**Institut
de recherche
sur l'enseignement
des mathématiques
IREM**

Rallye

Rallye
2017

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

académie Strasbourg

Ministère
de l'Éducation nationale

Ministère
de l'Enseignement supérieur
et de la Recherche

Rapport du 45ème Rallye Mathématique d'Alsace

CONSEIL DÉPARTEMENTAL
BAS-RHIN

CASIO

**UFR de mathématique
et d'informatique**
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
Tél. : (33) 03 68 85 01 30
Fax : (33) 03 68 85 01 65
Bibliothèque : (33) 03 68 85 61 01
http://irem.u-strasbg.fr
irem@math.u-strasbg.fr

IREM de Strasbourg

IREM de
Strasbourg

Sommaire

Présentation du Rallye Mathématique d'Alsace

Comité organisateur : Claudine KAHN, Christel BERNHARDT, Pascal MALINGREY
Jean-Claude SABBAN

Le Rallye Mathématique d'Alsace, organisé par l'IREM de Strasbourg, s'est déroulé pour la 45ème fois en 2017. Crée en 1973, le Rallye Mathématique d'Alsace est la plus ancienne compétition mathématique de France.

Directement inspiré des Olympiades Internationales, il s'adresse à tous les élèves volontaires de l'Académie de Strasbourg et des établissements à l'étranger qui lui sont rattachés (Luxembourg, Copenhague, Belgrade, Berlin, Düsseldorf, Francfort, Fribourg, Hambourg, Munich, Oslo, Sofia, Stockholm, Vienne) ainsi que d'autres partenaires de notre IREM (Washington et Zurich).

Tous les élèves des classes de Première et de Terminale sont prévenus de l'existence du Rallye et de ses modalités. Chacun peut consulter les rapports contenant les sujets, les corrigés, les commentaires ainsi que les palmarès des années précédentes. Ils sont disponibles sur le site de l'IREM (http://mathinfo.unistra.fr/irem/rallye-mathematique-dalsace). Les inscriptions se font sur la base du **volontariat** et les épreuves se déroulent sur le **temps libre** des candidats.

Cette compétition comprend deux épreuves : l'une concerne les élèves de Première, l'autre ceux de Terminale ; elle a réuni environ 700 participants dont 80 de l'étranger.

Les candidats sont amenés à résoudre, pendant quatre heures, individuellement ou par équipes de deux (formule généralement retenue) trois problèmes originaux faisant appel à leurs connaissances bien sûr, mais essentiellement au raisonnement et à leurs capacités inventives.

Les sujets sont très différents de ceux proposés dans l'évaluation traditionnelle. Ils font davantage appel à l'intuition, à l'aspect ludique de la recherche qu'à une suite de connaissances utilisées de manière algorithmique ou répétitive. Les énoncés sont souvent courts, rédigés de manière non scolaire et présentés parfois sous forme d'énigmes ; ils ne contiennent aucune indication de méthode et ne précisent pas le champ de connaissances mises en jeu.

L'objectif est de donner aux élèves l'occasion de faire des mathématiques autrement. Ils peuvent alors réinvestir leur savoir scientifique dans un cadre inhabituel pour eux. Nous développons ainsi leur curiosité, le sens du travail en équipe, le goût pour la recherche. Nous participons ainsi à la promotion de notre discipline auprès des jeunes, des enseignants, des décideurs, de nos partenaires et des médias.

Le Rallye permet aux professeurs des lycées de proposer dans leurs classes, grâce aux rapports des années précédentes, des activités scientifiques différentes de l'entraînement usuel : traduction d'un énoncé en langage mathématique, recherche d'outils possibles, résolution, rédaction d'une solution avec le souci d'une argumentation précise et rigoureuse.

Les élèves, au départ parfois un peu déconcertés par ces énoncés où la démarche n'est pas imposée, trouvent du plaisir à élaborer une construction intellectuelle et par là même gagnent en autonomie de pensée. L'élaboration des sujets suppose une bonne maîtrise de la didactique des mathématiques : l'IREM fournit les éléments nécessaires à ce travail.
Avec la participation au concours commence une série d'activités, extra-scolaires souvent, qui aiguisent la curiosité mathématique des jeunes, encouragent leur esprit d'initiative et créent un climat favorable à l'ouverture culturelle. Cette incitation au développement de la culture scientifique s'inscrit entièrement dans le cadre des directives actuelles à ce sujet.

En Première, vingt-et-un binômes sont primés : trois prix exceptionnels, six premiers prix, sept deuxièmes prix et cinq troisièmes prix.

En Terminale, dix-huit binômes et un monôme ont été sélectionnés : un prix exceptionnel, six premiers prix, huit deuxièmes prix et quatre troisièmes prix.

Nous renvoyons à la suite de ce rapport pour des commentaires plus détaillés sur les exercices.

La remise des prix a lieu au Conseil Départemental du Bas-Rhin. Elle est suivie d'une réception en l'honneur des lauréats à l'Hôtel du Département.

Remerciements

Nous remercions vivement les donateurs qui nous permettent de récompenser les lauréats par des livres, des calculatrices, du matériel informatique, des entrées aux musées et aux parcs d'activités pour fêter la 45ème édition :

- ◊ L'Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques de Strasbourg
- ◊ L'Université de Strasbourg
- ◊ L'UFR de Mathématique et d'Informatique
- ◊ L'IREM de Strasbourg
- ◊ L'A.P.M.E.P.
- ◊ Le Conseil Départemental du Bas-Rhin
- ◊ Le Conseil Départemental du Haut-Rhin
- ◊ La Ville d'Altkirch
- ◊ La Ville de Barr
- ◊ La Ville de Bischwiller
- ◊ La Ville d'Obernai
- ◊ La Ville de St Louis
- ◊ La Ville de Saverne
- ◊ La société CASIO
- ◊ Les Musées de la Ville de Colmar
- ◊ Le Musée du Pétrole de Pechelbronn
- ◊ L'équipe du Lac Blanc
- ◊ La Cité du train de Mulhouse
- ◊ Le Musée Théodore Deck de Guebwiller
- ◊ Le Musée EDF Electropolis de Mulhouse

Nous remercions tout particulièrement le Conseil Départemental du Bas-Rhin pour son soutien et la mise à disposition de la salle des séances plénières pour la cérémonie de remise des prix.

A tous les lauréats du Rallye Mathématique d'Alsace de Première

Le Rallye Mathématique d'Alsace
et
ANIMATH (Association pour l'animation des Mathématiques)

Vous proposent de participer à des stages de préparation aux Olympiades Internationales de Mathématiques.

Pour obtenir des informations sur toutes les activités proposées, vous pouvez consulter le site d'Animath **:** http://www.animath.fr

Nous vous souhaitons une bonne poursuite mathématique de vos études.

Palmarès des Premières 2017

Prix exceptionnel

- ✓ BANIADAM Hosna et FREDRICH Yvon
  Professeur : M. Matt, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ BENNEWITZ Emil et SVOMINEN Joonas
  Professeur : M. Kientz, Lycée Franco-Allemand, Fribourg

- ✓ PLOETZE Yan et WEISSGERBER Anaëlle
  Professeur : M. Daumail, Lycée Koeberlé, Sélestat

Premier prix

- ✓ CORCELLUT Nathan et FELDER Ludovic
  Professeurs : Mme Barthelme et Mme David-Metzmeyer, Lycée Yourcenar, Erstein

- ✓ FELDMANN Lea et TÖTSCHNIG Agnes
  Professeur : M. Brévart, Lycée Français, Berlin

- ✓ LITSIOS Nina et NAUD Martin
  Professeur : M. Gosset, Lycée Français, Zürich

- ✓ BOSSANNE Florian et BRENNER Alexandre
  Professeur : Mme Hamman, Lycée Kléber, Strasbourg

- ✓ HEBRAS Benjamin et WEISSROCK Edgard
  Professeur : Mme Mariani, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ LONNI Pierre et TASTEPER Abdullah
  Professeurs : Mme Mariani et Mme Stupfler, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

Deuxième prix

- ✓ HAUBER Guillaume et PELLICIOLI Simon
  Professeur : Mme Bachschmidt, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ BRABANT Pierre et KIMMEL Hugo
  Professeurs : Mme Bechel et M. Dillinger, Lycée Français Vauban, Luxembourg

- ✓ BERNARD Caroline et LE BOISSELIER Arthur
  Professeur : Mme Stern, Lycée Kléber, Strasbourg

- ✓ BOURSEUL Madeleine et GALICHET Faustine
  Professeur : M. Ottobrini, Lycée Don Bosco, Landser

- ✓ WILHELM Laetitia et TOURNANT Agathe
  Professeur : M. Gosset, Lycée Français, Zürich

- ✓ MESSÉ Marine et ZWIERSKI Margaux
  Professeur : M. Gosset, Lycée Français, Zürich

- ✓ GITZ Thimotée et SCHMITT Benjamin
  Professeur : Mme Samama, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

Troisième prix

- ✓ BRAS Philipp et CAULET Justine
  Professeur : M. Bolli, Lycée Kastler, Guebwiller

- ✓ ACIKGOZ Rayan et BELHOUARI Jaad
  Professeurs : M. Bailal et M. Tahar, Lycée Pasteur, Strasbourg

- ✓ ANTROPIUS Simon et LONPRET Thibault
  Professeur : M. Ottobrini, Lycée Don Bosco, Landser

- ✓ ALEXANDRE Léane et DUSCH Océane
  Professeur : Mme Turlure, Lycée Leclerc, Saverne

- ✓ KIEFFER Baptiste et KREMMEL Fanny
  Professeur : Mme Thiriet, Lycée Leclerc, Saverne

Palmarès des Terminales 2017

Prix exceptionnel

- ✓ HAMMANN Jean-Baptiste et TURLURE Emilie
  Professeur : M. Harel, Lycée Leclerc, Saverne

Premier prix

- ✓ KRECZMAN Savinien et RAKOVSKY Martin
  Professeur : Mme Collette-Clerbaut, Lycée Français Vauban, Luxembourg
- ✓ DE CARPENTIER Gonzague et HEMEURY François
  Professeur : M. Bourgeois, Lycée Français, Düsseldorf
- ✓ DESOMBRE Augustin et MASSON Corentin
  Professeur : Mme Collet, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg
- ✓ BAVANT Guillaume et GODFROID Sara
  Professeur : M. Vilmen, Lycée Koeberlé, Sélestat
- ✓ TRAUTMANN Ludovic
  Professeur : Mme Cerciat, Lycée Henri Meck, Molsheim
- ✓ DORN Diego et ROMEROWSKI Florian
  Professeur : M. Malingrey, Lycée Marie Curie, Strasbourg

Deuxième prix

- ✓ LAURENT Louis et MORLOT Adrien
  Professeur : M. Nou, Lycée Français Vauban, Luxembourg
- ✓ KREBER Alexandre et WENDLING Christophe
  Professeur : Mme Collet, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg
- ✓ DOLLINGER Elsa et POURAILLY Justine
  Professeurs : M. Audeoud et Mme Collet, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg
- ✓ BILBAULT Anthony et DAHMANI Maxime
  Professeur : M. Schwartz, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg
- ✓ HECKMANN Thibaut et HOENEN Johan
  Professeurs : M. Alati et M. Audeoud, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg
- ✓ KASTNER Mallory et MARC-ZWECKER Mateo
  Professeurs : Mme Scheurer et M. Schwartz, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg
- ✓ LEGER Clémentine et PORTHA Timothée
  Professeur : M. Fréchard, Lycée Montaigne, Mulhouse
- ✓ COLLIN Elisa et JUNGGEBURTH Louise
  Professeurs : M. Pévotin et M. Duthil, Lycée Français, Berlin

Troisième prix

- ✓ GASSER Axel et SIMON Quentin
  Professeur : Mme Guth, Lycée Scheurer-Kestner, Thann

- ✓ PAUMIER Sylvain et THOMAS Axel
  Professeur : Mme Guth, Lycée Scheurer-Kestner, Thann

- ✓ LADDI-GALIMONT Juliette et SCHIELLEIN Jonathan
  Professeur : M. Cattelin, Lycée Leclerc, Saverne

- ✓ KAPPS Augustin et MULLER Arnaud
  Professeur : Mme Wachtel, Lycée Mermoz, Saint-Louis

RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 2017
45ème édition

PREMIERES
Mercredi 29 mars 2017

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également de manière très lisible leur adresse postale et leur mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

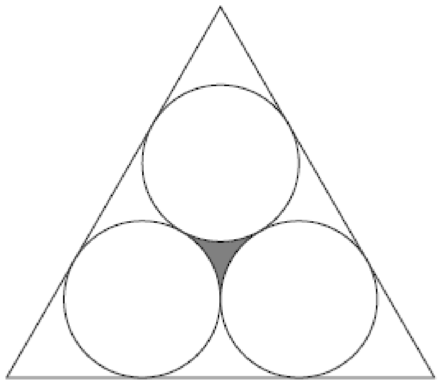
Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

Il est strictement interdit d'utiliser un téléphone portable, une tablette, un ordinateur personnel ou disponible dans la salle de classe. L'usage de la calculatrice est autorisé.

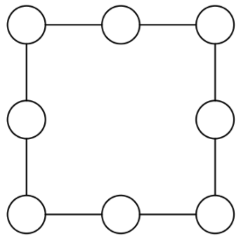
Exercice 1 :
Deux peintres sont chargés de peindre les plaques de numérotation des maisons de la rue principale d'une ville qui compte moins de $1\,000$ maisons. Les deux peintres travaillent à des vitesses différentes : pendant que l'un peint 4 chiffres, l'autre en peint 5. C'est pourquoi ils ont décidé de procéder de la manière suivante : le moins rapide commence par les premiers numéros $(1, 2, 3, \ldots)$ et l'autre par les derniers.
Ils terminent de peindre leur dernière plaque en même temps et, coïncidence, chacun a peint exactement le même nombre de plaques. Combien de maisons y a-t-il dans la rue principale ?

Exercice 2 :
Sur la figure ci-contre, le triangle est équilatéral de côté x.
Les trois cercles ont le même rayon et sont tangents deux à deux et tangents aux côtés du triangle.

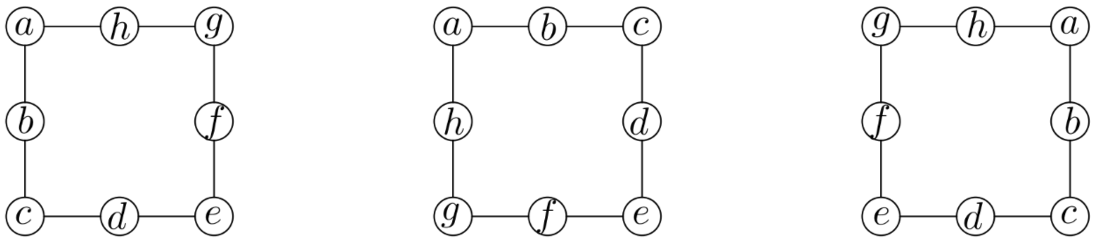
Calculer l'aire de la partie grisée en fonction de x.



Exercice 3 :
Est-il possible de placer tous les nombres entiers de 1 à 8 dans l'un des cercles de sorte que la somme des trois nombres de chaque côté du carré soit toujours la même ?
Si oui, donner toutes les solutions possibles.



Remarque : les solutions suivantes sont dites équivalentes et ne comptent que pour une solution :



RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 2017
45ème édition

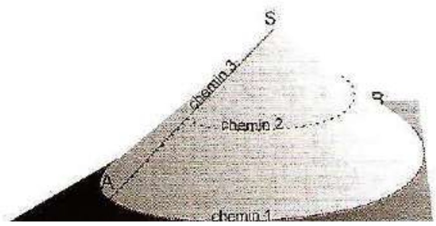
TERMINALES
Mercredi 8 mars 2017

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également de manière très lisible leur adresse postale et leur mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

Il est strictement interdit d'utiliser un téléphone portable, une tablette, un ordinateur personnel ou disponible dans la salle de classe. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 :
Un cône de révolution dont le rayon de la base est 1 et la hauteur h est donné.
Les points A et B, diamétralement opposés sur la base du cône, peuvent être reliés par trois types de chemins comme indiqués sur la figure :



- le premier contourne la base ;
- le deuxième monte vers le sommet S, tourne autour du cône à l'altitude x et redescend vers B ;
- le troisième passe par le sommet S.

Quel est le plus court des trois chemins reliant A et B ?
Existe-t-il un chemin plus court que les trois proposés reliant A et B ?

Exercice 2 :
Dans une entreprise, un nouveau programme a été mis au point. Cinq ingénieurs vont l'exploiter.
Il y a deux impératifs, le secret et l'efficacité :
- aucun ingénieur, ou groupe de deux ingénieurs, ne doit à lui seul connaître l'intégralité du programme ;
- le programme doit pouvoir tourner malgré l'absence éventuelle d'un ou de deux ingénieurs.

On divise donc le programme en un certain nombre de sous-programmes, de telle façon que deux ingénieurs ne puissent jamais accéder à l'intégralité du programme, mais que trois quelconques le puissent.
Combien de sous-programmes sont-ils nécessaires, et comment faut-il les affecter aux ingénieurs ?

Exercice 3 :
On construit un triangle comme ci-dessous mais avec les nombres de 1 à 2017 sur la première ligne.
À partir de la deuxième ligne chaque nombre est la somme des deux nombres situés au-dessus de lui.
Quel nombre aura-t-on sur la dernière ligne ?

1 2 3 …

3 5

8

Commentaires pour le Rallye Mathématique d'Alsace 2017

Cette année, 354 binômes représentant 428 élèves de première et 280 élèves de terminale (il y avait aussi quelques monômes) ont participé aux épreuves du Rallye.
La participation est donc identique à l'année précédente

Nous sommes heureux de constater que les élèves font preuve de connaissances et d'initiatives, et que les méthodes qu'ils utilisent pour résoudre les exercices sont diverses, variées, parfois très originales. Ceci est très encourageant pour les lycéens de l'académie. Par contre nous sommes choqués face à une orthographe de plus en plus déficiente (on peut trouver dans certaines copies un même mot écrit trois fois avec trois orthographes différentes !). Nous regrettons que les élèves qui simplifient leurs calculs soient devenus si rares. Enfin, nous relevons que trop d'élèves n'apportent aucun soin à la présentation de leur travail : il y a des ratures à toutes les lignes, les instruments de construction tels que la règle et le compas ne sont pas utilisés : les figures sont tracées à main levée.
C'est d'autant plus dommage que la qualité mathématique des copies est souvent d'un très bon niveau, que les exercices sont abordés par un nombre important de candidats et que les méthodes proposées ont parfois fait l'admiration de l'équipe des correcteurs.

En première, le prix exceptionnel a donné une solution parfaite à deux exercices et une bonne démarche dans le troisième.
Les premiers prix ont très bien résolu deux exercices et à peine abordé le troisième ou ont donné des éléments très corrects dans les trois exercices.
Les deuxièmes prix ont en général très bien traité un exercice et donné de bonnes idées dans les deux autres ou ont bien avancé dans les trois exercices.
Les troisièmes prix ont bien résolu un exercice ou ont donné beaucoup d'éléments dans deux exercices.

En terminale, le prix exceptionnel a donné une solution parfaite de tous les exercices.
Les premiers prix ont donné une solution exacte aux trois exercices ou à deux exercices et ont très bien avancé dans le troisième.
Les deuxièmes prix ont très bien résolu un exercice et ont très bien avancé dans l'un au moins des deux autres.
Les troisièmes prix ont un exercice correctement traité et ont donné quelques idées dans les deux autres.

Pour chacun des exercices, nous joignons à ce rapport une résolution qui nous a semblé pertinente, choisie parmi les bonnes solutions rencontrées. Nous avons également présenté un algorithme pour l'un des exercices de première.

Compte–rendu de l'épreuve de Première

Les candidats à l'épreuve du Rallye Mathématique d'Alsace de Première avaient trois exercices à traiter durant quatre heures. Dans le premier exercice, il était question d'un nombre de plaques peintes par deux peintres qui travaillent à des vitesses différentes. Le deuxième exercice portait sur le calcul de l'aire d'une zone délimitée par un triangle et trois cercles. Dans le troisième exercice il s'agissait de placer les entiers de 1 à 8 sur une figure qui devait vérifier une propriété donnée.

Chacun des exercices est résolu correctement dans des copies.

Exercice 1 : La solution est assez souvent donnée. Dans les résolutions correctes, on a vu un algorithme efficace, et plusieurs binômes qui ont posé et résolu des équations. Dans un grand nombre de copies, les élèves ont affirmé sans justification qu'il y avait plus de 100 maisons dans la rue. Un certain nombre d'élèves procède par tâtonnements successifs pour trouver la solution. Dans quelques copies il y a un nombre beaucoup trop important d'inconnues choisies.
Cet énoncé a été bien compris dans l'ensemble.

Exercice 2 : Nous avons été surpris par le fait que la quasi-totalité des candidats affirmait à tort que le rayon de l'un des cercles valait $x \div 6$! Très rares sont ceux qui calculent correctement le rayon d'un cercle en fonction de x, et quand les calculs sont justes ils ne sont pas simplifiés. Plusieurs binômes ont laissé le rayon dans leur calcul jusqu'à la fin, sans chercher à le calculer.

Exercice 3 : Dans quasiment toutes les copies il y a au moins une solution. La somme commune est souvent encadrée, soit entre 11 et 16, soit entre 11 et 21. Beaucoup de solutions sont données sans aucune explication. De rares copies donnent la solution complète à l'exercice, et on a vu quelques résolutions originales.

Compte–rendu de l’épreuve de Terminale

L’épreuve du Rallye Mathématique d’Alsace de Terminale comprend, comme à l’habitude, trois exercices. Dans le premier exercice il s’agissait de trouver le plus court chemin parmi trois donnés pour joindre deux points sur un cône de révolution. Le deuxième exercice proposait de déterminer en combien de parties il fallait diviser un programme pour répondre à certaines contraintes. Le troisième exercice portait sur une construction à partir des nombres entiers de 1 à 2017.

Les exercices ont été bien compris et bien abordés, en particulier le premier et le dernier. On peut noter la persévérance et l’originalité de beaucoup d’élèves. Les copies sont riches dans l’ensemble. Chacun des exercices est résolu correctement dans des copies.

Exercice 1 : Nous avons été agréablement surpris par la bonne volonté des élèves pour faire des calculs, calculs qui sont souvent corrects. Les théorèmes de géométrie sont bien appliqués. Les trois chemins sont compris, les élèves ont vu que les chemins un et trois étaient des positions extrêmes du deuxième chemin et que la variable était x (et pas h). Les calculs sont justes, mais on peut regretter qu’ils ne soient pas toujours simplifiés. La comparaison des trois chemins est moins bien traitée. Quant à un autre chemin plus court que les trois donnés, les réponses sont presque toujours fausses et surprenantes.
Cet exercice a eu beaucoup de succès : il a été cherché par tous les binômes.

Exercice 2 : Beaucoup de binômes ont mentionné $\binom{5}{3}$ ou $\binom{5}{2}$. On a trouvé des tableaux clairement construits pour expliquer qu’avec dix sous-programmes l’ensemble des contraintes étaient respectées. Un seul binôme a prouvé qu’il fallait au moins dix sous-programmes.

Exercice 3 : Les candidats ont de bonnes idées, très diverses. Les conjectures sont souvent correctes, mais plus rarement bien démontrées. On a vu de bonnes récurrences. Cet exercice semble avoir plu aux candidats. Nous avons été impressionnés par l’efficacité de certaines méthodes.

Copies des Premières

MESSÉ Marine et ZWIERSKI Margaux
Lycée Français, Zürich
Exercice n°1

Exercice 1 :

Les deux peintres ont peint le même nombre de plaques, mais pas le même nombre de chiffres (les chiffres sont les composants des numéros des plaques : par exemple, sur la plaque 110, il y a 3 chiffres).

Le peintre A peint 4 chiffres alors que le peintre B en peint 5.

Soit n_A le nombre total de chiffres peints par A

n_B le nombre total de chiffres peints par B.

Par conséquent, on a : $4n_B = 5n_A$.

9 chiffres au total pour ce type de plaque. / Tout d'abord, il y a des plaques à 1 chiffre. Il y a 9 plaques à 1 chiffre (du n°1 au n°9).

Ensuite, il y a des plaques à 2 chiffres : il y en a 90 (du n°10 au n°99). Le nombre de chiffres de toutes ces plaques est donc de $90 \times 2 = 180$.

Enfin, il y a des plaques à 3 chiffres (il y a moins de 1000 plaques en tout). Pour x plaques à 3 chiffres il y a donc $3x$ chiffres.

On sait que n_A est un multiple de 4 : c'est donc un nombre pair. Cela signifie que A va forcément peindre des plaques à 3 chiffres* car s'il ne peignait que des plaques à 1 et 2 chiffres, le nombre de chiffres qu'il aurait peint serait de la forme $9+2x$, ce qui est un nombre impair.

*A commence par les plaques à 1 chiffre.

On en déduit que B commence par des plaques à 3 chiffres et ne peindra que des plaques à 3 chiffres, donc que n_B est divisible par 3.

De plus, si A peint des plaques à 3 chiffres, il peindra au moins 192 chiffres : si on prend le total de chiffres sur les plaques à 1 et 2 chiffres on a $9+180=189$ chiffres. A peindra au moins une plaque à 3 chiffres donc au moins $189+3=192$ chiffres.

De tout cela, on déduit que le nombre de plaques peintes par B est de $\frac{n_B}{3}$, et que le nombre de plaques peintes par A est de $99+\frac{n_A-189}{3}$ (189 étant le nombre de chiffres total des 99 plaques à 1 et 2 chiffres).

D'où l'équation suivante : $\frac{n_B}{3}=99+\frac{n_A-189}{3} \Leftrightarrow n_B=297+n_A-189$

$\Leftrightarrow n_B=n_A+108.$

Or on sait que $4n_B=5n_A$.

D'où le système suivant : $\begin{cases} n_B=n_A+108 \\ 4n_B=5n_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4n_B=4n_A+432. \\ 4n_B=5n_A \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5n_A=4n_A+432 \\ n_B=n_A+108. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} n_A=432 \\ n_B=432+108=540. \end{cases}$

A a donc peint 432 chiffres, et B a peint 540 chiffres.

Par conséquent, A a peint $99+\frac{432-189}{3}=99+\frac{243}{3}=99+81=180$ plaques et B a peint $\frac{540}{3}=180$ plaques. De plus $180+180=360$.

Il y a donc, au total, 360 plaques, c'est-à-dire 360 maisons sur la rue principale.

LONNI Pierre et TASTEPER Abdullah
Gymnase Jean Sturm - Strasbourg
Exercice n°1 (résolution à l'aide d'un algorithme)

Definition et initialisation des variables :

m = 0 , le nombre de maisons
nbchiffres = 0 , le nombre de chiffres total des maisons.
l = 0 , le nombre de maisons peintes par le peintre lent.
nbchiffreslent = 0 , le nombre de chiffres peints par le peintre lent
nb chiffresrapide = 0 , le " " " " " rapide

Traitement :

Tant que m < 999 :

m = m + 2 // le nombre de maison doit être pair car un peintre peint autant de l'autre
Si m ≤ 9 :
| nbchiffres = m

Si 10 ≤ m ≤ 99 // nous cherchons les nombres de chiffres par maison
| nbchiffres = (m - 9) x 2 + 9

Si 100 ≤ m ≤ 999
| nbchiffres = (m - 99) x 3 + 189

l = m / 2 // le peintre lent peint autant que le peintre rapide
Si l ≤ 9
| nbchiffreslent = l

Si 10 ≤ l ≤ 99
| nb chiffreslent = (l - 9) x 2 + 9

Si $100 \leq l \leq 999$

| nbchiffreslent = $(l - 99) \times 3 + 189$.

nbchiffresrapide = nbchiffres - nbchiffreslent.

Si nbchiffreslent = nbchiffresrapide $\times \frac{1}{5}$

| Afficher M.

PLOETZE Yan et WEISSGERBER Anaëlle
Lycée Koeberlé, Sélestat
Exercice n°2

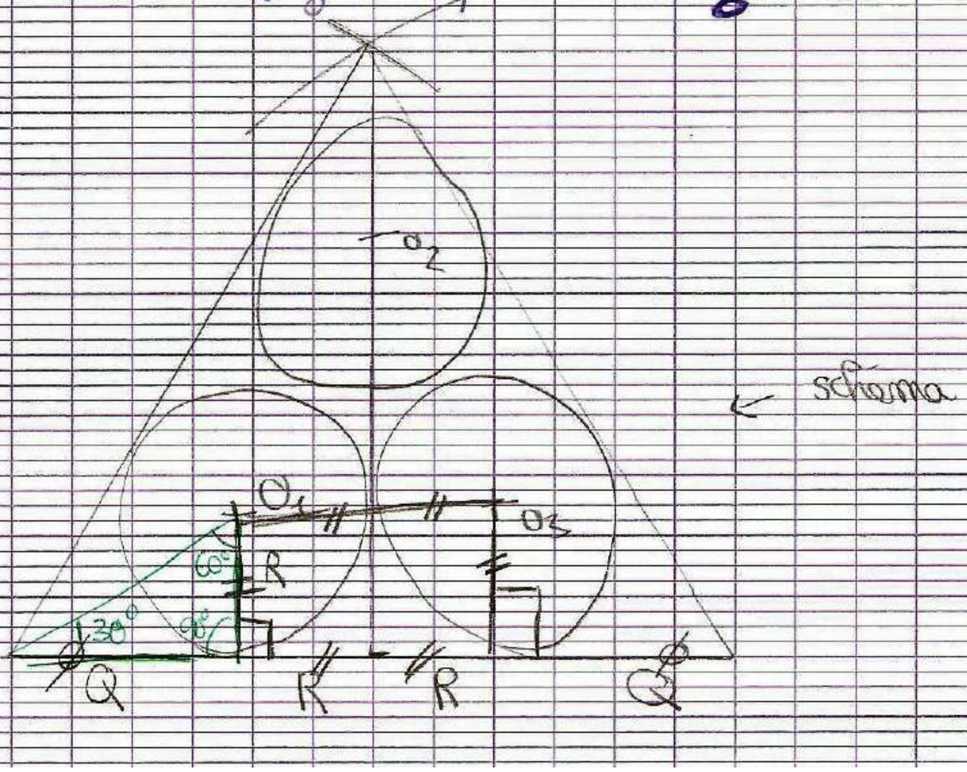
On appelle P le triangle de côté x
Le triangle L est le triangle qui relie le centre des 3 cercles. Il est équilatéral, car les rayons sont identiques.

$$\mathcal{A}_P = 2 \times \frac{\frac{x}{2} \times \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}}}{2} = \frac{x}{2} \times \sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{4}\right)}$$

$$= \frac{x}{2} \times x \times \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times x^2$$

La surface grisée a pour aire

$\boxed{\mathcal{A}_{\text{surface grisée}} = \mathcal{A}_L - \mathcal{A}_{\frac{1}{2}\text{cercle}}}$ puisque le triangle L est équilatéral et que ses angles équivaut à 60°, du coup chaque morceaux de cercles compris dans le triangle équivaut à $\frac{1}{6}$ d'un cercle.



On cherche à déterminer le rayon, donc R.

x étant un côté $x = 2R + 2Q$, puisque les cercles sont identiques et tangeants.

On se place dans le triangle vert. Le triangle étant rectangle

$$\tan(60) = \frac{Q}{R} = \sqrt{3}$$

$$Q = R\sqrt{3}$$

3/7

$$x = 2R + 2Q$$

$$x = 2R\sqrt{3} + 2R$$

$$x = 2R(1+\sqrt{3})$$

$$\boxed{R = \frac{x}{2(1+\sqrt{3})}}$$

$$A_t = 2 \times \frac{R \times \sqrt{(2R)^2 - R^2}}{2} = R \times \sqrt{4R^2 - R^2}$$

$$= R \times R\sqrt{3} = \left(\frac{x}{2(1+\sqrt{3})}\right)^2 \times \sqrt{3}$$

$$= \frac{x^2 \times \sqrt{3}}{4(1+\sqrt{3})^2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4+12+8\sqrt{3}} = \frac{x^2\sqrt{3}}{16+8\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(x^2\sqrt{3})(16-8\sqrt{3})}{16^2-(64\times 3)} = \frac{16x^2\sqrt{3} - 24x^2}{64} = \boxed{\frac{2x^2\sqrt{3} - 3x^2}{8}}$$

$$\mathcal{A}_{\frac{1}{2}\text{cercle}} = \frac{\pi \times R^2}{2} = \frac{\pi \times x^2}{2 \times 4(1+\sqrt{3})^2} = \frac{x^2\pi}{8(1+3+2\sqrt{3})}$$

$$= \frac{x^2\pi}{32+16\sqrt{3}} = \frac{x^2\pi(32-16\sqrt{3})}{256} = \frac{32x^2\pi - 16\sqrt{3}x^2\pi}{256}$$

$$\boxed{= \frac{2x^2\pi - \sqrt{3}x^2\pi}{16} = \frac{\pi(2x^2 - \sqrt{3}x^2)}{16}}$$

$$\mathcal{A}_{\text{partie grise}} = \frac{2x^2\sqrt{3} - 3x^2}{8} - \frac{\pi(2x^2 - \sqrt{3}x^2)}{16}$$

$$= \frac{4x^2\sqrt{3} - 6x^2 - 2x^2\pi + \sqrt{3}\pi x^2}{16}$$

$$\mathcal{A}_{\text{partie grise}} = \boxed{\frac{x^2(4\sqrt{3} - 6 - 2\pi + \pi\sqrt{3})}{16}}$$

L'aire de la partie grisée, en fonction de x est de :

$$\frac{x^2(4\sqrt{3} - 6 - 2\pi + \pi\sqrt{3})}{16}.$$

* Pour $x = 1$, on trouverait environ $0,0054$.

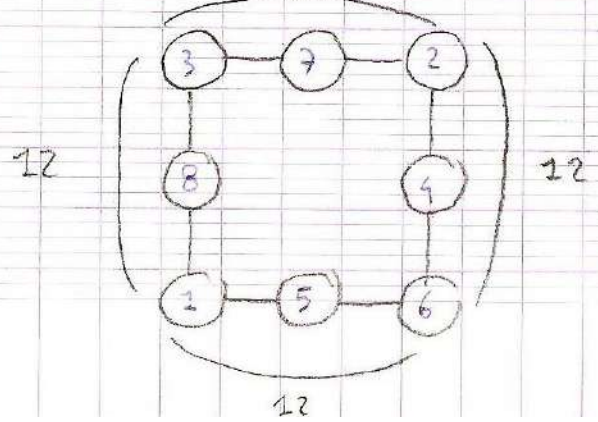
CORCELLUT Nathan et FELDER Ludovic
Lycée Yourcenar, Erstein
Exercice n°3

On doit placer dans les cercles tous les chiffres de 1 à 8 et qui ont pour somme totale $\sum_{i=1}^{8} i = 36$.
Or les coins du carré sont comptabilisés deux fois car ils apparaissent dans deux côtés du carré.

Par exemple, si la somme des quatre coins est égale à 10 (le plus petit possible : 1 + 2+3+4), additionner les sommes des trois valeurs de chacun des quatre côtés donnerait comme résultat 36 + 10 = 46.
Si la somme des coins vaut 26 (le plus grand possible : 5 + 6 + 7 + 8), cette addition donnerait comme résultat 36+26 = 62.

Ensuite, comme on souhaite que la somme des valeurs inscrites dans les cercles soit égale pour chaque côté, il faut que la somme totale de ces sommes soit divisible par 4.

Donc, si la somme des quatres coins est de 12, l'addition des valeurs de chaque côté donne 48 = 4 × 12, chaque côté aurait une valeur de 12.

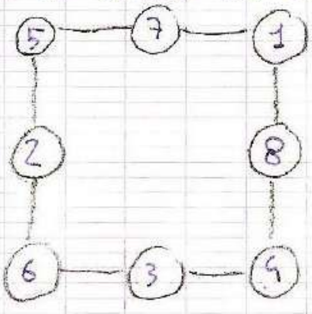


Dans ce carré, chaque côté a une valeur de 12, et la somme des coins est 12.

11/12

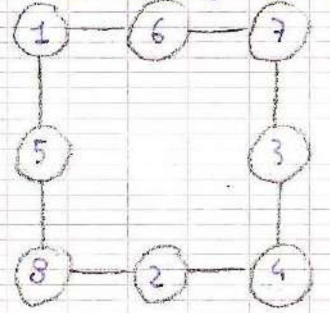
On nommera S la somme des valeurs de chaque côté.

• Si la somme des coins vaut 16, S = 52 (4 x 13) :



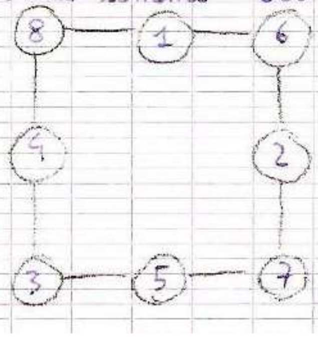
Chaque côté a une valeur de 13

• Si la somme des coins vaut 20, S = 56 (4 x 14)



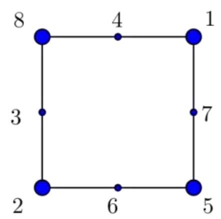
Chaque côté a une valeur de 14

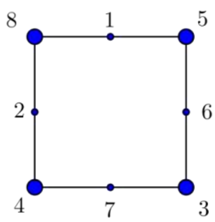
• Si la somme des coins vaut 24, S = 60 (4 x 15)



Chaque côté a une valeur de 15.

NDLR : sur cette copie il manque les deux solutions suivantes :





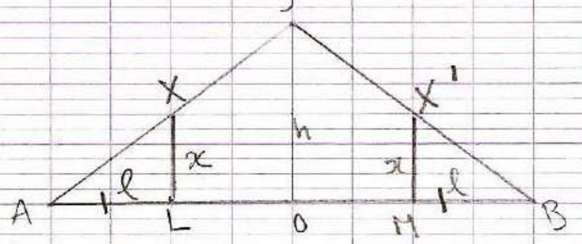
Copies des Terminales

DE CARPENTIER Gonzague et HEMEURY François
Lycée Français, Düsseldorf

Exercice n°1

Commençons par considérer que les premier et troisième chemins (par la suite chemins 1 et 3) ne sont que des cas particuliers du deuxième, où x est respectivement de 0 et h.

Trouver le chemin le plus court revient à chercher le minimum de la fonction donnant la longueur du chemin en fonction de x. Notons cette fonction f (définie sur $[0;h]$), et calculons-la. Dans la suite on prendra $h>0$ car si $h=0$ le chemin le plus court est le segment $[AB]$ passant par $S=O$.



Le schéma ci-dessus représente une section du cône passant par A, B, S et O, le centre de la base du cône. On note X le point où l'on commence à tourner autour du cône et X' celui où l'on commence à redescendre vers B. L est le projeté orthogonal de X sur $[AO]$ et M est le projeté orthogonal de X' sur $[BO]$. x est donc la longueur $XL = X'M$ par symétrie et on note l la longueur $AL = BM$ par symétrie.
On a par ailleurs d'après l'énoncé $AO = BO = 1$.

On peut décomposer le chemin en 3 parties. On monte tout d'abord le long du segment $[AX]$ le long du cône. Puis on parcourt un demi-cercle de rayon $1-l$ le long du cône (pour passer de X à X'). Enfin on redescend le long du segment $[X'B]$. Or le cône est symétrique par rapport à l'axe (OS) (et tous les plans passant par cet axe) donc $AX = BX'$.

On commence par calculer AX. Par définition de L, le triangle ALX est rectangle en L. D'après le théorème de Pythagore on a donc $AX^2 = AL^2 + XL^2 = x^2 + l^2$.
Or on peut calculer l en fonction de x grâce au théorème de Thalès. En effet $(AO) \perp (XL)$ et $(AO) \perp (OS)$ donc $(XL) \parallel (OS)$. D'après le théorème de Thalès on a alors $\frac{AL}{AO} = \frac{XL}{OS} = \frac{x}{h}$ dans le triangle AOS. On en déduit que $l = \frac{x}{h}$.

On a donc $AX^2 = x^2 + l^2 = x^2 + \left(\frac{x}{h}\right)^2 = x^2\left(1 + \frac{1}{h^2}\right)$

On en déduit $AX = X'B = x\sqrt{1+\frac{1}{h^2}}$ car toutes les longueurs sont positives.
On calcule maintenant la longueur a de l'arc de cercle. Le cercle de rayon $1-l$ a un périmètre de $2\pi(1-l)$. Le demi-cercle ayant pour extrémités X et X' est donc de longueur

$$a = \pi(1-l) = \pi\left(1 - \frac{x}{h}\right)$$

Finalement, on en déduit la longueur $f(x)$ totale du chemin en fonction de x :

$$f(x) = AX + a + X'B = 2AX + a$$
$$= 2x\sqrt{1+\frac{1}{h^2}} + \pi\left(1 - \frac{x}{h}\right) = \left(2\sqrt{1+\frac{1}{h^2}} - \frac{\pi}{h}\right)x + \pi$$

sur $[0;h]$

f est donc une fonction affine sur l'intervalle $[0;h]$ et elle est dérivable sur $[0;h]$.

$$f'(x) = 2\sqrt{1+\frac{1}{h^2}} - \frac{\pi}{h}.$$

La fonction f est $\overbrace{\text{croissante}}^{\text{strictement}}$ si, et seulement si, $f'(x) > 0$

soit $2\sqrt{1+\frac{1}{h^2}} > \frac{\pi}{h}$

i.e. $1 + \frac{1}{h^2} > \frac{\pi^2}{4h^2}$ car $2\sqrt{1+\frac{1}{h^2}} > 0$

i.e. $h^2 + 1 > \frac{\pi^2}{4}$

$\Rightarrow h^2 > \frac{\pi^2}{4} - 1$

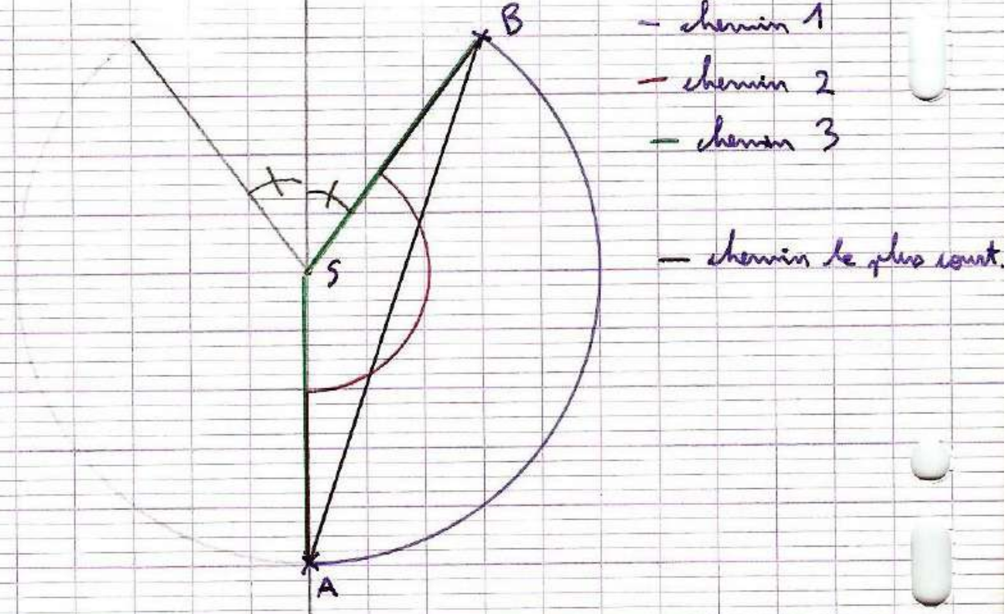
soit $h > \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1} \approx 1,211$

On en déduit que si $h \in \left] \sqrt{\frac{\pi^2}{4}-1} \,; +\infty \right[$, la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; h]$ donc son minimum se trouve en 0. Autrement dit, le chemin 1 est le plus court.

Si $h = \sqrt{\frac{\pi^2}{4}-1}$, on calcule facilement que $f'(x) = 0$ donc que la fonction f est constante. Tous les chemins proposés sont donc de mêmes longueurs.

Enfin, si $h < \sqrt{\frac{\pi^2}{4}-1}$, $f'(x) < 0$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0 ; h]$ et son minimum se trouve en h. Le chemin 3 est alors le plus court.

Cependant il existe au moins un chemin plus court que ceux proposés. En effet traçons le patron d'un cône.



On voit que les points A et B diamétralement opposés sur le cône ne sont pas diamétralement opposés sur le patron. Sur le patron, le chemin le plus court entre A et B est le segment $[AB]$, qui ne correspond à aucun des chemins proposés dans l'énoncé. Lorsqu'on reconstitue le cône en 3 dimensions, la longueur des chemins ne change pas et le chemin noir sur le schéma reste le plus court mais il devient une courbe que nous ne connaissons pas.

KRECZMAN Savinien et RAKOVSKY Martin
Lycée Français Vauban, Luxembourg
Exercice n°2

· On va représenter le problème par un tableau à double entrée. Les 5 ingénieurs seront les colonnes, les sous-programmes seront les lignes. À l'intersection d'une ligne et d'une colonne, on note 1 si l'ingénieur connaît le sous-programme (on note 0 sinon).

· On réécrit les propriétés de secret et d'efficacité sous une forme plus travaillable :

Propriété de secret : Pour toute paire d'ingénieurs, il existe un sous-programme au moins qu'aucun des deux ingénieurs ne connaît pas. Cette propriété est bien équivalente à celle de l'énoncé :

- Si notre propriété est respectée, aucun groupe de deux ingénieurs ne connaît l'intégralité du programme (car chaque groupe de deux ingénieurs a au moins un sous-programme qu'il ne connaît pas)
- Si notre propriété n'est pas respectée, toute paire d'ingénieurs qui ne la respecte pas connaît le programme en entier, et l'énoncé n'est pas respecté.

Propriété d'efficacité : Pour tout sous-programme, il existe au moins ~~deux~~ trois ingénieurs qui le connaissent. Cette propriété est bien équivalente à celle de l'énoncé.

- Si notre propriété est respectée, quels que soient les deux ingénieurs absents, pour tout sous-programme, il restera un ingénieur capable de le faire fonctionner.
- Si notre propriété n'est pas respectée, il existe un sous-programme qui est connu par ~~moins de~~ deux ingénieurs au moins. Si ces deux ingénieurs sont absents, le programme ne peut plus tourner.

N° 1/2

Nous avons donc reformulé nos deux propriétés de manière équivalente.

On va noter $I_1, I_2, \dots, I_5$ les 5 ingénieurs et $S_1, S_2, \dots, S_n$ les sous-programmes. On cherche donc à minimiser n.

On va compter de deux manières différentes le nombre de triplets d'un sous-programme et deux ingénieurs $(S_i; I_j; I_k)$ tels que ni I_j ni I_k ne connaissent S_i. Notons X ce nombre de triplets.

- À toute paire d'ingénieurs $(I_j; I_k)$ est associé au moins un triplet $(S_i; I_j; I_k)$ par la propriété de secret (qui dit que pour toute paire d'ingénieurs, il existe un sous-programme qu'aucun des deux ne connaît, c'est à dire que $\forall I_j; I_k$, $\exists S_i$ tel que $(S_i; I_j; I_k)$ est un triplet que nous comptons).
  Le nombre de triplets est donc supérieur au nombre de paires d'ingénieurs. Ce dernier vaut $\binom{5}{2} = 10$. En effet, on a 5 possibilités pour choisir le premier ingénieur, 4 possibilités restantes pour le deuxième, mais on a compté deux fois chaque paire donc on doit diviser par 2 : le nombre de paires vaut $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.
  On a donc $X \geq 10$.
- Par la propriété d'efficacité, pour tout sous-programme, il y a au moins trois ingénieurs qui le connaissent. Il y a donc au plus deux ingénieurs qui ne le connaissent pas. Il y a au maximum une paire d'ingénieurs qui ne le connaissent pas. À un sous-programme S_i, on peut donc associer au maximum un triplet (S_i, I_j, I_k) de notre comptage. Le nombre de triplets comptés est donc inférieur au nombre n de sous programmes.
  On a donc $X \leq n$.

Les deux inégalités réunies donnent $10 \leq X \leq n \Leftrightarrow 10 \leq n$

Le nombre de sous-programmes est donc au moins égal à 10.

Pour terminer, il suffit de montrer un exemple fonctionnel avec 10 sous-programmes :

N° 2/3

Sous-programme	Ingénieurs 1	2	3	4	5
1	1	1	1	0	0
2	1	1	0	1	0
3	1	0	1	1	0
4	0	1	1	1	0
5	1	1	0	0	1
6	1	0	1	0	1
7	0	1	1	0	1
8	1	0	0	1	1
9	0	1	0	1	1
10	0	0	1	1	1

On vérifie que deux ingénieurs quelconques n'ont jamais accès à l'intégralité du programme, et que le programme peut tourner en l'absence de deux ingénieurs.

10 sous-programmes suffisent donc, et sont nécessaires.

TRAUTMANN Ludovic
Lycée Henri Meck - Molsheim
Exercice n°3

On commence par calculer le début du triangle afin d'émettre des conjectures. On numérotera les colonnes avec les entiers de la première ligne et on numérotera les lignes à partir de 0

	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6 ...
1	3	5	7	9	11 ...	
2	8	12	16	20 ...		
3	20	28	36	...		
	...	...	...			

Rouge : numéro de la colonne (m)

Vert : numéro de la ligne (k).

On cherche à exprimer un coefficient $A_{k,m}$ de la k-ième ligne et de la m-ième colonne en fonction de k et de m.

N°

En observant le début du triangle, on peut émettre les conjectures suivantes

$A_{0,m} = m = 2^0\left(m + \frac{0}{2}\right)$

$A_{1,m} = 2m + 1 = 2\left(m + \frac{1}{2}\right)$

$A_{2,m} = 4m + 4 = 4(m+1) = 4\left(m + \frac{2}{2}\right)$

$A_{3,m} = 8m + 12 = 8\left(m + \frac{3}{2}\right)$

...

À partir de ces observations, on émet la conjecture que $A_{k,m} = 2^k\left(m + \frac{k}{2}\right)$. On peut maintenant démontrer par récurrence que cela est vrai pour tout entier $k \geq 0$

Initialisation : On sait que $A_{0,n} = n$ (les entiers naturels sont écrits dans l'ordre sur la première ligne)
D'autre part : $2^0 \left(n + \frac{0}{2}\right) = n = A_{0,n}$
La propriété est donc vraie pour $k = 0$

Hérédité : Supposons que $A_{k,n} = 2^k \left(n + \frac{k}{2}\right)$ au rang k
Montrons alors que $A_{k+1,n} = 2^{k+1} \left(n + \frac{k+1}{2}\right)$

Un coefficient s'obtient en additionnant le coefficient de la ligne précédente de la même colonne avec le coefficient de la ligne précédente de la colonne suivante. Ainsi :

$A_{k+1,n} = A_{k,n} + A_{k,n+1}$

$= 2^k \left(n + \frac{k}{2}\right) + 2^k \left(n+1 + \frac{k}{2}\right)$ d'après l'hypothèse de récurrence

$= 2^k (2n + k + 1)$

$= 2^{k+1} \left(n + \frac{k+1}{2}\right)$

La propriété est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $k \geqslant 0$: $A_{k,n} = 2^k \left(n + \frac{k}{2}\right)$

Comme la propriété est vraie pour tout k, elle est vraie pour $k = 2016$ (la $2017^{\text{ème}}$ ligne du tableau).
Comme le tableau étudié est triangulaire et de taille 2017, le coefficient de la dernière ligne sera le coefficient $A_{2016,1}$. D'après notre relation démontrée précédemment :

$A_{2016,1} = 2^{2016} \left(1 + \frac{2016}{2}\right) = 2^{2016} (1 + 1008$

$= 1009 \times 2^{2016}$

Le nombre inscrit sur la dernière ligne sera donc 1009×2^{2016}