Institut
de recherche
sur l'enseignement
des mathématiques
IREM

Rallye
2015

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

académie Strasbourg
Ministère de l'Éducation nationale
Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche

Rapport du 43ème Rallye Mathématique d'Alsace

CONSEIL DÉPARTEMENTAL BAS-RHIN

TEXAS INSTRUMENTS
Votre Savoir-faire. Notre Technologie. Leur Réussite.

CASIO

IREM de Strasbourg

UFR de mathématique
et d'informatique
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
Tél. : (33) 03 68 85 01 30
Fax : (33) 03 68 85 01 65
Bibliothèque : (33) 03 68 85 61 01
http://irem.u-strasbg.fr
irem@math.u-strasbg.fr

Sommaire

Présentation du Rallye Mathématique d'Alsace

Comité organisateur : Claudine KAHN, Christiane OSWALD, Christel BERNHARDT

Le Rallye Mathématique d'Alsace, organisé par l'IREM de Strasbourg, s'est déroulé pour la 43ème fois en 2015. Crée en 1973, le Rallye Mathématique d'Alsace est la plus ancienne compétition mathématique de France.

Directement inspiré des Olympiades Internationales, il s'adresse à tous les élèves volontaires de l'Académie de Strasbourg et des établissements à l'étranger qui lui sont rattachés (Luxembourg, Copenhague, Belgrade, Berlin, Düsseldorf, Francfort, Fribourg, Hambourg, Munich, Oslo, Sofia, Stockholm, Vienne) ainsi que d'autres partenaires de notre IREM (Washington et Zurich).

Tous les élèves des classes de Première et de Terminale sont prévenus de l'existence du Rallye et de ses modalités. Chacun peut consulter les rapports contenant les sujets, les corrigés, les commentaires ainsi que les palmarès des années précédentes. Ils sont disponibles sur le site de l'IREM (http://mathinfo.unistra.fr/irem/rallye-mathematique-dalsace). Les inscriptions se font sur la base du **volontariat** et les épreuves se déroulent sur le **temps libre** des candidats.

Cette compétition comprend deux épreuves : l'une concerne les élèves de Première, l'autre ceux de Terminale ; elle a réuni environ 900 participants dont 60 de l'étranger.

Les candidats sont amenés à résoudre, pendant quatre heures, individuellement ou par équipes de deux (formule généralement retenue) trois problèmes originaux faisant appel à leurs connaissances bien sûr, mais essentiellement au raisonnement et à leurs capacités inventives.

Les sujets sont très différents de ceux proposés dans l'évaluation traditionnelle. Ils font davantage appel à l'intuition, à l'aspect ludique de la recherche qu'à une suite de connaissances utilisées de manière algorithmique ou répétitive. Les énoncés sont souvent courts, rédigés de manière non scolaire et présentés parfois sous forme d'énigmes ; ils ne contiennent aucune indication de méthode et ne précisent pas le champ de connaissances mises en jeu.

L'objectif est de donner aux élèves l'occasion de faire des mathématiques autrement. Ils peuvent alors réinvestir leur savoir scientifique dans un cadre inhabituel pour eux. Nous développons ainsi leur curiosité, le sens du travail en équipe, le goût pour la recherche. Nous participons ainsi à la promotion de notre discipline auprès des jeunes, des enseignants, des décideurs, de nos partenaires et des médias.

Le Rallye permet aux professeurs des lycées de proposer dans leurs classes, grâce aux rapports des années précédentes, des activités scientifiques différentes de l'entraînement usuel : traduction d'un énoncé en langage mathématique, recherche d'outils possibles, résolution, rédaction d'une solution avec le souci d'une argumentation précise et rigoureuse.

Les élèves, au départ parfois un peu déconcertés par ces énoncés où la démarche n'est pas imposée, trouvent du plaisir à élaborer une construction intellectuelle et par là même gagnent en autonomie de pensée. L'élaboration des sujets suppose une bonne maîtrise de la didactique des mathématiques : l'IREM fournit les éléments nécessaires à ce travail.
Avec la participation au concours commence une série d'activités, extra-scolaires souvent, qui aiguisent la curiosité mathématique des jeunes, encouragent leur esprit d'initiative et créent un climat favorable à l'ouverture culturelle. Cette incitation au développement de la culture scientifique s’inscrit entièrement dans le cadre des directives actuelles à ce sujet.

En Première, seize binômes sont primés : un premier prix exceptionnel, cinq premiers prix, cinq deuxièmes prix et cinq troisièmes prix.

En Terminale, seize binômes ont été sélectionnés : huit premiers prix, quatre deuxièmes prix et quatre troisièmes prix.

Nous renvoyons à la suite de ce rapport pour des commentaires plus détaillés sur les exercices.

La remise des prix a lieu au Conseil Départemental du Bas-Rhin. Elle est suivie d'une réception offerte à l’Hôtel du Département par Monsieur Frédéric BIERRY, Président du Conseil Départemental du Bas-Rhin.

Remerciements

Nous remercions vivement les donateurs qui nous permettent de récompenser les lauréats par des livres, des calculatrices, du matériel informatique pour fêter la 43ème édition :

- L'Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques de Strasbourg
- L'Université de Strasbourg
- L'UFR de Mathématique et d'Informatique
- L'IREM de Strasbourg
- ANIMATH   Cap'Maths
- L'A.P.M.E.P.
- Le Conseil Régional d'Alsace
- Le Conseil Départemental du Bas-Rhin
- Le Conseil Départemental du Haut-Rhin
- La Ville d'Altkirch
- La Ville de Barr
- La Ville de Mulhouse
- La Ville de Niederbronn
- La Ville d'Obernai
- La Ville de St Louis
- La Ville de Sélestat
- La Communauté de Communes de Thann et de Cernay
- La société CASIO
- La société TEXAS INSTRUMENTS
- Le Musée de La Régence d'Ensisheim
- L'Ecomusée d'Ungersheim
- Les Musées de la Ville de Strasbourg
- Le Musée de l'Automobile de Mulhouse
- Le Musée EDF Electropolis
- Les Musées de la Ville de Colmar
- Le Château du Haut-Koenigsbourg

Nous remercions tout particulièrement le Conseil Départemental du Bas-Rhin pour son soutien et la mise à disposition de la salle des séances plénières pour la cérémonie de remise de prix et pour la réception à l'Hôtel du Département qu'il organise en l'honneur de nos lauréats.

A tous les lauréats du Rallye Mathématique d'Alsace de Première

Le Rallye Mathématique d'Alsace
et
ANIMATH (Association pour l'animation des Mathématiques)

Proposent de participer au **Club France**

Pendant l'année de Terminale, vous serez suivis par des tuteurs, essentiellement des élèves d'Écoles Normales Supérieures, qui vous proposeront régulièrement des exercices de Mathématiques du type de ceux que vous avez rencontrés au Rallye Mathématique d'Alsace ou aux Olympiades Académiques. Si vous vous distinguez, vous serez éventuellement invités à représenter la France aux Olympiades Internationales de Mathématiques.

Pour plus d'information sur toutes les activités proposées, vous pouvez également consulter le site d'Animath **:** http://www.animath.fr

Nous vous souhaitons une bonne poursuite mathématique de vos études.

Palmarès des Premières 2015

Prix exceptionnel

- ✓ BOEGLER Céline et MISCHEL Camille
  Professeur : M. SCHELL, Lycée André Maurois, Bischwiller

Premier prix

- ✓ HECQUET Théo et MATHIEN Joffrey
  Professeur : M. Bonifas, Lycée Henri Meck, Molsheim

- ✓ FRUNZA Mihaela-Bianca et TORRES GOMEZ Alicia
  Professeurs : M. Matt et M. Petit, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ RISPAL Bénédicte et WEYLAND Ariane
  Professeur : M. Zogel, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ CHATEAU Hugo et RIMLINGER Matthieu
  Professeur : Mme SCHMIDT, Lycée Don Bosco, Landser

- ✓ DE TURCKHEIM Gaspard et CENDRE Antoine
  Professeur : Mme BACHSCHMIDT, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

Deuxième prix

- ✓ EUSTACHE Apolline et SABBAGH Mathieu
  Professeur : Mme Collette-Clerbaut, Lycée Vauban, Luxembourg

- ✓ DUGNY Felix et HULLAR Guillaume
  Professeur : Mme Hamman, Lycée Kléber, Strasbourg

- ✓ EHRET Camille et SCHILL Stéphane
  Professeur : M. Ottobrini, Lycée Don Bosco, Landser

- ✓ GOEPFERT Quentin et RAAFAT Maxime
  Professeur : M. Beltzung, Lycée Episcopal, Zillisheim

- ✓ FRITSCH Marie et HAMMAN Suzelle
  Professeur : Mme Jaeger, Lycée Frédéric Kirschleger, Munster

Troisième prix

- ✓ CHALVIGNAC Benoît et MICHEL Clément
  Professeur : Mme Fricker, Lycée Jean-Baptiste Schwilgué, Sélestat

- ✓ KANDEL Céline et KIEHL Elisabeth
  Professeur : Mme Hamman, Lycée Kléber, Strasbourg

- ✓ BELLEMIN Valentin et GOUMY Maximilien
  Professeur : M. Zimmermann, Lycée Marie Curie, Strasbourg

- ✓ DEVATINE Clément et LESECQ Damien
  Professeur : Mme Smith, Lycée Episcopal, Zillisheim

- ✓ GENZLING Jérôme et GRANIER Romain
  Professeur : M. Hiegel, Lycée Kléber, Strasbourg

Palmarès des Terminales 2015

Premier prix

- ✓ EL MRINI Alexis et LANCIEN François
  Professeur : M. Caumont, Lycée Pasteur, Strasbourg
- ✓ PIRON Arnaud et STACKLER Benoît
  Professeur : M. Walter, Lycée Kléber, Strasbourg
- ✓ GLIECH Quentin et MATHIOT Camille
  Professeurs : M. Tillier et Mme Wendel, Lycée Stanislas, Wissembourg
- ✓ LOUE Alex et MARTEAU-FEREY Alma
  Professeur : M. Nou, Lycée Vauban, Luxembourg
- ✓ KIEFEL Josselin et SCHMATZLER Jona
  Professeur : M. Weil, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg
- ✓ JAEGER Romain et KNITTEL Julien
  Professeur : M. Nisse, Lycée Saint André, Colmar
- ✓ HEMBERT Pierre et KUGELMANN Axel
  Professeur : M. Marchant, Lycée Marcel Rudloff, Strasbourg
- ✓ CHAIGNE Martin et GUILLAUME Sophie
  Professeurs : M. Schwartz et M. Weil, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

Deuxième prix

- ✓ MAJJAD Ismail et PASTEAU Aurélien
  Professeur : M. Weil, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg
- ✓ BARLOY Nathan et EICH Gautier
  Professeurs : Mme Audeoud et M. Alati, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg
- ✓ HARELLE Pierre et REMY Arthur
  Professeur : Mme Oswald, Lycée Marc Bloch, Bischheim
- ✓ MERCKLE Victor et MEYER Luc
  Professeur : M. Werner, Lycée Ribeaupierre, Ribeauvillé

Troisième prix

- ✓ ITALIANO Vincent et MENGEL Corentin
  Professeur : M. Werner, Lycée Ribeaupierre, Ribeauvillé
- ✓ CAHUET Romain et LAYROL Romain
  Professeur : M. Gasser, Lycée Rochambeau, Washington
- ✓ GILLIOT Aurélien et KETTLER Julia
  Professeur : Mme Thiriet, Lycée Leclerc, Saverne
- ✓ BOCQUET Thomas et HIRTZ Virgile
  Professeurs : M. Nisse et Mme Butcher, Lycée Saint André, Colmar

RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 2015
$43^{ème}$ édition

PREMIERES
Mercredi 1^{er} avril 2015

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également de manière très lisible leur adresse postale et leur mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

Exercice 1 :

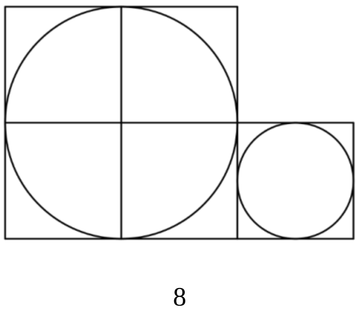
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

Chaque colonne du tableau contient tous les chiffres de 1 à 9 (la première colonne est déjà remplie et ne peut être changée). Chaque ligne contient trois chiffres distincts. De plus la somme des nombres de chaque ligne est toujours la même. A partir de la première ligne et aussi loin que possible la condition suivante est vérifiée : « dans chaque ligne, les chiffres sont rangés de manière strictement croissante ».
Combien de lignes au maximum peuvent être complétées en respectant cette condition ? Donner alors tous les tableaux qui conviennent.

Exercice 2 :
Un jardinier plante des rangées d'arbres de la façon suivante :
Sur la $1^{ère}$ rangée il plante 1 arbre, sur la $2^{ème}$ rangée il plante 2 arbres, sur la $3^{ème}$ rangée il plante 3 arbres, …, sur la $n^{ième}$ rangée il plante n arbres.
Ce jardinier possède deux types d'arbres : des poiriers et des mirabelliers. Il commence par planter des rangées de poiriers. Arrivé à la fin d'une rangée, il n'a plus de poiriers et il enchaîne donc avec des rangées de mirabelliers.
Lorsqu'il a achevé son travail, il se rend compte qu'il a planté 2015 mirabelliers.

Combien de rangées de poiriers et de mirabelliers a-t-il planté ? (on donnera toutes les solutions possibles)

Exercice 3 :
Chaque petit carré mesure $2\,cm$ de côté. Si l'on choisit deux points, un sur chaque cercle, quelle est la distance minimale entre ces deux points ?



RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 2015
43ème édition

TERMINALES
Mercredi 25 mars 2015

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également de manière très lisible leur adresse postale et leur mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

Exercice 1 :
Quel est le nombre de zéros consécutifs à la fin de l'écriture décimale de :

$$2015\,! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times 2014 \times 2015 \text{ ?}$$

Exercice 2 :
Cinq clubs (Aïkido, Bridge, Canoë, Danse, Escrime) sont présents dans trois villes : Strasbourg, Colmar et Thann.
Pour chaque club, le nombre d'adhérents habitant Strasbourg est égal au total des adhérents des quatre autres clubs habitant Colmar.
Pour chaque club, le nombre d'adhérents habitant Colmar est égal au total des adhérents des quatre autres clubs habitant Thann.
Dans la ville de Strasbourg, le nombre d'adhérents de chaque club est :
Aïkido : 193 Bridge : 175 Canoë : 185 Danse : 187
Pour le club d'Escrime de Strasbourg, on sait simplement qu'il a moins d'adhérents que les quatre autres clubs de la ville.

Combien chacun des cinq clubs compte-t-il d'adhérents dans chacune des trois villes ?

Exercice 3 :
Si l'on place au hasard trois points sur un cercle, quelle est la probabilité qu'ils appartiennent tous les trois à un même demi-cercle ?

Commentaires pour le Rallye Mathématique d'Alsace 2015

Cette année, 450 binômes représentant 530 élèves de première et 370 élèves de terminale ont participé aux épreuves du Rallye. La participation est donc en hausse par rapport à l'année précédente (150 élèves en plus).

Nous sommes heureux de constater que les élèves font preuve de connaissances et d'initiatives, et que les méthodes qu'ils utilisent pour résoudre les exercices sont diverses, variées, parfois rédigées avec une très grande rigueur. Ceci est très encourageant pour les lycéens de l'académie.

En première, le premier prix exceptionnel a donné une solution parfaite ou presque des deux premiers exercices.
Les premiers prix ont très bien résolu l'un des deux premiers exercices.
Les deuxièmes et troisièmes prix ont bien avancé ou donné des éléments corrects dans les deux premiers exercices.

En terminale, tous les premiers prix ont donné une solution complète de deux exercices et fourni des éléments corrects dans l'autre.
Les deuxièmes prix ont fourni une solution parfaite d'un exercice et des éléments dans les deux autres.
Les troisièmes prix ont bien avancé dans deux ou trois exercices.

Pour chacun des exercices, nous joignons à ce rapport une résolution qui nous a semblé pertinente, choisie parmi les bonnes solutions rencontrées.
Nous faisons également un commentaire sur l'utilisation de l'algorithmique pour la résolution des exercices.

Compte–rendu de l'épreuve de Première

Les candidats à l'épreuve du Rallye Mathématique d'Alsace de Première avaient trois exercices à traiter durant quatre heures. Dans le premier exercice on demandait de remplir un tableau de nombres en respectant plusieurs critères. Le deuxième exercice portait sur les nombres triangulaires. Dans le troisième exercice il fallait trouver une distance minimale.

A la surprise des correcteurs, les deux premiers exercices ont été résolus souvent à l'aide d'algorithmes. Certes ils sont au programme et à la disposition des candidats. Mais là l'utilisation se réduit à effectuer des tests dans bien des copies. Ils cachent l'absence de raisonnement et de notions simples sur les nombres entiers.

Exercice 1 : La condition « dans chaque ligne, les chiffres sont rangés de manière strictement croissante » permet d'éliminer les lignes 9 et 8. Ensuite beaucoup de candidats ont raisonné sur la somme maximale de la première ligne $1+8+9=18$ et les sommes minimales de la septième ligne $7+8+9=24$, de la sixième $6+7+8=21,\dots$ ce qui se révèle astucieux : le tableau est regardé sous différents côtés, mais fort long ! Mais relativement peu de copies ont proposé le calcul de cette somme en observant que les trois colonnes comprennent les mêmes nombres que les neuf lignes. Et finalement certains candidats ont construit des tableaux qui conviennent jusqu'à en avoir huit.

Exercice 2 : Que de variables introduites, avec ou sans algorithmes, avec ou sans dessin, mais mal définies ! De nombreux élèves ont encadré les huit possibilités pour ces rangées (quitte à en oublier une ou deux), mais peu d'entre eux ont expliqué clairement leur démarche. Quelques divisions ou de longues phrases ont pris la place du raisonnement. Mais cet exercice a motivé les candidats : il remporte un franc succès par le nombre d'élèves qui l'ont cherché.

Exercice 3 : Dans de nombreuses copies, le résultat $\sqrt{10}-3$ est établi grâce au théorème de Pythagore. Mais personne ne démontre qu'il s'agit du plus court chemin, ce qui justifie qu'aucune solution ne soit photocopiée.

Compte–rendu de l'épreuve de Terminale

L'épreuve du Rallye Mathématique d'Alsace de Terminale comprend, comme à l'habitude, trois exercices. Dans le premier exercice ont demandait de trouver le nombre de zéros consécutifs à la fin d'un nombre donné. Le deuxième exercice proposait de déterminer le nombre d'adhérents de cinq clubs différents dans trois villes différentes sous certaines conditions. Le troisième exercice mêlait géométrie et probabilité.

Chacun des exercices est résolu correctement dans des copies.

Exercice 1 : Plusieurs élèves écrivent un algorithme pour « calculer » le nombre $2015!$ … Un grand nombre de candidats ont trouvé le bon résultat : certains ont très clairement justifié leur démarche, d'autres n'ont fait que donner une formule à l'aide de la fonction partie entière. Une copie a proposé un algorithme très astucieux et qui fonctionnait !

Exercice 2 : Cet exercice a très souvent été résolu à l'aide des matrices (notion au programme des élèves qui suivent la spécialité mathématiques). Pour cela il fallait connaître le nombre d'adhérents au club d'escrime de Strasbourg : plusieurs élèves admettent qu'il vaut 172, alors que d'autres le prouvent rigoureusement. Quelques candidats ont donné une résolution complète sans matrice.

Exercice 3 : On peut scinder l'exercice en deux parties : il fallait dans un premier temps comprendre sur quelle partie du cercle placer le troisième point (une fois les deux premiers placés) pour que les trois points appartiennent à un même demi-cercle. Beaucoup de candidats ont fait une figure claire et bien expliquée. Il fallait ensuite calculer la probabilité : la plupart de ceux qui y sont parvenus l'ont fait à l'aide d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme, mais un binôme a trouvé la solution à l'aide d'une représentation graphique et d'un calcul d'aire.

Copies des Premières

RISPAL Bénédicte et WEYLAND Ariane
Lycée International des Pontonniers - Strasbourg
Exercice n°1

On sait que la somme des nombres de chaque ligne est la même et que chaque colonne du tableau contient tous les chiffres de 1 à 9.
La somme, des sommes des nombres de chaque ligne, est donc égale à :

$$(1+2+3+4+5+6+7+8+9)\times 3 = 135$$

Et comme il y a neuf lignes, chaque somme de ligne sera égale à :

$$\frac{135}{9} = 15.$$

La condition « dans chaque ligne, les chiffres sont rangés de manière strictement croissante » ne peut que être respecter par quelque lignes :

En effet pour les lignes 8 et 9, on n'a pas de chiffre plus grand que 9 (à mettre à droite de 9)
Donc ces deux lignes ne respectent pas la condition.

Pour les ligne 7, 6 et 5, les sommes minimals de chaque ligns sont supérieur à 15. En effet :

$7+8+9=24$
$6+7+8=21$
$5+6+7=18$

Pour la ligne 4, la seul possibilité est 4, 5, 6.

Or les possibilités de la ligne 1 sont 1, 6, 8 et 1, 5, 9
de la ligne 2 sont 2, 5, 8 et 2, 4, 9 et 2, 6, 7
de la ligne 3 sont 3, 5, 7 et 3, 4, 8

Or les lignes 1, 2 et 3 ne peuvent pas avoir 5 en 2ème chiffre.

ligne 4 : 4, 5, 6
ligne 1 : 1, 6, 8 } un chiffre ne peut pas se répéter dans une colonne.
Ligne 3 : 3, 4, 8 }
Ligne 2 : 2, 6, 7 ou 2, 4, 9

Il n'y a pas de solution lorsque la ligne 4 respecte la condition

On peut donc dire que seulement les 3 premières lignes peuvent respecter la condition.

Voici les deux possibilités que nous avons trouvé pour les 3 premières lignes :

1	6	8
2	4	9
3	5	7

1	5	9
2	6	7
3	4	8

car les possibilités pour la ligne 1 étaient : 168, 159

pour la ligne 2 étaient : 249, 258, 267

pour la ligne 3 étaient : 357, 348

258 n'est pas compatible avec 168 ou 159 de la ligne 1.

1	6	8
2	4	9
3	5	7
4	8	3
5	9	1
6	7	2
7	2	6
8	3	4
9	1	5

1	6	8
2	4	9
3	5	7
4	8	3
5	9	1
6	7	2
7	3	5
8	1	6
9	2	4

1	6	8
2	4	9
3	5	7
4	9	2
5	7	3
6	8	1
7	2	6
8	3	4
9	1	5

1	6	8
2	4	9
3	5	7
4	9	2
5	7	3
6	8	1
7	3	5
8	1	6
9	2	4

1	5	9
2	6	7
3	4	8
4	8	3
5	9	1
6	7	2
7	2	6
8	3	4
9	1	5

1	5	9
2	6	7
3	4	8
4	8	3
5	9	1
6	7	2
7	3	5
8	1	6
9	2	4

1	5	9
2	6	7
3	4	8
4	9	2
5	7	3
6	8	1
7	2	6
8	3	4
9	1	5

1	5	9
2	6	7
3	4	8
4	9	2
5	7	3
6	8	1
7	3	5
8	1	6
9	2	4

FRUNZA Michaela-Bianca et TORRES GOMEZ Alicia
Lycée International des Pontonniers - Strasbourg
Exercice n°2

On note de 1 à k les rangées de poiriers.
Les rangées de k+1 à n sont les rangées de mirabelliers.
D'après la formule de Gauss, $1+2+\ldots+k=\frac{(k+1)k}{2}$
Donc le nombre de poiriers est égal à $\frac{(k+1)k}{2}$.

Pour le nombre total d'arbres, nous avons $1+2+3+\cdots+n=\frac{(n+1)n}{2}$.

Donc le nombre total d'arbres est égal à $\frac{n(n+1)}{2}$.
Le nombre de rangées de mirabelliers est donc n-k.
De plus, on sait que le nombre de mirabelliers est égal à 2015.
Alors poiriers + mirabelliers = nombre total d'arbres, c'est-à-dire :

$$\frac{k(k+1)}{2}+2015=\frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow 2015=\frac{n(n+1)}{2}-\frac{k(k+1)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2+n-k^2-k}{2}=2015 \Leftrightarrow (n-k)(n+k)+n-k=4030 \Leftrightarrow (n-k)(n+k+1)=4030$$

On calcule donc les diviseurs de 4030.

$4030=2\cdot5\cdot13\cdot31$

Pour réduire le nombre de couples (n,k), on remarque que $n-k<n+k+1$.

On suppose que $n-k>n+k+1$.

Alors $n>n+2k+1 \Leftrightarrow 0>2k+1 \Leftrightarrow -1>2k \Leftrightarrow k<-\frac{1}{2}$.

$k<-\frac{1}{2}$, c'est-à-dire k doit être un nombre négatif, mais k est un nombre positif car il définit le nombre de rangées qui doit être supérieur ou égal à 1.

Donc $n-k<n+k+1$.

Par conséquent les couples $(n-k, n+k+1)$ sont $\{(1,4030);(2,2015);(5,806);(10,403);(13,310);(26,155);(31,130);(62,65)\}$.

1) Si $n-k=1 \Rightarrow n=k+1$

$n+k+1=4030 \Leftrightarrow k+1+k+1=4030 \Leftrightarrow k+1=2015 \Rightarrow \boxed{k=2014} \Rightarrow \boxed{n=2015}$

Donc il y a 2014 rangées de poiriers et 1 rangée de mirabelliers.

2) Si $n-k=2 \Rightarrow n=k+2$

$n+k+1=2015 \Rightarrow k+2+k+1=2015 \Leftrightarrow 2k=2012 \Rightarrow \boxed{k=1006} \Rightarrow \boxed{n=1008}$

Donc il y a 1006 rangées de poiriers et 2 rangées de mirabelliers.

3) Si $n-k=5 \Rightarrow n=k+5$

$n+k+1=806 \Leftrightarrow k+5+k+1=806 \Leftrightarrow 2k=800 \Rightarrow \boxed{k=400} \Rightarrow \boxed{n=405}$

Donc il y a 400 rangées de poiriers et 5 rangées de mirabelliers.

4) Si $n-k=10 \Rightarrow n=k+10$

$n+k+1=403 \Leftrightarrow k+10+k+1=403 \Leftrightarrow 2k=392 \Rightarrow \boxed{k=196} \Rightarrow \boxed{n=206}$.

Donc il y a 196 rangées de poiriers et 10 rangées de mirabelliers.

5) Si $n-k=13 \Rightarrow n=k+13$

$n+k+1=310 \Leftrightarrow k+13+k+1=310 \Leftrightarrow 2k=296 \Rightarrow \boxed{k=148} \Rightarrow \boxed{n=161}$.

Donc il y a 148 rangées de poiriers et 13 rangées de mirabelliers.

6) Si $n-k=26 \Rightarrow n=k+26$

$n+k+1=155 \Rightarrow k+26+k+1=155 \Leftrightarrow 2k=128 \Rightarrow \boxed{k=64} \Rightarrow \boxed{n=90}$.

Donc il y a 64 rangées de poiriers et 26 rangées de mirabelliers.

7) Si $n-k=62 \Rightarrow n=k+62$

$n+k+1=65 \Rightarrow k+62+k+1=65 \Leftrightarrow 2k=2 \Rightarrow \boxed{k=1} \Rightarrow \boxed{n=63}$.

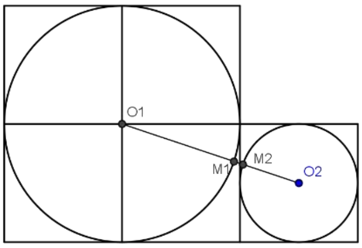
Donc il y a 1 rangée de poiriers et 62 rangées de mirabelliers.

Conclusion:

Si on note avec p le nombre de rangées de poiriers et avec m le nombre de rangées de mirabelliers, alors les couples (p,m) seront $(1;62)$, $(64;26)$, $(148;13)$, $(196;10)$, $(400;5)$, $(1006;2)$ et $(2014;1)$.

Remarque : il manque la solution $(49;31)$ qui correspond au couple $(n-k=31\ ;\ n+k+1=130)$ cité dans la copie.

Exercice n°3



On choisit deux points A et B respectivement sur le grand cercle et le petit cercle
$O_1M_1 + M_1M_2 + M_2O_2 = 2 + M_1M_2 + 1 = O_1O_2$
$O_1A + AB + BO_2 = 2 + AB + 1 \geq O_1O_2$ (le plus court chemin de O_1 à O_2 est la ligne droite)
$d'o$ù $AB \geq M_1M_2$

Le plus court chemin est obtenu pour M_1M_2

$O_1O_2 = \sqrt{10}$
$M_1M_2 = \sqrt{10} - 3$

Copies des Terminales

JAEGER Romain et KNITTEL Julien
Lycée Saint André – Colmar
Exercice n°1

Quel est le nombre de zéros consécutifs à la fin de l'écriture décimale de :

$$2015! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times 2014 \times 2015 \ ?$$

Après réflexion, on s'est rendu compte que le nombre de zéros correspondait au nombre de 10 que l'on pouvait former par décomposition dans le produit. Ainsi, on a décomposé 20 en 10×2 ; 100 en 10×10 ; 300 en $10 \times 10 \times 3$; ...
Mais après différents essais, on a trouvé plusieurs contre-exemples ($10 \times 20 \times 22 \times 25 = 110000$, on a donc quatre zéros à la fin de l'écriture décimale, alors qu'on avait que deux fois le nombre 10 dans le produit en décomposant...). On a donc cherché les autres moyen de former des 10 mis-à-part les multiples directs de 10. On a trouvé la solution en décomposant le nombre : $10 = 2 \times 5$. C'est la seule façon de décomposer 10, et donc chercher le nombre de fois que l'on peut obtenir 2×5 en décomposant les nombres du produit (2015!) nous indiquerait combien de fois on aurait le nombre 10,

et donc par extension, quel est le nombre de zéros consécutifs à la fin de l'écriture décimale de (2015!).

On a vite compris que le chiffre 2 n'était pas le problème, qu'en décomposant, on aurait bien plus de fois le chiffre 2 que le chiffre 5. Donc pour savoir combien de fois on pourrait obtenir le nombre 10 dans le produit, il faut chercher combien de fois on peut obtenir le chiffre 5 en décomposant.

$\frac{2015}{5} = 403$ On a donc 403 multiples

de 5 dans 2015. Mais parmis ces 403 multiples, on a remarqué que 80 nombres pourraient être décomposés en $5^2 \times n^*$ (les multiples de 25 car 25 peut être décomposé en 5×5, et pour trouver 80 on a divisé 2015 par 25), puis que parmis ces 80, 16 sont des multiples de 125 (125 peut être décomposé en $5 \times 5 \times 5$; on a trouvé 16 nombres en faisant 2015 divisé par 125) et parmi ces 16, 3 sont des multiples de 625 (625 peut être décomposé en $5 \times 5 \times 5 \times 5$; on a trouvé 3 nombres en faisant 2015 divisé par 625). On a donc tous les éléments pour trouver combien de fois l'on peut obtenir le chiffre 5 dans le produit.

Nombre de fois que l'on peut obtenir le chiffre 5 dans le produit:

$$3 \times 4 + (16-3) \times 3 + (80-16) \times 2 + (403-80) \times 1 = 502$$

On pourra donc obtenir 502 fois le chiffre 5 par décomposition, on aura donc 502 zéros à la fin de l'écriture décimale de (2015!).

EL MRINI Alexis et LANCIEN François
Lycée Pasteur - Strasbourg
Exercice n°2

On associe respectivement A_S, B_S, C_S, D_S et E_S au nombre d'adhérents des clubs d'Aïkido, de Bridge, de Canoë, de Danse et d'Escrime de Strasbourg.
De même, A_C, B_C, C_C, D_C et E_C correspondent aux adhérents des différents clubs de Colmar et A_T, B_T, C_T, D_T et E_T correspondent aux adhérents des différents clubs de Thann.
Nous avons donc les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
A_S &= B_C + C_C + D_C + E_C = 193\\
B_S &= A_C + C_C + D_C + E_C = 175\\
C_S &= A_C + B_C + D_C + E_C = 185\\
D_S &= A_C + B_C + C_C + E_C = 187\\
E_S &= A_C + B_C + C_C + D_C < 175
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_C &= B_T + C_T + D_T + E_T\\
B_C &= A_T + C_T + D_T + E_T\\
C_C &= A_T + B_T + D_T + E_T\\
D_C &= A_T + B_T + C_T + E_T\\
E_C &= A_T + B_T + C_T + D_T
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{cases}
A_S = 4A_T + 3B_T + 3C_T + 3D_T + 3E_T = 193\\
B_S = 3A_T + 4B_T + 3C_T + 3D_T + 3E_T = 175\\
C_S = 3A_T + 3B_T + 4C_T + 3D_T + 3E_T = 185\\
D_S = 3A_T + 3B_T + 3C_T + 4D_T + 3E_T = 187\\
E_S = 3A_T + 3B_T + 3C_T + 3D_T + 4E_T = E_S
\end{cases}$$

$$A_S + B_S + C_S + D_S + E_S = 16(A_T + B_T + C_T + D_T + E_T) = 193 + 175 + 185 + 187 + E_S = 740 + E_S$$

Ainsi, 16 divise $740 + E_S$ et $E_S < 175$
donc E_S peut prendre les valeurs 12, 28, 44, 60, 76, 92, 108, 124, 140, 156 ou 172 car toutes les inconnues sont des naturels vu qu'ils correspondent à des personnes.
On fait alors une disjonction des cas avec toutes les possibilités de E_S en employant des matrices :

$$L = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} A_T \\ B_T \\ C_T \\ D_T \\ E_T \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 193 \\ 175 \\ 185 \\ 187 \\ E_S \end{pmatrix}$$

$$L \times M = N$$

$$M = L^{-1} N$$

Si $E_S = \{12, 28, 44, 60, 76, 92, 108, 124, 140, 156\}$, $E_T < 0$

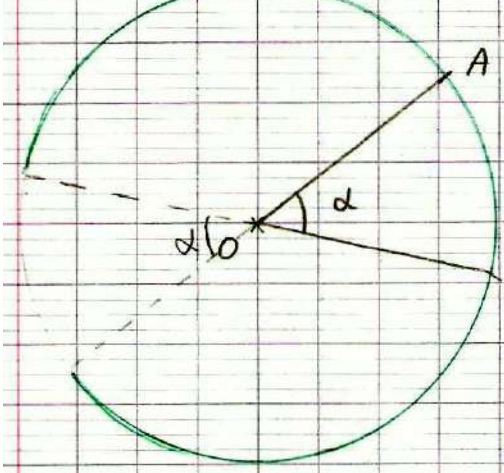
E_S ne peut donc être égale qu'à 172 car E_T ne peut être négatif car $E_T \in \mathbb{N}$.

Nous n'avons plus qu'à remplir ce tableau :

	Aïkido	Bridge	Canoë	Danse	Escrime
Strasbourg	193	175	185	187	172
Colmar	35	53	43	41	56
Thann	22	4	14	16	1

BARLOY Nathan et EICH Gautier
Gymnase Jean Sturm – Strasbourg
Exercice n°3

On place 2 points, A et B, sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre O. On nomme α l'angle aigu $\widehat{AOB}$. On rajoute le point C sur le cercle.



Pour que les points A, B et C soient sur le même demi-cercle il doit se situer sur la zone en vert sur le dessin, qui est $\mathcal{C}$ privé du symétrique de $\widehat{AB}$ par O.

On note l'événement E : A, B et C sont sur un même demi cercle.
On peut alors exprimer P(E) en fonction de α :

$$P(E) = \frac{2\pi - \alpha}{2\pi} = 1 - \frac{\alpha}{2\pi}$$

En considérant α comme une variable aléatoire variant de 0 à π (angle aigu) de manière uniforme, on peut calculer la valeur moyenne de P(E)

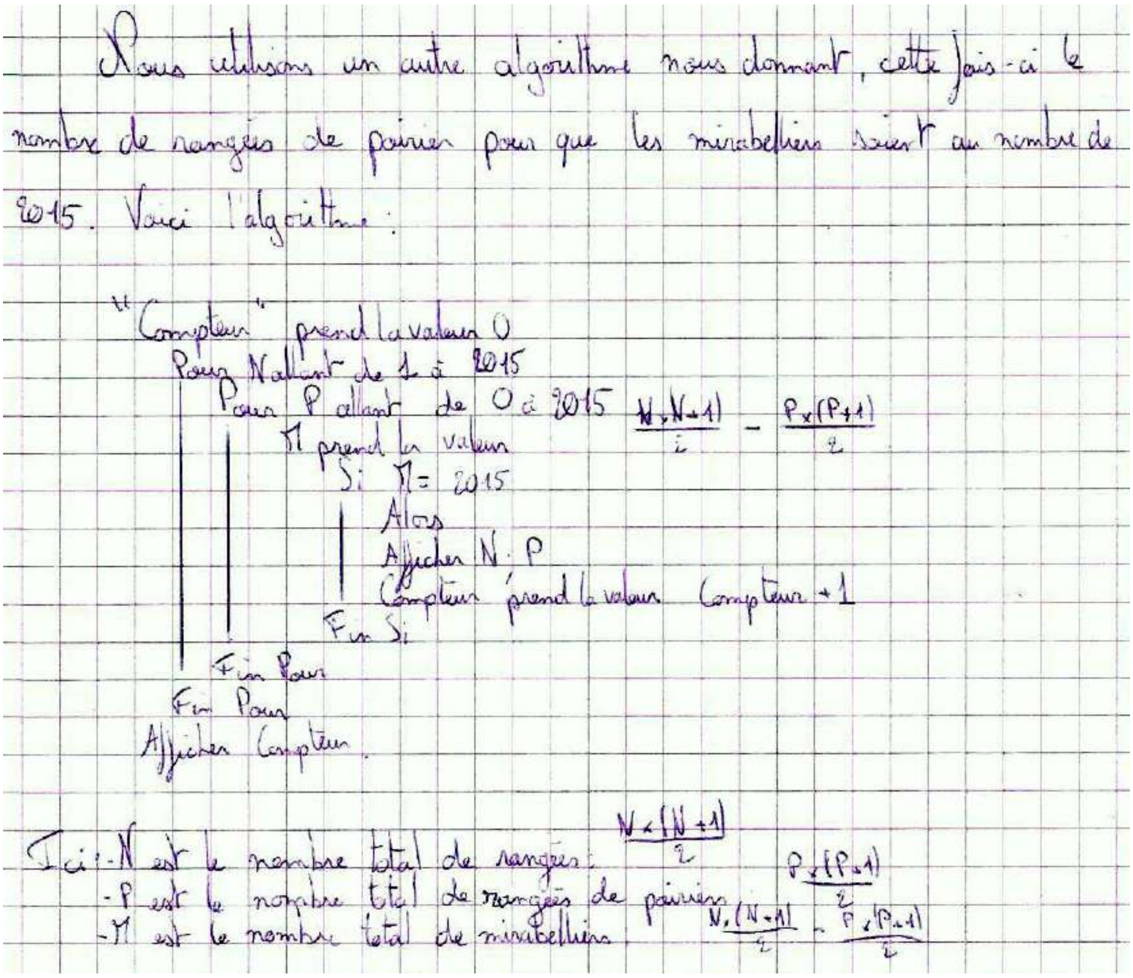
$$P_{moy}(E) = \frac{\int_0^{\pi} 1 - \frac{\alpha}{2\pi}\, d\alpha}{\pi} = \frac{\left[\alpha - \frac{\alpha^2}{4\pi}\right]_0^{\pi}}{\pi}$$

$$= \frac{3\pi}{4\pi} = \frac{3}{4}$$

Trois points d'un cercle appartiennent donc à un même demi-cercle avec une probabilité de $\frac{3}{4}$.

Utilisation d'algorithme

Voici un exemple d'algorithme pertinent (sujet des Premières, exercice 2) :
Les candidats expliquent à quoi correspondent les quatre variables utilisées, l'algorithme est correct, judicieux et bien présenté.
Nous l'avons testé sur Xcas et il affiche les solutions (ainsi que le nombre de solutions) en moins d'une minute.



Nous utilisons un autre algorithme nous donnant, cette fois-ci le nombre de rangées de poirier pour que les mirabelliers soient au nombre de 2015. Voici l'algorithme :

"Compteur" prend la valeur 0
Pour N allant de 1 à 2015
Pour P allant de 0 à 2015
M prend la valeur $\frac{N\times(N+1)}{2} - \frac{P\times(P+1)}{2}$
Si M = 2015
Alors
Afficher N ; P
Compteur prend la valeur Compteur + 1
Fin Si
Fin Pour
Fin Pour
Afficher Compteur.

Ici : - N est le nombre total de rangées : $\frac{N\times(N+1)}{2}$
- P est le nombre total de rangées de poiriers $\frac{P\times(P+1)}{2}$
- M est le nombre total de mirabelliers $\frac{N\times(N+1)}{2} - \frac{P\times(P+1)}{2}$

Voici un exemple d'algorithme (pour ce même exercice) qui illustre ce qui doit être amélioré lorsqu'un candidat souhaite utiliser ce procédé :
les variables doivent être clairement définies et expliquées (ce n'est pas au correcteur de deviner leur utilité) ; « pour trouver A, on procède par tâtonnements » : si l'utilisateur doit passer des heures à tester un grand nombre de possibilités, nous ne voyons pas l'intérêt d'utiliser un algorithme… Le calcul doit être automatisé !
(NB : l'algorithme photocopié n'est pas correct)

On écrit un algorithme:

affecter 0 à C
affecter 0 à N
Demander A
Tant que C < 2015
  affecter A+1 ~~à~~ B
  affecter B+1 ~~à~~ A
  affecter A+B ~~à~~ C
  affecter N+1 dans N
Fin
Si C = 2015
  Afficher "Succès
  Afficher N
Si C ≠ 2015
  Afficher " Échec "
  Afficher C
  Afficher N

N nous donne le nombre de rangées pour C mirabelliers, plantés à partir du A ième poirier.
On trouve : A = 0 → succès. on a 504 rangées de mirabelliers.
A = 2 → succès. on a 503 rangées de mirabelliers et 2 de poiriers.

pour trouver A, on procède par tâtonnements : quand "Échec" est affiché, on essaie avec une valeur de A différente.

Et pour finir voici un exemple d'algorithme (sujet des Terminales, exercice 1) qui nous a donné matière à réfléchir. Nous l'avons trouvé très judicieux, mais certaines lignes nous échappent !

On se propose de faire un algorithme, biensur il serait fou de vouloir calculer 2015!.
Il faut donc créer un algorithme qui exécute un programme de calcul fesable pour une simple calculatrice.

Prenons les premières étapes:

$1 \times 2 = 2$
$2 \times 3 = 6$
$6 \times 4 = 24$
$24 \times 5 = 120$
$120 \times 6 = 720$

Seul les 0 nous intéressent, donc si on prend uniquement ces 0 suivis du premier chiffre, le reste du calcul ne sera pas érroné
on observe $20 \times 6 = 120$, on conserve bien les 0, de cette manière on allège la charge de calcul mais ce n'est pas encore suffisant. On propose alors de stocker les 0 dans une variable annexe.
On observe $24 \times 5 = 120 \rightarrow 20 \rightarrow 2$ et $z = 1$
$2 \times 6 = 12$ et $z = 1$; on conserve toujours le nombre de 0.

On en déduit le programme de calcul suivant:

debut de l'algorithme
n = 1
a = 1
z = 0
tant que n < 2015 faire
n prend la valeur n+1

a prend la valeur $a \times n$

tant que Partie_entière$\left(\frac{a}{10}\right) = \frac{a}{10}$ faire

a prend la valeur $\frac{a}{10}$ //commentaire : on supprime les 0

z prend la valeur $z+1$

fin tant que

~~a prer~~

a prend la valeur $a - 10^4 \times$ Partie_entière$\left(\frac{a}{10^4}\right)$

//commentaire: cela permet de prendre uniquement

// les 0 et le premier chiffre.

fin tant que

afficher z

fin de l'algorithme

On fait tourner l'algorithme sur une calculatrice et on trouve : z = ~~498~~ 502

On en conclue que 2015! possèdent ~~498~~ 502 zeros consécutifs à la fin de son écriture décimale.

Rajout : On conserve néanmoins 4 chiffres à gauche à cause de cas particuliers, et 4 car la multiplication se fera par un nombre à 4 chiffres maximum.