Institut
de recherche
sur l'enseignement
des mathématiques
IREM

Rallye
Rallye
2014

Rapport du 42ème Rallye Mathématique d'Alsace

UFR de mathématique
et d'informatique
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
Tél. : (33) 03 68 85 01 30
Fax : (33) 03 68 85 01 65
Bibliothèque : (33) 03 68 85 61 01
http://irem.u-strasbg.fr
irem@math.u-strasbg.fr

IREM de Strasbourg
IREM de Strasbourg

Sommaire

Présentation du Rallye Mathématique d'Alsace

Comité organisateur : Patrick GENAUX, Claudine KAHN, Christiane OSWALD, Christel BERNHARDT

Le Rallye Mathématique d'Alsace, organisé par l'IREM de Strasbourg, s'est déroulé pour la 42ème fois en 2014. Crée en 1973, le Rallye Mathématique d'Alsace est la plus ancienne compétition mathématique de France.

Directement inspiré des Olympiades Internationales, il s'adresse à tous les élèves volontaires de l'Académie de Strasbourg et des établissements à l'étranger qui lui sont rattachés (Luxembourg, Copenhague, Belgrade, Berlin, Düsseldorf, Francfort, Fribourg, Hambourg, Munich, Oslo, Sofia, Stockholm, Vienne) ainsi que d'autres partenaires de notre IREM (Washington et Zurich).

Tous les élèves des classes de Première et de Terminale sont prévenus de l'existence du Rallye et de ses modalités. Chacun peut consulter les rapports contenant les sujets, les corrigés, les commentaires ainsi que les palmarès des années précédentes. Ils sont disponibles à la rubrique « rallye » sur le site de l'IREM (http://irem.u-strasbg.fr/php/index.php). Les inscriptions se font sur la base du **volontariat** et les épreuves se déroulent sur le **temps libre** des candidats.

Cette compétition comprend deux épreuves : l'une concerne les élèves de Première, l'autre ceux de Terminale ; elle a réuni environ 750 participants dont 30 de l'étranger.

Les candidats sont amenés à résoudre, pendant quatre heures, individuellement ou par équipes de deux (formule généralement retenue) trois problèmes originaux faisant appel à leurs connaissances bien sûr, mais essentiellement au raisonnement et à leurs capacités inventives.

Les sujets sont très différents de ceux proposés dans l'évaluation traditionnelle. Ils font davantage appel à l'intuition, à l'aspect ludique de la recherche qu'à une suite de connaissances utilisées de manière algorithmique ou répétitive. Les énoncés sont souvent courts, rédigés de manière non scolaire et présentés parfois sous forme d'énigmes ; ils ne contiennent aucune indication de méthode et ne précisent pas le champ de connaissances mises en jeu.

L'objectif est de donner aux élèves l'occasion de faire des mathématiques autrement. Ils peuvent alors réinvestir leur savoir scientifique dans un cadre inhabituel pour eux. Nous développons ainsi leur curiosité, le sens du travail en équipe, le goût pour la recherche. Nous participons ainsi à la promotion de notre discipline auprès des jeunes, des enseignants, des décideurs, de nos partenaires et des médias.

Le Rallye permet aux professeurs des lycées de proposer dans leurs classes, grâce aux rapports des années précédentes, des activités scientifiques différentes de l'entraînement usuel : traduction d'un énoncé en langage mathématique, recherche d'outils possibles, résolution, rédaction d'une solution avec le souci d'une argumentation précise et rigoureuse.

Les élèves, au départ parfois un peu déconcertés par ces énoncés où la démarche n'est pas imposée, trouvent du plaisir à élaborer une construction intellectuelle et par là même gagnent en autonomie de pensée. L'élaboration des sujets suppose une bonne maîtrise de la didactique des mathématiques : l'IREM fournit les éléments nécessaires à ce travail.
Avec la participation au concours commence une série d'activités, extra-scolaires souvent, qui aiguisent la curiosité mathématique des jeunes, encouragent leur esprit d'initiative et créent un climat favorable à l'ouverture culturelle. Cette incitation au développement de la culture scientifique s'inscrit entièrement dans le cadre des directives actuelles à ce sujet.

En Première, dix-sept binômes sont primés : un premier prix exceptionnel, trois premiers prix, six deuxièmes prix et sept troisièmes prix.

En Terminale, dix-huit binômes ont été sélectionnés : trois premiers prix, cinq deuxièmes prix et dix troisièmes prix.

Nous renvoyons à la suite de ce rapport pour des commentaires plus détaillés sur les exercices.

La remise des prix a lieu au Conseil Général du Bas-Rhin. Elle est suivie d'une réception offerte à l'Hôtel du Département par Monsieur Guy-Dominique KENNEL, Président du Conseil Général du Bas-Rhin.

Remerciements

Nous remercions vivement les donateurs qui nous permettent de récompenser les lauréats par des livres, des calculatrices, du matériel informatique pour fêter la 42ème édition :

- ◊ L'Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques de Strasbourg
- ◊ L'Université de Strasbourg
- ◊ L'UFR de Mathématique et d'Informatique
- ◊ L'IREM de Strasbourg
- ◊ L'A.P.M.E.P.
- ◊ Le Conseil Régional d'Alsace
- ◊ Le Conseil Général du Bas-Rhin
- ◊ Le Conseil Général du Haut-Rhin
- ◊ La Ville de Strasbourg
- ◊ Le S.I.A.S. d'Altkirch
- ◊ La Ville de Barr
- ◊ La Ville de Colmar
- ◊ La Ville d'Erstein
- ◊ La Ville de Mulhouse
- ◊ La Ville d'Obernai
- ◊ La Ville de St Louis
- ◊ La Communauté de Communes de Thann et de Cernay
- ◊ Le CME du Bas-Rhin

Nous remercions tout particulièrement le Conseil Général du Bas-Rhin pour son soutien et la mise à disposition de la salle des séances plénières pour la cérémonie de remise de prix et pour la réception à l'Hôtel du Département qu'il organise en l'honneur de nos lauréats.

A tous les lauréats du Rallye Mathématique d'Alsace de Première

Le Rallye Mathématique d'Alsace
et
ANIMATH (Association pour l'animation des Mathématiques)

Proposent de participer au **Club France**

Pendant l'année de Terminale, vous serez suivis par des tuteurs, essentiellement des élèves d'Écoles Normales Supérieures, qui vous proposeront régulièrement des exercices de Mathématiques du type de ceux que vous avez rencontrés au Rallye Mathématique d'Alsace ou aux Olympiades Académiques. Si vous vous distinguez, vous serez éventuellement invités à représenter la France aux Olympiades Internationales de Mathématiques.

Pour plus d'information sur toutes les activités proposées, vous pouvez également consulter le site d'Animath : **http://www.animath.fr**

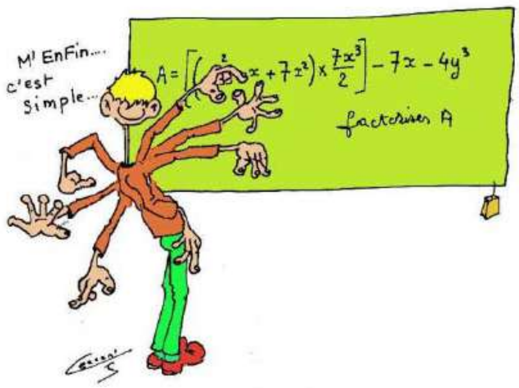
Nous vous souhaitons une bonne poursuite mathématique de vos études.

Rallye Mathématique d'Alsace 2014

Inscription des volontaires par groupes de deux

avant le
5 mars 2014

auprès de leur professeur de mathématiques



Dates des épreuves

–

Terminales

mercredi
26 mars
2014

–

Premières

mercredi
2 avril
2014

Pour tout renseignement : http://irem.u-strasbg.fr

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

académie Strasbourg
Ministère de l'Éducation nationale
Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche

IREM STRASBOURG

Palmarès des Premières 2014

Premier prix exceptionnel

- ✓ CHABAUX Romain et VECCHIONE François
  Professeur : Monsieur WALTER et Monsieur WEINLING, Lycée Kléber, Strasbourg

Premier prix

- ✓ PEREIRA Alexandra et PEREIRA Marie
  Professeur : Madame JORDAN, Lycée St André, Colmar

- ✓ PIRON Arnaud et STACKLER Benoît
  Professeur : Monsieur WALTER, Lycée Kléber, Strasbourg

- ✓ DIEBOLD Hélène et METZGER Clara
  Professeur : Monsieur MALINGREY, Lycée Marie Curie, Strasbourg

Deuxième prix

- ✓ SCHWINTE Valentin et STAMPFLER Tristan
  Professeur : Monsieur WEINLING, Lycée Kléber, Strasbourg

- ✓ KNITTEL Julien et MICHAUD Alexis
  Professeur : Madame JORDAN, Lycée St André, Colmar

- ✓ GERARDIN Maxime et PLANEIX Thomas
  Professeur : Madame MARIANI, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ FROEHLICH Alexandre et WEIDMANN Hugo
  Professeurs : Madame BACHSCHMIDT et Madame STUPFLER, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ EL MRINI Alexis et LANCIEN François
  Professeur : Madame FREYSZ, Lycée Louis Pasteur, Strasbourg

- ✓ HEMBERT Pierre et KUGELMANN Axel
  Professeur : Monsieur MARCHANT, Lycée Marcel Rudloff, Strasbourg

Troisième prix

- ✓ BARLOY Nathan et EICH Gautier
  Professeurs : Madame BACHSCHMIDT et Madame MARIANI, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ FOURCHAULT Raphael et NGUYEN Quynh
  Professeur : Monsieur PETIT, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ KARRER Charlie et SCHULTZ Thomas
  Professeur : Monsieur MEYER, Lycée Schuré, Barr

- ✓ BOLZER Mari-Lena et JEHIN Hermine
  Professeurs : Monsieur MOEBS et Madame SCHNEK, Lycée Bartholdi, Colmar

- ✓ MICHAUD Victor et ROMON Julien
  Professeurs : Madame SCHMIDT, Lycée Don Bosco Landser

- ✓ BOCQUET Thomas et HIRTZ Virgile
  Professeurs : Monsieur NISSE, Lycée St André, Colmar

- ✓ DUBOSCLARD Nicolas et SWOBODA Gabriele
  Professeur : Monsieur BENOIT, Lycée Français Marie Curie, Zurich

Palmarès des Terminales 2014

Premier prix

- ✓ FLEURÖTTE Manon et FRITSCH Sophie
  Professeur : Madame NEITER, lycée du Haut-Barr, Saverne

- ✓ BARDET Valentin et IBATA Neil
  Professeur : Monsieur SCHWARTZ, lycée international des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ BELKHORFI Sami et MORANDO Basile
  Professeur : Madame KIEFEL, lycée Marie Curie, Strasbourg

Deuxième prix

- ✓ MANZANEDA Alberto et NGUYEN Khanh
  Professeur : Monsieur SCHWARTZ, lycée international des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ MARTIN Alexandre et MESSMER Thomas
  Professeur : Madame BRISINGER, lycée Henner, Altkirch

- ✓ CHEVALIER Victor et DUPUY Charles
  Professeur : Madame SCHEURER, lycée international des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ ANDRES Hervé et RIEDINGER Antoine
  Professeur : Monsieur HIEGEL, lycée Kléber, Strasbourg

- ✓ HAN Suzanne et ZHANG Francis
  Professeur : Monsieur SCHWARTZ, lycée international des Pontonniers, Strasbourg

Troisième prix

- ✓ CREPEL Thibault et GIANNIKAS Athanasios
  Professeur : Monsieur WEIL, lycée international des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ REBMANN Bastien et WINKELMULLER Vincent
  Professeur : Monsieur MARTIN, lycée Heinrich, Haguenau

- ✓ BONNAFOUX Etienne et KRAUTH Timothé
  Professeur : Madame BUTSCHER, lycée Saint André, Colmar

- ✓ LEYNADIER Noël et WOLFF Pauline
  Professeur : Monsieur OTTOBRINI, lycée Don Bosco, Landser

- ✓ GRUMBERG Daniel et MARSCHALL Marc
  Professeur : Madame COLLETTE, lycée Vauban, Luxembourg

- ✓ KARAKAYA Cem et NOOT Jean-Pierre
  Professeur : Madame KIEFEL, lycée Marie Curie, Strasbourg

- ✓ WIEDERKEHR Basile et WITZ Igor
  Professeur : Monsieur HIEGEL, lycée Kléber, Strasbourg

- ✓ GRANGER Cyril et ORTNER Philippe
  Professeur : Madame SCHMIDT, lycée Don Bosco, Landser

- ✓ ANDRADES Naël et HERB Amaury
  Professeur : Monsieur WERNER, lycée Ribeaupierre, Ribeauvillé

- ✓ BURRER Yann et FAULHABER Thomas
  Professeur : Madame GUTH, lycée Scheurer-Kestner, Thann

Rallye Mathématique d'Alsace 2014

Avec le soutien de :

L'UFR de Mathématique et d'Informatique

Le Conseil Général du Haut-Rhin

Le Conseil Régional d'Alsace

Les Dernières Nouvelles d'Alsace

Les Villes de
Barr, Kaysersberg, Mulhouse, Niederbronn les Bains, Saverne, Saint-Louis

La Communauté de Communes de Thann et de Cernay

Le Syndicat Intercommunal pour les Affaires Scolaires d'Altkirch

Le Crédit Mutuel Enseignants du Bas-Rhin

Jeudi 26 juin 2014

Conseil Général du Bas-Rhin

Proclamation des résultats 17h30

Réception des lauréats 18h30

Organisé par :

http://irem.u-strasbg.fr

Sujet des Premières

RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE

PREMIERES

Mercredi 2 avril 2014

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également de manière très lisible leur adresse postale et leur mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

---

1. **Le nageur**

   Un nageur se trouve dans l'eau en un point A.

   Il désire rejoindre un point B situé sur le rivage, supposé rectiligne.

   Sa vitesse dans l'eau est deux fois moindre que sa vitesse sur la terre ferme.

   En quel point du rivage doit-il accoster pour atteindre le point B le plus rapidement possible?

2. **Les produits maximaux**

   Déterminer le plus grand entier qui puisse s'écrire comme produit d'entiers tous positifs et dont la somme fasse 2013. Reprendre ensuite cette question avec 2014 et 2015.

3. **Les nombres permutables**

   Un nombre entier supérieur ou égal à 2 est dit premier quand ses seuls diviseurs sont 1 et lui-même.

   Un nombre entier supérieur ou égal à 2 est dit permutable s'il est premier, que ses chiffres (de gauche à droite) forment une suite croissante (pas nécessairement strictement) et que tous les entiers obtenus en permutant l'ordre de ses chiffres sont aussi premiers.

   Quels sont les chiffres possibles pour un nombre permutable supérieur ou égal à 6?

   Quel est le plus grand entier permutable inférieur ou égal à 999?

   Quel est le plus grand entier permutable dont tous les chiffres sont distincts 2 à 2?

Sujet des Terminales

RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE

TERMINALES

Mercredi 26 mars 2014

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également de manière très lisible leur adresse postale et leur mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

---

1. **Des nombres et des sommes**

   Une suite finie d'au moins 11 nombres réels est telle que la somme de 7 termes consécutifs de la suite est toujours négative ou nulle et la somme de 11 termes consécutifs de la suite est toujours strictement positive.

   Déterminer la taille maximale d'une telle suite et en donner un exemple explicite.

2. **Un triangle et une inégalité**

   Les longueurs des côtés d'un triangle (non aplati) de périmètre 1 sont notées a, b et c.

   Expliquer pourquoi a, b, c sont tous les trois strictement inférieurs à $\frac{1}{2}$ et démontrer l'inégalité

   $$a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}.$$

3. **Un cercle et des côtés tangents**

   On fixe deux points A et D du plan tels que $AD = \frac{3}{2}$ et on trace le cercle $\mathcal{C}$ de centre D passant par A.

   Déterminer tous les triangles ABC satisfaisant aux contraintes suivantes:

   - B est sur la demi-droite $[AD)$,
   - la droite (AC) est tangente au cercle $\mathcal{C}$,
   - la droite (BC) est tangente au cercle $\mathcal{C}$,
   - les côtés du triangle ABC sont des entiers.

   Il peut être utile d'exprimer AC^2 en fonction de AB pour un tel triangle.

Commentaires pour le Rallye Mathématique d'Alsace 2014

Cette année, 375 binômes représentant 400 élèves de première et 350 élèves de terminale ont participé aux épreuves du Rallye. La participation est donc sensiblement la même que celle de l'année précédente.

Nous sommes heureux de constater que les élèves font preuve de connaissances et d'initiatives, et que les méthodes qu'ils utilisent pour résoudre les exercices sont diverses, variées, parfois rédigées avec une très grande rigueur. Ceci est très encourageant pour les lycéens de l'académie.

En première, le premier prix exceptionnel a donné une solution presque parfaite de chaque exercice.
Les premiers prix ont très bien résolu deux exercices.
Les deuxièmes et troisièmes prix ont donné une solution complète d'un exercice et des éléments dans l'un ou les deux autres exercices.

En terminale, tous les premiers prix ont donné une solution complète du troisième exercice et fourni des éléments corrects dans les deux autres.
Les deuxièmes et troisièmes prix ont soit proposé une bonne solution des exercices 1 ou 2 avec quelques éléments du 3, soit trouvé une solution partiellement vérifiée du 3 avec quelques remarques sur les deux autres.
C'est l'exercice 3 qui fait fréquemment la différence entre les prix attribués. Le triplet (3,4,5) est souvent proposé ; son unicité n'est pas toujours établie et la tangence de la droite (BC) au cercle plus rarement bien démontrée.

Pour chacun des exercices, nous joignons à ce rapport une résolution qui nous a semblé pertinente, choisie parmi les bonnes solutions rencontrées.

Compte –rendu de l'épreuve de Première

Les candidats à l'épreuve du Rallye Mathématique d'Alsace de Première avaient trois exercices à traiter durant quatre heures. Dans le premier exercice on demandait d'optimiser un trajet. Le deuxième exercice portait sur des produits maximaux relatifs à des nombres entiers. Le troisième exercice reposait sur l'étude de nombres entiers qui vérifiaient certaines propriétés de divisibilité.

Le premier exercice a été moins souvent abordé que les deux autres. Les candidats qui ont donné la solution ou des éléments de réponse, ont proposé un traitement purement géométrique (rarement) ou très souvent une méthode analytique en introduisant une fonction et en étudiant son minimum. Un certain nombre de candidats ont mal compris l'énoncé : au lieu de mettre le point B sur le rivage ils l'ont placé sur la terre ferme.
Dans le deuxième exercice, les élèves donnent souvent la bonne réponse, avec des raisonnements plus ou moins justifiés. Un certain nombre de candidats a cherché à écrire 2013 sous la forme xy avec xy maximum, alors qu'il ne fallait pas se limiter à un produit de deux facteurs.
Le troisième exercice a remporté un franc succès : beaucoup de candidats ont trouvé les bons résultats, certains détaillant très clairement leur démarche.

Compte –rendu de l'épreuve de Terminale

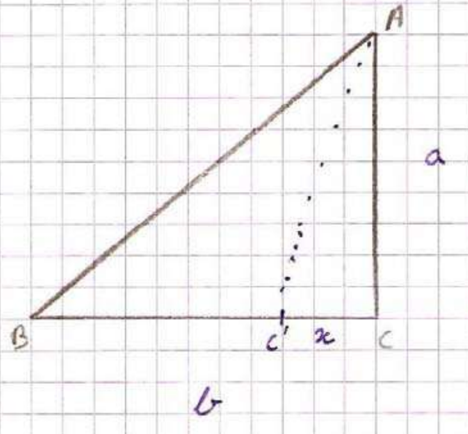
L'épreuve du Rallye Mathématique d'Alsace de Terminale comprend, comme à l'habitude, trois exercices. Les deux premiers proposent un traitement d'inégalités, sur une suite de nombres d'une part, sur la longueur de trois côtés d'un triangle d'autre part. Le troisième exercice repose sur l'étude de triangles dont les côtés sont tangents à un cercle donné.

Chacun des exercices est résolu correctement dans des copies, mais c'est le troisième qui remporte le plus fort taux de succès.
L'énoncé du numéro 1 n'est pas toujours compris, mais un nombre important de copies propose des suites à douze ou treize termes qui remplissent les conditions souhaitées. Parfois le nombre de termes est majoré par 77. Toutes ces tentatives sont bien sûr valorisées.
Dans l'exercice 2, presque tous les élèves utilisent correctement l'inégalité triangulaire pour montrer que les nombres a, b, c sont tous trois strictement inférieurs à ½. Différents calculs sont effectués pour majorer $a^2+b^2+c^2+4abc$, mais peu aboutissent au nombre ½.
La géométrie inspire beaucoup les candidats. Ils utilisent de nombreux pans de leur savoir, du théorème de Pythagore à la trigonométrie, voire la trigonométrie réciproque, des propriétés des droites et des cercles remarquables dans un triangle, des triangles isométriques ou semblables (en les nommant ainsi ou pas). De nombreux élèves mettent en place un repère pour répondre à certaines questions par l'analyse, en introduisant des fonctions, en réfléchissant à leur sens de variation, en étudiant des extrema sur un intervalle donné, en encadrant les solutions cherchées puis en testant des nombres entiers. Ce rapport contient les photocopies de plusieurs copies d'élèves pour montrer différents raisonnements qui ont été construits.

Copies des Premières

CHABAUX Romain et VECCHIONE François
Lycée Kléber – Strasbourg
Exercice n°1

On peut schématiser la figure suivante :



Le nageur décrit la trajectoire suivante :
Il va de A en C' puis de C' à B, avec $[CC'] \leq b$
Si $x = 0$ il va de A en C puis de C en B, si $x = b$ il va directement de A à B.
Il va deux fois plus vite sur terre que dans l'eau. On peut représenter la durée de son trajet par la fonction $f = \frac{AC'}{v} + \frac{BC'}{2v} = \frac{2AC' + BC'}{2v}$

$2v$ ne variant pas on s'intéresse aux variations de $2AC' + BC'$.

On a, d'après le théorème de Pythagore : $AC' = \sqrt{a^2+x^2}$

Et $BC' = b - x$

Donc $2AC' + BC' = 2\sqrt{a^2+x^2} + b - x$

Soit $g(x) = 2\sqrt{a^2+x^2} + b - x$

On a : $g'(x) = \frac{2x}{\sqrt{a^2+x^2}} + 0 - 1$

$$= \frac{2x - \sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

donc $g'(x) = \dfrac{(2x - \sqrt{a^2+x^2})(2x + \sqrt{a^2+x^2})}{\sqrt{a^2+x^2}\,(2x + \sqrt{a^2+x^2})}$

$$g'(x) = \frac{4x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{a^2+x^2}\,(2x+\sqrt{a^2+x^2})} = \frac{3x^2 - a^2}{\sqrt{a^2+x^2}\,(2x+\sqrt{a^2+x^2})}$$

Cela revient à s'intéresser au signe de $3x^2 - a^2$.

On a $3x^2 - a^2 > 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 > a^2$

$\Leftrightarrow x^2 > \dfrac{a^2}{3}$

$\Leftrightarrow x > \dfrac{a}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x > \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

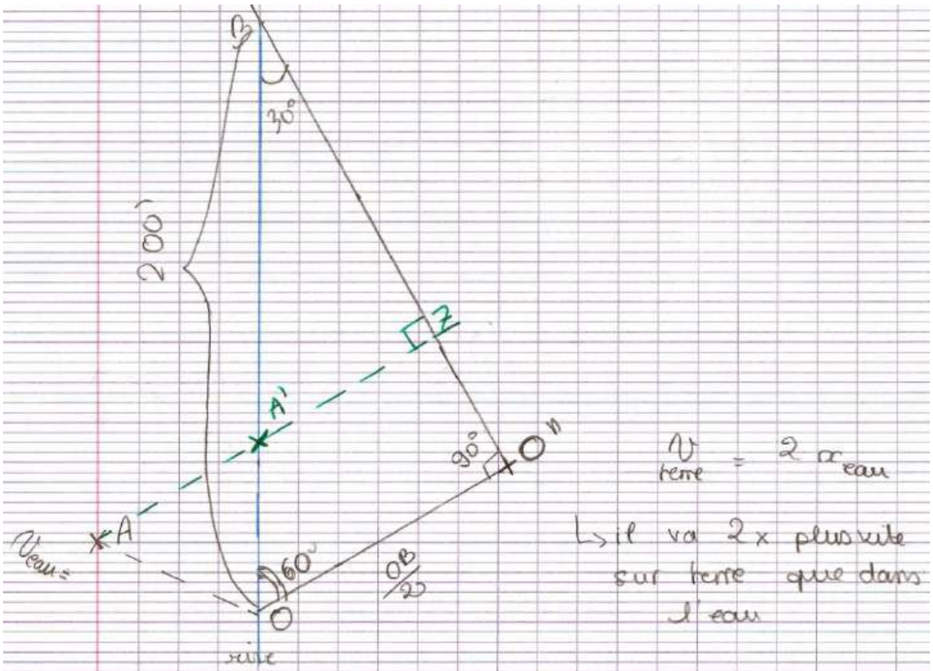
On peut faire un tableau de variations :

x	0		$\frac{a\sqrt{3}}{3}$		b
$g'(x)$		$-$	$\vert$	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Le rayon doit donc accoster au point C' avec $CC' = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ pour atteindre le point B le plus rapidement possible

PEREIRA Marie et PEREIRA Alexandra
Lycée Saint André – Colmar

Exercice n°1



Si nous notons O, par exemple, le point où le nageur va accoster, il devra parcourir la distance OB à pied. Si nous traçons la droite issue de B (faisant un angle de 30° avec la rive car 180 − 90 − 60 = 30) on peut noter O' la projection orthogonale de O sur la droite. On remarque ainsi et par définition que $OO' = \frac{OB}{2}$

On en conclu que pour rejoindre B, le temps est égal à celui qu'il aurait mis à effectuer à la nage le parcours AOO', CAR la vitesse dans l'eau est 2 fois plus petite que sur la Terre. Donc A

Parcours (A OO' dans l'eau) = Parcours (AOB sur terre) donc même temps.

Le minimum de temps que le nageur peut obtenir est lorsque les points AO'O sont alignés donc le nageur doit accoster en I pour atteindre B le plus vite possible !

BARLOY Nathan et EICH Gautier
Gymnase Jean Sturm – Strasbourg
Exercice n°2

Pour répondre à cette question, nous allons d'abord répondre à une autre, la générale : comment décomposer un nombre en somme de termes dont le produit de ces termes est maximum ?

Posons un nombre $n \geqslant 4$.

Pour tout n, une décomposition en somme de termes donne un produit supérieur à n. (ou égal) :
quand n est pair, on fait $\frac{n}{2} + \frac{n}{2}$, ce qui fait un produit de $\frac{n^2}{4}$, et puisque $n \geqslant 4$, $\frac{n^2}{4} \geqslant n$.
quand n est impair, on fait $\left(\frac{n}{2} - 0{,}5\right) + \left(\frac{n}{2} + 0{,}5\right)$, ce qui fait un produit $\frac{n^2}{4} - 0{,}25$. Comme $n \geqslant 5$, puisque n est impair, $\frac{n^2}{4} - 0{,}25 \geqslant n$.
Il vaut donc mieux décomposer un nombre en somme de termes strictement inférieur à 4 pour obtenir un produit maximum. Mais rajouter un terme 1 est inutile, car le produit n'augmente pas.
Il faut donc décomposer le nombre en somme de 2 et de 3.
De plus, quand on a $2+2+2$, on peut le transformer en $3+3$, car les deux sont égaux à 6. Il vaut mieux faire cela car $3\times3 > 2\times2\times2$.
Donc il ne peut pas y avoir plus de deux 2 dans les termes. Quand on a 4, il vaut mieux le décomposer en $2+2$, plutôt qu'en $3+1$, car $2\times2 > 3\times1$.

Donc pour 2013, il vaut mieux le décomposer en $3+3+3 \ldots +3$, ce qui fait 3×671.
Le produit fait alors 3^{671} (pas assez de puissance dans la calculatrice pour avoir un résultat chiffré).

Pour 2014 :
$3+3+3 \ldots +3+2+2$, ce qui fait $3\times670 + 2\times2$
Le produit vaut $3^{670}\times4$

Pour 2015 :
$3+3+3 \ldots +3+2$, ce qui fait $3\times671+2$
Le produit vaut $3^{671}\times2$.

PIRON Arnaud et STACKLER Benoît
Lycée Kléber – Strasbourg
Exercice n°3

On cherche les chiffres possibles pour un nombre permutable supérieur ou égal à 6.
Puisque le nombre est supérieur ou égal à 6 et puisque tout nombre pair différent de 2 est premier, on élimine les chiffres $\{2, 4, 6, 8, 0\}$.
D'autre part tout nombre contenant un $\{5\}$, une fois permuté avec $\{5\}$ comme unité est divisible par 5 donc n'est pas premier.

Les chiffres possibles sont donc $\{1, 3, 7, 9\}$.

On cherche le plus grand entier permutable inférieur ou égal à 999.
On dresse la liste des entiers correspondants à la définition trouvé précédement :

999 → divisible par 3. $(3 \times 333 = 999)$
799 → divisible par 17 $(47 \times 17 = 799)$
779 → divisible par 19 $(41 \times 19 = 779)$
777 → divisible par 3 $(3 \times 259 = 777)$
399 → divisible par 3 $(3 \times 133 = 399)$
379 → premier mais 793 divisible par 13 $(13 \times 61 = 793)$.
377 → divisible par 13 $(13 \times 29 = 377)$
339 → divisible par 3 $(3 \times 113 = 339)$
337 → premier, 373 est premier, 733 premier.

Donc 337 est le plus grand entier inférieur à 999.

qui est permutable.

On cherche désormais le plus grand entier permutable dont tous les chiffres sont distincts 2 à 2.

1379 → divisible par 7 (7× 197 = 1379).

Donc le plus grand entier permutable dont tous les chiffres sont distincts 2 à 2 est inférieur à 999.

Or 337 ne correspond pas à cette définition.

Le nombre permutable suivant est 199 qui ne répond toujours pas à la définition.

Le nombre permutable suivant est 79.

Le plus grand entier permutable dont tous les chiffres sont distincts 2 à 2 est 79.

Copies des Terminales

BONNAFOUX Etienne et KRAUTH Timothé
Lycée Saint André – Colmar
Exercice n°1

Exercice 1

La taille maximale d'une telle suite est 16.
En effet imaginons une suite de taille 17.
$x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_{17}$
On a $x_1 + x_2 + \ldots + x_7 \leq 0$
$x_2 + x_3 + \ldots + x_8 \leq 0$
$\vdots$
$\underset{>0}{x_{11}} + \underset{>0}{x_{12}} + \ldots\ \underset{>0}{x_{17}} \leq 0$

On remarque que si l'on additionne les différentes lignes on obtient un nombre négatif. Cependant les colonnes sont composé de 11 chiffres consécutifs et sont donc positifs ! En additionnant par colonne on obtient un nombre positif. Une suite de longueur 17 est donc impossible.

Après avoir essayé de nombreux cas, on trouve la suite suivante :
5 ; 5 ; −13 ; 5 ; 5 ; 5 ; −13 ; 5 ; 5 ; −13 ; 5 ; 5 ; 5 ; −13 ; 5 ; 5
En effet dans chaque somme de 7 termes conséqutifs il y aura 5 5 et 2 −13 ce qui nous donne un nombre négatif (−1)
Or, dans chaque somme de 11 termes consécutifs il y aura 8 5 et 3 −13 ce qui nous donne un nombre positif (1).

CREPEL Thibault et GIANNIKAS Athanasios
Lycée International – Strasbourg
Exercice n°2

2. Un triangle et une inégalité

* Imaginons le triangle ABC tel que : $AB = a$
non aplati et de $BC = b$
périmètre valant 1. $CA = c$

On trace la hauteur du triangle passant par B et coupant CA en H. D'après le théorème de Pythagore, dans les triangles AHB et BHC rectangle en H, on a :

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} \Leftrightarrow AH < AB$$
$$\text{et } HC = \sqrt{BC^2 - BH^2} \Leftrightarrow HC < BC$$

Donc : $AH + HC < AB + BC$
soit $AC < AB + BC$

Cela fonctionne pour tous les côtés d'un triangle non aplati : la somme de la longueur de deux côtés est supérieure à la longueur du 3e.
Donc : $a + b > c$ et $a + c > b$ et $b + c > a$

On raisonne maintenant par l'absurde :
imaginons que : $a \geq \frac{1}{2}$

On aurait $b + c > \frac{1}{2} \Leftrightarrow a + b + c > 1$
$\Leftrightarrow P(ABC) > 1$

Or, ceci contredit notre hypothèse de départ.

Donc : $a < 1/2$

Ce raisonnement fonctionne aussi pour b et c.

Donc : $a < 1/2$

$b < 1/2$

$c < 1/2$.

* On sait que : $a < \frac{1}{2}$

$b < \frac{1}{2}$

$c < 1/2$

Donc : $\left(a - \frac{1}{2}\right)\left(b - \frac{1}{2}\right)\left(c - \frac{1}{2}\right) < 0$

$$\left(ab - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}\right)\left(c - \frac{1}{2}\right) < 0$$

$$abc - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}ac + \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c - \frac{1}{8} < 0$$

$$abc - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}ac + \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4} < \frac{1}{8}$$

$$4abc - 2ab - 2ac + a - 2bc + b + c < \frac{1}{2}$$

Or on sait que : $a + b + c = 1$ et $(a+b+c)^2 = 1$

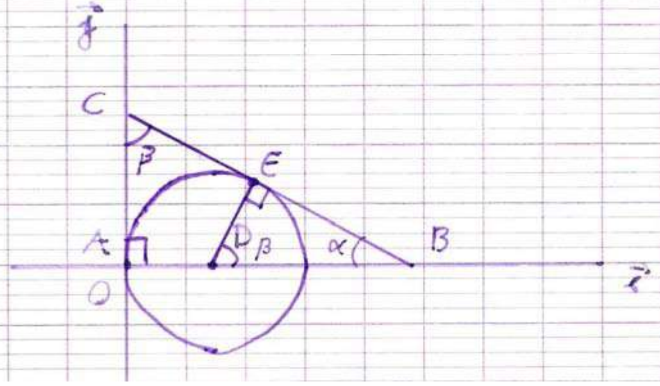
Donc $a + b + c = (a+b+c)^2$

D'où $4abc + (a+b+c)^2 - 2ab - 2ac - 2bc < \frac{1}{2}$

$$4abc + a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}.$$

MANZANEDA Alberto et NGUYEN Khanh
Lycée International – Strasbourg
Exercice n°3

On trace dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ le cercle $\mathcal{C}$ de centre D qui passe par A, et $AD = \frac{3}{2}$. On choisit de mettre les coordonnées $A(0;0)$ et ~~B(0;3/2)~~ $D(3/2;0)$.



Le cercle passe par A donc AD est le rayon du cercle $\mathcal{C}$.

Vu que AC est tangent au cercle le triangle ABC est rectangle en A. CB est aussi tangent au cercle $\mathcal{C}$ en E. On a donc ABC et BDE deux triangles semblables, car ce sont deux triangles rectangles et $\widehat{ACB} = \widehat{EDB} = \beta$ et $\widehat{AB} = \widehat{DBE} = \alpha$.

Comme ABC et BDE sont deux triangles semblables, on obtient donc cette égalité :

$$\frac{AC}{DE} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow \frac{AC}{3/2} = \frac{BC}{AB - AD} \Leftrightarrow \frac{2}{3} AC = \frac{BC}{AB - \frac{3}{2}}$$

Puisque AB et DE sont le rayon du cercle $\mathcal{C}$.

On a donc $BC = \frac{2}{3} AC \left(AB - \frac{3}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow BC = \frac{2}{3} AB\,AC - AC$$

$$\Leftrightarrow BC = AC\left(\frac{2}{3}AB - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow BC^2 = AC^2\left(\frac{2}{3}AB - 1\right)^2$$

À l'aide du théorème de Pythagore, on obtient :

$$AB^2 + AC^2 = AC^2\left(\frac{4}{9}AB^2 + 1 - \frac{4}{3}AB\right)$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = AC^2\left(\frac{4}{9}AB^2 - \frac{4}{3}AB\right)$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = AC^2 AB\left(\frac{4}{9}AB - \frac{4}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow AB = AC^2\left(\frac{4}{9}AB - \frac{4}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow AC^2 = \frac{AB}{\frac{4}{9}AB - \frac{4}{3}} \Leftrightarrow AC^2 = \frac{9/4\,AB}{AB - 3} = \frac{9AB}{4AB - 12}$$

$$= \frac{8AB - 24 + AB + 24}{4AB - 12} = 2 + \frac{AB + 24}{4AB - 12}$$

Ainsi, pour que $2 + \frac{AB+24}{4AB-12}$ soit entier, il faut que $\frac{AB+24}{4AB-12}$ soit entier, ce qui est possible pour $AB + 24 > 4AB - 12 \Leftrightarrow 36 > 3AB \Leftrightarrow AB < 12$

Ainsi $3 < AB < 12$ car pour $AB = 3$ la tangente au cercle C est $x = 3$ et elle ne coupe pas la tangente en A car $x = 3$ est une droite verticale et donc parallèle à la tangente du cercle C en A.

Pour $AB = 4$; $AC^2 = 2 + \frac{4+24}{16-12} = 9 = 3^2$

Donc $AC = 3$ ou -3 et ainsi $AC \in \mathbb{Z}$

Pour $AB = 5$; $AC^2 = 2 + \frac{5+24}{20-12} = 2 + \frac{29}{8} \notin \mathbb{Z}$

Pour $AB = 6$; $AC^2 = 2 + \frac{6+24}{24-12} = 2 + \frac{30}{12} \notin \mathbb{Z}$

Pour $AB = 7$; $AC^2 = 2 + \frac{7+24}{28-12} = 2 + \frac{31}{16} \notin \mathbb{Z}$

Pour $AB = 8$; $AC^2 = 2 + \frac{8+24}{32-12} = \frac{32}{20} + 2 \notin \mathbb{Z}$

Pour $AB = 9$; $AC^2 = 2 + \frac{9+24}{36-12} = \frac{33}{24} + 2 \notin \mathbb{Z}$

Pour $AB = 10$; $AC^2 = 2 + \frac{10+24}{40-12} = 2 + \frac{34}{28} \notin \mathbb{Z}$

Pour $AB = 11$; $AC^2 = 2 + \frac{11+24}{44-12} = \frac{35}{32} + 2 \notin \mathbb{Z}$

Ainsi ; on trouve les triangles ABC tels que $C(0;3)$ ou $C(0;-3)$; $B(4;0)$

Ce qui fait $AB = 4$; $AC = 3$ ou $AC = -3$, donc il y a deux triangles en totale qui satisfont les conditions.

BELKHORFI Sami et MORANDO Basile
Lycée Marie Curie – Strasbourg
Exercice n°3 (extrait)

Propriété 9 : $AC < 4$

Démonstration : On se place dans ADC rectangle en A.

On a $\tan \alpha = \frac{AD}{AC}$

donc $\alpha = \arctan\left(\frac{AD}{AC}\right) = \arctan\left(\frac{3}{2AC}\right)$

Donc $\theta = 2\alpha = 2\arctan\left(\frac{3}{2AC}\right)$

Donc, d'après la propriété 5, $AB = AC \tan(\theta)$

$= AC \tan\left(2\arctan\left(\frac{3}{2AC}\right)\right)$

D'autre part, $\frac{1}{x}$ inverse l'ordre, tandis que $\tan(x)$ et $\arctan(x)$ sont des fonctions croissantes pour $\theta \neq 90$ (non défini, mais d'après la propriété 6, $\theta \neq 90$) et AC est positif donc conserve aussi l'ordre. Ainsi, on a que quand AC croît, AD décroît.

Or, pour $AC = 4$, $AB = 4 \times \tan\left(2\arctan\left(\frac{3}{2\times 4}\right)\right) = 3{,}4909...$

donc pour tout $AC > 4$, $AB < 3{,}49 < 4$, ce qui est en contradiction avec le corollaire 8.

Donc $AC < 4$.

Conclusion : d'après les propriétés 7 et 9 $\frac{3}{2} < AC < 4$ et AC entier

donc AC peut prendre 2 valeurs : 2 et 3.

ANDRES Hervé et RIEDINGER Antoine
Lycée Kléber – Strasbourg
Exercice n°3 (extrait)

On cherche à déterminer s'il existe un ~~[illegible]~~ point d'intersection entre la droite (BC) ~~et~~ qui est tangente au cercle de centre D. On note ce point d'intersection I. On se place dans le repère ~~[illegible]~~ orthonormé d'origine (voir dessin)

Equation de (BC) : (a coefficient directeur)

$a = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{3-0}{0-4} = -\frac{3}{4}$

$C \in (BC)$ donc on peut utiliser ses coordonnées :

$-\frac{3}{4} \times 0 + b = 3$ (b ordonnée à l'origine)

$b = 3$.

Donc $y_{BC} = -\frac{3}{4}x + 3 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x + y_{BC} - 3 = 0$

Equation du cercle de centre D noté $\mathcal{C}$.

$\left(x_{\mathcal{C}} - \frac{3}{2}\right)^2 + y_{\mathcal{C}}^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow x_{\mathcal{C}}^2 - 3x + \cancel{\frac{9}{4}} + y_{\mathcal{C}}^2 = \cancel{\frac{9}{4}}$

$\Leftrightarrow y_{\mathcal{C}}^2 = -x^2 + 3x$

~~[illegible]~~ Point d'intersection :

$y_{\mathcal{C}}^2 = y_{BC}^2$

$\Leftrightarrow -x^2 + 3x = \left(-\frac{3}{4}x + 3\right)^2$

$\Leftrightarrow -x^2 + 3x = \frac{9}{16}x^2 - \frac{9}{2}x + 9.$

$\Leftrightarrow \frac{25}{16}x^2 - \frac{15}{2}x + 9 = 0$

~~$\Leftrightarrow (2x - \frac{12}{5})^2$~~ $\Leftrightarrow x = \frac{12}{5}$

Déterminons l'ordonnée de I grâce à l'équation de la droite (BC).

$-\frac{3}{4} \times \frac{12}{5} + 3 = \frac{6}{5}$

Donc $I\left(\frac{12}{5} ; \frac{6}{5}\right)$

Déterminons l'équation de la droite (DI) :

$$a_1 = \frac{\frac{6}{5} - 0}{\frac{12}{5} - \frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

$D \in (DI)$ donc on peut utiliser ses coordonnées :

$\frac{4}{3} \times \frac{3}{2} + b_1 = 0$

$\frac{12}{6} + b_1 = 0$

$2 + b_1 = 0$

$b_1 = -2$

Donc $y_{DI} = \frac{4}{3}x - 2 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}x + y_{DI} + 2 = 0$

Donc $\left(-1 ; -\frac{4}{3}\right)$ est un vecteur directeur de (DI).

De même $\left(-1 ; \frac{3}{4}\right)$ est un vecteur directeur de (BC).

Vérifions que ces deux vecteurs sont orthogonaux :

$\vec{BC} \cdot \vec{DI} = -1 \times -1 + -\frac{4}{3} \times \frac{3}{4}$

$= 1 - 1 = 0$

Les vecteurs directeurs de (DI) et (BC) sont orthogonaux donc $(DI) \perp (BC)$. Or I est sur le cercle de centre D. donc (BC) est la tangente de ce cercle au point I. En outre (AC) l'est aussi car A est sur le cercle et $(AC) \perp (AD)$ car C est sur (Oy) et D sur (Ox).

(AC) est donc tangente au cercle $\mathcal{C}$.