**Institut
de recherche
sur l'enseignement
des mathématiques
IREM**

Université de Strasbourg

ACADÉMIE DE STRASBOURG
*Liberté
Égalité
Fraternité*

ALSACE
Collectivité européenne

NUMWORKS

SAINT LOUIS
ALSACE
VILLE D'AVENIR

Obernai

Rallye

Rallye
2023

Rapport du 51ème Rallye Mathématique d'Alsace

**UFR de mathématique
et d'informatique**
7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex
Tél. : (33) 03 68 85 01 30
Fax : (33) 03 68 85 01 65
Bibliothèque : (33) 03 68 85 61 01
http://irem.u-strasbg.fr
irem@math.u-strasbg.fr

IREM de
Strasbourg

IREM de
Strasbourg

Sommaire

Présentation générale………………………………………………………………… 2

Remerciements…………………………………………………………………………… 4

ANIMATH………………………………………………………………………………….. 5

Palmarès des Premières……………………………………………………………… 6-7

Palmarès des Terminales……………………………………………………………... 8-9

Sujet des Premières…………………………………………………………………… 10

Sujet des Terminales…………………………………………………………………... 11

Commentaires pour le Rallye Mathématique d’Alsace 2022……………………… 12

Compte-rendu de l’épreuve de Première…………………………………………… 13

Compte-rendu de l’épreuve de Terminale…………………………………………… 14

Correction de l’épreuve des Premières……………………………………………… 15-20

Correction de l’épreuve des Terminales…………………………………………….. 21-28

Présentation du Rallye Mathématique d'Alsace

Comité organisateur :
Christel BERNHARDT, Pascal MALINGREY, Dominique WEIL, Stephan CZERNIAK

Le Rallye Mathématique d'Alsace, organisé par l'IREM de Strasbourg, s'est déroulé pour la 51ème fois en 2023. Crée en 1973, le Rallye Mathématique d'Alsace est la plus ancienne compétition mathématique de France.

Directement inspiré des Olympiades Internationales, il s'adresse à tous les élèves volontaires de l'académie de Strasbourg et des établissements à l'étranger qui lui sont rattachés (Luxembourg, Copenhague, Belgrade, Berlin, Düsseldorf, Francfort, Fribourg, Hambourg, Munich, Oslo, Sofia, Stockholm, Vienne) ainsi que d'autres partenaires de notre IREM (Washington et Zurich).

Tous les élèves des classes de Première et de Terminale sont prévenus de l'existence du Rallye et de ses modalités. Chacun peut consulter les rapports contenant les sujets, les corrigés, les commentaires ainsi que les palmarès des années précédentes. Ils sont disponibles sur le site de l'IREM (http://mathinfo.unistra.fr/irem/rallye-mathematique-dalsace). Les inscriptions se font sur la base du **volontariat** et les épreuves se déroulent sur le **temps libre** des candidats.

Cette compétition comprend deux épreuves : l'une concerne les élèves de Première, l'autre ceux de Terminale. Elle a réuni environ 900 participants dont 110 de l'étranger.

Les candidats sont amenés à résoudre, pendant quatre heures, individuellement ou par équipes de deux (formule généralement retenue) trois problèmes originaux faisant appel à leurs connaissances bien sûr, mais essentiellement au raisonnement et à leurs capacités inventives.

Les sujets sont très différents de ceux proposés dans l'évaluation traditionnelle. Ils font davantage appel à l'intuition, à l'aspect ludique de la recherche qu'à une suite de connaissances utilisées de manière algorithmique ou répétitive. Les énoncés sont souvent courts, rédigés de manière non scolaire et présentés parfois sous forme d'énigmes ; ils ne contiennent aucune indication de méthode et ne précisent pas le champ de connaissances mises en jeu.

L'objectif est de donner aux élèves l'occasion de faire des mathématiques autrement. Ils peuvent alors réinvestir leur savoir scientifique dans un cadre inhabituel pour eux. Nous développons ainsi leur curiosité, le sens du travail en équipe, le goût pour la recherche. Nous participons ainsi à la promotion de notre discipline auprès des jeunes, des enseignants, des décideurs, de nos partenaires et des médias.

Le Rallye permet aux professeurs des lycées de proposer dans leurs classes, grâce aux rapports des années précédentes, des activités scientifiques différentes de l'entraînement usuel : traduction d'un énoncé en langage mathématique, recherche d'outils possibles, résolution, rédaction d'une solution avec le souci d'une argumentation précise et rigoureuse.

Les élèves, au départ parfois un peu déconcertés par ces énoncés où la démarche n'est pas imposée, trouvent du plaisir à élaborer une construction intellectuelle et par là même gagnent en autonomie de pensée. L'élaboration des sujets suppose une bonne maîtrise de la didactique des mathématiques : l'IREM fournit les éléments nécessaires à ce travail.
Avec la participation au concours commence une série d'activités, extra-scolaires souvent, qui aiguisent la curiosité mathématique des jeunes, encouragent leur esprit d'initiative et créent un climat favorable à l'ouverture culturelle. Cette incitation au développement de la culture scientifique s'inscrit entièrement dans le cadre des directives actuelles à ce sujet.

En Première, dix-sept binômes et un monôme sont primés : un prix exceptionnel, quatre premiers prix, cinq deuxièmes prix et huit troisièmes prix.

En Terminale, seize binômes et un monôme ont été sélectionnés : deux prix exceptionnels, trois premiers prix, huit deuxièmes prix et quatre troisièmes prix.

Nous renvoyons à la suite de ce rapport pour des commentaires plus détaillés sur les exercices.

La remise des prix a lieu à la Collectivité européenne d'Alsace à Strasbourg. Elle est suivie d'une réception en l'honneur des lauréats.

Remerciements

Nous remercions vivement les donateurs qui nous permettent de récompenser les lauréats par des livres, des calculatrices, du matériel informatique pour fêter la 51ème édition :

◊ Le Rectorat de l'académie de Strasbourg
◊ L'Université de Strasbourg
◊ L'UFR de Mathématique et d'Informatique
◊ Le Département de Mathématiques
◊ L'IREM de Strasbourg
◊ La Collectivité européenne d'Alsace
◊ L'A.P.M.E.P.
◊ La Ville d'Erstein
◊ La Ville d'Obernai
◊ La Ville de Saint-Louis
◊ La société NUMWORKS

À tous les lauréats du Rallye Mathématique d'Alsace de Première

Le Rallye Mathématique d'Alsace
et
ANIMATH (Association pour l'animation des Mathématiques)

vous proposent de participer à des stages de préparation aux Olympiades Internationales de Mathématiques.

Pour obtenir des informations sur toutes les activités proposées, vous pouvez consulter le site d'Animath **:** http://www.animath.fr

Nous vous souhaitons une bonne poursuite mathématique de vos études.

Palmarès des Premières 2023

Prix exceptionnel

- ✓ BOILLEY Gabriel et ISMAAILI-ERNY Noam
  Professeurs : MM. Alilouch et Regourd, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

Premier prix

- ✓ AVILOV Anton et LAPP Matthias
  Professeur : Mme Muller, Lycée Saint André, Colmar

- ✓ SABATIER Esteban et WEINDLING Sarah
  Professeurs : Mmes Bachschmidt et Stupfler, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ FLIELLER Aurélie et YANG Menglin
  Professeurs : Mmes Mariani et Stupfler, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ CATTET Gabriel et HANOYAN Hakob
  Professeur : Mme Wassong, Lycée Marcel Rudloff, Strasbourg

Deuxième prix

- ✓ GERBER Louison et OUAZZANI-CHAHDI Jalil
  Professeurs : Mme Trehiou et M. Jannest, Lycée Alfred Kastler, Guebwiller

- ✓ DE LALANDE Charles et SAMAMA Charlotte
  Professeurs : Mmes Bachschmidt et Samama, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ CYPRIA Matteo et OTERO BERGES Pablo
  Professeur : G. Chevallier, Lycée Vauban, Luxembourg

- ✓ COJEAN-MATHERN Erwan et LECHLER Timothée
  Professeur : M. Keller, Institution Notre Dame, Strasbourg

- ✓ ALIEVA Alis et DUCHOSAL Baptiste
  Professeur : Mmes Bimboes et Reitzer, Lycée Blaise Pascal, Colmar

Troisième prix

- ✓ NIESS Théo
  Professeur : Mme Dibling, Lycée Robert Schuman, Haguenau

- ✓ OLLIVIER Pierre et SARLIN Corentin
  Professeur : Mme Delbove, Lycée Episcopal, Zillisheim

- ✓ CHAGNAS Raphaël et STRIETZEL Tara
  Professeurs : Mme Betz et M. Matt, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ ROUVE Léna et WANTZ Kevin
  Professeur : Mme Jeanjean, Lycée Marguerite Yourcenar, Erstein

- ✓ BONNEFONT Xavier et BOURASS Zéyad
  Professeur : M. Haubenestel, Lycée Marcel Rudloff, Strasbourg

- ✓ ASTRUC KLEIN Valentin et COUTOULY Matthias
  Professeur : Mme Traynard, Lycée Franco-Allemand, Fribourg

- ✓ ANTOINE Bastien et BENAMARA Ilian
  Professeur : Mme Mento, Lycée Vauban, Luxembourg

- ✓ GAUGLER Victoire et GUTH Joséphine
  Professeurs : Mme Guth et M. Diaz, Lycée Scheurer Kestner, Thann

Palmarès des Terminales 2023

Prix exceptionnel

- ✓ CAUSSE Gaspard et DAI Charles
  Professeurs : Mme Audeoud et M. Alati, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ BOUDOT Grégoire et SCHNELL Théo
  Professeur : Mme Neumann, Lycée Kléber, Strasbourg

Premier prix

- ✓ WU William et ZHANG Alex
  Professeur : M. Alati, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ GAUZÈS Florian et KLAI Ilyes
  Professeur : M. Sutter, Lycée Vauban, Luxembourg

- ✓ ETTORI Elliot et WANTZ Arthur
  Professeurs : Mme Cerviat et M. Sonntag, Lycée Henri Meck, Molsheim

Deuxième prix

- ✓ BEN SMIDA Bader et MOLIMARD Augustin
  Professeurs : MM. Matt et Schwartz, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ GAUDIN Simon et SPAT Noémie-Louise
  Professeurs : Mme Weissgerber et M. Vilmen, Lycée Eugène Koeberlé, Sélestat

- ✓ EBERLIN Dorian et HEILMANN Jonathan
  Professeurs : Mme Klein et M. Bucher, Lycée Stanislas, Wissembourg

- ✓ BOLY Olivier et LEPETZ Matthias
  Professeurs : MM. Broutin et Glemarec, Lycée Bartholdi, Colmar

- ✓ CHEINET Nicolas et TRITSCH Kerrian
  Professeurs : Mme Charmillot et M. Messaoudi, Lycée Montaigne, Mulhouse

- ✓ LORENTZ Clémence et WAGNER Diane
  Professeur : M. Renaud, Lycée Jean Rostand, Strasbourg

- ✓ MEYER Nicolas et RUAULT Edgar
  Professeurs : MM. Alati et Audeoud, Gymnase Jean Sturm, Strasbourg

- ✓ AKYUZ Duran
  Professeur : M. Malingrey, Lycée Marie Curie, Strasbourg

Troisième prix

- ✓ BRAVO Quentin et WEBER Baptiste
  Professeurs : Mmes Geneve et Rediger, Lycée Episcopal, Zillisheim

- ✓ CIPOLLONE Francesco et SIN Alex
  Professeurs : MM. Matt et Schwartz, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

- ✓ PORASCH Penelope et SCHWERDTFEGER Laudo
  Professeur : M. Pérotin, Lycée Français, Berlin

- ✓ CHOHAIB Iliane et VIEN Milla
  Professeurs : MM. Matt et Schwartz, Lycée International des Pontonniers, Strasbourg

RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 2023
51ème édition

PREMIERES
Mercredi 8 mars 2023

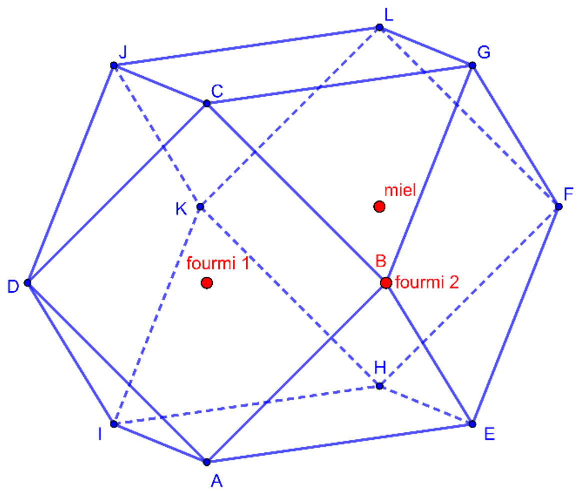
Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également de manière très lisible leur adresse postale et leur adresse mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

Il est strictement interdit d'utiliser un téléphone portable, une tablette, un ordinateur personnel ou disponible dans la salle de classe. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 :
Quels sont les quatre derniers chiffres du nombre : $X = 1! + 2! + 3! + \cdots + 2023!$?
(On rappelle que pour tout entier n strictement positif, $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$)

Exercice 2 :
Un cuboctaèdre régulier est un polyèdre de l'espace composé de 14 faces : 6 carrés et 8 triangles équilatéraux. Ses 24 arêtes ont donc toutes la même longueur.
On a disposé un peu de miel au centre d'une des faces (FLKH sur la figure). Une première fourmi est positionnée au centre de la face opposée. Une deuxième fourmi est en B. La deuxième fourmi se déplace sur les arêtes du cuboctaèdre tant que le miel n'est pas dans son champ de vision.
Sachant que les deux fourmis se déplacent à la même vitesse, la première fourmi peut-elle atteindre le miel avant la deuxième ?



Exercice 3 :
Christel, Pascal, Dominique et Stephan se sont partagés 2023 billes.
Christel en a pris deux fois plus que Dominique, Pascal trois fois plus que Stephan et à eux deux Pascal et Stephan en ont eu plus que Dominique mais moins que Christel.
Combien y a-t-il de répartitions possibles des billes ?

RALLYE MATHEMATIQUE D'ALSACE 2023
51ème édition

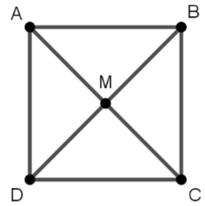
TERMINALES
Mercredi 29 mars 2023

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également de manière très lisible leur adresse postale et leur adresse mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

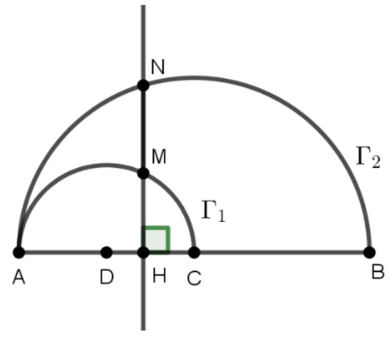
Il est strictement interdit d'utiliser un téléphone portable, une tablette, un ordinateur personnel ou disponible dans la salle de classe. L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1 :
Un scarabée part de A et se déplace de façon aléatoire d'un point à un point voisin sur le graphe ci-dessous. En chaque point, il choisit au hasard l'une des issues partant de ce point.



Soit $n \geq 1$: on note $p(n)$ la probabilité d'arriver en M après n pas.
Quelle est la limite de $p(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 2 :
$[AB]$ est un segment de longueur 4. C et D sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$.
On note Γ_1 le demi-cercle de diamètre $[AC]$ et Γ_2 le demi-cercle de diamètre $[AB]$ conformément à la figure ci-dessous :



H est un point du segment $[AC]$.
La droite perpendiculaire à $[AB]$ passant par H coupe Γ_1 en M et Γ_2 en N.
Où placer H de sorte que $MN = 1$?

Exercice 3 :
n est un nombre entier tel que $1 \leq n \leq 13$.
Pour quelles valeurs de n existe-t-il un multiple de n dont la somme des chiffres est égale à 2023 ?

Commentaires pour le Rallye Mathématique d'Alsace 2023

Cette année, 450 binômes (il y avait aussi quelques monômes) représentant environ 500 élèves de premières et 400 élèves de terminale ont participé aux épreuves du Rallye.
La participation est en hausse de 17 % par rapport à 2022.

Nous sommes heureux de constater que les élèves font preuve de connaissances et d'initiatives, et que les méthodes qu'ils utilisent pour résoudre les exercices sont diverses, variées, parfois très originales. Ceci est très encourageant pour les lycéens de l'académie.

Nous continuons à relever que trop d'élèves n'apportent aucun soin à la présentation de leur travail : il y a des ratures à toutes les lignes, les instruments de construction tels que la règle et le compas ne sont pas utilisés : les figures sont tracées à main levée. Les fautes d'orthographe et de grammaire sont très nombreuses dans certaines copies ; il serait appréciable que le candidat qui ne rédige pas l'exercice relise et corrige la version de son coéquipier : cela rendrait la correction plus sereine.
C'est d'autant plus dommage que la qualité mathématique des copies est souvent d'un très bon niveau, que les exercices sont abordés par un nombre important de candidats et que les méthodes proposées ont parfois fait l'admiration de l'équipe des correcteurs.
Lorsque le sujet comporte un exercice de géométrie, il serait souhaitable que les élèves tracent leurs figures sur une feuille annexe (proprement, à la règle et au compas et non à main levée, sans modifier le nom des points par rapport à l'énoncé), afin que les correcteurs puissent l'avoir sous les yeux lors de la lecture de l'ensemble de l'exercice.
La rigueur et la clarté des raisonnements est un élément important dans l'appréciation des copies.

En première, le prix exceptionnel a parfaitement résolu les trois exercices.
Les premiers prix ont très bien résolu deux exercices et ont donné beaucoup d'éléments dans le troisième.
Les deuxièmes prix ont très bien traité un exercice et très bien avancé dans un deuxième ou bien avancé dans les deux autres.
Les troisièmes prix ont bien résolu un exercice et donné des éléments dans les deux autres exercices.

En terminale, les prix exceptionnels ont parfaitement résolu les trois exercices.
Les premiers prix ont très bien traité deux exercices et presque résolu le troisième.
Les deuxièmes prix ont très bien résolu deux exercices ou bien résolu deux exercices et donné des éléments dans le troisième.
Les troisièmes prix ont tous très bien résolu un exercice et soit bien avancé dans un autre soit donné des éléments dans les deux autres. Il est à noter qu'un binôme obtient un troisième prix pour une résolution particulièrement élégante de l'exercice de géométrie.

Pour chacun des exercices, nous joignons à ce rapport une résolution qui nous a semblé pertinente, choisie parmi les bonnes solutions rencontrées.

Compte–rendu de l'épreuve de Première

Les candidats à l'épreuve du Rallye Mathématique d'Alsace de Première avaient trois exercices à traiter durant quatre heures. Dans le premier exercice, il s'agissait de trouver les quatre derniers chiffres d'un nombre exprimé sous forme d'une somme de 2023 entiers. Le deuxième exercice portait sur un cuboctaèdre sur lequel se déplaçaient deux fourmis : il fallait y comparer des longueurs de trajets. Dans le troisième exercice, on demandait le nombre de répartitions possibles de 2023 billes entre quatre personnes avec plusieurs contraintes.
Chacun des exercices est résolu correctement dans des copies.

Exercice 1 : Dans l'ensemble les élèves voient et justifient qu'il suffit de calculer la somme de $1\,!$ à $19\,!$, mais se contentent de conclure à la calculatrice. Certains considèrent la valeur approchée donnée en écriture scientifique comme une valeur exacte.

Exercice 2 : Nous avons trouvé très peu de solutions complètes à cet exercice : les élèves ne pensent pas à utiliser un patron. Et parmi ceux qui utilisent un patron, nous avons été surpris de constater que plusieurs n'exploitaient pas la ligne droite comme plus court chemin d'un point à un autre. Pour certains binômes, l'utilisation abusive de valeurs approchées rend toute comparaison de longueurs caduque.

Exercice 3 : Plusieurs binômes lisent mal la question et se contentent de chercher une répartition possible. La mise en équation du problème ne pose pas de problème particulier. Les raisonnements qui amènent à un encadrement d'une des inconnues manquent de clarté, de même que la divisibilité par 4 pour aboutir aux 26 répartitions possibles. Les raisonnements se font par implication, il faut donc encore vérifier que les répartitions trouvées répondent bien au problème.

Compte–rendu de l'épreuve de Terminale

L'épreuve du Rallye Mathématique d'Alsace de Terminale comprend, comme à l'habitude, trois exercices. Le premier exercice portait sur une marche aléatoire : on demandait de trouver la limite d'une probabilité. Le deuxième exercice était un exercice de géométrie dans lequel il s'agissait de trouver la position d'un point vérifiant une condition donnée. Dans le troisième exercice, on s'interrogeait sur l'existence de multiples de nombres dont la somme des chiffres vaut 2023.
Tous les exercices ont été résolus correctement dans des copies.

Exercice 1 : C'est l'exercice qui a été le mieux traité. Les élèves utilisent le théorème du point fixe et pensent à justifier la convergence (par diverses méthodes). Quelques binômes utilisent les graphes probabilistes mais ne justifient pas la convergence et lisent la limite à la calculatrice. Plusieurs binômes dessinent un arbre de probabilités incomplet qui les conduit à trouver une limite nulle : il est surprenant de voir que les élèves ne s'interrogent pas quant à la pertinence de ce résultat.

Exercice 2 : Certaines solutions sont rédigées avec une très belle rigueur (vérification des solutions quand la résolution ne se fait pas par équivalence). Quelques belles méthodes, en particulier une copie a donné une solution purement géométrique.

Exercice 3 : De bonnes surprises avec des binômes qui font des efforts de rédaction en traitant plusieurs cas simultanément (1, 2, 4, 5, 8 et 10) d'une part et (3, 6, 9, 12) d'autre part. Ces copies sont plaisantes à corriger, contrairement à d'autres. À partir d'une solution, certains élèves en génèrent d'autres : leur raisonnement est judicieux. Il y a eu des solutions originales, dont une qui utilise $1000 \equiv -1\ (modulo\ 7, 11, 13)$. On a aussi lu un certain nombre de critères de divisibilité inventés et faux. Quelques binômes ne comprennent pas la question et cherchent les diviseurs de 2023.

Copies des Premières

FLIELLER Aurélie et YANG Menglin
Gymnase Jean Sturm, Strasbourg
Exercice n°1

Exercice 1 Les 4 derniers chiffres sont 0313.

Tout d'abord, on constate que tous les multiples de 10 peuvent être écrits sous la forme :

$$2m \cdot 5n$$

pour m et n des entiers $\geqslant 1$. (Ceci découle de la décomposition en facteurs premiers de 10).

Ainsi, on sait que pour 5!, et pour tous les factoriels des nombres supérieurs à 5 (car ils sont divisibles par 5!), le dernier chiffre de ce nombre est 0. En effet, étant donné que 5! est divisible par 2 et 5, il l'est aussi par 10.

On sait également qu'à partir de 10!, les deux derniers chiffres sont des 0 (car 10! s'écrit $\ldots \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 10$).

À partir de 15!, les trois derniers chiffres sont des 0. On a déjà deux 0, car 10! divise 15!. Ensuite, il suffit de prendre un entier pair différent de 2 et inférieur à 15. Par exemple, avec 4, on a

$$4 \cdot 15 = \underline{2} \cdot 2 \cdot \underline{5} \cdot 3$$

On a m=2 et n=3. Ceci signifie que 15! est divisible par 1000 (par 100 · (un multiple de 10)).

On procède de la même manière pour 20!. On trouve donc qu'à partir de 20!, les 4 derniers chiffres du nombre sont tous des 0. (On a $20! = \ldots \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 15 \cdot \ldots \cdot 20$).

Ainsi, on déduit que la somme $20! + 21! + \ldots + 2023!$ n'a aucun impact sur les quatre derniers chiffres de X.

IL SUFFIT DONC D'ÉTUDIER LE NOMBRE $Y = 1! + 2! + \ldots + 19!$

Pour connaître le dernier chiffre de Y, il suffit de trouver le dernier chiffre de $Y_1 = 1! + 2! + 3! + 4!$

$$Y_1 = 1 + 2 + 2\cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4$$
$$= \underline{33}$$

Le dernier chiffre de Y, et donc de X, est 3.

On garde le 3 en retenue pour l'avant dernier chiffre.

Pour connaître l'avant dernier chiffre de Y, il suffit de trouver l'avant dernier chiffre de $Y_2 = 5! + 6! + 7! + 8! + 9!$, c'est-à-dire le dernier chiffre de $Y_2 / 10$.

EX 1 $\boxed{1/2}$

On a $Y_2 = 5! \cdot (1 + 6 + 6\cdot7 + 6\cdot7\cdot8 + 6\cdot7\cdot8\cdot9)$
$= 120 \cdot 3409$

Donc $Y_2/10 = 12 \cdot 3409$
$= \underline{40\,908}$

L'avant dernier chiffre de X est 1 (On obtient 8 avec $Y_2/10$, auquel on ajoute la retenue de 3).

On a donc une retenue de 1 (0 avec Y_2 + 1 venant de $(8+3)$) pour le troisième chiffre en partant de la fin, et de 9 (venant de Y_2) pour le quatrième.

On cherche maintenant Y_3, ou alors le dernier chiffre de $Y_3/100$.

On a $Y_3 = 10! + 11! + 12! + 13! + 14!$
$= 10! \cdot (1 + 11 + 11\cdot12 + 11\cdot12\cdot13 + 11\cdot12\cdot13\cdot14)$
$= 10! \cdot 25\,884$

Donc $Y_3/100 = 1\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9 \cdot 25\,884$
$= \underline{939\,278\,592}$

Le troisième chiffre en partant de la fin de X est 3 (on obtient 2 avec $Y_3/100$, auquel on rajoute la retenue de 1).

La retenue pour le quatrième chiffre en partant de la fin est de 8 (on avait déjà 9 avec Y_2, et 9 à nouveau avec Y_3).

On cherche maintenant le dernier chiffre de $Y_4 = 15! \cdot 16! \cdot 17! \cdot 18! \cdot 19!$ qui est aussi le dernier chiffre de $Y_4/1000$.

On a $$Y_4 = \underbrace{15!}_{Z_1} \cdot \underbrace{(1 + 16 + 16\cdot17 + 16\cdot17\cdot18 + 16\cdot17\cdot18\cdot19)}_{Z_2}$$

On décompose Y_4 en deux parties, Z_1 et Z_2. Pour avoir le dernier chiffre de $Y_4/1000$, il faut connaître le dernier chiffre de $Z_1/1000$ et de Z_2.

$Z_1/1000 = (15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)/1000$
$= 3\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot2\cdot3\cdot1$
(le 15 a été divisé par 5, le 10 par 10, le 5 par 5, le 4 par 2, et le 2 par 2)

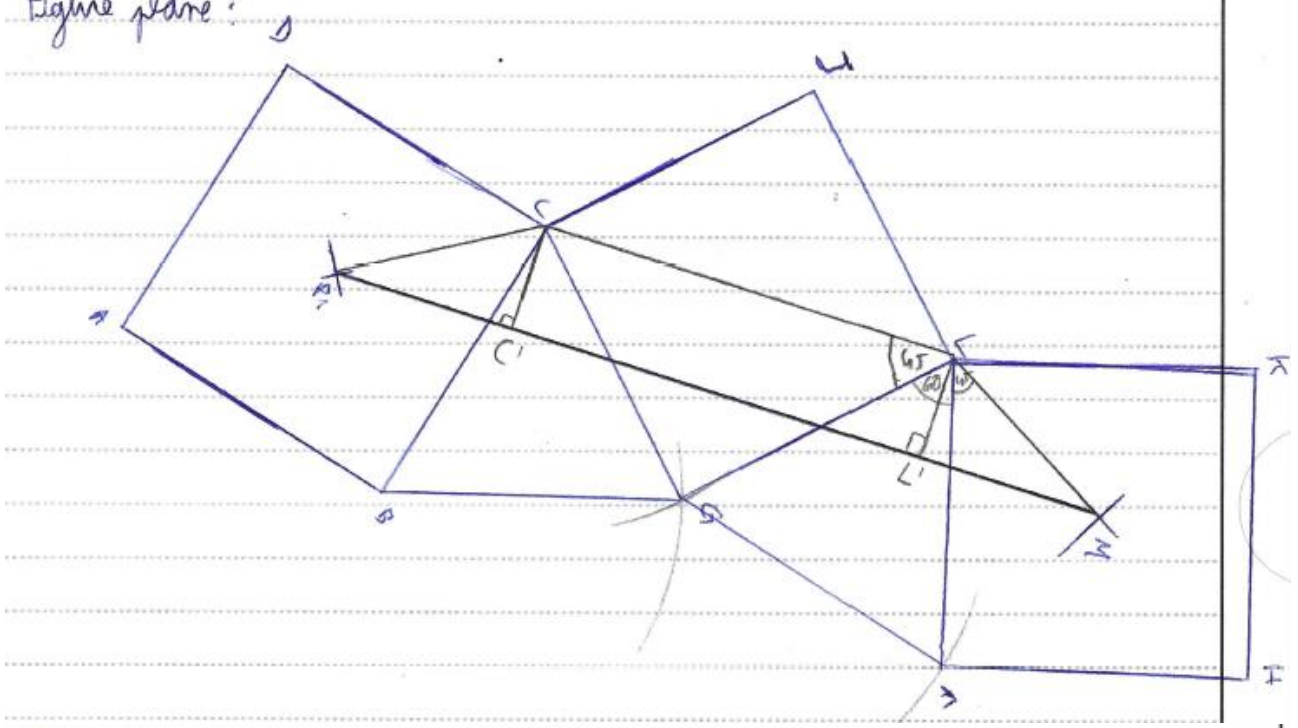
$Z_1/1000 \equiv 3\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot2\cdot3\cdot1 \ [10]$
$\equiv 1306\,368 \ [10]$
$\equiv 8 \ [10]$
$Z_2 \equiv 1 + 6 + 6\cdot7 + 6\cdot7\cdot8 + 6\cdot7\cdot8\cdot9 \ [10]$
$\equiv 3409 \ [10]$
$\equiv 9 \ [10]$

EX 1 $\boxed{2/2}$

Donc $(Z_1/1000) \cdot Z_2 \equiv 72 \equiv \underline{2 \equiv Y_4/1000 \ [10]}$
Le 4^e chiffre en partant de la fin de X est 0 (on a 2 avec $Y_4/1000$ + retenue de 8)

BOILLEY Gabriel et ISMAAILI-ERNY Noam
Lycée International des Pontonniers, Strasbourg
Exercice n°2

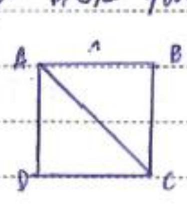
Figure plane :



Soit M le point où se trouve le miel.
La fourmi qui aura le chemin le plus court pour arriver au miel sera la 1ère.
On suppose sans perte de généralité que toutes les arêtes ont pour longueur 1.

Dans le cas où le miel est sur la face FLKH :

En partant de B et en parcourant 1 arête, la fourmi 2 peut atteindre les sommets A, C, E ou G. Aucun n'est sur la face où se trouve le miel, elle doit donc parcourir au moins deux arêtes avant d'arriver à un sommet de la bonne face (avec le trajet B, G, L par exemple).
Dans tout carré ABCD de côté 1, d'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ donc $AC = \sqrt{2}$.



Ainsi, si on note F_2 la longueur du trajet de la fourmi 2, on a au minimum $F_2 = BG + GL + LM$. Comme M est le centre du carré LFHK, on a $LM = LH \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ainsi F_2 vaut au minimum $BG + GL + LM = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pour le trajet de F_1, on note P_1 son point de départ (le centre du carré ABCD).

La fourmi 2 peut choisir le trajet direct passant par les faces CBG, CJLG et LGF avant d'atteindre KLFH.
On peut "aplanir" ces faces pour avoir le trajet direct. Les côtés que la fourmi traverse restent attachés et les distances parcourues ne sont pas modifiées.
De plus, la figure admet (JG) comme axe de symétrie.

Par symétrie, les droites (CL) et (P_1M) sont parallèles, donc si on note C' et L' les projetés orthogonaux sur (P_1M) de C et L respectivement, $CLL'C'$ est un rectangle et on a $C'L' = CL = \sqrt{2}$ car CL est une diagonale de carré.

On veut maintenant trouver la longueur $P_1C' = ML'$. Comme $[CL]$ et $[LH]$ sont les diagonales de carrés et $M \in [LH]$, on a $\widehat{CLM} = \widehat{CLG} + \widehat{GLF} + \widehat{FLM} = 45° + 60° + 45° = 150°$. Comme $(CL) // (L'M)$, par l'angle alterne-interne on a $\widehat{LML'} = 180 - 150 = 30°$.

Ainsi, en notant x la longueur $L'M$ et sachant que $ML = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on a

$\cos(\widehat{L'ML}) = \frac{L'M}{ML}$

$\cos(30°) = \frac{x}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Ainsi $L'M = P_1C' = \frac{\sqrt{6}}{4}$, donc $F_1 = P_1M = P_1C' + C'L' + L'M$

$= 2 \times \frac{\sqrt{6}}{4} + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \sqrt{2}$.

Or on a ici $F_1 - F_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} + \sqrt{2} - 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} - 4}{2} \simeq -0{,}07 < 0$.

Ainsi $F_1 < F_2$ et si le miel est sur la face LFHK, la fourmi 1 peut arriver avant la fourmi 2.

SABATIER Esteban et WEINDLING Sarah
Gymnase Jean Sturm, Strasbourg
Exercice n°3

On pose C = nombre de billes de Christel
P = nombre de billes de Pascal
D = nombre de billes de Dominique
et S = nombre de billes de Stephen

On sait, d'après l'enoncé, que toutes les valeurs sont des entiers positifs car il s'agit de billes réparties entre plusieurs personnes.

On sait également que

- $C + P + D + S = 2023$
- $C = 2D$
- $P = 3S$
- $C > P + S > D$

Donc $C + P + D + S = 2023$
$\Leftrightarrow 2D + 3S + D + S = 2023$
$\Leftrightarrow 3D + 4S = 2023$

$D = \dfrac{2023 - 4S}{3}$ et $4S = 2023 - 3D$

De plus, $C > P + S > D$
$\Leftrightarrow 2D > 3S + S > D$
$\Leftrightarrow 2D > 4S > D$
$\Leftrightarrow 2D > 2023 - 3D > D$
$\Leftrightarrow 5D > 2023 > 4D$

donc $4D < 2023$
$\Leftrightarrow D < \dfrac{2023}{4} = 505{,}75$

or, $D \in \mathbb{N}$, donc $D \leqslant 505$

et $5D > 2023$
$\Leftrightarrow D > \dfrac{2023}{5} = 404{,}6$

or, $D \in \mathbb{N}$, donc $505 \geqslant D \geqslant 405$

On observe les valeurs que pourrait prendre S pour
$\forall D \in \{405; 406; 407; \ldots; 504; 505\}$

3/7

D	$S_{supposé}$	D	$S_{supposé}$	D	$S_{supposé}$	D	$S_{supposé}$
405	202	431	182,5	457	163	483	143,5
406	201,25	432	181,75	458	162,25	484	142,75
407	200,5	433	181	459	161,5	485	142
408	199,75	434	180,25	460	160,75	486	141,25
409	199	435	179,5	461	160	487	140,5
410	198,25	436	178,75	462	159,25	488	139,75
411	197,5	437	178	463	158,5	489	139
412	196,75	438	177,25	464	157,75	490	138,25
413	196	439	176,5	465	157	491	137,5
414	195,25	440	175,75	466	156,25	492	136,75
415	194,5	441	175	467	155,5	493	136
416	193,75	442	174,25	468	154,75	494	135,25
417	193	443	173,5	469	154	495	134,5
418	192,25	444	172,75	470	153,25	496	133,75
419	191,5	445	172	471	152,5	497	133
420	190,75	446	171,25	472	151,75	498	132,25
421	190	447	170,5	473	151	499	131,5
422	189,25	448	169,75	474	150,25	500	130,75
423	188,5	449	169	475	149,5	501	130
424	187,75	450	168,25	476	148,75	502	129,25
425	187	451	167,5	477	148	503	128,5
426	186,25	452	166,75	478	147,25	504	127,75
427	185,5	453	166	479	146,5	505	127
428	184,75	454	165,25	480	145,75		
429	184	455	164,5	481	145		
430	183,25	456	163,75	482	144,25		

Or $S \in \mathbb{N}$ donc tous les binômes $\{D;S\}$ où S est un entier et D est un entier dans l'intervalle $[405;505]$ sont valides.

Dans le tableau, tous les binômes solutions sont visibles, à chaque fois que S est entier.

On décompte 26 solutions, il y a donc 26 répartitions possibles.

Copies des Terminales

BOUDOT Grégoire et SCHNELL Théo
Lycée Kléber, Strasbourg
Exercice n°1

Déterminons la valeur de $p(1)$:
Le scarabée se situant au départ en A, et se déplaçant équiprobablement sur un sommet adjacent du graphe, et les seuls sommets adjacents à A étant : B, D et M, la probabilité qu'au bout d'un pas il se situe en M vaut donc :

$$p(1) = \frac{1}{3}.$$

Au bout de n pas, si le scarabée se situe en M (évènement de probabilité $p(n)$), la probabilité d'être en M au prochain pas (le $(n+1)$-ième) est nulle, le scarabée ne stagnant pas ; si le scarabée n'est au bout du n ième pas, pas en M, d'après la disposition du graphe, c'est-à-dire que à tout point différent de M sont adjacents trois points dont M, et puisque la probabilité de n'être pas en M au n ième pas vaut $1 - p(n)$ on peut utiliser la formule des probabilités totales :

$$p(n+1) = 0 \times p(n) + \frac{1}{3}(1 - p(n))$$
$$= -\frac{1}{3} p(n) + \frac{1}{3}.$$

En passant par une suite géométrique associée à $(p(n))_{n \geq 1}$ on peut obtenir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p(n) = \frac{1}{12} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}.$$

Montrons cela par récurrence, posons (pour $n \in \mathbb{N}^*$) :

$$P_n : « p(n) = \frac{1}{12} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{4} »$$

<u>Initialisation</u> :

P_1 : « $p(1) = \frac{1}{12} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{1-1} + \frac{1}{4}$ »,

or $\frac{1}{12} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{0} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$

et $p(1) = \frac{1}{3}$ donc P_1 est vraie

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que P_n soit vraie, calculons :

$p(n+1) = \left(-\frac{1}{3}\right) p(n) + \frac{1}{3}$, or d'après P_n :

$p(n) = \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$, donc :

$$p(n+1) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} + \frac{1}{4}$$

ce qui correspond exactement à P_{n+1}

donc (P_n) est héréditaire, par principe de récurrence, comme P_1 est vérifiée, alors P_n est vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p(n) = \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}.$$

Or comme $\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$, par produit et par somme :

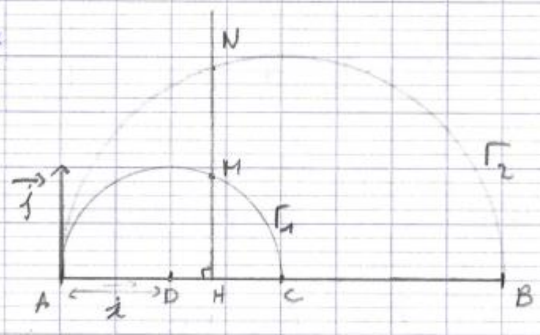
$$\lim_{n \to +\infty} p(n) = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4}$$

la limite de $(p(n))$ est donc :

$$\frac{1}{4}.$$

CAUSSE Gaspard et DAI Charles
Gymnase Jean Sturm, Strasbourg
Exercice n°2

Exercice 2 :



On a $AD = \frac{AB}{4} = 1$

et $AC = \frac{AB}{2} = 2$

On se place dans un repère orthonormé centré en A et tel que $\vec{AD} = \vec{i}$

Alors les coordonnées des points D et C sont respectivement $(1;0)$ et $(2;0)$

Alors les équations des deux demi-cercles sont $y_{\Gamma_1} = \sqrt{1-(x-1)^2}$ $x \in [0;2]$

et $y_{\Gamma_2} = \sqrt{4-(x-2)^2}$ $x \in [0;4]$

en effet l'équation du cercle entier est de la forme $x^2+y^2=R^2 \iff y^2 = R^2 - x^2$

ce qui donne lorsque $y \geq 0$ $y = \sqrt{R^2-x^2}$ qui est ce que nous recherchons.

On va raisonner par analyse-synthèse.

Ainsi, si les coordonnées de H sont $(x_H;0)$ alors les coordonnées de M et de N sont

$$M\left(x_H ; \sqrt{1-(x_H-1)^2}\right) \quad et \quad N\left(x_H ; \sqrt{4-(x_H-2)^2}\right)$$

Donc on cherche x_H tel que $1 = MN = \sqrt{(x_H-x_H)^2 + \left(\sqrt{4-(x_H-2)^2} - \sqrt{1-(x_H-1)^2}\right)^2}$

(On a évidemment $x_H \in [0;2]$ comme $H \in [AC]$)

$$\iff 1 = \sqrt{4-(x_H-2)^2} - \sqrt{1-(x_H-1)^2} \quad (\text{en effet } y_{\Gamma_2} \geq y_{\Gamma_1} \ \forall x \in [0;2])$$

$$\iff 1 = \sqrt{4x_H - x_H^2} - \sqrt{2x_H - x_H^2} \iff 1 + \sqrt{2x_H - x_H^2} = \sqrt{4x_H - x_H^2}$$

$$\implies 1 + 2\sqrt{2x_H - x_H^2} + 2x_H - \cancel{x_H^2} = 4x_H - \cancel{x_H^2} \quad \text{en mettant au carré}$$

$$\implies 2\sqrt{2x_H - x_H^2} = 2x_H - 1$$

$$\implies 4(2x_H - x_H^2) = (2x_H-1)^2 = 4x_H^2 - 4x_H + 1$$

en mettant au carré.

(à ce stade on a clairement plus les équivalences puisque $2x-1$ peut être négatif, il faudra vérifier les solutions)

$$\implies 8x_H^2 - 12x_H + 1 = 0$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \times 8 = 112 > 0$$

$$\implies x_H \in \left\{ \frac{12-\sqrt{112}}{16} ; \frac{12+\sqrt{112}}{16} \right\}$$

$$\text{ou} \quad x_H \in \left\{ \frac{3-\sqrt{7}}{4} ; \frac{3+\sqrt{7}}{4} \right\}$$

On a donc terminé l'analyse. Si x_H est tel que $MN = 1$ alors $x_H = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{4}$. Vérifions donc.

Si $x_H = \frac{3-\sqrt{7}}{4}$ Alors $MN = \sqrt{3-\sqrt{7}-\left(\frac{3-\sqrt{7}}{4}\right)^2} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{7}}{2}-\left(\frac{3-\sqrt{7}}{4}\right)^2}$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{\frac{16(3-\sqrt{7})-(9+7-6\sqrt{7})}{16}} - \sqrt{\frac{8(3-\sqrt{7})-16+6\sqrt{7}}{16}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{16\times 3-16-10\sqrt{7}} - \sqrt{8-2\sqrt{7}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{(5-\sqrt{7})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{7})^2}\right)$$

$$= \frac{3-\sqrt{7}}{2} < \frac{3-\sqrt{4}}{2} = 1$$

par stricte décroissance de la fonction $f(x) = -\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$

Donc si $x_H = \frac{3-\sqrt{7}}{4}$ alors $MN < 1$

Maintenant, si $x_H = \frac{3+\sqrt{7}}{4}$

On a $MN = \sqrt{4\left(\frac{3+\sqrt{7}}{4}\right)-\left(\frac{3+\sqrt{7}}{4}\right)^2} - \sqrt{2\left(\frac{3+\sqrt{7}}{4}\right)-\left(\frac{3+\sqrt{7}}{4}\right)^2}$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{16(3+\sqrt{7})-(9+7+6\sqrt{7})} - \sqrt{8(3+\sqrt{7})-(9+7+6\sqrt{7})}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{16\times 2+10\sqrt{7}} - \sqrt{8+2\sqrt{7}}\right)$$

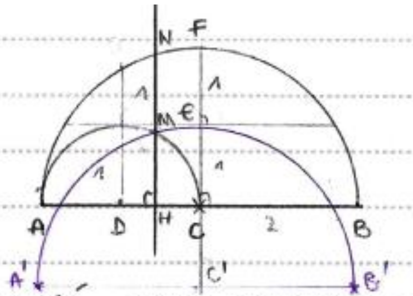
$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{(5+\sqrt{7})^2} - \sqrt{(1+\sqrt{7})^2}\right)$$

$$= \frac{5-1}{4} = 1$$

Donc $MN = 1 \iff x_H = \frac{3+\sqrt{7}}{4}$

Ainsi il faut placer H sur AB tel que $AH = \frac{3+\sqrt{7}}{4}$

CHOHAIB Iliane et VIEN Milla
Lycée International des Pontonniers, Strasbourg
Exercice n°2 (autre solution)



D'après l'énoncé, nous savons que le rayon de Γ_1 est de 1 ~~cm~~ et le rayon de Γ_2 est de 2.
Ainsi la moitié du rayon de Γ_2, le segment [EF] vaut 1.
Soit (NH) la droite perpendiculaire à [AB] passant par H coupant Γ_1 en M et Γ_2 en N, nous cherchons où placer H de sorte que MN soit égal à 1.
Pour cela nous construisons ~~la droite~~ le segment [A'B'] parallèle à [AB] tel que [CC'] = 1. On trace le demi-cercle Γ_2' de centre C' et de diamètre [A'B'].
En tout point du demi-cercle Γ_2', projeté d'un point du demi-cercle Γ_2 tels que ~~leur diamètre~~ la distance entre [A'B'] et [AB] (segment représentant respectivement le diamètre de ces demi-cercles) vaut 1, la distance entre ces deux points des demi-cercles vaut 1 également.
Ainsi [EF] = 1, ~~et~~ il suffit de placer M à l'intersection des demi-cercles Γ_1 et Γ_2', et H à l'intersection de la droite passant par M ~~parallèle~~ perpendiculaire à [AB] et le segment [AB]. Ainsi [NM] vaut 1
MN = 1

BEN SMIDA Bader et MOLIMARD Augustin
Lycée International des Pontonniers, Strasbourg
Exercice n°3

Notons d'abord qu'un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
2023 n'est donc pas divisible par 3 ($3 \nmid 7$), donc aucun multiple de 3 aura la somme des chiffres qui fera 2023.
Il en est de même pour 6, 9 et 12 qui sont des multiples de 3, car si un nombre est multiple de 6, 9 ou 12 alors il est multiple de 3.
Cela ne marche donc pas pour ces valeurs de n : 3 ; 6 ; 9 ; 12

Prenons le nombre suivant : (La somme de ses chiffres est 2023)
$\underbrace{999\ldots999}_{224 \text{ fois le chiffre } 9}250$. Il est divisible par 5 et par 10 car il finit par 0. Il est aussi évidemment divisible par 1 car différent de 0.

Étant donné que ce nombre est $\equiv 250$ [mod 1000] et que $8 \mid 1000$
$999\ldots999250 \equiv 250\ [8]$ et $250 \equiv 0\ [8]$, donc $8 \mid 250 \Rightarrow 8 \mid 999\ldots999250$
8 étant un multiple de 2 et de 4, 2 et 4 aussi divisent $\underbrace{999\ldots999}_{224 \text{ fois}}250$

1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 marchent donc car :
Pour ces valeurs de n : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 il existe donc un multiple de n dont les chiffres ont pour somme 2023, comme par exemple en prenant le multiple 999…999250 avec 224 fois le chiffre 9, car $224 \times 9 + 5 + 2 = 2023$ (la somme de ses chiffres).

Il reste donc à déterminer pour 7, 11 et 13.
La chance fait que $1000 \equiv -1\ [7]$, $1000 \equiv -1\ [11]$, $1000 \equiv -1\ [13]$.
Cela veut donc dire qu'un critère de divisibilité par 7, 11 et 13 est la divisibilité de la somme alternée de ses chiffres par groupe de 3 (car $1000^n \equiv -1^n\ [7]$).
ou 11 ou 13
Pour 13 :
On a donc le nombre :
$\underbrace{888\ldots888}_{252 \text{ fois}}052$ qui est divisible par 13 car $052 - 888 + 888 - \ldots + 888 = 052 = 52$, ce qui est divisible par 13 (les groupes de 888 s'annulent car il y en a 252, ce qui est un multiple de 6),
(et $8 \times 252 + 5 + 2 = 2023$) somme des chiffres de 888…888052
Donc 13 marche

Pour 7 :

Prenons le nombre $2\underbrace{222\,222\ldots\ldots222}_{1008 \text{ fois}}212$. La somme de ses chiffres est ~~1008×2+2+2+2+1~~ $1008\times2+2+2+2+1=2023$

Il est divisible par 7 car $212-\underbrace{222+222-\ldots}_{\text{6 groupes de 168 qui s'annulent}}-2 = 212-2=210$, ce qui est divisible par 7.

(chaque groupe est "−222+222")

Donc 7 marche aussi.

Pour 11 :

Nous utiliserons un critère différent pour 11.

Comme $10\equiv-1\ [11]$, il suffit de faire la somme alternée des chiffres par groupe de 1 cette fois ci et non par 3 comme avant pour 7 et 13 et regarder si cette somme est divisible par 11.

Nous prenons le nombre :

$\underbrace{111\cdots111}_{1396 \text{ fois "1"}}\underbrace{121212\ 12\ldots12}_{209 \text{ fois "12"}}$

→ La somme de ses chiffres est $1396\times1+3\times209=1396+627=2023$

→ La somme alternée de ses chiffres est :

$\underbrace{2-1+2-1+2-1\ldots}_{209 \text{ fois}}+\underbrace{1-1+1-1+1\ldots}_{698 \text{ fois}}=\underbrace{1+1+1+\ldots}_{209 \text{ fois}}+0+0\ldots$

$=209$, ce qui est divisible par 11

Donc 11 marche aussi

Tous les nombres qui marchent sont donc : 1;2;4;5;7;8;10;11;13, tandis que 3;6;9;12 ne marchent pas.