Institut
de recherche
sur l'enseignement
des mathématiques
IREM

Rallye

Rallye
2018

Rapport du
46ème Rallye
Mathématique d'Alsace

UFR de mathématique
et d'informatique
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
Tél. : (33) 03 68 85 01 30
Fax : (33) 03 68 85 01 65
Bibliothèque : (33) 03 68 85 61 01
http://irem.u-strasbg.fr
irem@math.u-strasbg.fr

IREM de
Strasbourg

IREM de
Strasbourg

Sommaire

Présentation du Rallye Mathématique d'Alsace

Comité organisateur : Claudine KAHN, Christel BERNHARDT, Pascal MALINGREY
Jean-Claude SABBAN

Le Rallye Mathématique d'Alsace, organisé par l'IREM de Strasbourg, s'est déroulé pour la 46ème fois en 2018. Crée en 1973, le Rallye Mathématique d'Alsace est la plus ancienne compétition mathématique de France.

Directement inspiré des Olympiades Internationales, il s'adresse à tous les élèves volontaires de l'Académie de Strasbourg et des établissements à l'étranger qui lui sont rattachés (Luxembourg, Copenhague, Belgrade, Berlin, Düsseldorf, Francfort, Fribourg, Hambourg, Munich, Oslo, Sofia, Stockholm, Vienne) ainsi que d'autres partenaires de notre IREM (Washington et Zurich).

Tous les élèves des classes de Première et de Terminale sont prévenus de l'existence du Rallye et de ses modalités. Chacun peut consulter les rapports contenant les sujets, les corrigés, les commentaires ainsi que les palmarès des années précédentes. Ils sont disponibles sur le site de l'IREM (http://mathinfo.unistra.fr/irem/rallye-mathematique-dalsace). Les inscriptions se font sur la base du **volontariat** et les épreuves se déroulent sur le **temps libre** des candidats.

Cette compétition comprend deux épreuves : l'une concerne les élèves de Première, l'autre ceux de Terminale ; elle a réuni environ 840 participants dont 42 de l'étranger.

Les candidats sont amenés à résoudre, pendant quatre heures, individuellement ou par équipes de deux (formule généralement retenue) trois problèmes originaux faisant appel à leurs connaissances bien sûr, mais essentiellement au raisonnement et à leurs capacités inventives.

Les sujets sont très différents de ceux proposés dans l'évaluation traditionnelle. Ils font davantage appel à l'intuition, à l'aspect ludique de la recherche qu'à une suite de connaissances utilisées de manière algorithmique ou répétitive. Les énoncés sont souvent courts, rédigés de manière non scolaire et présentés parfois sous forme d'énigmes ; ils ne contiennent aucune indication de méthode et ne précisent pas le champ de connaissances mises en jeu.

L'objectif est de donner aux élèves l'occasion de faire des mathématiques autrement. Ils peuvent alors réinvestir leur savoir scientifique dans un cadre inhabituel pour eux. Nous développons ainsi leur curiosité, le sens du travail en équipe, le goût pour la recherche. Nous participons ainsi à la promotion de notre discipline auprès des jeunes, des enseignants, des décideurs, de nos partenaires et des médias.

Le Rallye permet aux professeurs des lycées de proposer dans leurs classes, grâce aux rapports des années précédentes, des activités scientifiques différentes de l'entraînement usuel : traduction d'un énoncé en langage mathématique, recherche d'outils possibles, résolution, rédaction d'une solution avec le souci d'une argumentation précise et rigoureuse.

Les élèves, au départ parfois un peu déconcertés par ces énoncés où la démarche n'est pas imposée, trouvent du plaisir à élaborer une construction intellectuelle et par là même gagnent en autonomie de pensée. L'élaboration des sujets suppose une bonne maîtrise de la didactique des mathématiques : l'IREM fournit les éléments nécessaires à ce travail.
Avec la participation au concours commence une série d'activités, extra-scolaires souvent, qui aiguisent la curiosité mathématique des jeunes, encouragent leur esprit d'initiative et créent un climat favorable à l'ouverture culturelle. Cette incitation au développement de la culture scientifique s'inscrit entièrement dans le cadre des directives actuelles à ce sujet.

En Première, dix-neuf binômes et un monôme sont primés : un prix exceptionnel, quatre premiers prix, huit deuxièmes prix et sept troisièmes prix.

En Terminale, quinze binômes ont été sélectionnés : cinq premiers prix, cinq deuxièmes prix et cinq troisièmes prix.

Nous renvoyons à la suite de ce rapport pour des commentaires plus détaillés sur les exercices.

La remise des prix a lieu au Conseil Départemental du Bas-Rhin. Elle est suivie d'une réception en l'honneur des lauréats à l'Hôtel du Département.

Remerciements

Nous remercions vivement les donateurs qui nous permettent de récompenser les lauréats par des livres, des calculatrices, du matériel informatique, des entrées aux musées et aux parcs d'activités pour fêter la 46ème édition :

- ◊ L'Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques de Strasbourg
- ◊ L'Université de Strasbourg
- ◊ L'UFR de Mathématique et d'Informatique
- ◊ L'IREM de Strasbourg
- ◊ L'A.P.M.E.P.
- ◊ Le Conseil Départemental du Bas-Rhin
- ◊ Le Conseil Départemental du Haut-Rhin
- ◊ La Région Grand Est
- ◊ La Ville d'Altkirch
- ◊ La Ville de Barr
- ◊ La Ville d'Obernai
- ◊ La Ville de St Louis
- ◊ La Ville de Strasbourg
- ◊ La société CASIO
- ◊ Les Musées de la Ville de Colmar
- ◊ Le Musée du Pétrole de Pechelbronn
- ◊ L'équipe du Lac Blanc
- ◊ La Cité du train de Mulhouse
- ◊ Le Musée Théodore Deck de Guebwiller
- ◊ Le Musée EDF Electropolis de Mulhouse

Nous remercions tout particulièrement le Conseil Départemental du Bas-Rhin pour son soutien et la mise à disposition de la salle des séances plénières pour la cérémonie de remise des prix.

A tous les lauréats du Rallye Mathématique d'Alsace de Première

Le Rallye Mathématique d'Alsace
et
ANIMATH (Association pour l'animation des Mathématiques)

Vous proposent de participer à des stages de préparation aux Olympiades Internationales de Mathématiques.

Pour obtenir des informations sur toutes les activités proposées, vous pouvez consulter le site d'Animath **:** http://www.animath.fr

Nous vous souhaitons une bonne poursuite mathématique de vos études.

Palmarès des Premières 2018

Prix exceptionnel

- ✓ HATSTATT Arthur et MONORY Erwan
  Professeur : M. Ottobrini, Lycée Don Bosco, Landser

Premier prix

- ✓ FREIERMUTH Eric et PRATO Diane
  Professeur : Mme Zerr, Lycée Jean Mermoz, Saint-Louis

- ✓ BARLOY Renaud et WEBER Jean-Nicolas
  Professeur : Mme Mariani, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ BARISHYAN Michael et WEHRUNG MONTPEZAT Jonas
  Professeur : M. Petit, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ METZ Thibaut et SCHRECKENBERG Hugo
  Professeur : Mme Bachschmidt, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

Deuxième prix

- ✓ FERREIRA Léo et SCHNEIDER Adrien
  Professeur : M. Alilouche, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ BURGUN Adrien
  Professeur : Mme Klein, Lycée Stanislas, Wissembourg

- ✓ HATSTATT Léo et ROSEMARY Antonio
  Professeurs : Mme Arioni et Mme Flury, Lycée Jean-Jacques Henner, Altkirch

- ✓ CUCCHI Lise et HASSENFORDER Florent
  Professeur : M. Schultz, Lycée Schuré, Barr

- ✓ ERHARD Mathieu et POMMIER Logan
  Professeur : Mme Bannwarth, Lycée Scheurer-Kestner, Thann

- ✓ ESSIG Quentin et LAURENT Aude
  Professeur : Mme Mariani, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ ADAM Jonas et SIMON Evan
  Professeur : Mme Hunold, Lycée Scheurer-Kestner, Thann

- ✓ DUPLESSIS Marine et DUPLESSIS Océane
  Professeur : M. Schultz, Lycée Schuré, Barr

Troisième prix

- ✓ LEGER Juliane et SENGELIN Océane
  Professeurs : M. Ottobrini et M. Higelin, Lycée Don Bosco, Landser

- ✓ SCHNEE Louise et SONVICO Léo
  Professeur : Mme David-Metzmeyer, Lycée Marguerite Yourcenar, Erstein

- ✓ GERARD Lise et SONNENDRUCKER Louis
  Professeur : Mme Bachschmidt, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ PAFFI Gabriel et TERNOIS Damien
  Professeurs : M. Ottobrini et Mme Schaub, Lycée Don Bosco, Landser

- ✓ GEIST Louis et SOTO Constantino
  Professeur : M. Petit, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ GHERARDI Thomas et OBERDORF Nathan
  Professeur : Mme Flury, Lycée Jean-Jacques Henner, Altkirch

- ✓ DAUMAS Félicie et BIERLAIRE Emma
  Professeur : Mme Neumann, Lycée Kléber, Strasbourg

Palmarès des Terminales 2018

Premier prix

- ✓ CORCELLUT Nathan et FELDER Ludovic
  Professeur : M. Bonhomme, Lycée Marguerite Yourcenar, Erstein
- ✓ FELDMANN Lea et TOTSCHNIG Agnes
  Professeur : M. Brévart, Lycée Français, Berlin
- ✓ LEVASSEUR Pierrot et SCHMITT Lilian
  Professeur : Mme Butscher, Lycée Saint-André, Colmar
- ✓ ARBOGAST Louis et PAQUES Jules-Henri
  Professeurs : M. Scheurer et M. Schwartz, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg
- ✓ BAKRI Benjamin et REYMANN Baptiste
  Professeur : M. Vénéreau, Lycée Koeberlé, Sélestat

Deuxième prix

- ✓ PLOTZE Yan et WEISSGERBER Anaëlle
  Professeur : M. Vilmen, Lycée Koeberlé, Sélestat
- ✓ EPPINGER Simon et STRENTZ Antoine
  Professeur : Mme Schmitt Stutz, Lycée Robert Schuman, Haguenau
- ✓ BORCHERT Antonio et DURAND François
  Professeur : M. Brévart, Lycée Français, Berlin
- ✓ AUDIGIE Nicolas et KILIAN Sébastien
  Professeurs : Mme Fleurotte et Mme Davidson, Lycée Adrien Zeller, Bouxwiller
- ✓ IELLATCHITCH François et MOSER Thomas
  Professeur : Mme Schmitt, Lycée Robert Schuman, Haguenau

Troisième prix

- ✓ SCHINI Ludovic et VOGLER Prunelle
  Professeur : M. Beaufort, Lycée Adrien Zeller, Bouxwiller
- ✓ DIMROCI Anatole et DISTELZWEY Léo
  Professeurs : M. Schell et M. Richter, Lycée André Maurois, Bischwiller
- ✓ HEBRAS Benjamin et WEISSROCK Edgard
  Professeur : Mme Collet, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg
- ✓ GSTALTER Pierre-Louis et KRIEGER Benjamin
  Professeurs : M. Alati et M. Elophe, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg
- ✓ ACIKGOZ Rayan et BELHOUARI Jaad
  Professeurs : M. Caumont et M. Chatirichvili, Lycée Pasteur, Strasbourg

RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 2018
46ème édition

PREMIERES
Mercredi 4 avril 2018

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également de manière très lisible leur adresse postale et leur mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

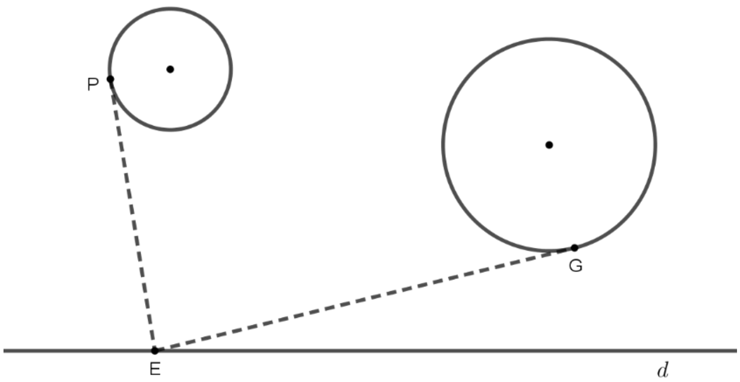
Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

Il est strictement interdit d'utiliser un téléphone portable, une tablette, un ordinateur personnel ou disponible dans la salle de classe. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 :
À partir des neuf chiffres $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ et 9 on forme tous les nombres possibles de 9 chiffres tous distincts. On les range dans l'ordre croissant : 123456789 ; 123456798 ; … ; 987654321.
Quel est le 2 018ème nombre de la suite ?
Quel est le 20 180ème nombre de la suite ?

Exercice 2 :
Six amis ont passé la soirée à jouer aux cartes. Le gagnant de la première partie a reçu 1 euro de la part de chacun des cinq autres, le gagnant de la deuxième partie 2 euros de la part de chacun des cinq autres, celui de la troisième 3 euros de la part de chacun des cinq autres…, et ainsi de suite. Il y a eu un gagnant à chaque partie. Bien qu'il n'ait gagné qu'une seule fois, Christian s'est retrouvé en fin de soirée avec autant d'argent qu'il en avait au début.
Combien de parties ont été jouées durant la soirée ?

Exercice 3 :
Une compagnie maritime qui relie au continent deux îles circulaires doit choisir E, le point où se fera l'escale sur la terre ferme (matérialisée par la droite d).
Les trajets, qui s'effectuent suivant l'itinéraire de la petite île à la terre ferme, de la terre ferme à la grande île et vice-versa, sont rectilignes et tangents aux îles. Le coût du trajet est proportionnel à la somme des carrés des distances parcourues sur chaque étape ($PE^2 + EG^2$).
Où faut-il placer le point E sur la terre ferme pour minimiser les coûts ?



RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 2018
46ème édition

TERMINALES
Mercredi 14 mars 2018

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également de manière très lisible leur adresse postale et leur mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

Il est strictement interdit d'utiliser un téléphone portable, une tablette, un ordinateur personnel ou disponible dans la salle de classe. L'usage de la calculatrice est autorisé.

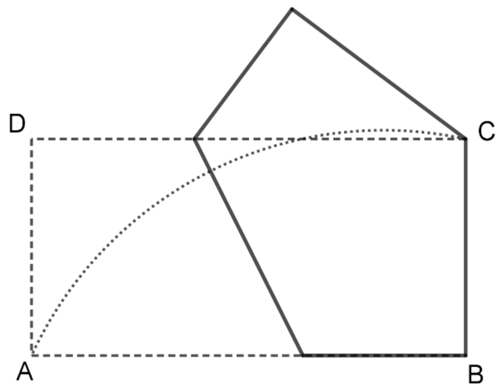
Exercice 1 :

Cinq couples de danseurs se rendent à un bal masqué. A l'arrivée, on sépare les hommes et les femmes, on numérote les femmes de 1 à 5, et les hommes de 1 à 5. On les fait ensuite s'élancer sur une piste, chaque femme choisissant au hasard un homme pour partenaire.

a. Déterminer la probabilité pour qu'il y ait exactement deux couples légitimes reconstitués.
b. Déterminer la probabilité pour qu'aucun couple légitime ne soit reconstitué.
c. Déterminer la probabilité pour qu'il y ait plus de couples illégitimes sur la piste de danse que de couples légitimes.

Exercice 2 :

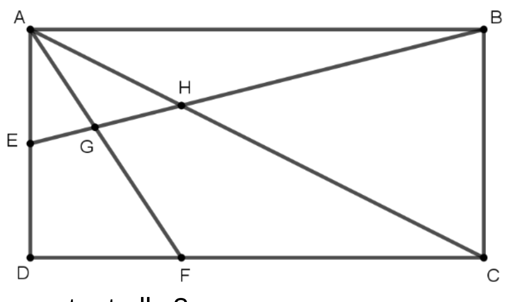
On considère une feuille de papier rectangulaire dont le rapport des côtés vaut 2 et l'aire 1.
On la plie en superposant deux de ses sommets diagonalement opposés (A et C) selon le schéma ci-contre. On obtient un pentagone.



Calculer l'aire exacte du pentagone.

Exercice 3 :

Dans ce gâteau rectangulaire $ABCD$, le plus grand côté $[AB]$ et le plus petit $[AD]$ mesurent un nombre entier de millimètres.
Simon donne un premier coup de couteau allant de B au milieu E de $[AD]$. Il donne ensuite deux coups de couteau depuis A, l'un vers le point F situé au tiers de $[DC]$ le plus proche de D, l'autre vers C.
Il constitue ainsi six parts.



1. Quelle proportion de la surface totale du gâteau chaque part a-t-elle ?

Karl remarque que l'aire des six parts est un nombre entier de mm^2. De plus, il constate que les quatre cerises (les points E, G, H, B) situées sur le segment du premier coup de couteau ont entre elles des distances égales à des nombres entiers de millimètres.

2. Quel est le gâteau, ayant les plus petites dimensions, qui vérifie ces conditions ?

Commentaires pour le Rallye Mathématique d'Alsace 2018

Cette année, 419 binômes représentant 444 élèves de première et 394 élèves de terminale (il y avait aussi quelques monômes) ont participé aux épreuves du Rallye.
La participation est donc plus importante que lors de l'édition précédente (130 candidats en plus).

Nous sommes heureux de constater que les élèves font preuve de connaissances et d'initiatives, et que les méthodes qu'ils utilisent pour résoudre les exercices sont diverses, variées, parfois très originales. Ceci est très encourageant pour les lycéens de l'académie.
Par contre, nous sommes choqués face à une orthographe de plus en plus déficiente (on peut trouver dans certaines copies un même mot écrit trois fois avec trois orthographes différentes ou une orthographe complètement fantaisiste et phonétique). Nous continuons à relever que trop d'élèves n'apportent aucun soin à la présentation de leur travail : il y a des ratures à toutes les lignes, les instruments de construction tels que la règle et le compas ne sont pas utilisés : les figures sont tracées à main levée.
C'est d'autant plus dommage que la qualité mathématique des copies est souvent d'un très bon niveau, que les exercices sont abordés par un nombre important de candidats et que les méthodes proposées ont parfois fait l'admiration de l'équipe des correcteurs.

En première, le prix exceptionnel a donné une solution parfaite à deux exercices et une très bonne démarche dans le troisième.
Les premiers prix ont très bien résolu deux exercices.
Les deuxièmes prix ont très bien traité un exercice et ont résolu presque complètement un deuxième exercice.
Les troisièmes prix ont très bien résolu un exercice et donné beaucoup d'éléments dans un deuxième exercice.

En terminale, les premiers prix ont donné une solution exacte à un exercice et ont très bien avancé dans les deux autres.
Les deuxièmes prix ont très bien résolu un exercice et ont donné des éléments dans l'un au moins des deux autres.
Les troisièmes prix ont donné de bons raisonnements dans deux exercices ou ont résolu un exercice et donné quelques idées dans les deux autres.

Pour chacun des exercices, nous joignons à ce rapport une résolution qui nous a semblé pertinente, choisie parmi les bonnes solutions rencontrées.

Compte–rendu de l'épreuve de Première

Les candidats à l'épreuve du Rallye Mathématique d'Alsace de Première avaient trois exercices à traiter durant quatre heures. Dans le premier exercice, il s'agissait de déterminer les 2018$^{\text{ème}}$ et 20 180$^{\text{ème}}$ nombres d'une suite. Le deuxième exercice portait sur un jeu dans lequel six personnes jouaient plusieurs parties ; la façon de compter les gains était donnée mais pas le nombre de parties qu'il fallait trouver. Dans le troisième exercice on demandait de minimiser la somme des carrés de deux distances sur une figure comportant deux cercles et une droite.
Chacun des exercices est résolu correctement dans des copies.

Exercice 1 : Les élèves ont souvent cherché cet exercice, il est globalement bien traité. Beaucoup ont compris comment procéder. Plus rares sont ceux qui arrivent aux deux solutions exactes. Le raisonnement n'est pas toujours bien expliqué, mais nous avons apprécié la clarté de la rédaction et des explications dans quelques copies.

Exercice 2 : Dans un très grand nombre de copies, les élèves s'arrêtent à une solution quand ils la trouvent. Le problème admettait trois solutions distinctes, et parmi ceux qui trouvent les trois, peu de candidats pensent à prouver qu'il n'y en a pas d'autres. La plupart des binômes ont rédigé des solutions où ils listaient tous les cas possibles sous forme de tableaux, quelques-uns ont posé une équation qui comportait deux inconnues et l'ont résolue.

Exercice 3 : Seul un binôme a trouvé la solution à cet exercice, et trois autres étaient sur la bonne voie. L'énoncé est mal compris dans un très grand nombre de copies : beaucoup d'élèves ont pensé que les points P et G étaient fixes, ce qui n'avait aucun sens.

Compte–rendu de l'épreuve de Terminale

L'épreuve du Rallye Mathématique d'Alsace de Terminale comprend, comme à l'habitude, trois exercices. Dans le premier exercice il s'agissait de calculer des probabilités d'obtenir un nombre donné de couples légitimes sur une piste de danse. Le deuxième exercice proposait de déterminer l'aire d'un pentagone obtenu à partir d'un pliage. Le troisième exercice portait sur des calculs de proportion de surface dans un rectangle.

Les exercices ont été bien compris et bien abordés, en particulier le deuxième qui est tenté sur quasiment toutes les copies. On peut noter la persévérance et l'originalité de beaucoup d'élèves. Chacun des exercices est résolu correctement dans des copies.

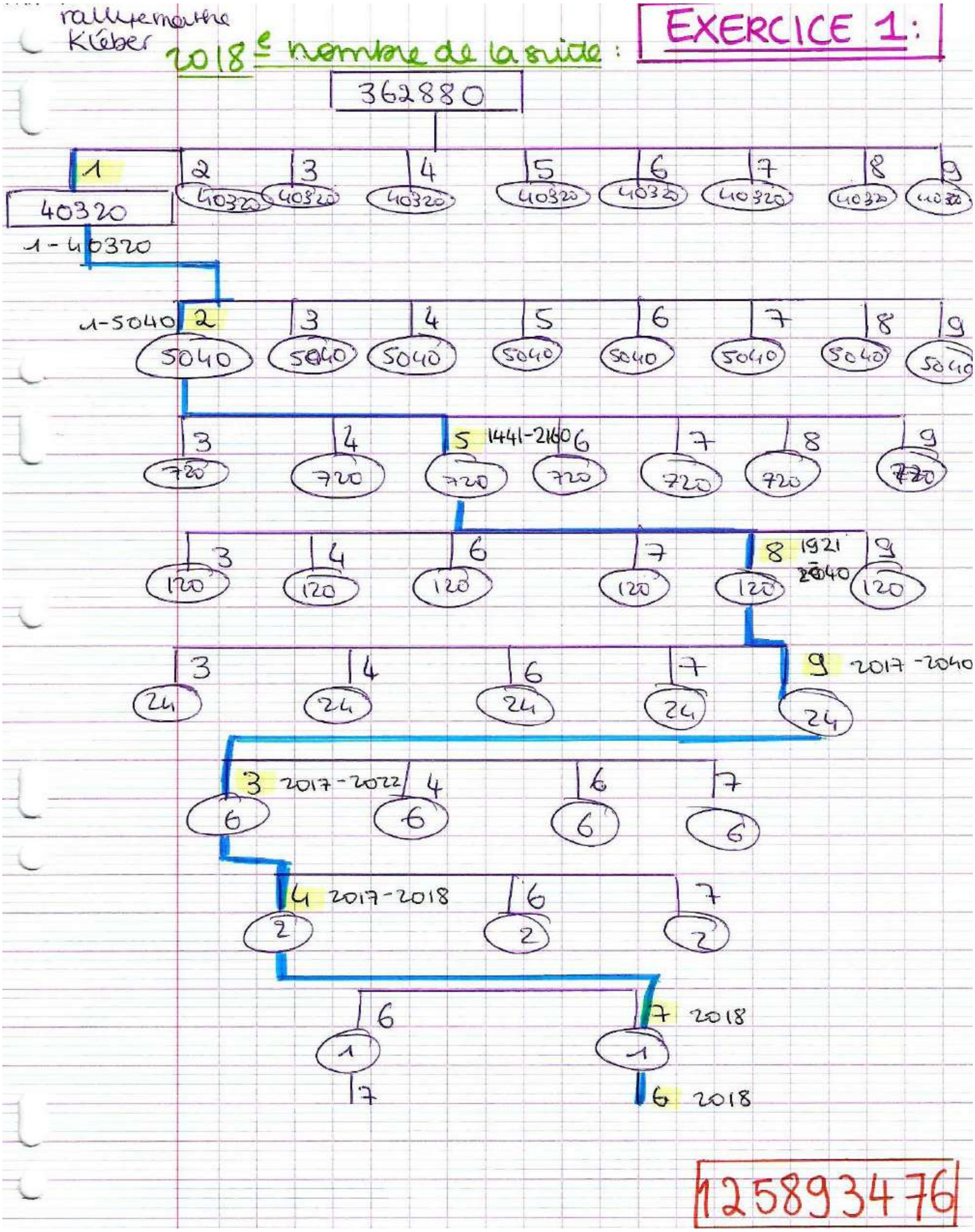
Exercice 1 : Cet exercice a été traité par un grand nombre d'élèves. Dans beaucoup de copies nous avons trouvé une loi binomiale qui n'avait pas lieu d'être. Un certain nombre d'élèves se lancent dans la construction de l'arbre à 120 issues : ce travail, long et fastidieux, a très rarement été couronné de succès car les élèves y ont fait des erreurs. Certains dessinent des arbres partiels, mais parfois les explications données pour comprendre leur construction est insuffisante (même si c'est correct).

Exercice 2 : C'est l'exercice qui a eu le plus de succès : les élèves ont très souvent trouvé l'aire exacte du pentagone, mais beaucoup ont considéré comme acquis des points non justifiés. Nous avons été agréablement surpris par la très grande rigueur et le raisonnement très clair de plusieurs élèves. Les démonstrations correctes étaient diverses.

Exercice 3 : Cet exercice a été le moins bien réussi des trois. La dernière question n'a été abordée que très rarement. Les élèves ont souvent répondu à la première question à l'aide d'un repère mais un grand nombre l'a aussi traitée sans repère. Nous avons constaté que les élèves ne sont pas toujours rigoureux dans leurs notations.

Copies des Premières

DAUMAS Félicie et BIERLAIRE Emma
Lycée Kléber, Strasbourg
Exercice n°1



Pour pouvoir répondre à la question et donner le nombre correspondant au 2018e nombre de la suite, nous commençons par calculer le nombre de possibilités de nombre à 9 chiffres lorsqu'on utilise des chiffres tous distincts.

On fait sur le principe des probabilités :

$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$.

Il existe donc 362880 nombres dans la suite.

Nous cherchons le nombre correspondant au 2018e rang. Comme nous savons qu'il y a 362880 nombres et qu'ils peuvent commencer par un chiffre compris entre 1 et 9, on divise 362880 par 9.

$362880 : 9 = 40320$. On a donc 40320 possibilités que le nombre commence par un 1, 40320 qu'il commence par un 2 etc. Or on peut voir que 2018 est compris entre 1 et 40320 donc dans le dessin fait au recto, on prend la première sortie.

Nous obtenons donc le 1er chiffre qui est 1.

Ensuite, comme nous avons utilisé le 1, il ne reste que 8 chiffres à mettre dans le nombre. On divise 40320 par 8 et on trouve 5040. Sur le même principe qu'avant nous avons 5040 possibilités que le 2e chiffre soit un 2, 5040 que ce soit un 3 et cela jusqu'à 9. On peut voir que 2018 est compris entre 1 et 5040 donc on prend à nouveau la 1ère sortie du dessin qui correspond au chiffre 2 (ils sont rangés de façon croissante).

Il ne nous reste à présent que 7 chiffres. On divise 5040 par 7 et on obtient 720 soit 720 possibilités que le 3^e chiffre du nombre soit un 3, un 4, un 5, un 6, un 7, un 8 ou un 9. 2018 ne rentre pas dans la 1ère sortie du dessin puisqu'elle correspond aux nombres compris entre 1 et 720. 2018 fait partie de la 3^e sortie qui correspond au chiffre 5 (compris entre 1441 et 2160)

On réitère le processus en faisant en sorte que 2018 fasse bien partie des différents intervalles de chaque probabilité de chiffre. En divisant 720 par 6 (les 6 possibilités restantes), on obtient 120 et la sortie où se trouve 2018 (ici, l'intervalle 1921 - 2160) est la 5^e soit celle qui correspond au chiffre 8.

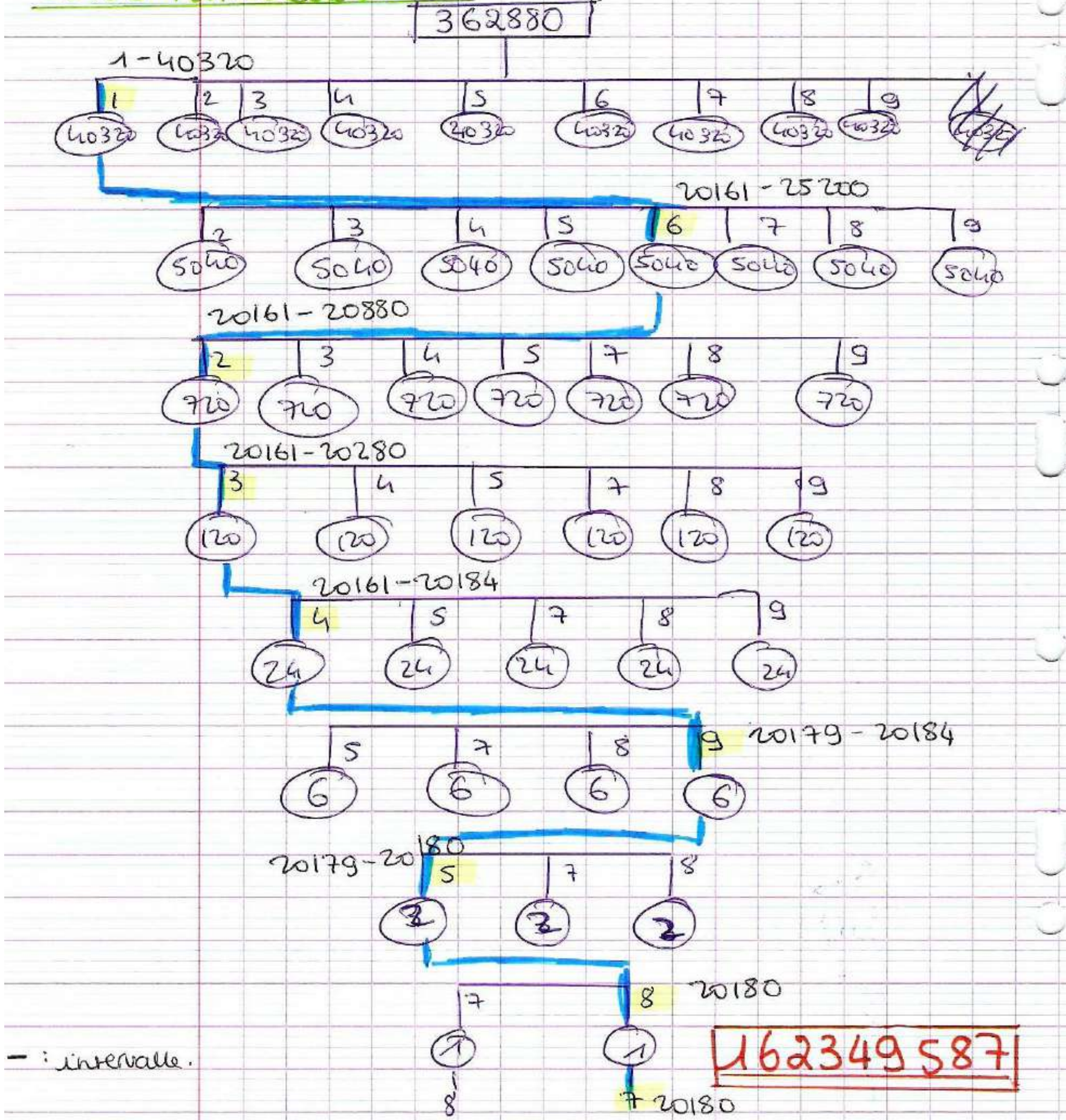
on recommence ainsi jusqu'à la fin :

- $120 \div 5 = 24$, $2018 \in [2017 ; 2040]$ donc on prend la 5^e sortie soit le chiffre 9.
- $24 : 4 = 6$, $2018 \in [2017 ; 2022]$ donc on prend la 1ère sortie soit le chiffre 3.
- $6 : 3 = 2$, $2018 \in [2017 ; 2018]$ donc on prend la 1ère sortie soit le chiffre 4
- $2 : 2 = 1$, donc on prend la 2ème sortie correspondant au 2018^e nombre et au chiffre 7.

Enfin, il nous reste le chiffre 6 que l'on place en dernière position du nombre.

Ainsi grâce au dessin, on trouve que le nombre correspondant au 2018^e terme de la suite est **125893476.**

20180^e nombre de la suite :



- : intervalle.

Sur le même principe que l'autre dessin, on cherche le nombre correspondant au 20180^e nombre de la suite sachant qu'il y a au départ 362880 possibilités.
On finit par trouver le nombre **162349587** qui correspond au 20180^e terme de la suite.

BARLOY Renaud et WEBER Jean-Nicolas
Gymnase Jean Sturm, Strasbourg
Exercice n°2

Posons n le nombre de parties jouées par les six amis
Soit $n-x$ le numéro de la partie gagnée par Christian.
On sait que le gagnant gagne 5 fois le numéro de la partie soit ~~$5x$~~. Donc Christian gagne durant la soirée $5(n-x)$.
Il perd toutes les parties excepté la $(n-x)^e$. Donc l'argent total perdu est : $1+2+3+\ldots+n-n+x$.
On cherche quand l'argent perdu est égal à l'argent gagné.

donc on cherche $1+2+3+\ldots+n-n+x = 5(n-x)$.

L'argent perdu contient une suite arithmétique de raison 1 et $u_1 = 1$. Sa somme est $n\dfrac{(1+n)}{2}$.

L'argent perdu est donc

$$n\cdot\frac{(n+1)}{2} - n + x$$

Donc on cherche à résoudre $n\dfrac{(n+1)}{2} - n + x = 5n - 5x$

$$\frac{n+n^2}{2} - 6n = -6x$$

$$\frac{n^2-11n}{2} = -6x$$

$$x = \frac{-n^2+11n}{12}$$

On note $x = u_n$.

On cherche n pour lequel $u_n \in \mathbb{N}$.

On trouve les solutions suivantes pour n :

$$\{3 ; 8 ; 11\}$$

$u_3 = 2$, $u_8 = 2$ $u_{11} = 0$

Donc les amis ont pu faire 3, 8 ou 11 parties et Christian aurait gagné respectivement la 1ère, la 6e ou la 11e partie.

En effet, dans le premier cas il gagne $1 \times 5 = 5$ € puis perd $2 + 3 = 5$ €

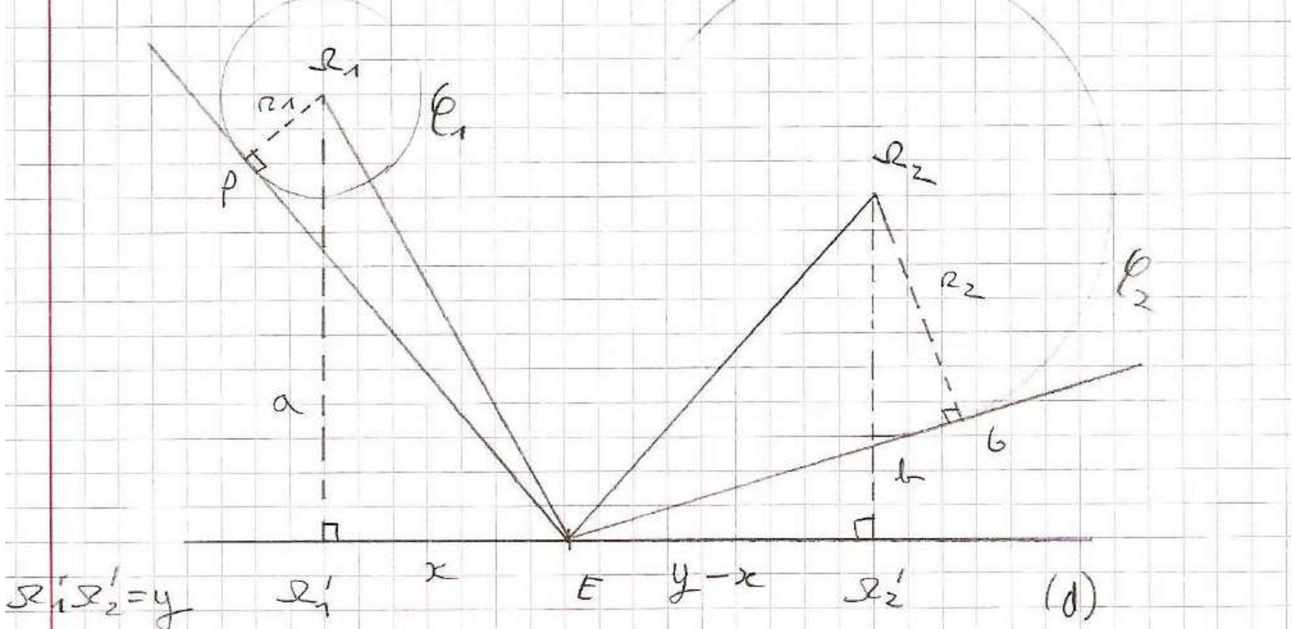
Dans le deuxième cas, il gagne $6 \times 5 = 30$ € et perd $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 = 30$ €.

Et dans le dernier cas, il gagne $11 \times 5 = 55$ € et perd $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$ €.

Les autres solutions sont négatives, aussi elles n'appartiennent pas aux entiers naturels.

HATSTATT Arthur et MONORY Erwan
Lycée Don Bosco, Landser
Exercice n°3

On réalise un schéma de la situation :



On rappelle que si la droite (PE) est tangente à $\mathcal{C}_1$ en P alors les droites $(P\Omega_1)$ et (PE) sont perpendiculaires (de manière analogue avec G)

On appelle Ω'_1 et Ω'_2 les projetés orthogonaux respectifs de Ω_1 et Ω_2 sur la droite (d), ces deux points étant les centres des cercles.

On note a la distance $\Omega'_1\Omega_1$ et b la distance $\Omega'_2\Omega_2$ ainsi que r_1 et r_2 les rayons des cercles.

Soit y la distance entre Ω'_1 et Ω'_2

En posant $\Omega'_1E = x$, on a alors $E\Omega'_2 = y - x$

Pour éviter d'avoir des distances négatives, la droite (d) fonctionne comme une droite graduée avec Ω'_1 comme origine. Ainsi si x appartient pas au segment $\Omega'_1\Omega'_2$, le calcul est toujours faisable, o[n] travailles sur $\mathbb{R}$.

Calcul de $PE^2 + GE^2$:

Dans le triangle $\Omega_1 \Omega_1' E$ rectangle en Ω_1', on applique le théorème de Pytha

$$\Omega_1 E^2 = \Omega_1 \Omega_1'^2 + \Omega_1' E^2$$
$$\underline{\Omega_1 E^2 = a^2 + x^2}$$

Or, d'après le théorème de Pythagore dans $PE\Omega_1$ rectangle en P, on a :

$$\Omega_1 E^2 = P\Omega_1^2 + PE^2 \iff PE^2 = \Omega_1 E^2 - P\Omega_1^2$$
$$\iff \underline{PE^2 = a^2 + x^2 - R_1^2}$$

Dans le triangle $\Omega_2' \Omega_2 E$ rectangle en Ω_2', on applique le théorème de Pyth

$$\Omega_2 E^2 = \Omega_2 \Omega_2'^2 + \Omega_2' E^2$$
$$\underline{\Omega_2 E^2 = b^2 + (y - x)^2}$$

Or, d'après le théorème de Pythagore dans $EG\Omega_2$ rectangle en G, on a :

$$\Omega_2 E^2 = G\Omega_2^2 + GE^2 \iff GE^2 = \Omega_2 E^2 - G\Omega_2^2$$
$$\iff \underline{GE^2 = b^2 + (y-x)^2 - R_2^2}$$

Donc, $PE^2 + GE^2 = a^2 + x^2 - R_1^2 + b^2 + (y-x)^2 - R_2^2$

$$\boxed{PE^2 + GE^2 = (a^2 + b^2 - R_1^2 - R_2^2 + y^2) + 2x^2 - 2xy}$$

Étude de la fonction $PE^2 + GE^2$

On pose f la fonction qui à x associe PE^2+GE^2

d'où $f(x) = (a^2+b^2-r_1^2-r_2^2+y^2)+2x^2-2xy$ sur $\mathbb{R}$ car $E \in (d)$

On considère que f est dérivable également sur cet intervalle.

Sachant que les îles sont fixes, les distances a^2, b^2, r_1^2, r_2^2 et y^2 sont constantes, donc si on dérive f, ces termes vont s'annuler.

Donc, $f'(x) = (2x^2-2xy)' = 4x-2y$

On résout $f'(x)=0 \iff 4x-2y=0 \iff x = \frac{y}{2}$

On donne le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$y/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Conclusion : En étudiant la fonction PE^2+GE^2, on trouve que cette distance est minimale quand E est situé au milieu du segment formé par les projetés orthogonaux des centres des cercles sur (d).

Donc, le coût est minimal quand E est le milieu du segment $[\Omega_1' ; \Omega_2']$.

Copies des Terminales

EPPINGER Simon et STRENTZ Antoine
Lycée Robert Schuman, Haguenau
Exercice n°1

a. Soient les femmes 1, 2, 3, 4, 5

Soient les hommes 1', 2', 3', 4', 5'

Les couples légitimes étant donc 1,1' ; 2,2' ; 3,3' ; 4,4' ; 5,5'.

Pour qu'il y ai exactement 2 couples légitimes, il y a dix possibilités :

1,1' ; 2,2' — 2,2' ; 4,4'

1,1' ; 3,3' — 2,2' ; 5,5'

1,1' ; 4,4' — 3,3' ; 4,4'

1,1' ; 5,5' — 3,3' ; 5,5'

2,2' ; 3,3' — 4,4' ; 5,5'

Pour qu'il n'y ai que deux couples légitimes, il faut qu'il y ait trois couples illégitimes. Par exemple, les couples suivants correspondent :

1,1' ; 2,2' ; 3,5' ; 4,3' ; 5,4'

Pour chaque duo de couple légitime, il faut donc former trois couples illégitimes à partir des membres de trois couples légitime.

Dans ce cas : 3,3' ; 4,4' ; 5,5'

N° ../...

Les deux possibilités de former trois couples illégitimes avec ces 6 personnes sont donc : 3,5' ; 4,3' ; 5,4'

3,4' ; 4,5' ; 5,3'

Les autres possibilités formant au moins un couple légitime.

On peut appliquer cela à 10 duos de couples légitimes différents, créant donc en tout 20 possibilités qu'il y ait exactement deux couples légitimes.

On peut associer une femme choisissant son partenaire à un tirage sans remise. La probabilité qu'un certain couple se forme au premier choix est donc de $\frac{1}{5}$, au deuxième choix $\frac{1}{4}$, au troisième choix $\frac{1}{3}$, au quatrième choix $\frac{1}{2}$, au dernier choix 1.

La probabilité qu'il y ait exactement deux couples légitimes vaut donc :

$$20 \times \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1\right) = \frac{1}{6}$$

b) Pour calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun couple légitime, on cherche la probabilité inverse à l'évènement il y a au moins un couple légitime.

Soit X la variable aléatoire qui associe X au nombre de couples légitimes reconstitué.

$p(X=0) = 1 - p(X \geq 1)$

$p(X \geq 1) = p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) + p(X=5)$

Notons qu'il ne peut y avoir 4 couples légitimes, car dans ce cas les deux personnes seules forment un couple légitime, ce qui porte donc le nombre de couple légitime à 5.

On connait déjà $p(X=2)$, donné dans le a.

$p(X=5)$ contient une seule possibilité : 1,1' ; 2,2' ; 3,3' ; 4,4' ; 5,5'

On a donc $p(X=5) = \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1\right)$

$= \frac{1}{120}$

$p(X=3)$: Pour former 3 couples légitimes, il y a dix possibilités de trios différents :

N° …/…

1,1' ; 2,2' ; 3,3'	1,1' ; 4,4' ; 5,5'
1,1' ; 2,2' ; 4,4'	2,2' ; 3,3' ; 4,4'
1,1' ; 2,2' ; 5,5'	2,2' ; 3,3' ; 5,5'
1,1' ; 3,3' ; 4,4'	2,2' ; 4,4' ; 5,5'
1,1' ; 3,3' ; 5,5'	3,3' ; 4,4' ; 5,5'

Si il y a trois couples légitimes, il faut donc qu'il y ait deux couples illégitimes formés à partir des membres de deux couples légitimes. Si il y a les couples 1,1' ; 2,2' ; 3,3' par exemple, les deux couples illégitimes seront 4,5' ; 5,4'. Il n'y a pas d'autres possibilité qui ne forme aucun couple légitime. Il y a donc 10 possibilités différente pour former trois couples légitimes exactement.

Donc $P(X=3) = 10\left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1\right) = \frac{1}{12}$

Pour $P(X=1)$, il y a 5 possibilités de couples légitimes uniques : 1,1' ; 2,2' ; 3,3' 4,4' ; 5,5'.

Si il y a un couple légitime, il faut donc qu'il y ait 4 couples illégitimes formés à partir des membres de 4 couples légitimes. Dans le cas où le couple légitime formé est 1,1' par exemples, les couples illégitimes pouvant être formés sont les suivants :

2,3' ; 3,2' ; 4,5' ; 5,4'
2,3' ; 3,5' ; 4,2' ; 5,4'
2,3' ; 3,4' ; 4,5' ; 5,2'
2,4' ; 3,2' ; 4,5' ; 5,3'
2,4' ; 3,5' ; 4,3' ; 5,2'
2,4' ; 3,5' ; 4,2' ; 5,3'
2,5' ; 3,2' ; 4,3' ; 5,4'
2,5' ; 3,4' ; 4,2' ; 5,3'
2,5' ; 3,4' ; 4,3' ; 5,2'

N° .../...

Il y a donc 5 possibilité de couple illégitime et pour chaque possibilité il y a 9 possibilité de quatuor de couples illégitimes, c'est-à-dire 45 possibilités en tout.

Donc $P(X=1) = 45\left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1\right) = \frac{3}{8}$

Donc $P(X \geqslant 1) = \frac{3}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{120} = \frac{19}{30}$

$p(X=0) = 1 - P(X \geqslant 1)$

$= 1 - \frac{19}{30}$

$= \frac{11}{30}$

La probabilité qu'il n'y ait aucun couple légitime vaut donc $\frac{11}{30}$.

c. Pour qu'il y ait plus de couples illégitimes sur la piste de danse, il faut qu'il y ait 5, 4 ou 3 couples illégtimes sur la piste de danse, c'est-à-dire 0, 1 ou 2 couples légitimes. On cherche donc $p(X \leq 2)$

$p(X \leq 2) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2)$

$= \frac{11}{30} + \frac{3}{8} + \frac{1}{6}$

$= \frac{109}{120} \approx 0{,}91$

La probabilité qu'il y ait plus de couples illégitimes sur la piste de danse vaut donc $\frac{109}{120}$

ne rien écrire dans la partie barrée

FELDMANN Lea et TOTSCHNIG Agnes
Lycée Français, Berlin
Exercice n°2

Soit ℓ la largeur du rectangle.

Puisque le rapport ~~vaut~~ des côtés vaut 2, la longueur sera 2ℓ.

Or l'aire vaut 1 donc $\ell \times 2\ell = 1$

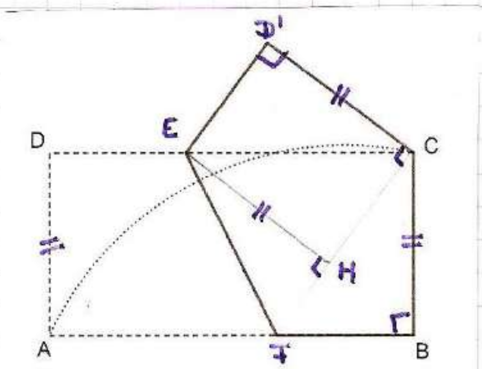
soit $2\ell^2 = 1$

i.e $\ell^2 = \frac{1}{2}$

ou $\ell = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ainsi la largeur vaut $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et la longueur vaut $\sqrt{2}$.

Voici la figure:



Soit E et F les points du pli respectivement sur [DC] et [AB].

Soit D' la projection de D par le pli.

Soit H l'intersection entre la droite (FC) et la droite parallèle à (D'C) passant par E.

On a $(EH) \parallel (D'C)$ et $(D'C) \perp (FC)$ (propriété du rectangle) donc $(EH) \perp (FC)$.

[EH] est donc la hauteur du triangle EFC issue de E.

Par le pli, la partie du triangle EFC est recouverte deux fois donc l'aire $\mathcal{A}$ du pentagone équivaut à celle du rectangle (1) diminuée de l'aire $\mathcal{A}_{EFC}$ du triangle EFC.

Dans le rectangle ED'CH, les deux côtés opposés D'C et EH ont même longueur, soit $D'C = EH = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Nous cherchons désormais la longueur FC.

Puisque le projeté A' de A par le pli est confondu avec le point C, on obtient $FC + FB = AB = \sqrt{2}$.

Plaçons nous désormais dans le triangle FBC rectangle en B et posons $x = FC$.

Alors d'après le théorème de Pythagore

$$FC^2 = FB^2 + BC^2$$

soit $x^2 = (\sqrt{2} - x)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

i.e $x^2 = 2 - 2\sqrt{2}x + x^2 + \frac{1}{2}$

ou $2\sqrt{2}\,x = \frac{5}{2}$

soit $x = \frac{5}{4\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{8}$

FC vaut donc $\frac{5\sqrt{2}}{8}$ u.l.

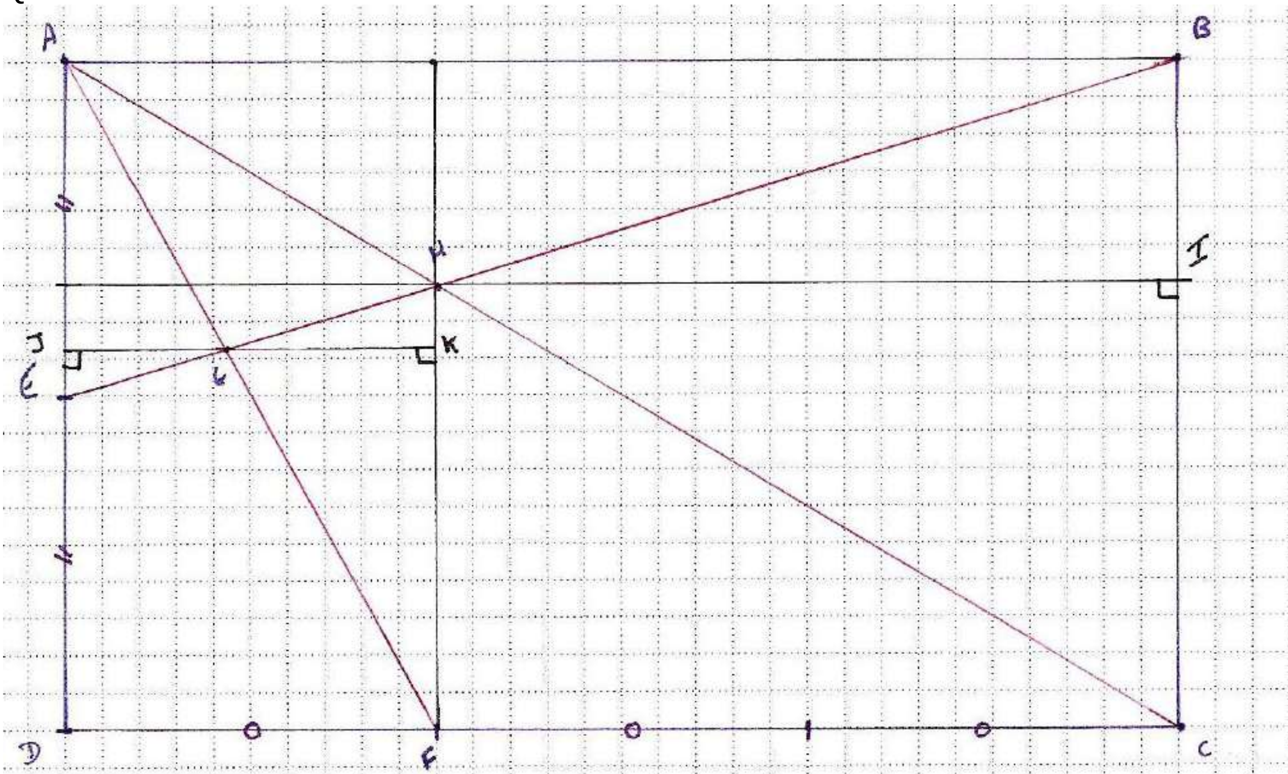
Déterminons maintenant l'aire $\mathcal{A}_{EFC}$ du triangle EFC.

$$\mathcal{A}_{EFC} = \frac{FC \times EH}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{8} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{16} \text{ u.a.}$$

Par conséquent,

$$\mathcal{A} = 1 - \mathcal{A}_{EFC} = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16} \text{ u.a.}$$

IELLATCHITCH François et MOSER Thomas
Lycée Robert Schuman, Haguenau
Exercice n°3
Question 1 :



Notons : $\mathcal{A}_{ABCD} = 1$

D'après le théorème de Thalès : $\frac{AH}{CH} = \frac{EH}{BH} = \frac{AE}{CB}$

Or, $\frac{AE}{CB} = \frac{\frac{1}{2} \times BC}{BC} = \frac{1}{2}$ donc $\frac{AH}{CH} = \frac{EH}{BH} = \frac{1}{2}$

D'où $CH = 2 \times AH$ donc $AH = \frac{1}{3} AC$

$BH = 2 \times EH$ donc $EH = \frac{1}{3} EB$

$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}$ Notons I le projeté orthogonal de H sur BC

$IH = CF = \frac{2}{3} DC$ donc $\mathcal{A}_{BHC} = \frac{BC \times IH}{2} = \frac{BC \times \frac{2}{3} DC}{2} = \frac{2 \times BC \times DC}{6} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABCD}}$

N° .../...

donc $\mathcal{A}_{AHB} = \frac{1}{2} - \mathcal{A}_{BHC} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6} \times \mathcal{A}_{ABCD}}$

$AD \parallel HF$

$$\frac{AG}{GF} = \frac{EG}{GH} = \frac{AE}{HF} \qquad \frac{AE}{HF} = \frac{\frac{1}{2} \times AD}{\frac{2}{3} \times AD} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{AG}{GF} = \frac{3}{4}$$

$$AG = \frac{3}{4} GF \qquad AG + GF = AF$$

$$\frac{3}{4} GF + GF = AF$$

$$\frac{7}{4} \times GF = AF$$

$$GF = \frac{4}{7} AF \quad \text{d'où} \quad AG = \frac{3}{7} AF$$

$$\text{et } EG = \frac{3}{7} EH$$

Notons J le projeté orthogonal de G sur AE

$$GH = \frac{4}{7} EH$$

$$\mathcal{A}_{AGE} = \frac{AE \times JG}{2} = \frac{\frac{1}{2} AD \times \frac{3}{7} DF}{2} = \frac{\frac{1}{2} AD \times \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} DC}{2} = \frac{\frac{1}{14} \times AD \times DC}{2} = \boxed{\frac{1}{28} \times \mathcal{A}_{ABCD}}$$

$$\mathcal{A}_{ADF} = \frac{\frac{1}{3} \times DC \times AD}{2} = \frac{1}{6} \times \mathcal{A}_{ABCD}$$

$$\text{donc } \mathcal{A}_{EGFD} = \frac{1}{6} \times \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{AGE} = \frac{1}{6} - \frac{1}{28} = \boxed{\frac{11}{84} \times \mathcal{A}_{ABCD}}$$

Notons K le projeté orthogonal de G sur HF

$$\mathcal{A}_{HGF} = \frac{FH \times GK}{2} = \frac{\frac{2}{3} \times AD \times \frac{4}{7} \times DF}{2} = \frac{\frac{2}{3} \times AD \times \frac{4}{7} \times \frac{1}{3} \times DC}{2} = \frac{\frac{8}{63} \times AD \times DC}{2} =$$

$$\mathcal{A}_{HGF} = \frac{4}{63} \times \mathcal{A}_{ABCD}$$

$$\mathcal{A}_{HFC} = \frac{HF \times FC}{2} = \frac{\frac{2}{3} \times AD \times \frac{2}{3} \times DC}{2} = \frac{\frac{4}{9} \times AD \times DC}{2} = \frac{2}{9} \times \mathcal{A}_{ABCD}$$

$$\text{D'où } \mathcal{A}_{GHCF} = \mathcal{A}_{GHF} + \mathcal{A}_{HFC} = \left(\frac{4}{63} + \frac{2}{9}\right) \times \mathcal{A}_{ABCD} = \boxed{\frac{2}{7} \times \mathcal{A}_{ABCD}}$$

$$\mathcal{A}_{AHG} = \mathcal{A}_{AFC} - \mathcal{A}_{GHCF} = \mathcal{A}_{ACD} - \mathcal{A}_{ADF} - \mathcal{A}_{GHCF} = \frac{1}{2} \times \mathcal{A}_{ABCD} - \frac{1}{6} \times \mathcal{A}_{ABCD} - \frac{2}{7} \times \mathcal{A}_{ABCD}$$

$$\boxed{\mathcal{A}_{AHG} = \frac{1}{21} \times \mathcal{A}_{ABCD}}$$

N°

…/…

Question 2 :

Notons S l'aire du rectangle $ABCD$
D'après la question 1 : S est divisible par 28, par 21, par 6 et par 3
Donc S est divisible par 7, par 4 et par 3 et ces trois entiers sont premiers entre eux, donc S est divisible par 84

De plus : EG, EH, EB, GH, GB, HB sont des entiers
$EG = \frac{1}{7}EB$ donc EB est divisible par 7
$EH = \frac{1}{3}EB$ donc EB est divisible par 3
3 et 7 sont premiers entre eux, donc EB est divisible par 21

Le triangle ABE est un triangle rectangle dont les trois côtés sont des nombres entiers (AB et EB sont des nombres entiers, donc AD ne peut pas être un entier impair), il s'agit donc d'un triplet Pythagoricien :

$$EB^2 = AE^2 + AB^2$$

Si l'on choisit un triangle semblable à $(3; 4; 5)$ on obtient : $EB = 5 \times 21 = 105$ on a alors : $AB = 84$ et $AD = 126$
Cela ne convient pas car $AD > AB$

Si l'on choisit un triangle semblable à $(5; 12; 13)$ on obtient : $EB = 13 \times 21 = 273$ on a alors : $AB = 252$ et $AD = 210$
On obtient :

$$EG = 39 \quad EH = 91 \quad GH = 52 \quad GB = 234 \quad HB = 182$$

Cela convient

Le plus petit gâteau a pour dimensions : $AB = 252\ mm$ et $AD = 210\ mm$

Remarque : il faudrait s'intéresser aux solutions entières des équations :
$x^2 + y^2 = 21^2, \quad x^2 + y^2 = (2 \times 21)^2, \quad \ldots, \quad x^2 + y^2 = (12 \times 21)^2$