**Institut
de recherche
sur l'enseignement
des mathématiques
IREM**

Rallye

Rallye
2016

Rapport du 44ème Rallye Mathématique d'Alsace

**UFR de mathématique
et d'informatique**
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
Tél. : (33) 03 68 85 01 30
Fax : (33) 03 68 85 01 65
Bibliothèque : (33) 03 68 85 61 01
http://irem.u-strasbg.fr
irem@math.u-strasbg.fr

IREM de Strasbourg

IREM de
Strasbourg

Sommaire

Présentation du Rallye Mathématique d'Alsace

Comité organisateur : Claudine KAHN, Christel BERNHARDT, Pascal MALINGREY
Jean-Claude SABBAN

Le Rallye Mathématique d'Alsace, organisé par l'IREM de Strasbourg, s'est déroulé pour la 44ème fois en 2016. Crée en 1973, le Rallye Mathématique d'Alsace est la plus ancienne compétition mathématique de France.

Directement inspiré des Olympiades Internationales, il s'adresse à tous les élèves volontaires de l'Académie de Strasbourg et des établissements à l'étranger qui lui sont rattachés (Luxembourg, Copenhague, Belgrade, Berlin, Düsseldorf, Francfort, Fribourg, Hambourg, Munich, Oslo, Sofia, Stockholm, Vienne) ainsi que d'autres partenaires de notre IREM (Washington et Zurich).

Tous les élèves des classes de Première et de Terminale sont prévenus de l'existence du Rallye et de ses modalités. Chacun peut consulter les rapports contenant les sujets, les corrigés, les commentaires ainsi que les palmarès des années précédentes. Ils sont disponibles sur le site de l'IREM (http://mathinfo.unistra.fr/irem/rallye-mathematique-dalsace). Les inscriptions se font sur la base du **volontariat** et les épreuves se déroulent sur le **temps libre** des candidats.

Cette compétition comprend deux épreuves : l'une concerne les élèves de Première, l'autre ceux de Terminale ; elle a réuni environ 710 participants dont 42 de l'étranger.

Les candidats sont amenés à résoudre, pendant quatre heures, individuellement ou par équipes de deux (formule généralement retenue) trois problèmes originaux faisant appel à leurs connaissances bien sûr, mais essentiellement au raisonnement et à leurs capacités inventives.

Les sujets sont très différents de ceux proposés dans l'évaluation traditionnelle. Ils font davantage appel à l'intuition, à l'aspect ludique de la recherche qu'à une suite de connaissances utilisées de manière algorithmique ou répétitive. Les énoncés sont souvent courts, rédigés de manière non scolaire et présentés parfois sous forme d'énigmes ; ils ne contiennent aucune indication de méthode et ne précisent pas le champ de connaissances mises en jeu.

L'objectif est de donner aux élèves l'occasion de faire des mathématiques autrement. Ils peuvent alors réinvestir leur savoir scientifique dans un cadre inhabituel pour eux. Nous développons ainsi leur curiosité, le sens du travail en équipe, le goût pour la recherche. Nous participons ainsi à la promotion de notre discipline auprès des jeunes, des enseignants, des décideurs, de nos partenaires et des médias.

Le Rallye permet aux professeurs des lycées de proposer dans leurs classes, grâce aux rapports des années précédentes, des activités scientifiques différentes de l'entraînement usuel : traduction d'un énoncé en langage mathématique, recherche d'outils possibles, résolution, rédaction d'une solution avec le souci d'une argumentation précise et rigoureuse.

Les élèves, au départ parfois un peu déconcertés par ces énoncés où la démarche n'est pas imposée, trouvent du plaisir à élaborer une construction intellectuelle et par là même gagnent en autonomie de pensée. L'élaboration des sujets suppose une bonne maîtrise de la didactique des mathématiques : l'IREM fournit les éléments nécessaires à ce travail.
Avec la participation au concours commence une série d'activités, extra-scolaires souvent, qui aiguisent la curiosité mathématique des jeunes, encouragent leur esprit d'initiative et créent un climat favorable à l'ouverture culturelle. Cette incitation au développement de la culture scientifique s’inscrit entièrement dans le cadre des directives actuelles à ce sujet.

En Première, quatorze binômes sont primés : un prix exceptionnel, un premier prix, cinq deuxièmes prix et sept troisièmes prix.

En Terminale, seize binômes ont été sélectionnés : un prix exceptionnel, cinq premiers prix, cinq deuxièmes prix et cinq troisièmes prix.

Nous renvoyons à la suite de ce rapport pour des commentaires plus détaillés sur les exercices.

La remise des prix a lieu au Conseil Départemental du Bas-Rhin. Elle est suivie d'une réception en l’honneur des lauréats à l’Hôtel du Département.

Remerciements

Nous remercions vivement les donateurs qui nous permettent de récompenser les lauréats par des livres, des calculatrices, du matériel informatique, des entrées aux musées et aux parcs d'activités pour fêter la 44ème édition :

- ◊ L'Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques de Strasbourg
- ◊ L'Université de Strasbourg
- ◊ L'UFR de Mathématique et d'Informatique
- ◊ L'IREM de Strasbourg
- ◊ ANIMATH Cap'Maths
- ◊ L'A.P.M.E.P.
- ◊ Le Conseil Départemental du Bas-Rhin
- ◊ Le Conseil Départemental du Haut-Rhin
- ◊ La Ville d'Altkirch
- ◊ La Ville de Barr
- ◊ La Ville de Kaysersberg
- ◊ La Ville de Molsheim
- ◊ La Ville de Niederbronn
- ◊ La Ville d'Obernai
- ◊ La Ville de St Louis
- ◊ La société CASIO
- ◊ Le Musée de La Régence d'Ensisheim
- ◊ Les Musées de la Ville de Strasbourg
- ◊ Les Musées de la Ville de Colmar
- ◊ Le Musée du Pétrole de Pechelbronn
- ◊ Le Planétarium de Strasbourg
- ◊ L'équipe du Lac Blanc

Nous remercions tout particulièrement le Conseil Départemental du Bas-Rhin pour son soutien et la mise à disposition de la salle des séances plénières pour la cérémonie de remise des prix.

A tous les lauréats du Rallye Mathématique d'Alsace de Première

Le Rallye Mathématique d'Alsace
et
ANIMATH (Association pour l'animation des Mathématiques)

Proposent de participer au **Club France**

Pendant l'année de Terminale, vous serez suivis par des tuteurs, essentiellement des élèves d'Écoles Normales Supérieures, qui vous proposeront régulièrement des exercices de Mathématiques du type de ceux que vous avez rencontrés au Rallye Mathématique d'Alsace ou aux Olympiades Académiques. Si vous vous distinguez, vous serez éventuellement invités à représenter la France aux Olympiades Internationales de Mathématiques.

Pour plus d'information sur toutes les activités proposées, vous pouvez également consulter le site d'Animath **:** http://www.animath.fr

Nous vous souhaitons une bonne poursuite mathématique de vos études.

Palmarès des Premières 2016

Prix exceptionnel

- ✓ KASTNER Mallory et MARC-ZWECKER Mateo
  Professeurs : M. Logel et M. Matt, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

Premier prix

- ✓ HAMMANN Jean-Baptiste et TURLURE Emilie
  Professeur : M. Harel, Lycée Leclerc, Saverne

Deuxième prix

- ✓ DORN Diego et ROMEROWSKI Florian
  Professeur : M. Malingrey, Lycée Marie Curie, Strasbourg
- ✓ TOUSSAINT Nino et TRIMBOUR Rémi
  Professeur : M. Kubler, Lycée Jean Rostand, Strasbourg
- ✓ PELSY DIOMANDE Yann et WAGNER Camille
  Professeur : M. Kubler, Lycée Jean Rostand, Strasbourg
- ✓ DAHMANI-MOUSSA Maxime et NORO Sarah
  Professeurs : M. Logel et M. Matt, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg
- ✓ KREBER Alexandre et WENDLING Christophe
  Professeur : Mme Mariani, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

Troisième prix

- ✓ BURTSCHER Oriane et DESOMBRE Augustin
  Professeur : Mme Mariani, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg
- ✓ HUSSAIN-YOUNIS Rayan et SCHMATZLER Timotheus
  Professeur : M. Matt, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg
- ✓ TOMAS Gaspard et VILLEDEY Théodore
  Professeur : Mme Nafakh, Lycée Français Vauban, Luxembourg
- ✓ BAUERREIS Laetitia et BAUERREIS Marine
  Professeur : M. Matt, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg
- ✓ DITTLY Lisa et FOLTETE Julien
  Professeur : Mme Jordan, Lycée Saint-André, Colmar
- ✓ MEYER Marie et RUSU Anna
  Professeur : Mme Bachschmidt, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg
- ✓ FLIELLER Jean-Baptiste et SUVANTO Elias
  Professeurs : Mme Stupfler et M. Rongemaille, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

Palmarès des Terminales 2016

Prix exceptionnel

- ✓ HECQUET Théo et MATHIEN Joffrey
  Professeur : Mme Grethen, Lycée Henri Meck, Molsheim

Premier prix

- ✓ BOEGLER Céline et MISCHLER Jacques
  Professeur : M. Richter, Lycée André Maurois, Bischwiller

- ✓ ALBERTINI Pierre et KOERPER Jérémy
  Professeur : M. Ottobrini, Lycée Don Bosco, Landser

- ✓ MUNIER Nathanaël et VIX Pierre
  Professeur : Mme Reich, Lycée Blaise Pascal, Colmar

- ✓ MOENCH Nicolas
  Professeur : Mme Meynier, Lycée Freppel, Obernai

- ✓ DEGROOTE Aymeric et GRISLIN Sarah
  Professeurs : M. Dreyfus et Mme Weyland, Lycée Français Jean Monnet, Bruxelles

Deuxième prix

- ✓ HUFFENUS Grégory et RUSTENHOLZ Louis
  Professeur : Mme Weber, Lycée Henri Meck, Molsheim

- ✓ BRÜGGEMANN Tonio et KUHN Théotime
  Professeur : M. Schwartz, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ MARCZYK Timothée et SACCUCCI Marie
  Professeur : M. Elophe, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ DE VILLEROCHE Alexis et MENARD Timothé
  Professeur : Mme Lestaevel, Lycée Rochambeau, Washington

- ✓ ANDRIAMORAZAFIHANTA Nivina et STREICHER Joaquim
  Professeur : Mme Jaeger, Lycée Frédéric Kirschleger, Munster

Troisième prix

- ✓ GITZ Pierre et MEYER Johan
  Professeur : M. Rongemaille, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ BURKHART Edgar Pierre et SOUFFLET Nathan
  Professeur : Mme Rehlinger, Lycée Blaise Pascal, Colmar

- ✓ EUSTACHE Apolline et SABBAGH Mathieu
  Professeur : Mme Collette, Lycée Français Vauban, Luxembourg

- ✓ HASSLER Thomas et PETERSCHMITT Enyo
  Professeur : Mme Guth, Lycée Scheurer Kestner, Thann

- ✓ PELLICIOLI Clément
  Professeur : M. Audéoud, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 2016
44ème édition

PREMIERES
Mercredi 23 mars 2016

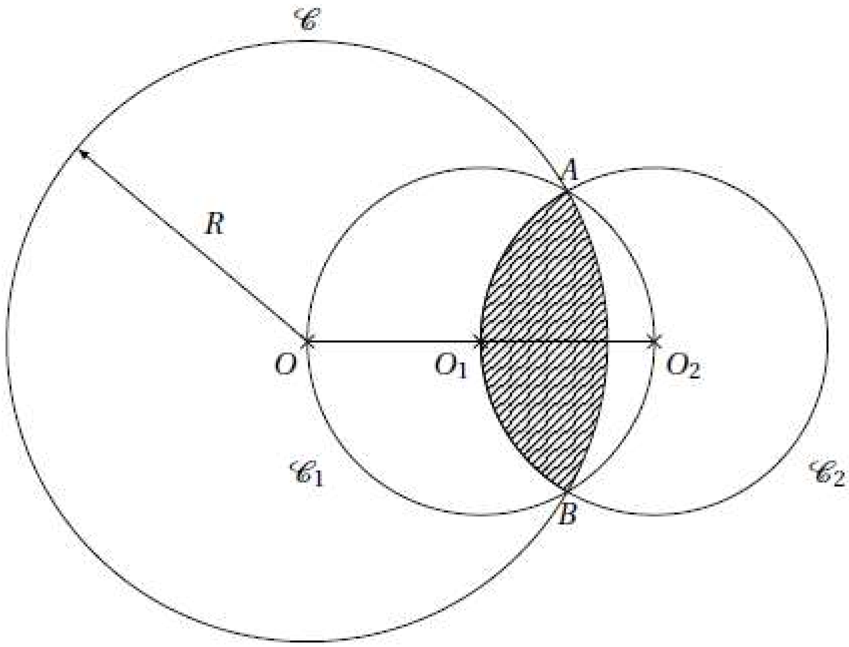
Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également de manière très lisible leur adresse postale et leur mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

Il est strictement interdit d'utiliser un téléphone portable, une tablette, un ordinateur personnel ou disponible dans la salle de classe. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 :
Combien y a-t-il de nombres multiples de 9 comportant des chiffres tous distincts et tous non nuls ?

Exercice 2 :
On donne deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de même rayon, de centres respectifs O_1 et O_2.
$\mathscr{C}_1$ passe par O_2 et $\mathscr{C}_2$ passe par O_1. Ces deux cercles sont sécants en A et B.
O est le point tel que O_1 est le milieu de $[OO_2]$.
$\mathscr{C}$ est le cercle de centre O passant par A et B. On note R le rayon du cercle $\mathscr{C}$.



Calculer l'aire de la partie hachurée en fonction de R.

Exercice 3 :
Un concours comportait vingt questions numérotées de 1 à 20.
$17\,712$ personnes ont participé. Il se trouve que l'on constate qu'aucun participant n'a répondu juste à deux questions consécutives.
Peut-on affirmer que deux candidats au moins ont répondu de la même manière au questionnaire, c'est-à-dire juste aux mêmes questions et faux aux mêmes questions ?

RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 2016
44ème édition

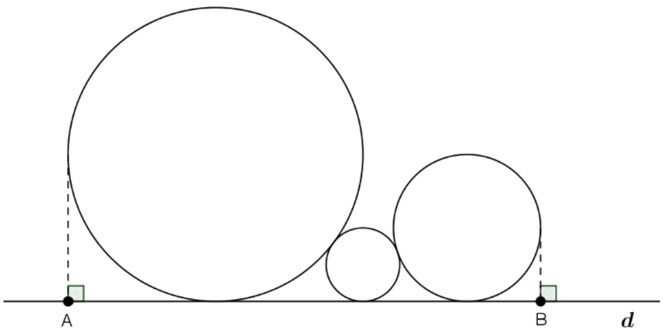
TERMINALES
Mercredi 2 mars 2016

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également de manière très lisible leur adresse postale et leur mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

Il est strictement interdit d'utiliser un téléphone portable, une tablette, un ordinateur personnel ou disponible dans la salle de classe. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 :
Trois pièces de monnaie circulaires, de rayon $1\ cm$, $4\ cm$ et $x\ cm$ $(1 \leq x \leq 4)$ sont tangentes entre elles et tangentes à une règle (que l'on assimilera à une droite d).
A et B sont les points d'intersection des tangentes aux deux cercles extérieurs et perpendiculaires à la droite d comme l'indique le dessin ci-dessous :



Comment disposer ces pièces pour que la distance AB soit la plus petite possible ?

Exercice 2 :
L'organisateur d'un jeu décide de désigner le gagnant de la manière suivante :
Les candidats, numérotés de 1 à n, sont disposés en cercle et rangés dans l'ordre de leur numéro et dans le sens des aiguilles d'une montre. Le jeu commence par le joueur n°1 qui dit « gagné », puis le suivant dit « perdu » et ainsi de suite en alternant les deux réponses. Tout candidat qui dit « perdu » est éliminé et quitte le cercle. Le jeu se poursuit jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul joueur qui est le gagnant.

Quel est le numéro du gagnant dans le cas où $n = 16$?
Quel est le numéro du gagnant dans le cas où $n = 44$?
Quel est le numéro du gagnant dans le cas où $n = 2016$?

Exercice 3 :
1. Montrer que pour $n \geq 3$ l'équation :
$$1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}$$
admet au moins une solution en nombres entiers strictement positifs, tous différents.
2. Donner deux solutions distinctes pour $n = 4$.
3. Démontrer que le nombre de solutions augmente strictement avec n.

Commentaires pour le Rallye Mathématique d'Alsace 2016

Cette année, 355 binômes représentant 375 élèves de première et 335 élèves de terminale (il y avait des monômes) ont participé aux épreuves du Rallye. La participation est donc en baisse par rapport à l'année précédente (qui avait connu une très forte augmentation).

Nous sommes heureux de constater que les élèves font preuve de connaissances et d'initiatives, et que les méthodes qu'ils utilisent pour résoudre les exercices sont diverses, variées, parfois rédigées avec une très grande rigueur. Ceci est très encourageant pour les lycéens de l'académie.

En première, le premier prix exceptionnel a donné une solution parfaite des trois exercices (avec une erreur minime).
Le premier prix a très bien résolu deux exercices et bien compris le troisième.
Les deuxièmes prix ont en général très bien traité un exercice et donné de bonnes idées sur l'un au moins des deux autres.
Les troisièmes prix ont bien résolu un exercice et à peine abordé les autres.

En terminale, le prix exceptionnel a donné une solution parfaite de tous les exercices.
Les premiers prix ont donné une solution complète de deux exercices et fourni des éléments corrects dans l'autre ou bien avancé dans les trois exercices.
Les deuxièmes prix ont fourni une solution parfaite d'un exercice et de bons éléments dans les deux autres.
Les troisièmes prix ont très bien traité un exercice et à peine abordé les deux autres ou ont donné des éléments intéressants sur les trois exercices.

Pour chacun des exercices, nous joignons à ce rapport une résolution qui nous a semblé pertinente, choisie parmi les bonnes solutions rencontrées.

Compte–rendu de l'épreuve de Première

Les candidats à l'épreuve du Rallye Mathématique d'Alsace de Première avaient trois exercices à traiter durant quatre heures. Dans le premier exercice on demandait de dénombrer les multiples de 9 qui avaient une particularité donnée. Le deuxième exercice portait sur le calcul de l'aire d'une zone délimitée par trois cercles. Dans le troisième exercice il fallait trouver si l'on était sûr que deux candidats aient pu répondre de la même manière à un questionnaire.

Chacun des exercices est résolu correctement dans des copies.

Exercice 1 : Le critère de divisibilité par 9 n'est pas mentionné dans toutes les copies : il était impossible de traiter cet exercice sans avoir cette connaissance… Un certain nombre de candidats s'arrêtent au milieu de leur recherche (alors qu'elle était bien initiée). Pour ceux qui arrivent au bout, on notera quelques raisonnements très efficaces.
Quelques rares élèves ont souhaité donner un algorithme pour résoudre cet exercice : ils ont bien précisé qu'ils n'avaient pas pu le faire tourner (au bout de 2h30 la calculatrice ne donnait toujours pas de solution, ou alors il était trop long à entrer dans la machine). Ces algorithmes ne présentaient aucun intérêt : ils ne faisaient que tester tous les entiers naturels jusqu'à $999\,999\,999$ et ne s'appuyaient sur aucun raisonnement.

Exercice 2 : Cet exercice de géométrie a motivé de nombreux candidats. Il fallait calculer le rayon des deux petits cercles en fonction de R et voir par quel moyen calculer l'aire du domaine qui n'avait pas une forme géométrique habituelle. Des candidats expliquent très clairement leur raisonnement, étape par étape, figures à l'appui. On constate une très belle technicité calculatoire dans quelque copies. Un certain nombre de candidats admettent des propriétés de la figure sans les démontrer.

Exercice 3 : Cet exercice a plu aux candidats. Nombreux sont ceux qui remarquent la suite de Fibonacci et donnent donc la réponse après avoir calculé des termes successifs de cette suite. Il ne fallait pas se contenter de la remarquer, mais bien démontrer comment elle apparaissait. Il y a eu des justifications avec des suites (trois suites), ou avec un arbre de dénombrement bien expliqué.

Compte–rendu de l'épreuve de Terminale

L'épreuve du Rallye Mathématique d'Alsace de Terminale comprend, comme à l'habitude, trois exercices. Dans le premier exercice on demandait de trouver comment disposer trois pièces de monnaie circulaires afin de minimiser une certaine distance. Le deuxième exercice proposait de déterminer le gagnant d'un jeu dont les candidats étaient éliminés selon un processus donné. Le troisième exercice portait sur les fractions égyptiennes.

Les énoncés ont été relativement bien compris. Les candidats ont très rarement cherché une solution à l'aide d'un algorithme, contrairement à l'année dernière. Chacun des exercices est résolu correctement dans des copies.

Exercice 1 : Cet exercice n'a pas eu autant de succès que nous l'espérions : les élèves paraissent moins à l'aise face à un énoncé qui fait place à la géométrie. Dans les copies où cet exercice est abordé, on constate que nombre de candidats se présentent à l'épreuve sans matériel de dessin : ni règle, ni compas ! Plusieurs candidats se contentent de faire des dessins puis du bricolage, mais pas de calculs. Lorsque les distances sont bien calculées, c'est leur comparaison qui manque parfois de rigueur.

Exercice 2 : Cet exercice a connu un très grand succès : presque toutes les copies en proposent une solution ! Les copies sont riches de raisonnements divers.
Les cas $n = 16$ et $n = 44$ sont bien faits (nous avions mis ces premiers cas simples afin que les candidats testent des petites valeurs de n, notre crainte étant qu'ils ne pensent pas à réduire n pour « voir »).
Pour le cas $n = 2016$, le résultat donné est souvent juste, mais parait parfois miraculeux, alors que la réflexion a certainement été correcte : la justification est insuffisante dans beaucoup de copies.

Exercice 3 : La première question est très mal comprise, à de rares exceptions près. En effet les candidats se contentent de donner une solution à l'équation pour $n = 3$, alors qu'il fallait montrer l'existence d'une telle solution pour tout $n \geq 3$. La deuxième question est très souvent bien traitée : les solutions données sont diverses. Il y a eu des tentatives pour répondre à la troisième question, mais les propos sont peu convaincants.

Copies des Premières

KREBER Alexandre et WENDLING Christophe
Gymnase Jean Sturm - Strasbourg
Exercice n°1

Tout d'abord, rappelons qu'un multiple de 9 est un nombre dont la somme des chiffres est aussi multiple de 9.

Un nombre multiple de 9 respectant la consigne donnée a également au maximum 9 chiffres sinon quoi il y aurait répétition ou apparition d'un zéro.

• <u>Les multiples de 9 à 9 chiffres</u>

La somme des chiffres de 1 à 9 est égale à 45 qui est multiple de 9.
Ainsi tout nombre composé des chiffres 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 et 9 est multiple de 9, quelque soit l'ordre des chiffres. N'importe lequel de ces nombres respecte la condition énoncé.
Il y a 9! nombres multiples de 9 à 9 chiffres

• Les multiples de 9 à 8 chiffres.

La série initiale est :

1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 et 9.

Les multiples de 9 à 8 chiffres comprennent tous ces chiffres sauf 1 ; et leur somme doit être multiple de 9. Il faut donc éliminer toujours
de la série 1 chiffre multiple de 9 : 9.
Les chiffres composants les multiples de 9 à 8 chiffres sont donc, sans soucis d'ordre :
1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 et 8.
Il y a 8! possibilités

• Les multiples de 9 à 7 chiffres

Nous devons retrancher 2 chiffres à la série initiale et la somme de ces 2 chiffres doit être multiple de 9 pour que la série reste (après formation d'un nombre) multiple de 9.

Il n'y a qu'une possibilité, la somme des deux chiffres doit faire 9. Pour cela, il y a 4 possibilités : 8 et 1
7 et 2
6 et 3
5 et 4.

À chaque fois il y a 7! possibilités de nombre à former. Le nombre de multiples de 9 à 7 chiffres est 4 x 7!.

• Les multiples de 9 à 6 chiffres.

Il faut retrancher 3 chiffres à la série initiale
La somme de ces 3 chiffres doit être égale
à un multiple de 9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9 au total	X	X				X			
	X		X		X				
		X	X	X					
18 au total.			X			X			X
				X	X				X
	X							X	X
		X					X		X
				X		X		X	
			X				X	X	
					X	X	X		

Il y a 10 possibilités. A chaque fois, il y a 6! nombres possibles. Le nombre de multiples de 9 à 6 chiffres est 10 × 6 !

• Multiples de 9 à 1 chiffre.

Il y en a 1 (9).

• Multiples de 9 à 2 chiffres

D'après la table de 9, il y en a 8.

• Multiples de 9 à 5 chiffres

Il faut retrancher 4 chiffres à la série initiale, et la somme des 4 chiffres est un multiple de 9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
total de 27			x				x	x	x
				x		x		x	x
					x	x	x		x
total de 18	x	x				x			x
	x		x		x				x
	x	x					x	x	
	x		x			x		x	
	x			x	x			x	
		x	x		x			x	
		x	x	x					x
	x			x		x	x		
		x	x			x	x		
		x		x	x		x		
			x	x	x	x			

Il y a 14 possibilités et 5! de nombres à chaque fois

Il y a 14 x 5! multiples de 9 à 5 chiffres.

• Multiples de 9 à 3 chiffres.

Il faut retrancher 6 chiffres à la série initiale.
La somme de ces 6 chiffres doit être un multiple de 9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
total de 36	x				x	x	x	x	x
			x	x	x		x	x	x
		x		x		x	x	x	x
total de 27	x	x	x	x				x	x
	x	x	x		x		x		x
	x	x		x	x		x	x	
		x	x	x	x	x	x		
	x		x	x	x	x		x	
	x	x	x			x	x	x	
	x	x		x	x	x			x

Il y a 10 possibilités de retranchement. Il y a $10 \times 3!$ nombres respectant la condition à 3 chiffres

• Multiples de 9 à 4 chiffres.

Pour cette partie, le tableau est très complexe. Il y a cependant 14 possibilités.

Il y a $14 \times 4!$ nombres à 4 chiffres respectant la conditions.

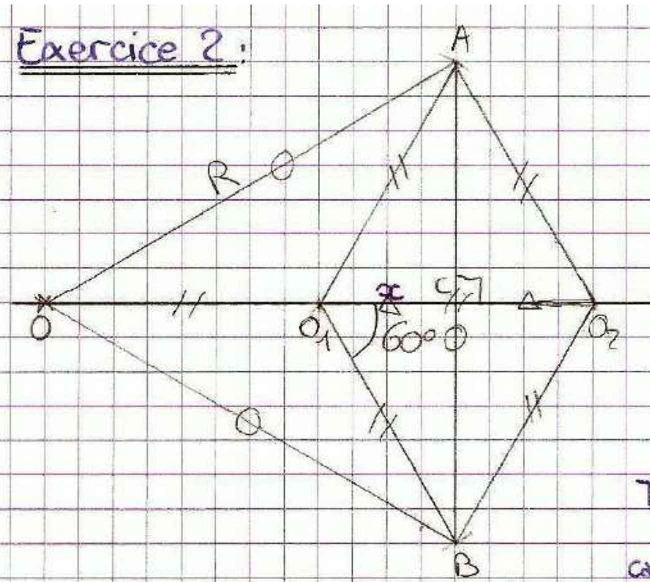
Avec cette méthode, nous évitons les répétitions et les 0.

La réponse au problème est égale à

$$9! + 8! + 4 \times 7! + 10 \times 6! + 1 + 8 + 14 \times 5! + 10 \times 3! + 14 \times 4! = 432\,645.$$

HAMMANN Jean-Baptiste et TURLURE Emilie
Lycée Leclerc - Saverne
Exercice n°2

Exercice 2 :



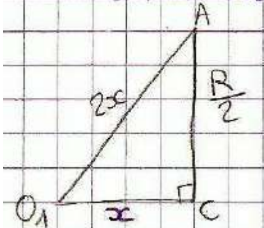
$[O_1A]$ et $[O_1B]$ sont égaux car ce sont des rayons du même cercle.

$[O_2A]$ et $[O_2B]$ sont égaux car ce sont des rayons du même cercle.

Toutes les longueurs sont donc égales car les 2 cercles ont le même rayon.

Donc O_1O_2B est un triangle équilatéral ainsi $\widehat{O_2O_1B} = 60°$ donc $\widehat{OO_1B} = 120°$. Sur le même principe $\widehat{OO_1A} = 120°$ ainsi que $\widehat{AO_1B}$.

On en déduit OBA est un triangle équilatéral.



D'après Pythagore $(2x)^2 = x^2 + \frac{R^2}{4}$

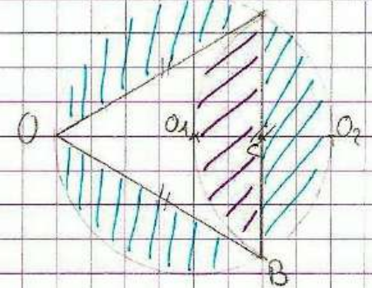
$$4x^2 = x^2 + \frac{R^2}{4}$$

$$3x^2 = \frac{R^2}{4}$$

$$x^2 = \frac{R^2}{12}$$

$$x = \frac{R}{\sqrt{12}} = \frac{R}{2\sqrt{3}}$$

Donc le rayon des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ est $\frac{R}{\sqrt{3}}$.



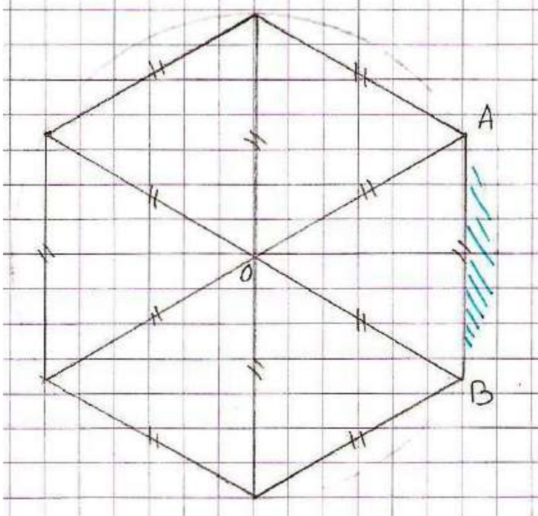
Pour calculer l'aire de /// qui est égale à une aire ///, on soustrait l'aire du triangle à l'aire du cercle, le tout divisé par 3.

$$\mathcal{A}_{\mathcal{C}} = \frac{\pi R^2}{3} \qquad \mathcal{A}_{triangle} = \frac{R \times \left(\frac{R}{\sqrt{3}} + \frac{R}{2\sqrt{3}}\right)}{2} = \frac{3R^2}{4\sqrt{3}}$$

$$\mathcal{A}ire_{///} = \left(\frac{\pi R^2}{3} - \frac{3R^2}{4\sqrt{3}}\right) \times \frac{1}{3} = \left(\frac{\pi R^2}{3} - \frac{\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}}{3}\right) \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{R^2}{3}\left(\pi - 3\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{R^2}{9}\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$



Comme OAB est un triangle équilatéral, on peut construire un hexagone inscrit dans le cercle avec comme sommets A et B.

Pour trouver l'aire ///, on soustrait l'aire de l'hexagone à l'aire du cercle puis on divise le tout par 6.

$$\text{Aire}_{\text{hexagone}} = \frac{3R^2}{4\sqrt{3}} \times 6 = \frac{9R^2}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{Aire}_{\mathscr{C}} = \pi R^2$$

$$\text{Aire}_{///} = \left(\pi R^2 - \frac{9R^2}{2\sqrt{3}}\right) \times \frac{1}{6} = \frac{R^2(2\pi\sqrt{3}-9)}{2\sqrt{3}} \times \frac{1}{6} = \frac{R^2(2\pi\sqrt{3}-9)}{12\sqrt{3}}$$

Pour obtenir l'aire de la zone hachurée, on additionne les aires /// et ≋.

$$\text{Aire} = \frac{R^2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}{9} + \frac{R^2(2\pi\sqrt{3}-9)}{12\sqrt{3}}$$

$$= R^2\left(\frac{\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{4}}{9} + \frac{2\pi\sqrt{3}-9}{12\sqrt{3}}\right)$$

$$= R^2\left(\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{36} + \frac{2\pi\sqrt{3}-9}{12\sqrt{3}}\right)$$

$$= R^2\left(\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{36} + \frac{6\pi-9\sqrt{3}}{36}\right)$$

$$= R^2\left(\frac{4\pi-3\sqrt{3}+6\pi-9\sqrt{3}}{36}\right)$$

$$= R^2\left(\frac{10\pi-12\sqrt{3}}{36}\right)$$

$$= R^2\left(\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{18}\right)$$

Donc l'aire de la partie hachurée est $R^2\left(\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{18}\right)$.

Exercice n°3
KASTNER Mallory et MARC-ZWECKER Mateo
Lycée International des Pontonniers - Strasbourg

Exercice 3 : Observons les petits cas :

Pour une question, il n'y a que deux possibilités, juste ou faux $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

Pour deux questions, il y a :

F	F	V	1re question
F	V	F	2e question

trois possibilités

Pour trois questions, il y a :

F	V	F	V	F
F	F	F	F	V
F	F	V	V	F

Cinq possibilités

On remarque que par rapport à la situation précédente, on a pu mettre un vrai ou un faux par-dessus s'il y avait un faux à la première question. Par contre s'il y avait un vrai, on est obligé de mettre faux. Avec une question de plus, il y aura donc autant de possibilités commençant par un faux que de possibilités totales avec une question de moins. Il y aura autant de possibilités commençant par un juste que de possibilités commençant par un faux avec une question de moins, c'est à dire autant que de possibilités totales avec encore une question de moins.

Soit u la suite qui à u_n donne le nombre de possibilités.

On a donc la relation de récurrence double $u_n = \underbrace{u_{n-1}}_{\text{possibilités commençant par un faux}} + \underbrace{u_{n-2}}_{\text{possibilités commençant par un juste}}$

Ici la suite a pour termes initiaux $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 3 \end{cases}$

La suite $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 3 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \end{cases}$ a pour termes :

$u_1 = 2$

$u_2 = 3$

$u_3 = 5$

$u_4 = 8$

$u_5 = 13$

$u_6 = 21$

$u_7 = 34$

$u_8 = 55$

$u_9 = 89$

$u_{10} = 144$

$u_{11} = 233$

$u_{12} = 377$

$u_{13} = 610$

$u_{14} = 987$

$u_{15} = 1597$

$u_{16} = 2584$

$u_{17} = 4181$

$u_{18} = 6765$

$u_{19} = 10346$

$u_{20} = 17711$

Il y a donc 17711 possibilités différentes et 17712 participants, soit plus de participants que de possibilités différentes. On peut donc affirmer qu'au moins deux candidats ont répondu de la même manière

Copies des Terminales

MUNIER Nathanaël et VIX Pierre
Lycée Blaise Pascal - Colmar

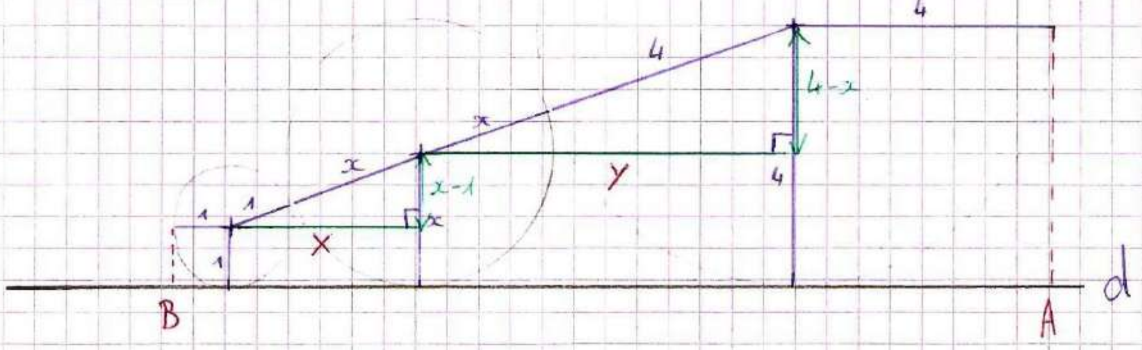
Exercice n°1

Il y a 6 possibilités pour regrouper les pièces dans un ordre :

1 – X – 4
1 – 4 – X
4 – X – 1
4 – 1 – X
X – 1 – 4
X – 4 – 1

or les combinaisons suivantes sont par paires car si on les reflètent par symétrie ils sont les même donc AB aura la même distance pour ces couples

1^er^ cas : 1 – X – 4 ou 4 – X – 1



$AB_1 = 1 + X + Y + 4$

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$X^2 = (1+x)^2 - (x-1)^2$

$X^2 = \cancel{1} + 2x + x^2 - x^2 + 2x - \cancel{1}$

$X^2 = 4x$

$\Leftrightarrow X = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$y^2 = (x+4)^2 - (4-x)^2$$

$$y^2 = \cancel{x^2} + 8x + \cancel{16} - \cancel{16} + 8x - \cancel{x^2}$$

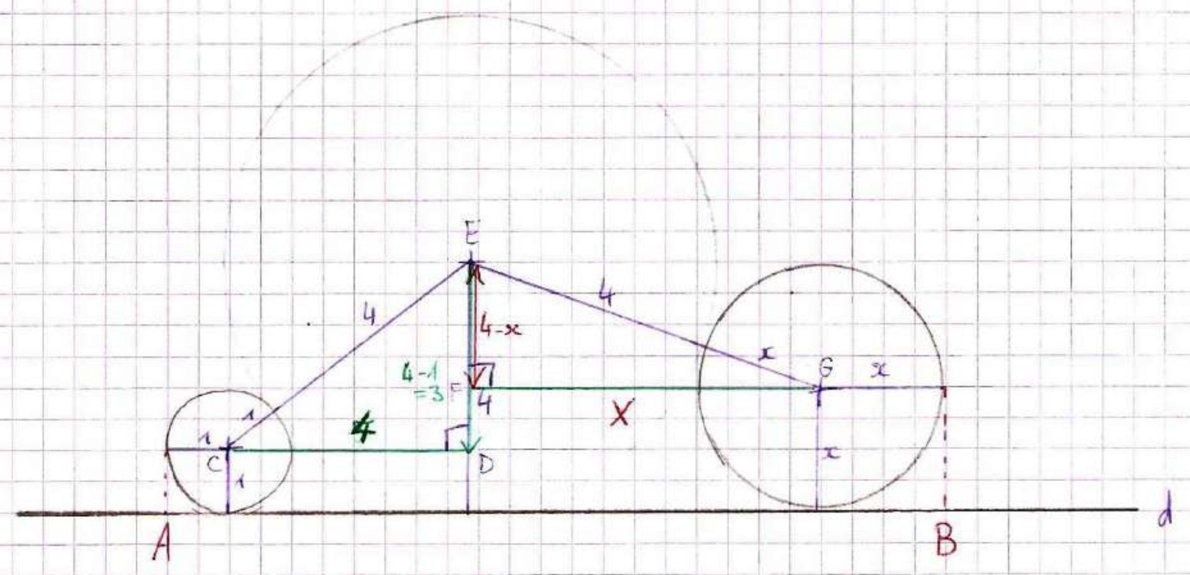
$$y^2 = 16x$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{16x} = 4\sqrt{x}$$

Donc $AB_1 = 1 + 2\sqrt{x} + 4\sqrt{x} + 4$

$AB_1 = \boxed{5 + 6\sqrt{x}}$

<u>2ème cas :</u> $1 - 4 - X$ ou $X - 4 - 1$



$AB_2 = 1 + 4 + X + x$ car le triangle CDE est un triangle rectangle 3-4-5

D'après le théorème de Pythagore dans EFG

$$X^2 = (4+x)^2 - (4-x)^2$$

$$X^2 = \cancel{16} + 8x + \cancel{x^2} - \cancel{16} + 8x - \cancel{x^2}$$

$$X^2 = 16x \quad \text{d'où } X = 4\sqrt{x}$$

$AB_2 = 1 + 4 + 4\sqrt{x} + x$

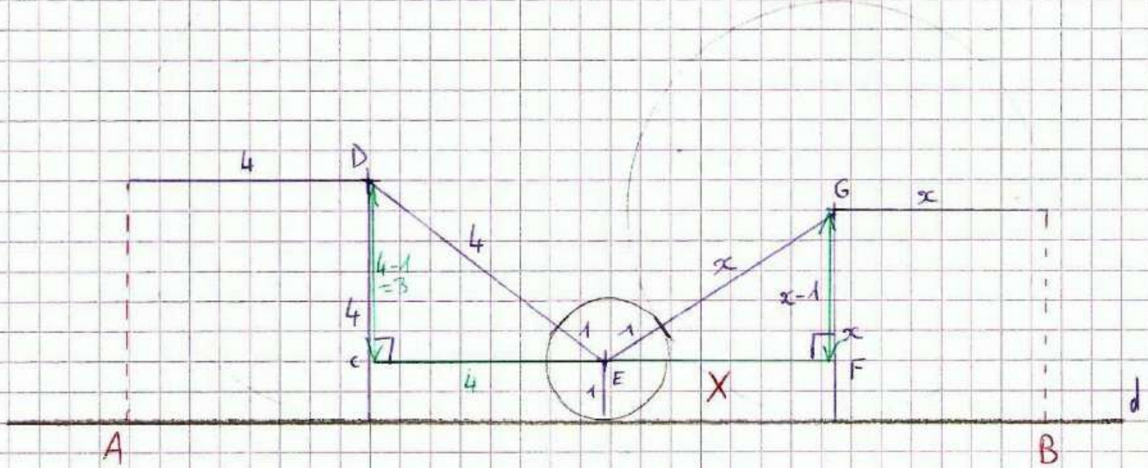
$AB_2 = \boxed{5 + x + 4\sqrt{x}}$

$3^{ème}$ cas : $4-1-X$ ou $X-1-4$

$AB_3 = 4+4+X+x$ car le triangle CDE est un triangle rectangle 3-4-5

D'après le théorème de Pythagore dans EFG

$$X^2 = (1+x)^2 - (x-1)^2 = 4x \text{ (d'après le 1}^{er}\text{ cas)}$$



Donc $X = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$

Donc $AB_3 = 4+4+2\sqrt{x}+x$

$$= \boxed{8+x+2\sqrt{x}}$$

Déterminons pour quelles valeurs de n comprises entre 1 et 4 tel que $AB_2 \geqslant AB_1$

$\Leftrightarrow AB_2 - AB_1 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow 5+x+4\sqrt{x} - (5+6\sqrt{x}) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-2) \geqslant 0$

$\sqrt{x} \geqslant 0 \quad \forall x \in [1;4]$

$\sqrt{x} - 2 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} \geqslant 2$

$\Leftrightarrow x \geqslant 4$ donc $\sqrt{x}-2 \leqslant 0$ sur $[1;4]$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-2) \leqslant 0$ sur $[1;4]$

donc $AB_2 - AB_1 \leq 0$ sur $[1;4]$

donc $AB_2 \leqslant AB_1 \quad \forall x \in [1;4]$

On procède de même pour trouver la position relative de AB_1 par rapport à AB_3 et entre AB_2 et AB_3 :

$AB_1 - AB_3 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow 5+6\sqrt{x} - (8+x+2\sqrt{x}) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow -3 - x + 4\sqrt{x} \geqslant 0$

on pose $X = \sqrt{x}$ donc

$\Leftrightarrow -X^2 + 4X - 3 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow X \geqslant 1$ et $X \leqslant 3$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} \geqslant 1$ et $\sqrt{x} \leqslant 3$

$\Leftrightarrow x \geqslant 1$ et $x \leqslant 9$

donc $AB_1 \geqslant AB_3$

$\forall x \in [1;4]$

$AB_3 - AB_2 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow 8+x+2\sqrt{x} - (5+x+4\sqrt{x}) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{x} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} \leqslant 3$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} \leqslant \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x \leqslant \frac{9}{4}$

donc $AB_3 \geqslant AB_2 \quad \forall x \in [1;\frac{9}{4}]$

et $AB_3 \leqslant AB_2 \quad \forall x \in [\frac{9}{4};4]$

$AB_1 \geqslant AB_2$ et $AB_1 \geqslant AB_3 \quad \forall x \in [1;4]$

donc le 1^{er} cas n'est jamais le meilleur pour obtenir la plus petite distance AB

$AB_3 \geqslant AB_2 \quad \forall x \in [1;\frac{9}{4}]$

Donc le $2^{ème}$ cas $(1-4-X)$ est le meilleur pour x compris en 1 et $\frac{9}{4}$ et le $3^{ème}$ cas $(4-1-X)$ est le meilleur pour x compris entre $\frac{9}{4}$ et 4.

BOEGLER Céline et MISCHLER Jacques
Lycée André Maurois - Bischwiller
Exercice n°2

Pour résoudre cet exercice, on étudie chaque tour du jeu en ne gardant pour le tour suivant que les gagnants.

Etant donné qu'un joueur sur deux perd, si le nombre de candidats au début d'un tour est pair, alors il ne restera en tour suivant que la moitié des joueurs.
De plus si le premier gagne, comme le nombre de joueurs est pair, le dernier candidat du tour perdra. De même si le premier perd, le dernier gagne.

Si le nombre de candidats au début d'un tour est impair, on peut se retrouver dans deux situations :

Si le premier gagne, le dernier gagne. Il reste alors :
$\frac{\text{nombre de joueurs} + 1}{2}$ candidats

Si le premier perd, le dernier perd. Il reste alors
$\frac{\text{nombre de joueurs} - 1}{2}$ candidats

De plus, si le dernier joueur d'un tour perd, le premier du tour suivant gagnera,
si le dernier joueur d'un tour gagne, le premier du tour suivant perdra.

$\boxed{n = 16}$

(énoncé)

1er Tour : 16 participants → 1er gagne, dernier perd
→ Tous les nombres pairs sont éliminés, donc il reste les nombres sous la forme $2k + 1$ (avec $0 \leq k < 8$ et k un entier naturel)

2e Tour : 8 participants → 1er gagne, dernier perd
→ On peut les diviser en 2 groupes : les 2^2k+1 et les 2^2k+3
Or le premier gagnant $2\times0+1 = 2^2\times0+1$
donc les gagnants sont de la forme 2^2k+1 $\quad 0 \leq k < 4$

3e Tour : 4 participants → 1er gagne, dernier perd
→ On peut les diviser en 2 groupes : les 2^3k+1 et les 2^3k+5
Or le 1er gagne et $2^2\times0+1 = 2^3\times0+1$
donc les gagnants sont de la forme 2^3k+1 $\quad 0 \leq k < 2$

9e Tour : 2 participants → 1er gagne, dernier perd

→ on a les 2^4k+1 et les 2^4k+9

or 1er gagne et $2^3 \times 0+1 = 2^4 \times 0+1$

donc gagnants de la forme : 2^4k+1 $0 \leq k < 1$

Donc il ne reste que le gagnant tel que

$1 \leq 2^4k+1 < 16$

donc $k=0$

donc le gagnant est le numéro $2^4 \times 0+1$

soit le numéro 1

$\boxed{n = 44}$ On suit la même méthode (P = Perd ; G = Gagne)

Numéro du Tour	Nombre de participants au début du tour	1er	dernier	Forme des gagnants	Nombre restant de participants à la fin du tour
1	44	G	P	$2k+1$	22
2	22	G	P	2^2k+1	11
3	11	G	G	2^3k+1	$\frac{11+1}{2} = 6$
4	6	P	G	$\boxed{\begin{array}{l} * \; 2^4k+2^3+1 \\ = 2^4k+9 \end{array}}$	3
5	3	P	P	2^5k+2^4+9 $= 2^5k+25$	1

* Car le 1er perd donc la forme 2^4k+9 l'emporte sur la forme 2^4k+1 qui est celle des perdants du tour

Donc il ne reste que le gagnant tel que

$1 \leq 2^5k+9 < 44$

donc $k=0$

donc le gagnant est le numéro $2^5 \times 0+25$

soit le numéro 25

$\boxed{n = 2016}$ On suit la même méthode

numéro du tour	nbre de participants au début du tour	1er	dernier	forme des gagnants	nbre de participants restant à la fin du tour
1	2016	g	p	$2k+1$	1008
2	1008	g	p	2^2k+1	504
3	504	g	p	2^3k+1	252
4	252	g	p	2^4k+1	126
5	126	g	p	2^5k+1	63
6	63	g	g	2^6k+1	$\frac{63+1}{2}=32$
7	32	p	g	2^7k+1+2^6 $=2^7k+65$	16
8	16	p	g	$2^8k+65+2^7$ $=2^8k+193$	8
9	8	p	g	$2^9k+193+2^8$ $=2^9k+449$	4
10	4	p	g	$2^{10}k+449+2^9$ $=2^{10}k+961$	2
11	2	p	g	$2^{11}k+961+2^{10}$ $=2^{11}k+1985$	1

Donc il ne reste que le gagnant tel que

$1 \leqslant 2^{11}k+1985 \leqslant 2016$ avec $k \geqslant 0$

donc $k=0$

donc le gagnant est le numéro $2^{11}\times 0+1985$

$=\underline{1985}$

HECQUET Théo et MATHIEN Joffrey
Lycée Henri Meck - Molsheim
Exercice n°3

1. Tout d'abord, démontrons l'existance de l'unique solution pour $n=3$.
On rappelle que $x_n \in \mathbb{N}^*$. En outre, $x_n \neq 1$ car si $x_n = 1$, $\frac{1}{x_n} = 1$, et l'ajout de nouveaux termes de la forme $\frac{1}{x_n}$, strictement positifs, feraient que la somme serait supérieure à 1

Pour $n=3$:

- si l'on n'utilise pas $\frac{1}{2}$, alors la somme maximale sera $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} < 1$
- si l'on n'utilise pas $\frac{1}{3}$ alors la somme maximale sera $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} < 1$

Pour $n=3$, il faut donc utiliser $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$. L'unique solution est alors
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6} = 1$

Démontrons qu'à partir de cette somme, pour tout $n \geq 4$, on peut à nouveau créer une décomposition :
Les termes $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ seront toujours conservés.
Il s'agit alors de décomposer $\frac{1}{6}$, qui est de la forme $\frac{1}{2k}$, $k \in \mathbb{N}^*$ et différent de 1.

Alors : $\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2} = \frac{2k+2-2k}{2k(2k+2)} = \frac{2}{4k^2+4k} = \frac{1}{2k^2+2k} = \frac{1}{2(k^2+k)}$

Tout nombre de la forme $\frac{1}{2k}$ peut donc au moins se décomposer d'une manière en $\frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2(k^2+k)}$. De plus, $2k+2$ et $2(k^2+k)$ sont forcément différents des dénominateurs déjà utilisés car plus grand, différents l'un de l'autre ($2k+2 = 2k^2+2k \iff k^2=1 \Rightarrow k=1$, ce qui a été exclu).

(au moins vrai avec le plus grand déno

et permettrons forcément une nouvelle décomposition, car eux-même sont pairs, donc de la forme $2k$, $k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

Il existe donc toujours au moins une solution pour $n \geqslant 3$.

2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = 1$ - H y a Y

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = 1$

3. On a démontré en 1. qu'il y a au moins autant de solution à l'étape n et à l'étape n+1. Démontrons qu'il en existe une autre.

À partir de $\frac{1}{2k}$ de l'étape n ($2k$ le plus grand dénominateur trouvé), on réalise la décomposition $\frac{1}{2k+4} + \frac{4}{2k(2k+4)} = \frac{1}{2k+4} + \frac{1}{k^2+2k}$

Si $2k+4 = k^2+\cancel{2k}$ alors $k=2$ et $2k+4=8$.

Or, le nombre $\frac{1}{8}$ est rencontré, selon notre méthode, à $n=4$, n'est pas le plus grand dénominateur. De plus, les dénominateurs nouvellement obtenus sont toujours plus grand. On ne rencontrera donc plus $\frac{1}{8}$ selon cette méthode.

Elle fonctionne donc, et, d'une étape à l'autre, on ajoute donc au moins une solution. (CQFD)