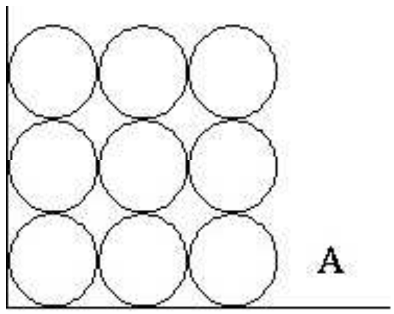
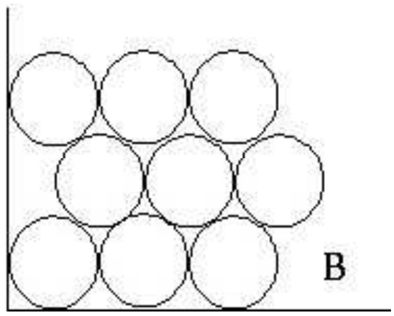
SUJETS 2000

Rallye mathématique de Première

SUJET 1

Emile le pâtissier possède des plaques de cuisson carrées de côté un multiple de 10 centimètres. Il peut disposer les gâteaux ronds de 10 centimètres de diamètre qu'il doit faire cuire de deux manières A ou B comme indiqué sur la figure.





Déterminer pour chaque taille de plaque la disposition qui permet de cuire le plus grand nombre de gâteaux en une fournée.

SUJET 2

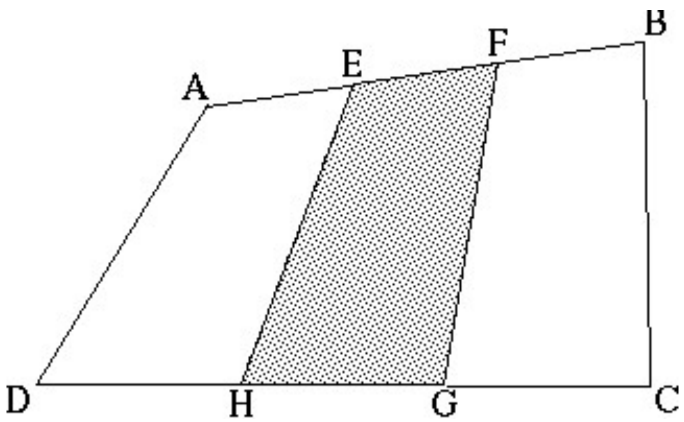
On dispose d'un tableau ayant 4 lignes et 1998 colonnes. A l'intersection de la ligne *m* et de la colonne *n* se trouve l'élément noté $f(m, n)$. On donne, pour tout entier *n* compris entre 0 et 1997 la valeur $f(0, n) = n + 1$, ce qui permet donc de remplir la première ligne du tableau comme indiqué sur la figure.

	0	1	2	3	4	5		1997
0	1	2	3	4	5	6		1998
1								
2								
3								$f(3, 1997)$

Par ailleurs, on sait que pour tout entier *m* compris entre 1 et 3 et pour tout entier *n* compris entre 1 et 1997, on a les égalités suivantes: $f(m, 0) = f(m - 1, 1)$ et $f(m, n) = f(m - 1, f(m, n - 1))$. Quel nombre se trouve à l'intersection de la dernière ligne et de la dernière colonne?

SUJET 3

On considère un quadrilatère convexe quelconque *ABCD* dans le plan (voir figure). On découpe les segments [*AB*] et [*CD*] en trois parties égales, définissant les points *E, F, G, H* comme indiqué sur la figure.
Montrer que l'aire du quadrilatère central est le tiers de celle du quadrilatère total *ABCD*.



Sujets du Rallye Mathématique d'Alsace 2001 - Classes de première

Sujet 1 : de Fromentine à l'Ile d'Yeu

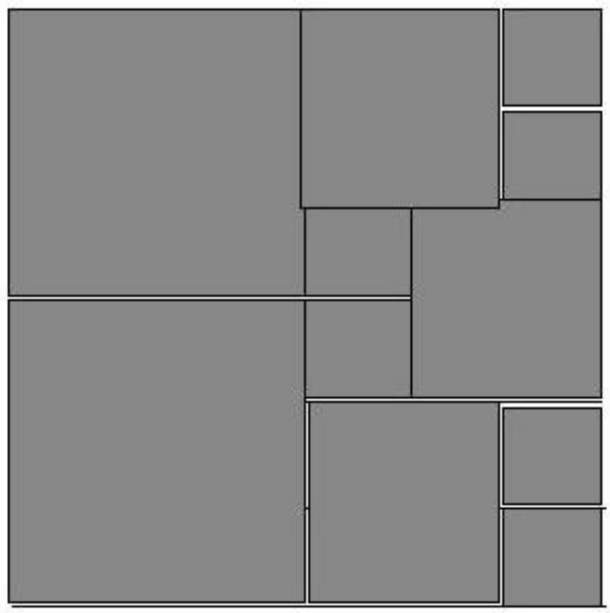
Deux bacs partent en même temps, l'un, l'Amporelle, de Fromentine vers l'Ile d'Yeu, l'autre, l'Insula Oya, de l'Ile d'Yeu vers Fromentine. L'Amporelle navigue plus rapidement que l'Insula Oya. Ils se croisent à la hauteur d'une bouée indiquant que l'Ile d'Yeu est à 7 km.

Une fois arrivés à destination, les deux bateaux s'arrêtent à quai pour débarquer et prendre leurs passagers, l'Amporelle restant à quai un peu plus longtemps que l'Insula Oya. Puis ils repartent pour leur point de départ et se croisent à nouveau à la hauteur d'une bouée indiquant que Fromentine est à 16,5 km.

Sachant qu'au moment de leur deuxième rencontre l'Insula Oya a navigué trois fois plus longtemps que l'Amporelle, quelle distance sépare Fromentine de l'Ile d'Yeu ?

Sujet 2 :

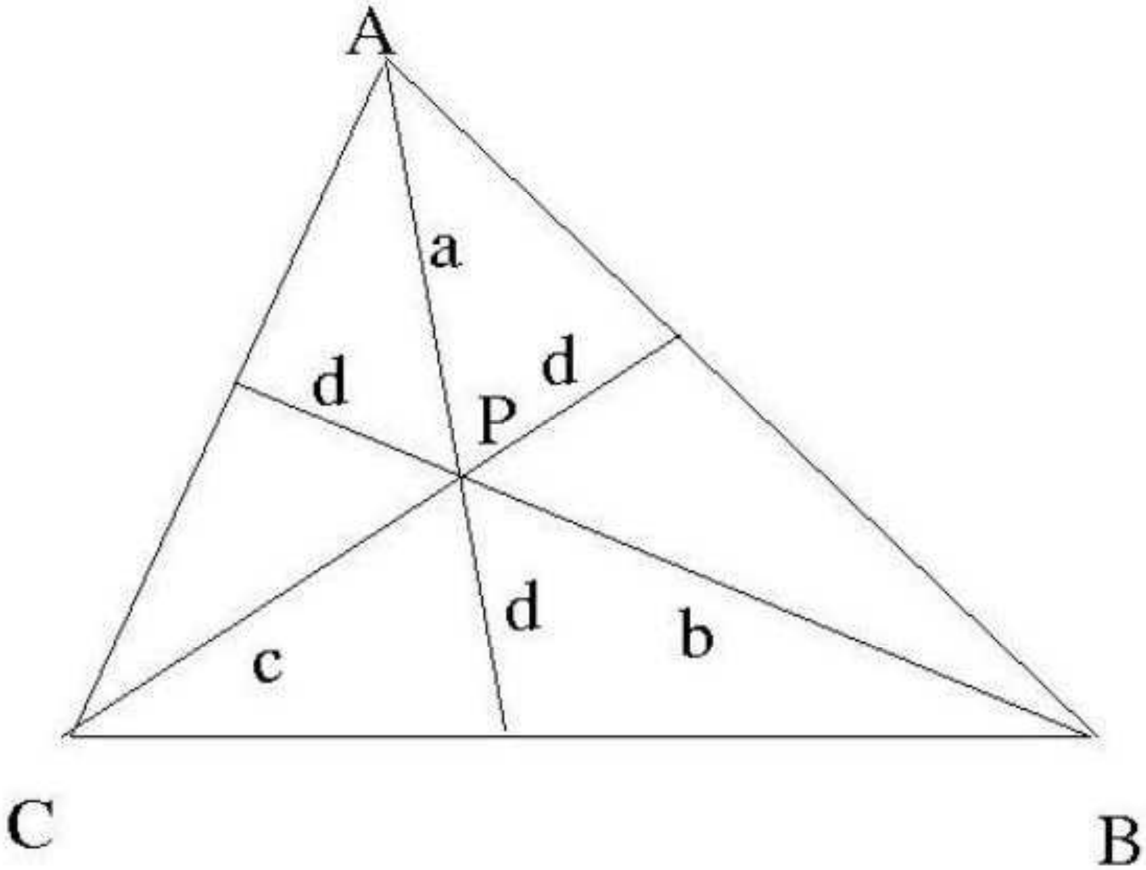
Un carré qui peut être exactement recouvert sans chevauchement par n carrés de tailles quelconques, dont les côtés sont parallèles à ses côtés, est dit n-carrelable. Par exemple, ce carré est 11-carrelable.



On se donne un carré. Pour quelles valeurs de n est-il n-carrelable ?

Sujet 3 :

Trois droites issues des trois sommets d'un triangle ABC sont concourantes en P, intérieur au triangle. On note a, b, c, d les longueurs des segments issus de P comme indiqué sur la figure.



Sachant que $a + b + c = 43$ et $d = 3$, calculer le produit abc.

Rallye mathématique d'Alsace 2002

Classe de Première

Exercice 1

Soit ABC un triangle et I le milieu de [AC].

Soit M un point quelconque de [IC].

Où placer le point P sur [AB] pour que (MP) partage le triangle ABC en deux parties de même aire ?

Exercice 2

Trois pirates ont dérobé une cassette remplie de louis d'or.

Ils attendent le lendemain matin pour se partager le butin.

Durant la nuit, l'un des pirates se lève sans bruit, ouvre la cassette, jette à la mer un louis d'or pour honorer Lucile, Sainte Patronne des Pirates, et peut partager le reste en trois parties égales. Il empoche la sienne et remet les deux autres dans la cassette. Les deux autres pirates reproduisent tour à tour le même scénario.

Au lever du jour, nos trois compères ouvrent ensemble la fabuleuse cassette, offrent un louis d'or à Lucile et se partagent le butin restant en trois parts égales.

Quel est le nombre minimum de louis d'or contenus initialement dans la cassette ?

Exercice 3

On décompose un entier naturel non nul N en somme d'entiers naturels.

On effectue le produit des termes intervenant dans la somme.

Par exemple, pour N=10, les décompositions 10 = 5 + 4 + 1 et 10 = 4 + 3 + 2 + 1 donnent respectivement les produits 5 x 4 x 1 = 20 et 4 x 3 x 2 x 1 = 24.

Proposer pour N quelconque une décomposition donnant le produit le plus grand possible.

RALLYE MATHÉMATIQUE D'ALSACE 2003
Énoncés de la 30e édition

Classe de Première

Exercice 1

Quelle est l'aire maximale d'un triangle dont les trois sommets appartiennent aux côtés d'un carré de côté 1 ?

Exercice 2

Claudine possède un chandelier contenant n bougies de même taille. Elle allume ce chandelier pendant n dimanches de la manière suivante : le premier dimanche, elle fait brûler une bougie pendant une heure ; le deuxième dimanche, elle fait brûler deux bougies convenablement choisies pendant une heure, et ainsi de suite jusqu'au n-ième dimanche où elle fait brûler les n bougies pendant une heure.

Pour quelles valeurs de n est-il possible que toutes les bougies soient entièrement consumées à l'issue du n-ième dimanche ?

Dans ce cas, donner une marche à suivre.

Exercice 3

Grains de riz

Tout le monde connaît l'anecdote de ce roi qui s'engagea à récompenser l'nventeur du jeu d'échecs selon ses souhaits, alors que celui-ci demandait à ce qu'on lui donne un grain de riz pour la première case de l'échiquier, deux grains de riz pour la seconde, quatre pour la troisième, et ainsi de suite en doublant le nombre de grains de riz à chaque case, jusqu'à la 64-ième.

On connaît moins la façon dont le roi se tira de cette situation : il exigea de ses sept seigneurs qu'ls fournissent chacun une part égale de la récompense arrondie au grain de riz inférieur. Lui-même se contenterait de fournir les grains de riz nécessaires pour faire le compte exact.

Combien le roi dut-il fournir de grains de riz ?

Rallye mathématique d'Alsace 2004

31 mars 2004

Classe de Première
$31^{ème}$ édition

Exercice 1

Comment régler l'addition

On dispose de pièces de 1, 2, 5, 10, 20 et 50 centimes ainsi que de 1 euro en aussi grande quantité que l'on veut.

On suppose qu'il est possible de payer une somme de m centimes avec n pièces.

Est ce que l'on peut payer une somme de n euros avec m pièces ?

Exercice 2

Construction d'un pentagone

On dispose de 5 points I, J, K, L, M du plan, sommets d'un pentagone convexe, c'est à dire tels que 3 sommets parmi les 5 ne sont jamais alignés et tout segment reliant 2 sommets parmi les 5 est contenu dans le pentagone.

Proposer une construction d'un pentagone ABCDE tel que les points I, J, K, L et M soient respectivement les milieux des côtés [AB] , [BC] , [CD] , [DE] et [EA] .

Exercice 3

La somme constante

On numérote les cases d'un échiquier carré de 31 lignes et 31 colonnes par les entiers de 1 à 31^2 en décrivant successivement les 31 lignes de gauche à droite.

On choisit 31 cases en en prenant une seule sur chaque ligne et sur chaque colonne.

Montrer que la somme de leurs numéros est indépendante du choix des cases.

Rallye mathématique d'Alsace 2005
6 avril 2005

Classe de Première
32ème édition

Exercice 1

Deux sphères de rayon 1 sont placées à l'intérieur d'un cube.
Quelle est la longueur minimale du côté d'un tel cube ?

Exercice 2

Les entiers de 1 à n sont écrits dans un ordre tel que chaque entier est soit inférieur à tous ceux qui le précèdent, soit supérieur à tous ceux qui le précèdent.
De combien de façons peut-on les ordonner ainsi ?

Exercice 3

Un journal organise un sondage auprès de ses abonnés. Il détermine le sexe, l'état civil, la profession d'un échantillon de 1000 lecteurs. Il obtient les résultats suivants : 312 hommes, 470 personnes mariées, 525 étudiantes ou étudiants, 42 étudiants de sexe masculins, 147 étudiantes ou étudiants mariés, 86 hommes mariés et 25 étudiants de sexe masculin mariés.
Montrer que ces résultats sont contradictoires.

Rallye mathématique d'Alsace 2006
22 mars 2006

Classe de Première
33ème édition

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également leur adresse postale et leur mail éventuel ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Exercice 1

On écrit tous les entiers de 1 à 2006. Combien de fois a-t-on utilisé le chiffre 1 ?

Exercice 2

Un réel $x > 0$ vérifie $x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$.

Montrer que $x + \frac{1}{x}$ est un entier et le déterminer.

Faire de même pour $x^3 + \frac{1}{x^3}$, $x^4 + \frac{1}{x^4}$ et proposer une méthode pour obtenir les différentes valeurs de $x^n + \frac{1}{x^n}$ pour tout entier naturel n .

Exercice 3

Sur un échiquier $n \times n$, on place un pion dans un des quatre coins.
Il se déplace uniquement horizontalement et verticalement d'une seule case à la fois.

Est-il possible de revenir à la case de départ en passant une et une seule fois par chaque case de l'échiquier ?

Rallye mathématique d'Alsace 2007
21 mars 2007

Classe de Première
34ème édition

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également leur adresse postale et leur mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Exercice 1

Sans utiliser votre calculatrice, comparer 13^{2006} et $12^{2006}+5^{2006}$, puis 13^{2007} et $12^{2007}+5^{2007}$.
Proposer des généralisations du phénomène observé.

Exercice 2

Chaque année, Philippe l'illustrateur publie un album qui comporte un dessin de plus que l'année précédente.
En 2008, il constate qu'il a publié 2008 dessins depuis le début de la collection.
En quelle année a-t-il commencé sa collection, et combien de dessins comportait son premier album ?

Exercice 3

On considère uniquement des triangles non aplatis dont les côtés sont des nombres entiers.
On réalise en découpant du carton pour un périmètre donné toutes les plaques triangulaires distinctes possibles.
Y-a-t-il plus de plaques de périmètre 2010 cm que de plaques de périmètre 2007 cm ?

Rallye mathématique d'Alsace 2008
26 mars 2008

Classe de Première
35ème édition

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également leur adresse postale et leur mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Exercice 1

Les nombres entiers de 1 à 2008 sont écrits au tableau. Parmi eux, on choisit deux nombres au hasard, on les efface et, à la place de l'un d'eux, on écrit leur différence (le plus grand moins le plus petit), l'autre nombre reste effacé.
On recommence jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un nombre écrit au tableau.

Ce dernier nombre est-il pair ou impair ?

Exercice 2

On considère une grille carrée à 2008^2 cases : 2008 lignes et 2008 colonnes. Les cases sont numérotées dans l'ordre de 1 jusqu'à 2008^2.
On choisit 2008 nombres de cette grille en n'en prenant qu'un seul par ligne et par colonne. On s'intéresse à la somme de ces 2008 nombres.

1. Combien vaut-elle si l'on choisit les 2008 nombres sur une diagonale?

2. Combien vaut-elle si ces 2008 nombres sont choisis au hasard dans les conditions de l'énoncé ?

1	2	3	…	…	2007	2008
2009	2010	2011	…	…		
…						
					...	2008^2

Exercice 3

Un grand hall en forme de trapèze isocèle (angles à la base de 60°) dont les côtés sont des nombres entiers en mètres est entièrement dallé avec des dalles en forme de triangles équilatéraux de côté 1 mètre. On a compté 70280 dalles.

Quelles sont les dimensions du hall ?

<u>RALLYE 2009 DES CLASSES DE PREMIERES</u>

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

<u>Exercice 1 :</u>

Déterminer combien il existe d'entiers naturels s'écrivant avec des chiffres tous distincts.

<u>Exercice 2 :</u>

Jean-Marc est professeur et commence à corriger un paquet de copies entre 15 heures et 16 heures. Il finit la correction entre 18 heures et 19 heures. Sur sa montre à aiguilles, il se rend compte qu'entre le début et la fin de la correction, les aiguilles des heures et des minutes ont exactement échangé leurs positions. Combien de temps a-t-il corrigé ?

<u>Exercice 3 :</u>

1) Les 3 sommets d'un triangle sont situés à l'intérieur d'un carré de côté de longueur c. Montrer que l'aire de ce triangle est inférieure ou égale à $c^2/2$. On peut commencer par envisager le cas où l'un des côtés du triangle est parallèle à l'un des côtés du carré.

2) Dans un champ carré de côté de longueur 140 mètres, sont plantés au hasard 99 piquets. Montrer que 3 d'entre eux au moins forment un triangle d'aire inférieure ou égale à 200 mètres carrés.

RALLYE 2010 DES CLASSES DE PREMIERES

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

Exercice 1 :

On suppose que tous les nombres rationnels non nuls ont une couleur : soit rouge, soit bleu.
On sait que 1 est rouge.
En outre, un nombre rationnel et son inverse sont toujours de couleurs différentes.
Enfin, on sait également que si x est un nombre rationnel alors x et x+1 ont la même couleur.
Quelle est la couleur de $\frac{83}{2010}$?

Exercice 2 :

On considère 2010 points situés à l'intérieur ou sur les côtés d'un carré ABCD de côté 14 cm.

1. Montrer qu'il existe un carré de 7 cm de côté contenant à l'intérieur ou sur ses côtés au moins 503 de ces points.

2. Montrer qu'il existe un disque de rayon 1 cm contenant à l'intérieur ou sur son bord au moins 21 de ces points.

Exercice 3 :

On considère un triangle de périmètre 15 cm ayant deux médianes de même longueur.

Quelles sont les longueurs de ses trois côtés sachant que ce sont des nombres entiers?

RALLYE 2011

CLASSES DE PREMIERES

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

Exercice 1 :

Trois amis jouent plusieurs parties d'un même jeu. A la fin de chaque partie les joueurs sont classés et gagnent une somme fixe entière correspondant à leur classement.
Ces trois sommes sont distinctes deux à deux.
A la fin, les joueurs ont gagné respectivement 20, 10 et 9 €.

1. Combien de parties ont-elles été jouées ?

2. Quelles sont les trois sommes attribuées à chaque place ?

Exercice 2 :

1. On décompose 17 en somme d'entiers naturels. On effectue le produit de ces entiers. Quelle est la valeur maximale de ce produit ?

2. Faire de même avec 2010 .

3. Qu'en est-il pour 2011 ?

Exercice 3 :

Dans la vallée de la Bruche, une clairière est de forme circulaire. Près de cette clairière est enterré un trésor. Un vieux parchemin indique la localisation de ce trésor :
« A partir du grand sapin situé sur le cercle, va vers le peuplier dans la clairière. Tourne alors à angle droit vers la droite et marche jusqu'au bord de la clairière. Tourne encore à angle droit vers la droite et marche d'autant de pas que du sapin au peuplier. Là est enfoui le trésor. »

La clairière a un rayon de 20 m et le seul arbre de cette clairière est un peuplier situé à 4 m du centre.

Malheureusement, les sapins bordant cette clairière ont depuis longtemps disparu.

Pouvez-vous dire à quelle distance du centre de la clairière se trouve le trésor ?

Rallye mathématique d'Alsace 2012
11 avril 2012

Classe de Première
39$^{\text{ème}}$ édition

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également leur adresse postale et leur mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

Exercice 1

Quelle est l'aire maximale d'un quadrilatère dont les côtés ont pour longueur respective 1 mètre, 4 mètres, 7 mètres et 8 mètres ?

Exercice 2

Un bricoleur doit carreler le fond d'une piscine carrée. Il place un carreau au centre et boit une gorgée de sa boisson favorite. Ensuite, il entoure ce carreau de 8 carreaux afin d'obtenir un nouveau carré. Il s'arrête et boit à nouveau une gorgée. Il continue ce processus en buvant une gorgée à chaque fois qu'il a formé un nouveau carré en entourant le précédent.

1 : Combien de carreaux a-t-il posé s'il a bu 39 gorgées ?

2 : S'il dispose de 2012 carreaux, combien de gorgées pourra-t-il boire ?

Exercice 3

Christiane voudrait prendre sa revanche dans le jeu qui l'a opposée à Claudine il y a quelques jours.

A chaque partie de ce jeu, le vainqueur gagne un certain nombre de points, elles ne savent plus trop combien, mais c'est le même à chaque partie et le perdant perd un certain nombre de points, là encore le même à chaque partie.

Elles n'ont pas oublié que les points gagnés et perdus sont des nombres entiers et que Claudine avait gagné 10 points contre 3.

Pouvez-vous les aider à retrouver le nombre de points gagnés et perdus à chaque partie ?