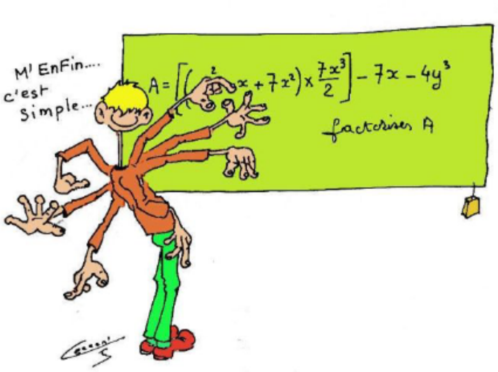
Premières

mercredi 4 avril 2012

Inscription des volontaires par groupes de deux

avant le 21 février 2012

auprès de leur professeur de mathématiques



Pour tout renseignement : http://irem.u-strasbg.fr

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

académie Strasbourg

Ministère de l'Éducation nationale

Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche

IREM STRASBOURG

Palmarès des Premières 2012

Premier prix exceptionnel

- ✓ DELZANT Julie et SEMENOV Alexander
  Professeurs : Messieurs BENSAID et PETIT, lycée International, Strasbourg.

Premier prix

- ✓ PERCHENET Guillaume et SCHYNS Benjamin
  Professeur : Monsieur OTTOBRINI, lycée Don Bosco, Landser.
- ✓ BERTRAND Lucas et BOUVIER Armand
  Professeur : Madame JORDAN, lycée St André, Colmar.
- ✓ KASTNER Alexander et WANG Florence
  Professeur : Messieurs BENSAID et HECHNER, lycée International, Strasbourg

Deuxième prix

- ✓ FORSTER Franck et HUMBERT Alexandre
  Professeur : Madame KAVALIAUSKAS, lycée Jean-Baptiste Schwilgué, Sélestat.
- ✓ RACLOT Hugo et RIVIERE Christophe
  Professeur : Monsieur ABBA, lycée Kleber, Strasbourg.
- ✓ WEISS Mikaël et WITTIG Matthieu
  Professeur : Monsieur SCHULTZ, lycée Schuré, Barr.
- ✓ KUNTZ Juliette et PAUVERT Guillaume
  Professeur : Madame SCHNABEL, lycée Jeanne d'Arc, Mulhouse.
- ✓ ANDRE Nicolas et BENTZ Guillaume
  Professeur : Madame GENG, lycée Henri Meck, Molsheim.
- ✓ SUTTER Louis et TREZZINI Louis
  Professeur : Mesdames KLOOS et WITZEL, Collège Episcopal St Etienne, Strasbourg.

Troisième prix

- ✓ DOPPLER Simon et FERNEY Paul
  Professeur : Madame REDIGER, Collège Episcopal, Zillisheim.
- ✓ SIGNARDIE Tanguy et RIEDINGER Mickaël
  Professeur : Madame SCHNEIDER, lycée André Maurois, Bischwiller.
- ✓ BIZOI Luca et KLEIN Romain
  Professeur : Madame WITZEL, Collège Episcopal St Etienne, Strasbourg.
- ✓ BOUSSIDAN Aaron et LACOUR Maxime
  Professeur : Madame AUDEOUD, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg.
- ✓ CROWE Constance et PONCELET Anysia
  Professeur : Monsieur ALILOUCH, lycée International, Strasbourg.

Palmarès des Terminales 2012

Premier prix exceptionnel

- ✓ BENTZ Sylvain et PALLARES Gwenaël
  Professeur : Madame BLONDEL, lycée Marcel Rudloff, Strasbourg.

Premier prix

- ✓ GRUBER Mikaël et HEBINGER Jonathan
  Professeur : Monsieur GERLEIN, lycée Bartholdi, Colmar.
- ✓ KLOCKENBRING Iannis et VIVÉ Arthur
  Professeur : Monsieur ALTSCHUH, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg.
- ✓ ROYER Baptiste et WOLF Alexis
  Professeur : Madame POQUET, lycée Scheurer Kestner, Thann.

Deuxième prix

- ✓ FUCHS Claire et LAMIELLE Antoine
  Professeur : Monsieur CLAUSS, lycée Blaise Pascal, Colmar.
- ✓ GRIMAULT Yannick
  Professeur : Madame JACQUINOT, lycée Jean Baptiste Schwilgué, Sélestat.
- ✓ DELOIGNON Arthur et GALOCHA Philippe
  Professeurs : Mesdames AMMAN et STERN, lycée Kleber, Strasbourg.
- ✓ KOLB Florian et PICQ Lisa
  Professeur : Madame ARBOGAST, lycée Ribeaupierre, Ribeauvillé.
- ✓ KEMPFER Alexis et LOGEL Crescence
  Professeur : Monsieur DUDT, lycée Adrien Zeller, Bouxwiller.

Troisième prix

- ✓ BONEL Antoine et MECKES Thomas
  Professeur : Madame GRETHEN, lycée Henri Meck, Molsheim.
- ✓ BANDELIER Louis et TSCHANN Nicolas
  Professeurs : Madame HAMMAN et Monsieur HIEGEL, lycée Kleber, Strasbourg.
- ✓ DAIRE Gauthier et TRIMBUR Xavier
  Professeur : Monsieur CAUMONT, lycée Louis Pasteur, Strasbourg.
- ✓ FIX Coralie et GAUSLAND Sven
  Professeur : Monsieur ADJIAGE, lycée Marguerite Yourcenar, Erstein.
- ✓ ANDRES Nicolas et HOSTETTLER Damien
  Professeur : Monsieur CAUMONT, lycée Louis Pasteur, Strasbourg.
- ✓ MEYER Lucile et TOTTOLI Florian
  Professeur : Madame POQUET, lycée Scheurer Kestner, Thann.
- ✓ POGOSYAN Mikayel et WERSONIG Etienne
  Professeur : Monsieur BRISSET, lycée français de Vienne, Autriche.

Rallye Mathématique d'Alsace 2012

Avec le soutien de :

Strasbourg.eu
& COMMUNAUTÉ URBAINE

groupe ÉS

APMEP
Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

UFR de Mathématique et d'Informatique

Conseil Général du Haut-Rhin

Dernière Nouvelles d'Alsace

Ville de
Barr, Obernai, Ribeauvillé, St Louis,

Communauté de Communes
du pays de Thann

Communauté de Communes
du Val d'Argent

Syndicat Intercommunal pour les Affaires Scolaires d'Altkirch

26 juin 2012

Conseil Général du Bas-Rhin

Proclamation des résultats
17h30

Réception des lauréats
19h00

Organisé par :

académie Strasbourg
Ministère de l'Éducation nationale
Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche

IREM STRASBOURG

CONSEIL GÉNÉRAL BAS-RHIN

htpp://irem.u-strasbg.fr

Sujets des Premières
11 avril 2012

Exercice 1

Quelle est l'aire maximale d'un quadrilatère dont les côtés ont pour longueur respective 1 mètre, 4 mètres, 7 mètres et 8 mètres ?

Exercice 2

Un bricoleur doit carreler le fond d'une piscine carrée. Il place un carreau au centre et boit une gorgée de sa boisson favorite. Ensuite, il entoure ce carreau de 8 carreaux afin d'obtenir un nouveau carré. Il s'arrête et boit à nouveau une gorgée. Il continue ce processus en buvant une gorgée à chaque fois qu'il a formé un nouveau carré en entourant le précédent.

1 : Combien de carreaux a-t-il posé s'il a bu 39 gorgées ?

2 : S'il dispose de 2012 carreaux, combien de gorgées pourra-t-il boire ?

Exercice 3

Christiane voudrait prendre sa revanche dans le jeu qui l'a opposée à Claudine il y a quelques jours.

A chaque partie de ce jeu, le vainqueur gagne un certain nombre de points, elles ne savent plus trop combien, mais c'est le même à chaque partie et le perdant perd un certain nombre de points, là encore le même à chaque partie.

Elles n'ont pas oublié que les points gagnés et perdus sont des nombres entiers et que Claudine avait gagné 10 points contre 3.

Pouvez-vous les aider à retrouver le nombre de points gagnés et perdus à chaque partie ?

Sujets des Terminales
14 mars 2012

Exercice 1

Dans un plan sont placés 66 points distincts.
On trace toutes les droites déterminées par deux de ces points et on en compte 2012 distinctes.

Justifiez que parmi ces 66 points, 4 au moins sont alignés.

Exercice 2

Mon code secret de téléphone portable est composé de quatre chiffres différents et tous non nuls.

Quand j'effectue la somme de tous les nombres possibles que je peux former avec deux de ces quatre chiffres, et que je la multiplie par 7, je retrouve mon code.

Quel est mon code ?

Exercice 3

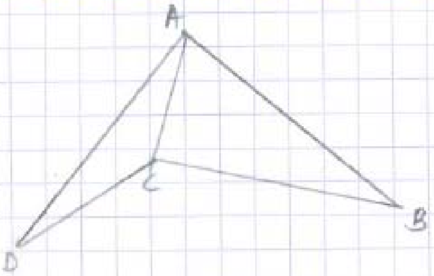
Dans une cour carrée de 37 mètres de côté sont posées, à plat sur le sol, 150 boites cubiques de coté 1 mètre.

Montrer que, sans bouger les boîtes, il reste de la place dans la cour pour y déposer sur sa base un tonneau cylindrique de rayon 1 mètre.

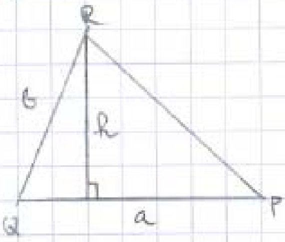
DELZANT Julie et SEMENOV Alexander
Lycée International – Strasbourg

Exercice n° 1

Un quadrilatère ABCD peut être séparé en 2 triangles ACD et ACB par la diagonale [AC].
On cherchera donc à rendre l'aire des 2 triangles maximale.



Montrons d'abord que l'aire d'un triangle PQR, avec $PQ = a$ et $QR = b$, est maximale lorsque $\widehat{PQR} = 90°$.



→ Soit h la hauteur du triangle QRP issue de R. Alors $\mathcal{A}_{QRP} = \frac{QP \times h}{2} = \frac{ah}{2}$

Or, $h \leq b$ (avec égalité lorsque $(QR) \perp (QP)$), car dans un triangle rectangle l'hypoténuse est le côté le plus long.

Donc $\frac{ab}{2} \geq \frac{ah}{2}$ donc $\frac{ab}{2} \geq \mathcal{A}_{QRP}$.

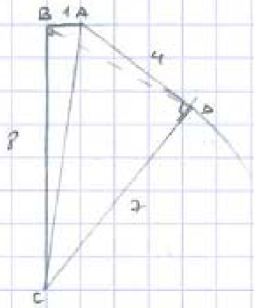
avec $\frac{ab}{2} = \mathcal{A}_{QRP}$ lorsque $\widehat{PQR} = 90°$.

Donc, lorsque $\widehat{PQR} = 90°$, $\mathcal{A}_{QRP}$ atteint sa valeur maximale égale à $\frac{ab}{2}$.

1/4

Soit un quadrilatère ABCD, avec AB = 1 m

Soit BC = 8 m, CD = 7 m et DA = 4 m.



Soit [AC] la diagonale le séparant en 2 triangles ABC et ADC.

$\mathcal{A}_{ABC}$ est maximale $\Leftrightarrow \widehat{ABC} = 90°$

$\Leftrightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2$ (par Pythagore)

$\Leftrightarrow AC^2 = 1 + 64 = 65$ m²

$\mathcal{A}_{ADC}$ est maximale $\Leftrightarrow \widehat{ADC} = 90°$

$\Leftrightarrow AD^2 + DC^2 = AC^2$

$\Leftrightarrow AC^2 = 49 + 16 = 65$ m²

Donc, lorsque $AC^2 = 65$ m² l'aire des 2 triangles est maximale, donc l'aire de ABCD est maximale.

Donc $\mathcal{A}_{max}(ABCD) = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ADC}$

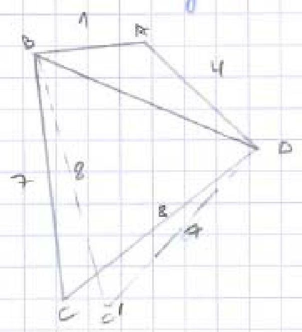
$= \frac{AB \times BC}{2} + \frac{AD \times DC}{2}$

$= 4 + 14 = 18$ m² dans ce cas-ci.

Le même raisonnement est applicable dans d'autres cas, lorsque le côté de longueur 1 m et le côté de longueur 8 m sont adjacents. (cas I)

Le raisonnement n'est donc pas appliquable lorsque le côté de 1 m et le côté de longueur 8 m sont opposés.

(cas II)
Passons au cas où les côtés de longueur 1m et 8m sont opposés.
Alors, soit $AB = 1m$, $BC = 7m$, $CD = 8m$ et $AD = 4m$.
Dans ce cas, la diagonale [BD] sépare ce quadrilatère en 2 triangles : ABD et BDC.



Pour une configuration quelconque soit C' un point tel que $BC' = 8m$ et $C'D = 7m$, C' se trouvant dans le même ½-plan que C par rapport à (BD).
Alors, $\mathcal{A}_{BCD} = \mathcal{A}_{BC'D}$ car ces triangles ont leurs 3 côtés de même longueur.
Donc, $\mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(ABC'D)$.
Alors, on se retrouve dans le cas précédent et si $AC'^2 \neq 65\,m^2$, alors $\mathcal{A}(ABC'D) < \mathcal{A}_{max}(ABCD)$ donc $\mathcal{A}(ABCD) < \mathcal{A}_{max}(ABCD)$.

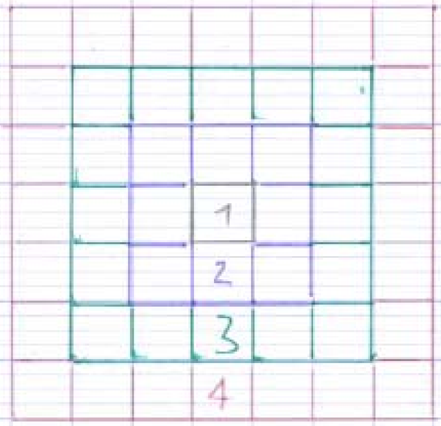
Donc, cette transformation permet de passer d'un quadrilatère du cas II à un quadrilatère du cas I tout en conservant l'aire. Vu que l'aire se conserve lors de cette transformation, il est impossible qu'un quadrilatère du cas II aie une aire supérieure à $\mathcal{A}_{max}(ABCD)$, car ceci aboutirait à contradiction après la transformation.

<u>Conclusion</u> : L'aire maximale d'un tel quadrilatère est de $18\,m^2$.

BERTRAND Lucas et BOUVIER Armand
Lycée Saint André – Colmar

Exercice n° 2

Le bricoleur positionne ces carreaux comme ceci :



1 gorgée
2 gorgées
3 gorgées
4 gorgées

etc ...

Il fait donc, à chaque gorgée, un carré, de côté ayant 2 carreaux de plus que le côté du carré précédent.
Soit n le nombre de gorgées.
Le nombre de carreaux sur le côté du carré en fonction du nombre de gorgées est donné par la suite (U_n)

$$U_n = 2(n-1) + 1$$
$$U_n = 2n - 1$$

L'aire d'un carré étant le carré de la longueur du côté, le nombre de carreaux en fonction du nombre de gorgées est le carré de (U_n)
Soit (V_n) le nombre de carreaux posés en fonction du nombre de gorgées :

$$V_n = U_n^2$$
$$V_n = (2n-1)^2$$

On peut le vérifier $V_1 = 1$ $V_2 = 9$ $V_3 = 25$

1. Le bricoleur a bu 39 gorgées

$$V_{39} = (2 \times 39 - 1)^2$$

$$V_{39} = 77^2$$

$$V_{39} = 5929$$

Au bout de 39 gorgées, si la piscine est assez grande, le bricoleur aura posé 5929 carreaux.

2. Le bricoleur dispose de 2012 carreaux.

$\sqrt{2012} \approx 44,86$

S'il pose 2012 carreaux, il n'obtiendra pas un carré parfait ; on cherche donc l'étape précédente.

$$V_n < 2012$$

$$(2n - 1)^2 < 2012$$

$$4n^2 - 4n - 2011 < 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times (-2011)$$

$$\Delta = 32\,192$$

Le discriminant du trinôme est positif, donc il possède 2 racines n_1 et n_2 et est du signe de 4 à l'extérieur de celles-ci.

$$n_1 = \frac{4 - \sqrt{32192}}{2 \times 4} \qquad n_2 = \frac{4 + \sqrt{32192}}{2 \times 4}$$

$$n_1 \simeq -21,93 \qquad n_2 \simeq 22,93$$

Donc $4n^2 - 4n - 2011 < 0 \Longleftrightarrow n < 23$

Donc, lorsqu'il posera le dernier carreau, il sera dans la $23^{ème}$ étape et aura bu 22 gorgées.

$V_{22} = 1849$ $\qquad V_{23} = 2025$

FORSTER Franck et HUMBERT Alexandre
Lycée St André – Colmar

Exercice n° 3

Soit x le nombre de parties perdues par Claudine et y le nombre de parties gagnées par Claudine.
On a donc $x+y$ le nombre de parties jouées sachant que $x+y>0$.

Soit A le nombre de points obtenus après avoir gagné une partie, on a : $A>0$.
Soit B le nombre de points obtenus après avoir perdu une partie, on a : $B<0$.

A, B, x et $y \in \mathbb{Z}$

Nombre de points de Claudine : $\begin{cases} yA + xB = 10 \\ xA + yB = 3 \end{cases}$
Nombre de points de Christiane :

$$yA + xB - xA - yB = 7$$
$$\Leftrightarrow (y-x)A + (x-y)B = 7$$
$$\Leftrightarrow (y-x)(A-B) = 7$$

Le nombre de points obtenus lorsque l'on gagne est positif et le nombre de points obtenus lorsque l'on perd est négatif donc $A \geqslant 1$ et $B \leqslant -1$ d'où $A-B \geqslant 2$.

N° 7/9

Comme $(A-B)$ et $(y-x)$ sont des entiers : les seules façons d'avoir un produit égal à 7 sont :

$(y-x)=7$ et $(A-B)=1$

$(y-x)=1$ et $(A-B)=7$

$(y-x)=-7$ et $(A-B)=-1$

$(y-x)=-1$ et $(A-B)=-7$

Etant donné que $(A-B)\geq 2$, la seule solution est :

$$\boxed{y-x=1 \quad \text{et} \quad A-B=7}$$

Nombre de points de Claudine : Nombre de points de Christiane :

$$+\begin{cases} yA+xB=10 \\ xA+yB=3 \end{cases}$$

$$x(A+B)+y(A+B)=13$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(A+B)=13$$

Le score de Christiane est positif donc elle a au moins gagné une partie et puisqu'elle a perdu face à Claudine, elle a au minimum perdu deux parties.

On a donc : $x+y\geq 3$

Comme $(x+y)$ et $(A+B)$ sont des entiers, les seules façons d'avoir un produit égal à 13 sont :

$y+x=13$ et $A+B=1$

$y+x=1$ et $A+B=13$

$y+x=-13$ et $A+B=-1$

$y+x=-1$ et $A+B=-13$

Etant donné que $x+y\geq 3$, la seule solution est :

$$\boxed{y+x=13 \quad \text{et} \quad A+B=1}$$

N° 8/9

On combine les deux conditions démontrées précédement, on obtient :

$$+\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=7 \end{cases}$$

$$2A=8$$
$$\Leftrightarrow A=4$$

$$4+B=1$$
$$\Leftrightarrow B=-3$$

$$S:\{4\,;-3\}$$

$$+\begin{cases} x+y=13 \\ y-x=1 \end{cases}$$

$$2y=14$$
$$\Leftrightarrow y=7$$

$$x+7=13$$
$$\Leftrightarrow x=6$$

$$S:\{6\,;7\}$$

A chaque partie, la gagnante gagne 4 points et son adversaire perd 3 points.

Copies des Terminales

BONEL Antoine et MECKES Thomas
Lycée Henri Meck – Molsheim

Exercice n° 1

Exercice 1

On essaie de relier le nombre de points au nombre de droites qui peuvent être déterminées par 2 d'entre eux.
Si il y a n points, on les classe de 1 à n.
Dans l'hypothèse où aucun n'est aligné,
- on relie le point 1 aux n-1 autres
- on relie le point 2 aux points auquel il n'est pas encore relié. Il y en a n-2,
- on fait cela pour tous les autres points. Pour chaque point on trace une droite de moins. Le dernier est déjà relié à tous les autres.

On obtient donc $n-1+n-2+n-3+\dots+3+2+1$ droites
Ceci est la somme des termes d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1

Soit D le nombre de droites,

$$D = \text{"nombre de termes"} \times \text{"}\frac{1^{er} + \text{dernier}}{2}\text{"}$$

$$= (n-1) \times \frac{1+n-1}{2}$$

$$= (n-1) \times \frac{n}{2}$$

Ici, avec 66 points, on a :

$$D = 65 \times \frac{66}{2} = 65 \times 33 = 2145$$

Il devrait donc y avoir 2145 droite.

Trois points alignés déterminent une seule droite, alors que s'ils ne l'avaient pas été, ils en auraient déterminé 3
On "perd" alors deux droites.

Quatre points alignés déterminent une seule droite, au lieu de 6 s'ils ne l'avaient pas été. Cela nous fait "perdre" 5 droites.
Pour passer de 2145 à 2012, il faut "perdre" 133 droites. Ce nombre étant impair, il ne peut pas être obtenu qu'avec des alignements de 3 droites.
Il faut alors qu'il y ait au moins une fois 4 points alignés.

FUCHS Claire et LAMIELLE Antoine
Lycée Blaise Pascal – Colmar

Exercice n° 2

Soit ω, x, y et z des nombres entiers compris entre 1 et 9
Le code C s'exprime : $C = \overline{\omega x y z}^{10}$

On calcule la somme de tous les nombres qu'il est possible de former avec deux de ces quatre chiffres :

$S = (10\omega + x) + (10\omega + y) + (10\omega + z) + (10x + \omega) +$
$(10x + y) + (10x + z) + (10y + \omega) + (10y + x) +$
$(10y + z) + (10z + \omega) + (10z + x) + (10z + y)$

$S = 3 \times 10\omega + 3 \times 10x + 3 \times 10y + 3 \times 10z + 3\omega + 3x +$
$3y + 3z$

$S = 33(\omega + x + y + z)$

Or, en multipliant cette somme par 7 on obtient le code de départ.

Donc on a : $7 \times 33(\omega + x + y + z) = C$

C'est donc un multiple de 7×33

On cherche donc à présent, tous les multiples de 7×33 respectant les critères de l'énoncé (code à 4 chiffres, sans 0, sans répétition d'un chiffre).

On obtient la grille suivante :

n	n x 7 x 33	Somme des chiffres de n x 7 x 33
6	1386	18
11	2541	12
17	3927	21
18	4158	18
19	4389	24
21	4851	18
27	6237	18
32	7392	21
33	7623	18
34	7854	24
36	8316	18
37	8547	27
41	9471	21

On remarque que le seul cas où la somme des chiffres de n x 7 x 33 est égale à n est pour C = 4158

Ce code de téléphone portable est donc 4158.

ne rien écrire dans la partie barrée

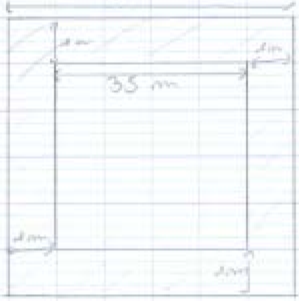
GRUBER Mikaël et HEBINGER Jonathan
Lycée Bartholdi – Colmar

Exercice n° 3

Les 150 boites sont disposées au hasard sur le terrain. Il faut donc montrer qu'il y a au moins un point à au minimum un mètre de tout cubes et des limites du terrain pour que le cylindre ai un espace assez grand pour être déposé. (1 mètre étant son rayon).

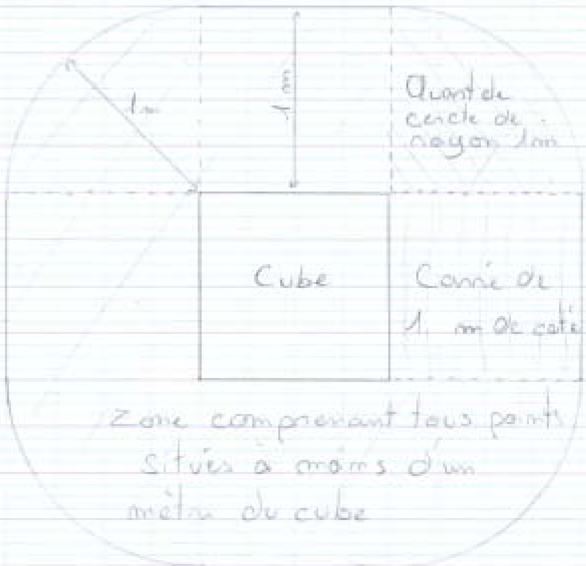
- Aire de la bordure du terrain où le cylindre ne peut être posé :

Le cylindre a un rayon de 1 mètre, il doit donc avoir son centre à 1 mètre du bord du terrain pour être posé.



La zone où le centre du cylindre doit se situer est donc le carré central de 35×35 m (1225 m²)

- Aire de la zone autour d'un cube où le centre du cylindre ne peut se trouver:



On obtient une zone composée de 5 carrés d'un mètre de coté et 4 quarts de disque d'un ~~centi~~ mètre de rayon, soit un disque complet.

Cela donne une aire de : $5 \times 1 + \pi \times 1^2 = (5+\pi)\ m^2$

$\approx 8{,}142\ m^2$

En agençant les cubes pour que leur zone où le centre du cylindre ne peut se trouver soit la plus grande, on obtiendrait une surface hypothétique (hypothétique car les zones ayant des ~~ar~~ arrondis, on ne peut pas ne pas laisser d'espace entre tout en cherchant à couvrir la plus grande surface) de $150 \times (5+\pi)\ m^2$, soit environ $1221{,}239\ m^2$.

Cette zone où le centre du cylindre ne peut pas se trouver est plus petite que la zone où il peut être dans le terrain (le carré central du premier dessin, de $1225\ m^2$), on a donc près de $4\ m^2$ de surface ($3{,}761\ m^2$) où le centre du cylindre ~~pa~~ se trouve à au moins un mètre de tout objet et du bord du terrain. On peut donc encore placer au minimum un tonneau cylindrique de rayon 1 mètre.

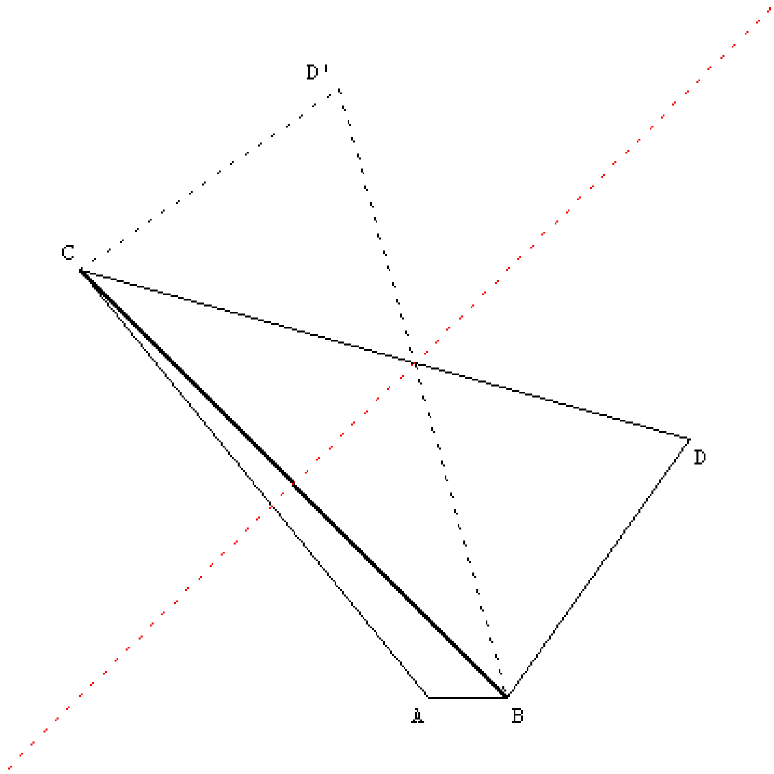
Commentaires et solutions pour le Rallye de Première 2012

Exercice 1

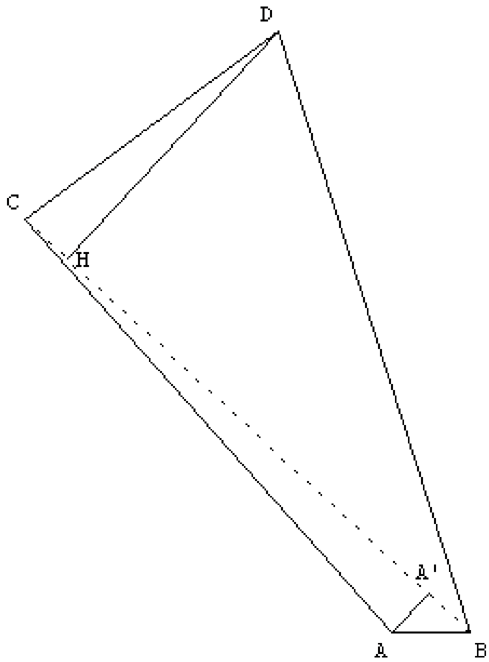
Le quadrilatère peut être considéré comme la juxtaposition de deux triangles ayant comme côté commun une des diagonales du quadrilatère.

En construisant le quadrilatère, il y a deux possibilités : les côtés de longueur respectives 1 et 8 sont adjacents ou ne le sont pas.

S'ils ne le sont pas, il suffit de construire le symétrique (dans la symétrie axiale par rapport à la médiatrice d'une diagonale du quadrilatère) du triangle ayant un côté de longueur 8. La symétrie conservant les aires, nous avons obtenu un quadrilatère de même aire que le précédent et ayant les côtés 1 et 8 consécutifs.



Le problème revient à déterminer l'aire maximale de cette figure :

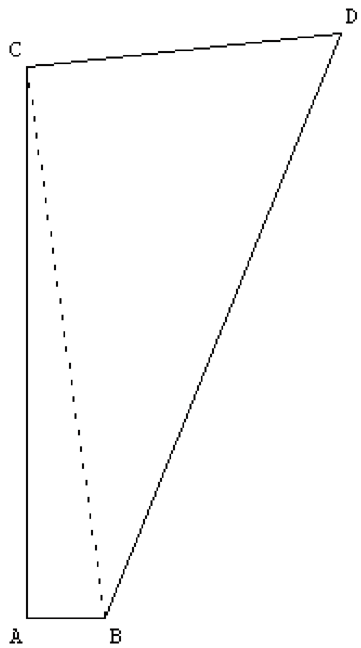


Posons $AB=1$, $AC=8$. $BC=4$ et $BD=7$.
Les autres configurations s'obtiennent toutes par symétrie d'un triangle par rapport à la médiatrice d'une diagonale du quadrilatère.

Soit S_1 l'aire du triangle dont deux côtés mesurent 1 et 8 et S_2 l'aire du triangle dont deux côtés mesurent 4 et 7.
D'après la formule de l'aire S_0 d'un triangle ABC en fonction du sinus d'un de ses angles :

$$S_0=\frac{1}{2}\widehat{AB\times AC}\times\sin(BAC) \quad .$$

L'aire du triangle ABC est maximale pour $\sin(BAC)=1$ soit BAC angle droit.



Dans ce cas, d'après le théorème de Pythagore, la longueur du côté $[BC]$ est $BC=\sqrt{1^2+8^2}=\sqrt{65}$.
L'aire S_1 vaut $S_1=\frac{1}{2}\times1\times8=4$.

Si $BC=\sqrt{65}$, le triangle BCD est rectangle en D (réciproque du théorème de Pythagore).
Donc son aire est maximale et égale à $S_2=\frac{1}{2}DC\times DB=\frac{1}{2}\times4\times7=14$.

L'aire S du quadrilatère est $S=S_1+S_2$.

L'aire maximale du quadrilatère est alors égale à : $S=\frac{1}{2}\times1\times8+\frac{1}{2}\times4\times7=18$.

Exercice 2

A chaque étape n, le bricoleur construit un nouveau carré et boit une nouvelle gorgée.
Appelons u_n le nombre de carreaux posés au total à l'étape n et v_n le nombre de gorgées bues au total à l'étape n.
$v_n = n$.

A chaque étape, l'espace carrelé à la forme d'un carré de côté c_n et $c_{n+1} = c_n + 2$.
(c_n) est une suite arithmétique de premier terme $c_1 = 1$ et de raison 2, donc $c_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$

.

Ce carré est formé de u_n carreaux, donc $u_n = (2n-1)^2$.

1. S'il a bu 39 gorgées, il a posé u_{39} carreaux, soit $(2 \times 39 - 1)^2 = 77^2 = 5\,929$ carreaux.
2. S'il dispose de 2 012 carreaux, il a bu n gorgées, n étant le plus grand entier naturel tel que $u_n \leq 2\,012$.
   Soit $(2n-1)^2 \leq 2\,012$.
   n étant un entier naturel : $\left((2n-1) \leq \sqrt{2012}\right)$ soit $n \leq \dfrac{\sqrt{2012}+1}{2}$.
   Le plus grand entier vérifiant cette inéquation est 22.
   Donc le bricoleur a bu 22 gorgées ;

   - Il est possible d'encadrer 2 012 entre deux termes successifs de la suite (u_n) :
     $u_{22} = 1\,849$ et $u_{23} = 2\,025$.
     Le bricoleur a donc bu 22 gorgées.

Exercice 3

Soient a le nombre de points attribués pour une victoire et b le nombre de points attribués pour une défaite.
a et b sont des entiers naturels strictement positifs.

Soient x le nombre de victoires de Claudine (et donc de défaites de Christiane) et y le nombre de défaites de Claudine (et donc de victoires de Christiane).
x et y sont des entiers naturels strictement positifs.

L'énoncé se traduit pas le système : $\begin{cases} ax - by = 10 \\ ay - bx = 3 \end{cases}$.

En additionnant et en retranchant des deux égalités, on obtient : $\begin{cases} (a-b)(x+y) = 13 \\ (a+b)(x-y) = 7 \end{cases}$.

$(a+b)$ est un diviseur positif de 7 et $(a-b)$ est un diviseur positif de 13 car $x+y$ est positif.
$(a+b)$ est donc égal à 1 ou à 7 et $(a-b)$ est égal à 1 ou à 13.

or $(a+b) > (a-b)$ car $b > 0$ donc $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=7 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}$.

A chaque partie, on peut gagner 4 points ou perdre 3 points.

Commentaires et solutions pour le Rallye de Terminale 2012

Exercice 1

On raisonne par l'absurde.
Supposons que 4 points quelconques (ou plus) ne sont jamais alignés.

Les droites tracées passent donc soit par deux de ces points soit par trois de ces points.

Il y a $\binom{66}{2}$ manières de choisir deux points parmi les 66 points distincts, soit $33 \times 65 = 2\,145$ paires possibles de points.

Soit n le nombre de triplets de points alignés.
Soit $\{A\,;B\}$ une paire de points.

- Si $\{A\,;B\}$ ne fait pas partie d'un des n triplets, il détermine une seule droite, qui n'est déterminée par aucune autre paire de points.
- Si $\{A\,;B\}$ fait partie d'un des n triplets, il détermine une droite qui est comptée trois fois (car d'après l'hypothèse, il y a au maximum 3 points distincts alignés) . Chaque triplet est donc comptabilisé trois fois dans les 2 145 paires de points possibles, soit deux fois de trop.

Ainsi, le nombre total de droites est $2012 = 2145 - 2n$.
Cette égalité est impossible pour des raisons de parité.
Il y a donc au moins 4 points qui sont alignés.

Exercice 2

Soit $C = \overline{abcd}$ mon code secret, a, b, c, d étant des chiffres distincts et non nuls .
La somme de tous les nombres possibles formés avec deux de ces quatre chiffres est :

$$S = \overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ad} + \overline{ba} + \overline{bc} + \overline{bd} + \overline{ca} + \overline{cb} + \overline{cd} + \overline{da} + \overline{db} + \overline{dc}$$
$$= 10a + b + 10a + c + 10a + d + ... + 10d + a + 10d + b + 10d + c$$
$$= 33(a + b + c + d)$$

- En multipliant cette somme S par 7, je retrouve mon code, donc $C = 7S$.

Soit $s = a + b + c + d$ la somme des chiffres de C.
Alors $C = 7 \times 33s = 7 \times 3 \times 11s = 77 \times 3s = 231s$.

- C est un multiple de 3 donc la somme de ses chiffres aussi. Soit $s = 3s'$.

Par suite $C = 77 \times 3 \times 3s' = 77 \times 9s'$.
C est donc un multiple de 9. Or, si un nombre est divisible par 9, la somme de ses chiffres aussi, donc s est aussi divisible par 9.

- Le plus petit code possible formé de 4 chiffres distincts est 1234, le plus grand est 9876.

On a l'encadrement $10 \leq s \leq 30$.

- On cherche s multiple de 9 tel que $10 \leq s \leq 30$.

Les valeurs possibles de s sont 18 et 27.
En étudiant chaque cas :

Si $s = 18$: $C = 231s = 231 \times 18 = 4\,158$.
La somme des chiffres de 4 158 est égale à 18.

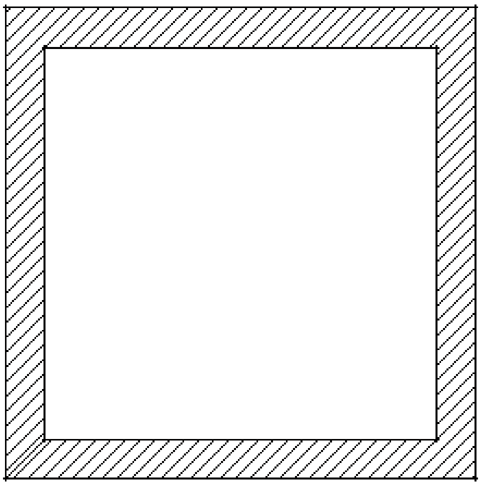
Si $s = 27$: $C = 231s = 231 \times 27 = 6\,237$.
La somme des chiffres de 6 237 n'est pas égale à 27.

Mon code est donc 4 158.

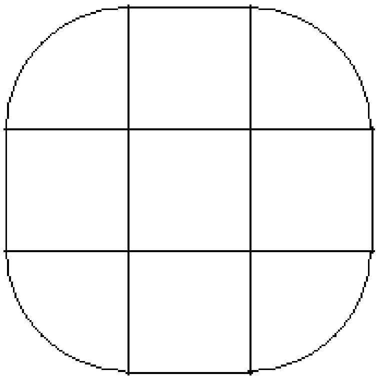
Exercice 3

Soit C le centre de la base de cylindre. D'après l'énoncé, C doit être au moins à une distance 1 du bord de la cour.

Donc C n'appartient pas à la bande sur le bord intérieur de la cour de surface $37^2-35^2=144$.



Considérons la base d'une boîte cubique de côté 1. C doit être au moins à distance 1 de tout point du carré, autrement dit C ne peut pas être dans la région représentée ur la figure ci-dessous, délimitée par cinq carrés de côté 1 (le carré central représentant la base du cube) et quatre arcs de cercle de rayon 1 ayant pour centre les sommets de la base du cube.
Cette surface vaut $\pi+5$.



Les 150 boîtes et le bord interdisent une surface totale de $A=150(\pi+5)+144$.
La surface S restant disponible est égale à $S=37^2-A=475-150(\pi+5)>0$.
Donc certains points de la cour ne sont pas interdits à C.

Il reste donc suffisamment de place pour déposer le tonneau cylindrique.