**Institut
de recherche
sur l'enseignement
des mathématiques
IREM**

Rallye

Rallye
2019

Rapport du 47ème Rallye Mathématique d'Alsace

**UFR de mathématique
et d'informatique**
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
Tél. : (33) 03 68 85 01 30
Fax : (33) 03 68 85 01 65
Bibliothèque : (33) 03 68 85 61 01
http://irem.u-strasbg.fr
irem@math.u-strasbg.fr

IREM de
Strasbourg

IREM de
Strasbourg

Sommaire

Présentation du Rallye Mathématique d'Alsace

Comité organisateur : Christel BERNHARDT, Pascal MALINGREY,
Jean-Claude SABBAN

Le Rallye Mathématique d'Alsace, organisé par l'IREM de Strasbourg, s'est déroulé pour la 47ème fois en 2019. Crée en 1973, le Rallye Mathématique d'Alsace est la plus ancienne compétition mathématique de France.

Directement inspiré des Olympiades Internationales, il s'adresse à tous les élèves volontaires de l'Académie de Strasbourg et des établissements à l'étranger qui lui sont rattachés (Luxembourg, Copenhague, Belgrade, Berlin, Düsseldorf, Francfort, Fribourg, Hambourg, Munich, Oslo, Sofia, Stockholm, Vienne) ainsi que d'autres partenaires de notre IREM (Washington et Zurich).

Tous les élèves des classes de Première et de Terminale sont prévenus de l'existence du Rallye et de ses modalités. Chacun peut consulter les rapports contenant les sujets, les corrigés, les commentaires ainsi que les palmarès des années précédentes. Ils sont disponibles sur le site de l'IREM (http://mathinfo.unistra.fr/irem/rallye-mathematique-dalsace). Les inscriptions se font sur la base du **volontariat** et les épreuves se déroulent sur le **temps libre** des candidats.

Cette compétition comprend deux épreuves : l'une concerne les élèves de Première, l'autre ceux de Terminale ; elle a réuni environ 760 participants dont 38 de l'étranger.

Les candidats sont amenés à résoudre, pendant quatre heures, individuellement ou par équipes de deux (formule généralement retenue) trois problèmes originaux faisant appel à leurs connaissances bien sûr, mais essentiellement au raisonnement et à leurs capacités inventives.

Les sujets sont très différents de ceux proposés dans l'évaluation traditionnelle. Ils font davantage appel à l'intuition, à l'aspect ludique de la recherche qu'à une suite de connaissances utilisées de manière algorithmique ou répétitive. Les énoncés sont souvent courts, rédigés de manière non scolaire et présentés parfois sous forme d'énigmes ; ils ne contiennent aucune indication de méthode et ne précisent pas le champ de connaissances mises en jeu.

L'objectif est de donner aux élèves l'occasion de faire des mathématiques autrement. Ils peuvent alors réinvestir leur savoir scientifique dans un cadre inhabituel pour eux. Nous développons ainsi leur curiosité, le sens du travail en équipe, le goût pour la recherche. Nous participons ainsi à la promotion de notre discipline auprès des jeunes, des enseignants, des décideurs, de nos partenaires et des médias.

Le Rallye permet aux professeurs des lycées de proposer dans leurs classes, grâce aux rapports des années précédentes, des activités scientifiques différentes de l'entraînement usuel : traduction d'un énoncé en langage mathématique, recherche d'outils possibles, résolution, rédaction d'une solution avec le souci d'une argumentation précise et rigoureuse.

Les élèves, au départ parfois un peu déconcertés par ces énoncés où la démarche n'est pas imposée, trouvent du plaisir à élaborer une construction intellectuelle et par là même gagnent en autonomie de pensée. L'élaboration des sujets suppose une bonne maîtrise de la didactique des mathématiques : l'IREM fournit les éléments nécessaires à ce travail.
Avec la participation au concours commence une série d'activités, extra-scolaires souvent, qui aiguisent la curiosité mathématique des jeunes, encouragent leur esprit d'initiative et créent un climat favorable à l'ouverture culturelle. Cette incitation au développement de la culture scientifique s’inscrit entièrement dans le cadre des directives actuelles à ce sujet.

En Première, quatorze binômes et un monôme sont primés : trois premiers prix, quatre deuxièmes prix et huit troisièmes prix.

En Terminale, quatorze binômes ont été sélectionnés : un prix exceptionnel, deux premiers prix, quatre deuxièmes prix et sept troisièmes prix.

Nous renvoyons à la suite de ce rapport pour des commentaires plus détaillés sur les exercices.

La remise des prix a lieu au Conseil Départemental du Bas-Rhin. Elle est suivie d'une réception en l’honneur des lauréats à l’Hôtel du Département.

Remerciements

Nous remercions vivement les donateurs qui nous permettent de récompenser les lauréats par des livres, des calculatrices, du matériel informatique pour fêter la 47ème édition :

- ◊ L'Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques de Strasbourg
- ◊ L'Université de Strasbourg
- ◊ L'UFR de Mathématique et d'Informatique
- ◊ L'IREM de Strasbourg
- ◊ L'A.P.M.E.P.
- ◊ Le Conseil Départemental du Bas-Rhin
- ◊ Le Conseil Départemental du Haut-Rhin
- ◊ La Région Grand Est
- ◊ La Ville d'Altkirch
- ◊ La Ville de Barr
- ◊ La Ville d'Obernai
- ◊ La Ville de St Louis
- ◊ La société CASIO
- ◊ La société NUMWORKS

Nous remercions tout particulièrement le Conseil Départemental du Bas-Rhin pour son soutien et la mise à disposition de la salle des séances plénières pour la cérémonie de remise des prix.

A tous les lauréats du Rallye Mathématique d'Alsace de Première

Le Rallye Mathématique d'Alsace
et
ANIMATH (Association pour l'animation des Mathématiques)

Vous proposent de participer à des stages de préparation aux Olympiades Internationales de Mathématiques.

Pour obtenir des informations sur toutes les activités proposées, vous pouvez consulter le site d'Animath **:** http://www.animath.fr

Nous vous souhaitons une bonne poursuite mathématique de vos études.

Palmarès des Premières 2019

Premier prix

- ✓ CRABEIL Martin et MOUSSAOUI Ilyas
  Professeurs : Mme Bachschmidt et Mme Stupfler, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ MARTIN Hugo et ZORLUER Gwénaël
  Professeur : Mme Meyer, Lycée Koeberlé, Sélestat

- ✓ KLINGLER Sophie et TOTSCHNIG Matthias
  Professeur : M. Rullière, Lycée Français, Berlin

Deuxième prix

- ✓ MAGHOUT Adam
  Professeur : Mme Fuchs, Lycée Jean Mermoz, Saint-Louis

- ✓ LIZEE Maxime et RAUGEL Jade
  Professeur : Mme Audéoud, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ GLESSER Olivier et LIENHARD Jean
  Professeur : M. Wintz, Lycée Adrien Zeller, Bouxwiller

- ✓ BOUYER Ivan et EHRISMANN Sébastien
  Professeur : Mme Bernhardt-Gerard, Lycée Marie Curie, Strasbourg

Troisième prix

- ✓ ROBERT Auxence et WEIL Joachim
  Professeurs : Mme Stupfler et Mme Audéoud, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ ALCICEK Sinem et GAGNOL Cécile
  Professeur : Mme Bernhardt-Gerard, Lycée Marie Curie, Strasbourg

- ✓ NOACCO Lise et STOLL Julie
  Professeur : Mme Traband, Lycée Marcel Rudloff, Strasbourg

- ✓ BEN SHEM Michael et MALINOWSKI Ivo
  Professeurs : M. Bensaid et M. Czerniak, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ BOUDDOUR Salma et SCHNEIDER Aline
  Professeur : Mme Burck, Lycée Marcel Rudloff, Strasbourg

- ✓ BLATZ Victor et CRON Léo
  Professeur : Mme Zerr, Lycée Jean Mermoz, Saint-Louis

- ✓ COUSSEDIERE Jeanne et ROSSELLI Jacques
  Professeur : M. Kientz, Lycée Franco-Allemand, Fribourg

- ✓ RIETTE Alexis et SAINT-MEZARD Paul
  Professeur : Mme Higelin, Lycée Don Bosco, Landser

Palmarès des Terminales 2019

Prix exceptionnel

- ✓ BARLOY Renaud et WEBER Jean-Nicolas
  Professeur : M. Alati, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

Premier prix

- ✓ BURGUN Adrien et WAGNER Clément
  Professeurs : Mme Wendel et M. Matzinger, Lycée Stanislas, Wissembourg

- ✓ METZ Thibaut et SCHRECKENBERG Hugo
  Professeur : Mme Mariani, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

Deuxième prix

- ✓ CASSET-BILLIEN Ménolly et STEFAN Camille
  Professeur : M. Potin, Lycée Pasteur, Strasbourg

- ✓ ITTEL Lydie et MESSAOUDI Zahra
  Professeur : M. Bonifas, Lycée Henri Meck, Molsheim

- ✓ GUEUDET Baptiste et WAGNER François
  Professeur : Mme Mariani, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ CLAUSS Julien et HELLER Théo
  Professeur : Mme Saint Martin, Lycée Freppel, Obernai

Troisième prix

- ✓ FERREIRA Léo et SCHNEIDER Adrien
  Professeur : M. Schwartz, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ SCHEECK Léa et SONVICO Léo
  Professeurs : M. Bonhomme et Mme Hirn, Lycée Marguerite Yourcenar, Erstein

- ✓ CANESSE Alexi et NUNES Steve
  Professeur : Mme Reich, Lycée Blaise Pascal, Colmar

- ✓ BÖGLI Joël et BOUYER Gatien
  Professeurs : M. Seckinger et M. Malingrey, Lycée Marie Curie, Strasbourg

- ✓ BELHOUARI Séhane et LIN Laurent
  Professeur : M. Potin, Lycée Pasteur, Strasbourg

- ✓ HEITZ Charles et WEHRUNG-MONTPEZAT Jonas
  Professeur : M. Alilouch, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ LEISSER Matylde et MARTIN Olivier
  Professeur : Mme Meyer, Lycée Frédéric Kirschleger, Munster

RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 2019
47ème édition

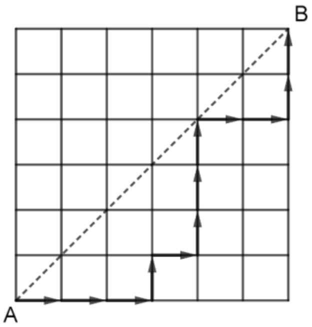
PREMIERES
Mercredi 27 mars 2019

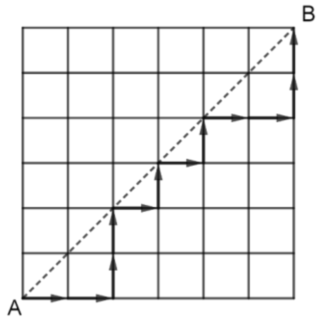
Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également de manière très lisible leur adresse postale et leur mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

Il est strictement interdit d'utiliser un téléphone portable, une tablette, un ordinateur personnel ou disponible dans la salle de classe. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 :
On considère une grille carrée comportant 6×6 carrés. Un chemin croissant sur cette grille est un chemin constitué d'arêtes dirigées vers la droite ou vers le haut.
Combien existe-t-il de chemins croissants partant de A, arrivant en B, et qui restent sous ou au niveau de la diagonale ?
Voici deux exemples de tels chemins :

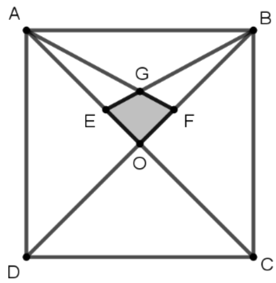




Exercice 2 :
$ABCD$ est un carré de centre O et de côté 4.
Les points E et F sont situés respectivement sur les segments $[OA]$ et $[OB]$ tels que $OE = OF$.

On pose $\frac{OE}{OA} = x$.

Déterminer la valeur de x telle que l'aire du quadrilatère $OEGF$ soit égale à 1.



Exercice 3 :
On souhaite remplir le tableau ci-dessous avec des entiers naturels en respectant les deux règles suivantes :

- Chaque ligne contient des entiers naturels consécutifs.
- Sur chaque ligne, la somme des carrés des nombres inscrits dans les cases blanches est égale à la somme des carrés des nombres inscrits dans les cases grises.

			3	**4**	**5**			

Si l'on continue à remplir un tel tableau en ajoutant des lignes, l'une des cases contiendra-t-elle le nombre 2019 ?

RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 2019
47ème édition

TERMINALES
Mercredi 6 mars 2019

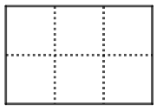
Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également de manière très lisible leur adresse postale et leur mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

Il est strictement interdit d'utiliser un téléphone portable, une tablette, un ordinateur personnel ou disponible dans la salle de classe. L'usage de la calculatrice est autorisé.

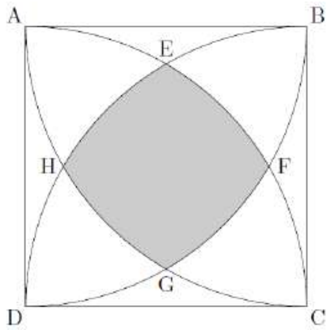
Exercice 1 :
Un rectangle a pour dimensions deux nombres entiers non nuls n et p.

1. Combien de rectangles ayant pour dimensions deux nombres entiers contient-il ?
   Par exemple un rectangle de dimensions 3 et 2 contient 18 rectangles.
   (8 carrés et 10 rectangles non carrés)



2. Si l'on suppose que les entiers n et p sont tels que $np = 2010$, quelles sont les valeurs de n et p qui minimisent le nombre de rectangles obtenu à la question 1 ?
3. Si l'on suppose que les entiers n et p sont tels que $n + p = 2019$, quelles sont les valeurs de n et p qui maximisent le nombre de rectangles obtenu à la question 1 ?

Exercice 2 :
$ABCD$ est un carré de côté 1 :



1. Calculer le périmètre du quadrilatère curviligne $EFGH$.
2. Calculer l'aire du quadrilatère curviligne $EFGH$.

Exercice 3 :
Pour noter ses mots de passe numériques, Louis a décidé d'inventer un code secret.
Chaque nombre entier naturel n est codé par un entier supérieur ou égal à n, qui sera noté $c(n)$.
Ce code vérifie les propriétés suivantes :

- si $a > b$, alors $c(a) > c(b)$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c\big(c(n)\big) = 3n$.

Un tel code existe-t-il ?
Si oui, quelles sont les valeurs possibles de $c(100)$? Et de $c(2019)$?

Commentaires pour le Rallye Mathématique d'Alsace 2019

Cette année, 381 binômes représentant 410 élèves de première et 352 élèves de terminale (il y avait aussi quelques monômes) ont participé aux épreuves du Rallye.
La participation est donc un peu inférieure à celle de l'édition précédente (76 candidats en moins).

Nous sommes heureux de constater que les élèves font preuve de connaissances et d'initiatives, et que les méthodes qu'ils utilisent pour résoudre les exercices sont diverses, variées, parfois très originales. Ceci est très encourageant pour les lycéens de l'académie.
Par contre, nous sommes choqués face à une orthographe de plus en plus déficiente (on peut trouver dans certaines copies un même mot écrit trois fois avec trois orthographes différentes ou une orthographe complètement fantaisiste et phonétique). Il est aussi regrettable que les élèves n'aient pas pris l'habitude (ou ne voient pas la nécessité) de simplifier leurs calculs. Nous continuons à relever que trop d'élèves n'apportent aucun soin à la présentation de leur travail : il y a des ratures à toutes les lignes, les instruments de construction tels que la règle et le compas ne sont pas utilisés : les figures sont tracées à main levée.
C'est d'autant plus dommage que la qualité mathématique des copies est souvent d'un très bon niveau, que les exercices sont abordés par un nombre important de candidats et que les méthodes proposées ont parfois fait l'admiration de l'équipe des correcteurs.

En première, les premiers prix ont très bien résolu deux exercices et parfois donné des éléments dans le troisième.
Les deuxièmes prix ont très bien traité un exercice et ont résolu presque complètement un deuxième exercice ou donné plusieurs éléments dans les deux autres.
Les troisièmes prix ont bien résolu un exercice et donné quelques éléments dans un deuxième exercice.

En terminale, le prix exceptionnel a trouvé une solution complète ou presque aux trois exercices, les premiers prix ont donné une solution exacte à deux exercices et ont très bien avancé dans le troisième ou donné des éléments.
Les deuxièmes prix ont très bien résolu un exercice et ont donné beaucoup d'éléments dans les deux autres.
Les troisièmes prix ont bien résolu un exercice et donné des éléments dans un deuxième exercice.

Pour chacun des exercices, nous joignons à ce rapport une résolution qui nous a semblé pertinente, choisie parmi les bonnes solutions rencontrées.

Compte–rendu de l’épreuve de Première

Les candidats à l’épreuve du Rallye Mathématique d’Alsace de Première avaient trois exercices à traiter durant quatre heures. Dans le premier exercice, il s’agissait de dénombrer des chemins sur un quadrillage. Le deuxième exercice portait sur un calcul d’aire. Dans le troisième exercice, on exposait une manière de remplir un tableau avec des entiers vérifiant une propriété et il fallait déterminer si le nombre 2019 pouvait être contenu dans un tel tableau.
Chacun des exercices est résolu correctement dans des copies.

Exercice 1 : Cet exercice a beaucoup plu aux élèves. Il est plutôt bien réussi. On a pu lire quelques méthodes originales et une réflexion intéressante dans certaines copies.

Exercice 2 : Cet exercice est le moins bien réussi des trois. Dans un très grand nombre de copies on peut trouver un début de résolution qui s’arrête très vite. Les élèves semblent moins à l’aise dans un problème de nature géométrique : on peut légitimement s’interroger quant à la responsabilité des réformes successives qui n’ont fait qu’appauvrir cette dimension des mathématiques tellement riche et plaisante.

Exercice 3 : Les candidats constatent une progression des termes dans le tableau qu’ils n’arrivent pas à prouver (ou n’essayent pas de prouver). La nécessité de prouver tous les résultats ne leur semble pas forcément évidente.

Compte–rendu de l'épreuve de Terminale

L'épreuve du Rallye Mathématique d'Alsace de Terminale comprend, comme à l'habitude, trois exercices. Dans le premier exercice, on demandait de dénombrer les rectangles de dimensions entières contenus dans un rectangle de dimensions n et p, puis d'optimiser ce nombre sous différentes contraintes. Dans le deuxième exercice, il s'agissait de calculer le périmètre et l'aire d'un quadrilatère curviligne. Le troisième exercice portait sur l'existence et la génération d'une fonction définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Les deux premiers exercices ont été bien compris et bien abordés. Mais le troisième exercice a posé plus de problèmes : la formule donnée comportait une composition de fonctions, ce qui a soit engendré de nombreuses erreurs dès le début du traitement de l'exercice, soit bloqué les candidats. On peut noter la persévérance et l'originalité de beaucoup d'élèves. Chacun des exercices est résolu correctement dans des copies.

Exercice 1 : Pour la première question, les méthodes données ont été diverses, une a été particulièrement efficace. Les candidats fournissent des explications qui manquent parfois de clarté. La deuxième question est correctement résolue, mais l'on regrette toutefois que certains candidats aient besoin d'un programme pour trouver les diviseurs de 2010… Il serait souhaitable que les algorithmes proposés soient écrits en langage naturel et non dans le langage de la calculatrice. La réponse donnée à la troisième question est souvent fausse, parfois juste mais rarement justifiée.

Exercice 2 : C'est l'exercice qui a eu le plus de succès. Le calcul du périmètre est juste, mais on note tout de même que beaucoup d'élèves admettent le partage de l'arc de cercle en trois parties de même longueur, alors que la démonstration n'était pas difficile. Lors du calcul de l'aire du quadrilatère, les élèves utilisent tous leur calculatrice performante, que ce soit pour simplifier des calculs avec racine carrée (alors que la simplification est loin d'être triviale) ou pour utiliser la valeur exacte de $sin(\pi/12)$ qui n'est pas une valeur remarquable…

Exercice 3 : Cet exercice a été le moins bien réussi des trois. Il a été rarement compris et bien abordé. Beaucoup d'élèves proposent $c(x) = \sqrt{3}x$ qui n'est pas une fonction à valeurs entières. Plusieurs élèves ont trouvé la valeur de $c(100)$ et deux binômes ont également trouvé la valeur de $c(2019)$.

Copies des Premières

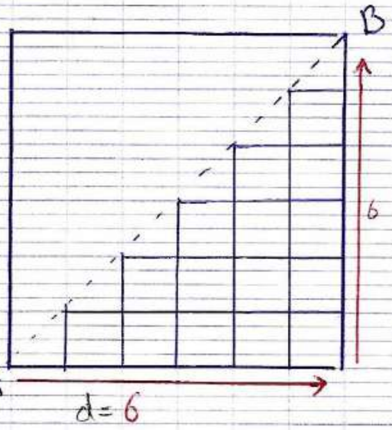
BOUDDOUR Salma et SCHNEIDER Aline
Lycée Marcel Rudloff, Strasbourg
Exercice n°1

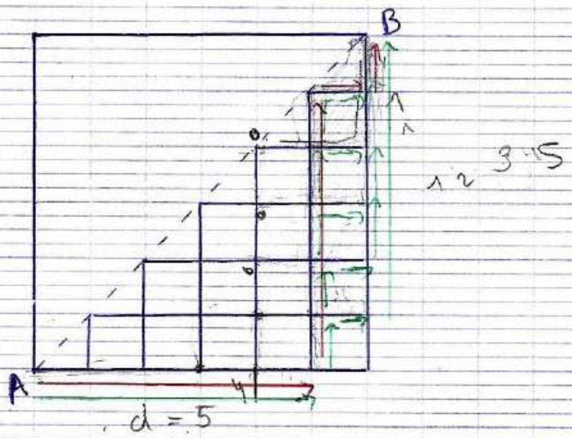
• On recherche les chemins croissants de A à B.

On conjecture que plus le premier déplacement vers la droite est grand (1 arête à 6 arêtes vers la droite), moins il y a de chemins possibles :

recherche au brouillon

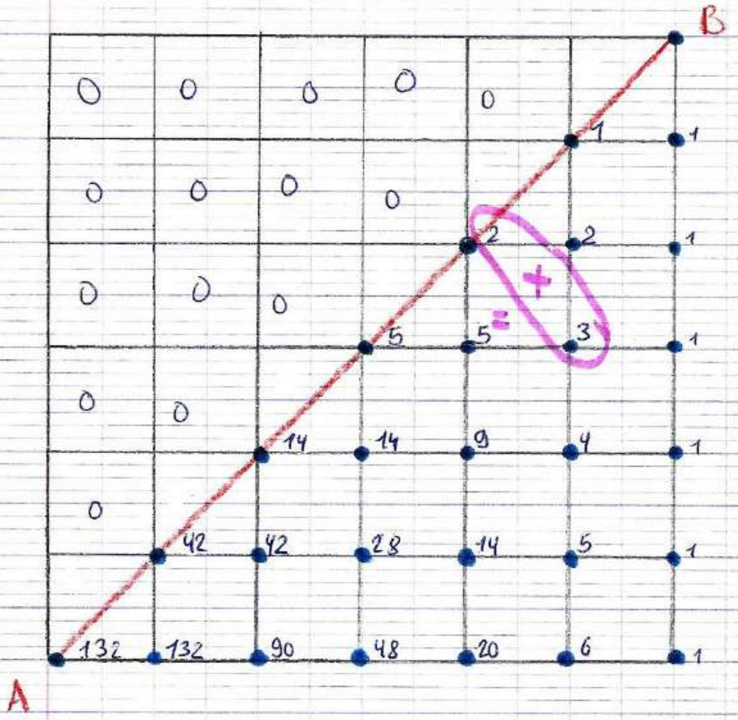
ex :





On note d un déplacement vers la droite et h un déplacement vers le haut d'une arête.
On note c le nombre de chemins possibles

Démonstration :



On constate un lien logique entre les différents nombres.

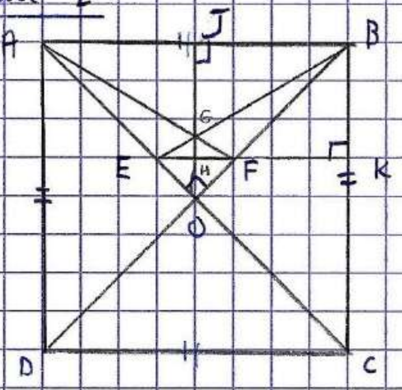
* Puisqu'il est possible
pour cette colonne de déterminer
les chemins rapidement.

On note dans chaque carreau le nombre de chemins possibles pour aller au point B en partant du point en bas à gauche du carreau. On remplit ce tableau en partant de la dernière colonne.*
On constate que pour déterminer le nombre de chemins possibles à partir d'un point, il suffit d'additionner le nombre de chemins possible, de la case à sa droite et au-dessus. Ce qui est logique avec le fait que seul 2 déplacements sont autorisés vers la droite ou vers le haut.

Pour conclure, il y a 132 chemins croissants possibles pour aller du point A au point B.

MARTIN Hugo et ZORLUER Gwénaël
Lycée Koeberlé, Sélestat
Exercice n°2

Exercice 2



Le triangle ABO est rectangle en O et (EF)//(AB)

$x = \frac{OE}{OA} = \frac{OF}{OB} = \frac{EF}{AB}$

donc : $EF = x \times AB$
$= x \times 4 = 4x$

On utilise le théorème de Pythagore dans AOB :

$OA = OB = \sqrt{8}$

$OE = OF = x \times OA$
$= \sqrt{8} \times x$

$EH = FH = \frac{EF}{2} = 2x$

On utilise Pythagore dans EOH rectangle en H :

$OH = \sqrt{OE^2 - EH^2}$
$= 2x$

Donc aire EOF $= \frac{\text{base} \times h}{2}$
$= \frac{EF \times OH}{2} = 4x^2$

On place le point K sur [EF) de façon à obtenir EKB, rectangle en K.

On utilise Thalès dans ce triangle :

$BK = \frac{BC}{2} - OH = 2 - 2x$

$EK = \frac{AB}{2} + EH = 2 + 2x$ et (GH)//(BK)

On a donc la relation $\frac{EK}{EH} = \frac{BK}{GH}$ donc $GH = \frac{BK \times EH}{EK}$

$= \frac{2x(2-2x)}{2+2x} = \frac{4x - 4x^2}{2+2x}$

On peut donc trouver aire EGF $= \frac{EF \times GH}{2}$
$= \frac{16x^2 - 16x^3}{4+4x}$

On peut trouver l'aire de EGFO en additionant les aires des triangles EGF et EOF : aire EGFO $= 4x^2 + \frac{16x^2 - 16x^3}{4+4x} = \frac{32x^2}{4+4x}$

On résout : $\frac{32x^2}{4+4x} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{32x^2}{4+4x} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{32x^2 - 4x - 4}{4+4x} = 0$ donc $32x^2 - 4x - 4 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 528$

$x_1 = \frac{1-\sqrt{33}}{16} \simeq -0{,}30$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{33}}{16} \simeq 0{,}42$

On exclut x_1 car la valeure ne peut pas être négative.

MAGHOUT Adam
Lycée Jean Mermoz, Saint-Louis
Exercice n°3

Exercice 3 :

J'ai d'abord remarqué qu'à chaque ligne il y avait une case blanche de plus qu'il y en avait de grises.

J'ai nommé n le premier nombre des entiers naturels consécutifs, c'est-à-dire le nombre en tête de ligne. J'ai donc comme nombres :

n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$	etc.

Chaque ligne il y a une case blanche de plus, et une de grise aussi.
J'ai nommé k le nombre de cases ~~grises~~ blanches par ligne. Par exemple ici :

3	4	5

$\underbrace{3 \quad 4}_{k=2}$

La somme des carrés des nombres inscrits dans les cases blanches s'écrit donc :

$$kn^2 + \sum_{i=0}^{k-1} 2in + \sum_{i=0}^{k-1} i^2$$

comme cet exemple le prouve ; où $k=3$

$$\begin{aligned} n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 &= n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 \\ &= 3n^2 + 0n + 2n + 4n + 0 + 1 + 4 \\ &= kn^2 + \sum_{i=0}^{k-1} 2in + \sum_{i=0}^{k-1} i^2 \end{aligned}$$

La somme des carrés des nombres inscrits dans les cases grises s'écrit

$$(k-1)n^2 + \sum_{i=k}^{2k-2} 2in + \sum_{i=k}^{2k-2} i^2$$

J'ai ensuite remplacé k par plusieurs valeurs pour vérifier si 2019 ferait partie d'une des lignes en résolvant l'équation suivante :

$$kn^2 + \sum_{i=0}^{k-1} 2in + \sum_{i=0}^{k-1} i^2 = (k-1)n^2 + \sum_{i=k}^{2k-2} 2in + \sum_{i=k}^{2k-2} i^2$$

Par exemple si $k = 20$ on a

$$20n^2 + 380n + 2470 = 19n^2 + 1102n + 16549$$

$$n^2 - 722n - 1407\cancel{7}\,9 = 0$$

$$\Delta = \cancel{[illegible]}$$

$$x_1 = 741 \quad \text{et} \quad x_2 = -19$$

En répétant cette opération, j'espère arriver à 2019

Pour $k = 25$, j'ai $n = 1176$ et $n = -24$

Pour $k = 22$, j'ai $n = 903$ et $n = -21$.

Pour $k = 22$, j'.

Or, si : $k = 32$, alors $n = 1953$ ou $n = -31$

et si $n = 1953$, le dernier nombre de la ligne est $1953 + 32 + 31 = 2016$

et si $k = 33$, alors $n = 2080$, ou $n = -32$

et si $n = 2080$, alors 2019 n'est pas compris dans la ligne.

Je remarque que plus k augmente, plus n augmente. 2019 étant compris entre 2016 et 2080, il n'y aura aucune case contenant le nombre 2019.

Autre solution :

On commence par montrer qu'il n'y a qu'une seule façon de remplir un tel tableau

Sur la première ligne, on note x le nombre central :

$$(x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad ou \quad x = 4$$

Sur la deuxième ligne, on note x le nombre central :

$$(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 12x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad ou \quad x = 12$$

Sur la troisième ligne, on note x le nombre central :

$$x^2 - 24x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad ou \quad x = 24$$

Sur la $n - ième$ ligne, on note x le nombre central :

$$x^2 - 4(1 + 2 + \cdots + n)x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad ou \quad x = 4(1 + 2 + \cdots + n)$$
$$x = 2n(n+1)$$

La $n - ième$ ligne comporte les $2n + 1$ entiers consécutifs suivants :

$$2n(n+1) - n, \ldots, 2n(n+1) - 1, 2n(n+1), 2n(n+1) + 1, \ldots, 2n(n+1) + n$$

Il s'agit donc de savoir s'il existe n tel que $2n(n+1) - n \leq 2019 \leq 2n(n+1) + n$

$$\begin{aligned} 2n(n+1) - n \leq 2019 \leq 2n(n+1) + n \quad & \Leftrightarrow \quad 2n^2 + n \leq 2019 \leq 2n^2 + 3n \\ & \Rightarrow \quad 2n^2 < 2019 < 2(n+1)^2 \\ & \Rightarrow \quad n^2 < 1009{,}5 < (n+1)^2 \\ & \Rightarrow \quad n < \sqrt{1009{,}5} < n + 1 \\ & \Rightarrow \quad n = 31 \end{aligned}$$

Si l'une des cases contient le nombre 2019, elle sera sans la 31ème ligne

Le premier nombre de la 31ème ligne est : $2 \times 31^2 + 31 = 1953$

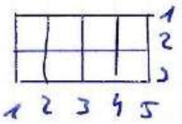
Le dernier nombre de la 31ème ligne est : $2 \times 31^2 + 3 \times 31 = 2015$

Il n'y a qu'une seule façon de remplir un tel tableau : le nombre 2019 n'apparait dans aucune case

Copies des Terminales

GUEUDET Baptiste et WAGNER François
Gymnase Jean Sturm, Strasbourg
Exercice n°1
Question 1 :

1) Un rectangle $n \times p$ possède $(n+1)$ "bords" verticaux et $(p+1)$ "bords" horizontaux. Soit R le nombre de rectangles



$n=2 \rightarrow 3$ bords
$p=4 \rightarrow 5$ bords

Chaque rectangle est défini par ses bords.
Donc les choix des bords représente l'ensemble des rectangles. Les choix possibles sont défini comme suit, chaque rectangle ayant deux bords dans chaque dimension

$$R = {}_{n+1}C_2 \times {}_{p+1}C_2$$

$$R = \frac{(n+1)!}{(n-1)! \times 2!} \times \frac{(p+1)!}{(p-1)! \times 2!} = \frac{n(n+1) \times p(p+1)}{2! \times 2!}$$

$$R = \frac{n(n+1) \times p(p+1)}{4}$$

HEITZ Charles et WEHRUNG-MONTPEZAT Jonas
Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

Exercice n°1

Questions 2 et 3 :

2) $R = \dfrac{(mp)^2 + mp + m^2p + p^2m}{4} = \dfrac{mp}{4}(mp + 1 + m + p)$

Ainsi, si $mp = 2010$, R est minimale lorsque $mp + m + p + 1$ est minimale
$\Leftrightarrow 2011 + m + p$ est minimale $\Leftrightarrow m + p$ est minimale.
m et p sont donc le couple de diviseurs de 2010 dont la somme est minimale.

$2010 = 1005 \times 2 = 670 \times 3 = 402 \times 5 = 67 \times 30 = 335 \times 6 = 15 \times 134 = 201 \times 10 = 2010 \times 1$

La division en produit de facteur premier $2010 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1 \times 67^1$ indique $(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)$ diviseurs. Les 8 couples de diviseurs ci-dessus sont donc les seuls. 67 et 30 est le couple dont la somme 97 est la plus faible. Donc $m = 67$ et $p = 30$ ou $p = 67$ et $m = 30$ (ce qui revient au même) sont les valeurs qui minimisent R le nombre de rectangles de la question 1.

3) $R = \dfrac{mp}{4}(mp + 1 + m + p)$ et $m + p = 2019$, donc $R = \dfrac{mp}{4}(mp + 2020)$,
Pour maximiser le nombre de rectangles, il faut maximiser $m \times p$.
Posons $x = \dfrac{2019}{2}$ et $x + y = m$, donc $x - y = p$
avec $y \in \mathbb{R}$, $m + p = x - y + x + y = 2x = 2019$
et $mp = (x - y)(x + y) = x^2 - y^2$, qui est maximale lorsque y est minimal, donc m et p doivent être le plus proche possible de $\dfrac{2019}{2} = 1009{,}5$, donc
$m = 1009$ et $p = 1010$

BÖGLI Joël et BOUYER Gatien
Lycée Marie Curie, Strasbourg
Exercice n°2

Question 1

1 • La longueur DE est un rayon du cercle de rayon 1 et de centre D.
La longueur CE est un rayon du cercle de rayon 1 et de centre C.
On sait que $CD = 1$.
Donc CDE est un triangle équilatéral de coté 1.
On sait que dans un triangle équilatéral, les angles mesurent $\frac{\pi}{3}$ rad. Et dans un carré, les angles mesurent $\frac{\pi}{2}$ rad.

2 • Ainsi $\widehat{ADC} = \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{EDC} = \frac{\pi}{3}$

or $\widehat{ADC} = \widehat{EDC} + \widehat{ADE} \Leftrightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ADC} - \widehat{EDC} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ rad

3 • Il nous faut avoir l'angle $\widehat{FDC}$ pour trouver $\widehat{EDF}$.
(par la relation $\widehat{ADC} = \widehat{ADE} + \widehat{EDF} + \widehat{FDC}$)
On prend alors le triangle équilatéral AFD
(même raisonnement que pour le 1er •)
On a $\widehat{ADF} = \frac{\pi}{3}$ rad. et $\widehat{ADC} = \frac{\pi}{2}$ rad.

$\widehat{ADC} = \widehat{ADF} + \widehat{FDC} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + \widehat{FDC} \Leftrightarrow \widehat{FDC} = \frac{\pi}{6}$ rad.

On peut maintenant utiliser la relation

$\widehat{ADC} = \widehat{ADE} + \widehat{EDF} + \widehat{FDC}$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + \widehat{EDF} + \frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \widehat{EDF} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ rad.

4. • Nous avons l'angle $\widehat{EDF} = \frac{\pi}{6}$ rad.
L'arc de cercle EF est donc un bout du cercle de rayon 1 de centre D. Par proportionnalité :

un cercle complet : 2π rad.

l'arc de cercle EF : $\frac{\pi}{6}$ rad.

L'arc de cercle EF est un douzième du cercle entier

Or le périmètre du cercle entier (de rayon 1) est $2\pi \times R = 2\pi$.

Un douzième de 2π est $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$.

Donc la distance courbe $\boxed{EF \text{ est } \frac{\pi}{6}}$

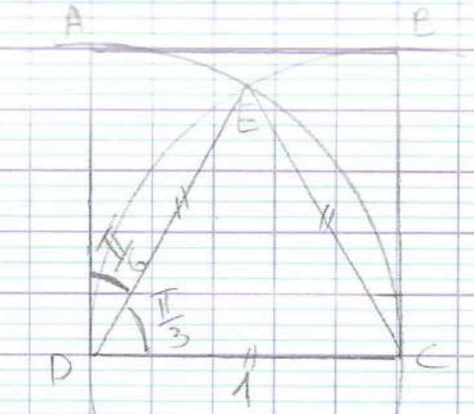


Illustration des • 1 et 2

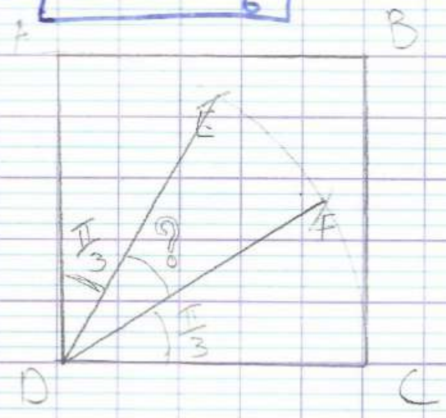


Illustration du • 3

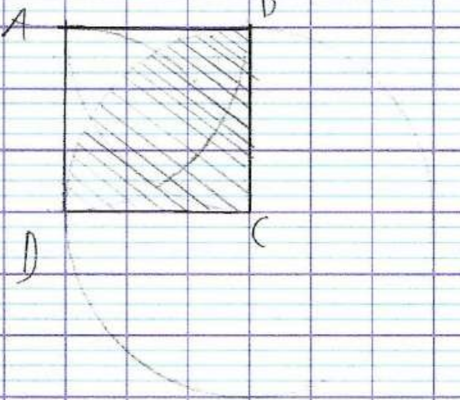
La figure est symétrique (par rapport au centre du carré)
Donc nous pouvons procéder de la même façon pour les longueurs courbes de FG, GH et HE.

$EF = FG = GH = HE = \frac{\pi}{6}$.

Donc le périmètre du quadrilatère curviligne EFGH est de $4 \times \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$.

Question 2

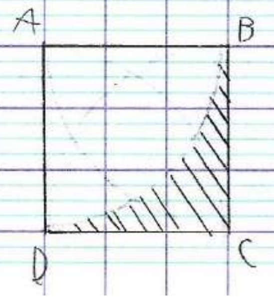
L'aire du cercle de centre C et de rayon 1 est égale à $\pi \times R^2 = \pi$



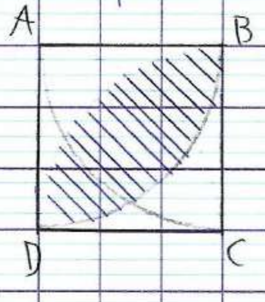
L'aire hachuré est donc égal à l'aire d'un quart de cercle, c'est à dire $\frac{\pi}{4}$

On soustrait ensuite à ce quart de cercle la partie hachuré en noir (N), qui est égale à l'aire du carré moins l'aire du quart de cercle :

$$\mathcal{A}_N = \mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{\text{quart de cercle}} = 1 \times 1 - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$



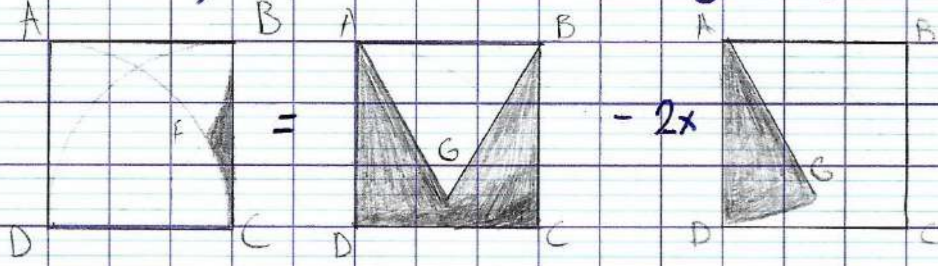
Par ailleurs, l'aire de la partie hachurée en bleu (B) est égale à l'aire du quart de cercle moins l'aire de la partie hachurée en noir



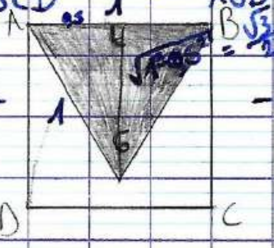
$$\mathcal{A}_B = \mathcal{A}_{\text{quart de cercle}} - \mathcal{A}_N$$

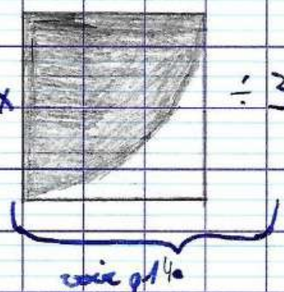
$$\mathcal{A}_B = \frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$$

D'autre part, l'aire du triangle en partie courbe est



$$A_{BFC} = A_{AGBCD} - 2\,A_{AGD}$$

$$= A_{ABCD} -$$ 

$$-2\times$$ 

$$\div 3$$

$$= 1 - \frac{1\times\sqrt{\frac{3}{4}}}{2} - 2\times\frac{\pi}{4}\div 3$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}$$

Et aussi : $A_N = 2\times A_{BFC} + A_{BEF}$

donc $A_{BEF} = A_N - 2\times A_{BFC} = 1 - \frac{\pi}{4} - 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$

$$= 1 - \frac{\pi}{4} - 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}$$

Or, $A_{EFGH} = A_B - 2\times A_{BEF}$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 - 2\left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 + 2 - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}$$

L'aire du quadrilatère curviligne EFGH est donc $\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}$.

CASSET-BILLIEN Ménolly et STEFAN Camille
Lycée Pasteur, Strasbourg

Exercice n°3

On sait que $c(n) \in \mathbb{N}$; $c(n) \geqslant n$, que la fonction est strictement croissante, et que $c \circ c(n) = 3 \times n$

on établit un tableau des valeurs possibles selon les conditions annoncées

n	c(n)	c(c(n)) = 3n
0	0	0
1	~~1~~ 2 ~~3~~	3
2	~~2~~ 3 ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~	6
3	~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ 6 ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~	9
4	~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ ~~11~~ ~~12~~	12
5	~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ 8 ~~9~~ ~~10~~ ~~11~~ ~~12~~ ~~13~~ ~~14~~ ~~15~~	15
6	~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ 9 ~~10~~ ~~11~~ ~~12~~ ~~13~~ ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ ~~17~~ ~~18~~	18

On peut d'ores et déjà éliminer des valeurs du tableau (on les barre en rouge)

Par exemple dans la deuxième ligne, on sait que $c(c(1)) = 3$.

Donc $c(1) \neq 1$, en effet sinon on aurait $c(c(1)) = c(1) = 1 = 3$ or $1 \neq 3$ Donc c'est impossible, on généralise à $c(n) \neq n$, en effet sinon $c(c(n)) = c(n) = n = 3n$ ce qui est faux $\forall n \neq 0$

De même $c(n)$ ne peut pas avoir la valeur maximale, car sinon on a $c(n) = c(c(n))$, or c'est impossible car la fonction est strictement croissante on sait donc que $c(1) = 2$

on sait que $c(c(1)) = 3 \Leftrightarrow c(2) = 3$
on peut donc éliminer toutes les autres valeurs sur la troisième ligne

On sait grâce à cette troisième ligne que $c(c(2)) = c(3) = 6$
on élimine les valeurs impossibles sur la quatrième ligne

on sait que $c(6) = 9$ grâce à la quatrième ligne, on élimine donc les valeurs impossibles sur la septième ligne

or comme la suite est strictement croissante, on peut éliminer les valeurs supérieures ou égales à 9 pour $c(5)$, et donc les valeurs supérieures ou égales à $9-1$ pour $c(4)$

comme $c(3) = 6$, et que $c(4)$ est strictement supérieure à $c(3)$, la seule valeur possible restante pour $c(4)$ est 7

donc la seule valeur possible pour $c(5)$ est 8.

on obtient donc : $c(0) = 0$

$c(1) = 2$

$c(2) = 3$

$c(3) = 6$

$c(4) = 7$

$c(5) = 8$

$c(6) = 9$

$c(7) = 3 \times 4 = 12$

$c(8) = 3 \times 5 = 15$

$c(9) = 3 \times 6 = 18$

Un tel codé peut exister car un entier n est codé par un unique autre entier, et car si $a > b$ alors $c(a) > c(b)$; et que réciproquement, chaque nombre codé n'a qu'un seul antécédent.

Par une suite de déductions similaires, on obtient les valeurs suivantes :

$c(10) = 19$	$c \circ c(10) = 30$	$c(21) = 36$	$c \circ c(21) = 63$
$c(11) = 20$	$c \circ c(11) = 33$	$c(22) = 39$	$c \circ c(22) = 66$
$c(12) = 21$	$c \circ c(12) = 36$	$c(23) = 42$	$c \circ c(23) = 69$
$c(13) = 22$	$c \circ c(13) = 39$	$c(24) = 45$	$c \circ c(24) = 72$
$c(14) = 23$	$c \circ c(14) = 42$	$c(25) = 48$	$c \circ c(25) = 75$
$c(15) = 24$	$c \circ c(15) = 45$	$c(26) = 51$	$c \circ c(26) = 78$
$c(16) = 25$	$c \circ c(16) = 48$	$c(27) = 54$	$c \circ c(27) = 81$
$c(17) = 26$	$c \circ c(17) = 51$	$c(28) = 55$	$c \circ c(28) = 84$
$c(18) = 27$	$c \circ c(18) = 54$	$c(29) = 56$	$c \circ c(29) = 87$
$c(19) = 30$	$c \circ c(19) = 57$	$c(30) = 57$	$c \circ c(36) = 90$
$c(20) = 33$	$c \circ c(20) = 60$	$c(31) = 58$	$c \circ c(31) = 93$

$c(32)=59$	$coc(32)=96$	$c(40)=67$	$coc(40)=120$
$c(33)=60$	$coc(33)=99$	$c(41)=68$	$coc(41)=123$
$c(34)=61$	$coc(34)=102$	$c(42)=69$	$coc(42)=126$
$c(35)=62$	$coc(35)=105$	$c(43)=70$	$coc(43)=129$
$c(36)=63$	$coc(36)=108$	$c(44)=71$	$coc(44)=132$
$c(37)=64$	$coc(37)=111$	$c(45)=72$	$coc(45)=135$
$c(38)=65$	$coc(38)=114$	$c(46)=73$	$coc(46)=138$
$c(39)=66$	$coc(39)=117$	$c(47)=74$	$coc(47)=141$
		$c(48)=75$	$coc(48)=144$

Ainsi $c(60)=99 \quad c(99)=3.60=180$
$c(\underset{61}{62})=102 \quad c(102)=3.6\underset{1}{2}=183$

On en déduit, comme il n'y a que deux nombres entre 99 et 102, 100 et 101 ; et deux également entre 180 et 183, 181 et 182, comme le codage est strictement croissant on a :
$c(100)=181$ Ainsi $c(100)=181$.
$c(101)=182$

$2019=3.673$ ainsi $c(c(673))=2019$
$673=3.224,\overline{33}$ ainsi $coc(224)<673<coc(225)$
$224=3.74,\overline{66}$ ainsi $coc(74)<224<coc(75)=225$
$225=3.75$ ainsi

or d'après ci dessus on a
$c(74)=141$ donc $c(141)=3.74=222$ ainsi $c(142)=223$
$c(75)=144$ $c(144)=3.75=225$ $c(143)=224$

or $coc(224)<673<coc\,225$
donc on ne retient qu'eux

$c(224)=3.143=429$ donc $c(429)=672=3.224$
$c(225)=3.144=432$ $c(432)=675=3.225$

On en déduit que $c(430)=673$ et $c(431)=674$

or $coc(673)=2019$ donc on le garde

et $c(c(c(c(430))))=2019$

$c(673)=3.430=1290$
$c(1290)=3.673=2019$ donc $c(2019)=coc(1290)=3.1290$
$=3870$.

On a donc, $c(100)=181$
$c(2019)=3870$

BURGUN Adrien et WAGNER Clément
Lycée Stanislas, Wissembourg
Exercice n°3

On sait que : · $c(c(n)) = 3n$
· $a > b \iff c(a) \leq c(b)$
· $c(n) \geq n$

On peut, alors, déjà déduire que :
$c(c(0)) = 0$ donc : $c(0) = a$ $c(a) = 0$
d'où $0 \leq a \leq 0$ alors $a = 0$: $\boxed{c(0) = 0}$

On peut continuer :
· $c(c(1)) = 3$ donc : $c(1) = b$ et $c(b) = 3$
ce qui donne $1 < b < 3$ d'où $b = 2$ car ce sont des entiers,
alors : $\boxed{c(1) = 2}$ et $\boxed{c(2) = 3}$
· $c(c(2)) = 6$ donc : $c(2) = d$ et $c(d) = 6$
or $c(2) = 3$ d'où $d = 3$, alors : $\boxed{c(3) = 6}$
· $c(c(3)) = 9$ donc : $c(3) = e$ et $c(e) = 9$
or $c(3) = 6$ d'où $e = 6$, alors $\boxed{c(6) = 9}$

On remarque alors que si il existe un nombre $q \in \mathbb{N}$, tel que $c(q) = n$; alors $c(n) = 3q$

On peut alors écrire ce tableau :

n	c(n)
0	0
1	2
2	3
3	6
6	9
9	18
18	27
27	54

On a $k \in \mathbb{N}$.

À partir du tableau, on conjecture que :

- $c(n=0)=0$
- $c(n) = 2n$ si $n = 3^k$
- $c(n) = \frac{3}{2} n$ si $n = 2\times 3^k$

Soit P_k : $\begin{cases} c(n) = 2n \text{ si } n = 3^k \\ c(n) = \frac{3}{2} n \text{ si } n = 2\times 3^k \end{cases}$

Pour $k=0$:

$c(1) = 2 = 2\times 1$

$c(2) = 3 = \frac{3}{2}\times 2$

Donc P_1 est vraie.

Soit P_k vraie et montrons P_{k+1} : $\begin{cases} c(n) = 2n \text{ si } n = 3^{k+1} \\ c(n) = \frac{3}{2} n \text{ si } n = 2\times 3^{k+1} \end{cases}$

$\begin{cases} c(n) = 2n \text{ si } n = 3^k \\ c(n) = \frac{3}{2} n \text{ si } n = 2\times 3^k \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} c(c(n)) = 3n \text{ si } n = 3^k \\ c(c(n)) = 3n \text{ si } n = 2\times 3^k \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} c(3n) = c(c(c(n))) = 2\times 3n = 2\times n' \text{ si } n = 3^k \Leftrightarrow n' = 3^{k+1} \\ c(3n) = c(c(c(\ ))) = \frac{3}{2}\times 3n = \frac{3}{2}\times n' \text{ si } n = 3^k \Leftrightarrow n' = 3^{k+1} \end{cases}$

Donc P_{k+1} est vraie : par récurrence, P_k est vraie $\forall k \in \mathbb{N}$.

6/7

De plus, si $n \in]3^k ; 2\times3^k[$; il faut que $c(n) = n + 3^k$: il y a entre 3^k et 2×3^k $3^k - 1$ nombres ; leurs images doivent être différentes et comprises entre 2×3^k et 3×3^k. Il n'y a qu'une image possible : $c(n) = n + 3^k$.

Quand $n \in]2\times3^k ; 3\times3^k[$, $c(n-3^k) = n$, donc $c(n) = 3(n-3^k)$.

On a enfin :

$$c(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n = 3^k \\ \frac{3}{2}n & \text{si } n = 3^k\times2 \\ n+3^k & \text{si } 3^k < n < 2\times3^k \\ 3(n-3^k) & \text{si } 2\times3^k < n < 3\times3^k \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Nous pouvons enfin calculer

$c(100) = 181$ car $3^4 < 100 < 2\times3^4$

$c(2019) = 3(2019-729) = 3870$ car $2\times3^6 < 2019 < 3\times3^6$

Ainsi, un tel code existe et $c(100) = 181$ et $c(2019) = 3870$