SUJETS 2000

Rallye mathématique de Terminale

SUJET 1

Grand organisateur à Lembach des festivités liées à l'année mondiale des mathématiques, Emile le Bon est chargé de placer le mât du drapeau du Rallye mathématique d'Alsace au centre de la place circulaire de son village.
Il ne dispose pour cela que d'une règle de longueur infinie non graduée à deux côtés parallèles et d'un crayon.
Comment doit-il procéder?

SUJET 2

Montrer que l'on peut trouver un entier de 2000 chiffres divisible par 2^{2000} qui s'écrive seulement avec les chiffres 1 et 2.

SUJET 3

On se donne un entier naturel non nul n. On choisit $n + 1$ nombres entiers tous distincts entre 1 et $2n$. Montrer que parmi eux, il en existe toujours deux dont le quotient est une puissance de deux.

Sujets du Rallye Mathématique d'Alsace 2001 - Classes de Terminale

Sujet 1 : Millésime et Parties Entières

Combien de nombres parmi les 2001 premiers entiers strictement positifs peuvent s'écrire sous la forme $E(2x) + E(4x) + E(6x) + E(8x)$

où x est un nombre réel et $E(z)$ désigne la partie entière de z, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à z (par exemple $E(3,2) = 3$ et $E(-3,2) = -4$) ?

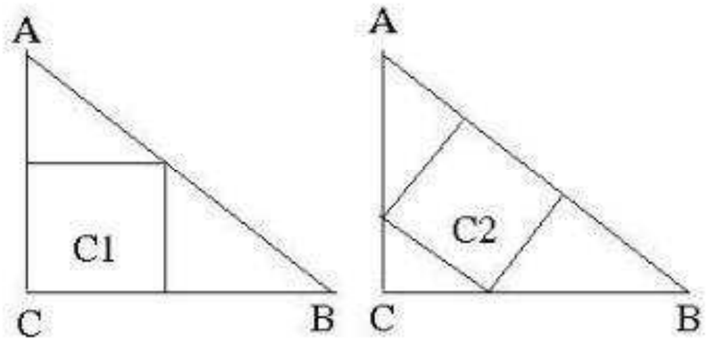
Sujet 2 : le Vieux Magnéto

Un magnétophone ancien nécessite 8 minutes pour rembobiner totalement une cassette ; la vitesse de rotation de l'axe de la bobine est constante. Après lecture, la bande se trouve intégralement sur une bobine et l'on procède au rembobinage.

On désire estimer le temps nécessaire au rembobinage du premier quart de la bande. Emile prétend qu'il faudra environ 3 minutes et Claire pense que 4 minutes seront nécessaires. Qu'en pensez-vous ? On pourra négliger le rayon de l'axe des bobines et assimiler chaque spire à un cercle.

Sujet 3 : Histoires d'Aires

On dispose d'un triangle ABC rectangle en C. Deux carrés C 1 et C 2 sont inscrits dans le triangle comme indiqué sur la figure.



Déterminer la longueur AC + CB sachant que C 1 et C 2 ont pour aire respective 441 cm^2 et 440 cm^2.

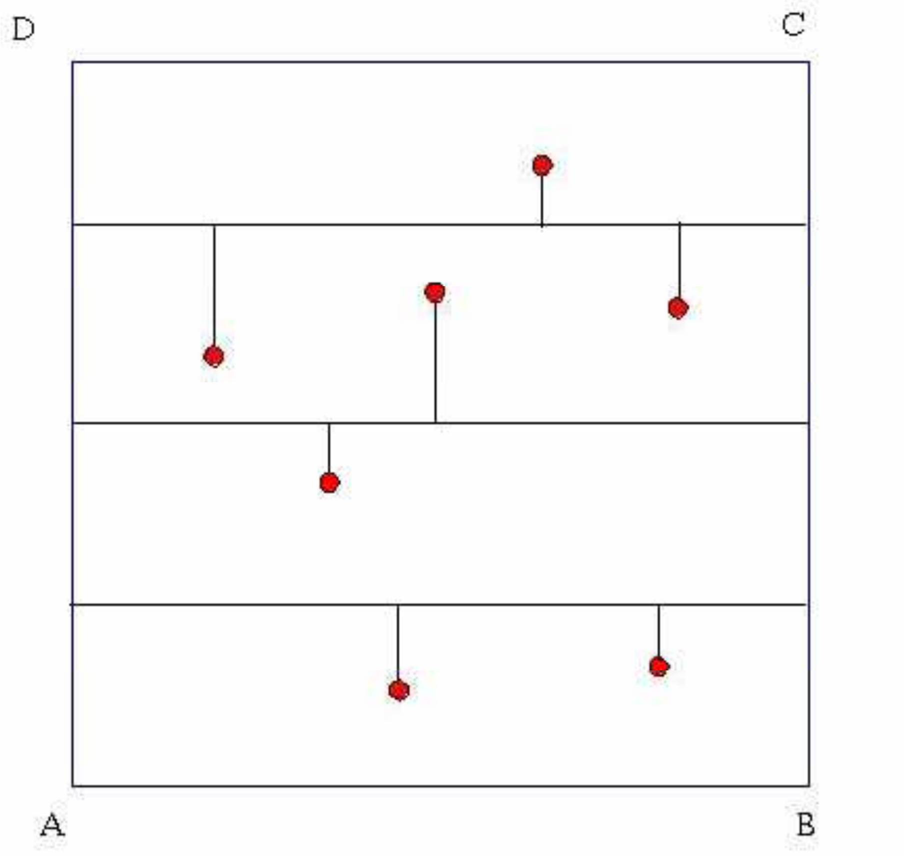
Rallye mathématique d'Alsace 2002

Classe de Terminale

Exercice 1

Dans un parc carré ABCD d'un kilomètre de côté sont placées 288 statues.

On construit dans ce parc un **réseau** de la manière suivante :



On construit un certain nombre de chemins parallèles à (AB) allant de [AD] à [BC].

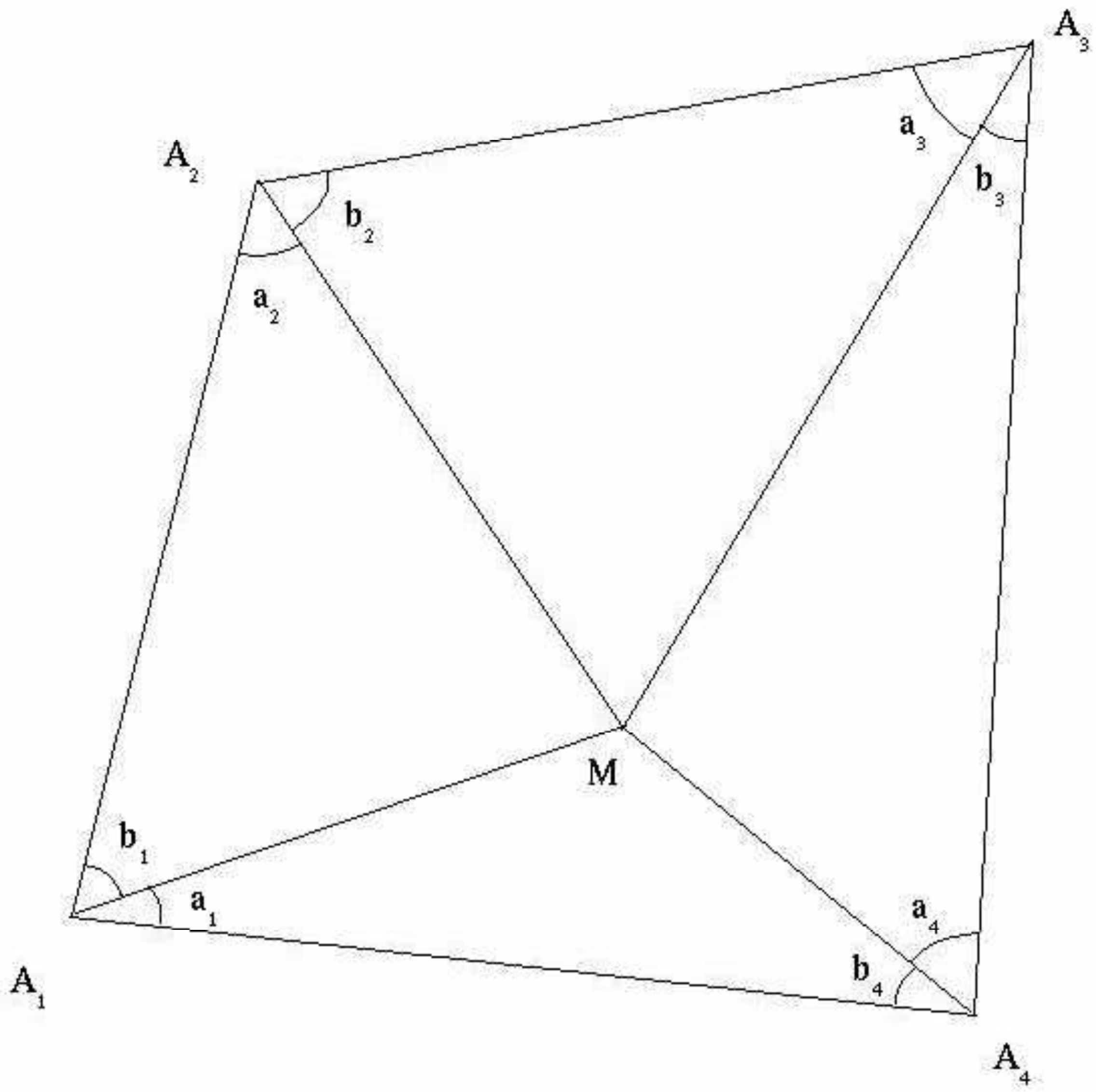
On construit d'autre part des chemins secondaires perpendiculaires aux précédents, partant de chacune des 288 statues et aboutissant aux chemins principaux. (voir la figure).

Montrer qu'on peut construire un réseau de telle sorte que sa longueur totale soit inférieure à 24 kilomètres (la largeur des chemins est négligeable).

Exercice 2

On se donne un quadrilatère convexe ($A_1A_2A_3A_4$) et M un point quelconque intérieur à ce quadrilatère. on définit les angles géométriques a_1, a_2, a_3, a_4 et b_1, b_2, b_3, b_4 comme indiqué sur la figure.

Montrer l'existence de i entre 1 et 4 tel que a_i soit inférieur ou égal à b_i.



Exercice 3

Quels entiers sont somme d'au moins deux entiers strictement positifs, tous consécutifs ?

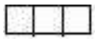
RALLYE MATHÉMATIQUE D'ALSACE 2003

Énoncés de la 30e édition

Classes de Terminale

Exercice 1

On supprime une case d'un échiquier carré qui en comporte 64.

Est-il possible de recouvrir les cases restantes à l'aide de triminos  ?

Exercice 2

On considère la somme S = 1 + 2 + ... + 30.

Dans cette somme, on supprime un certain nombre de signes "+". Par exemple, 2 + 3 est remplacé par 23 ou 2 + 3 + 4 par 234, pour obtenir une nouvelle somme S'.

Quel est le nombre minimal de signes "+" à supprimer pour obtenir une somme S' valant 3030 ?

Exercice 3

Les cent membres d'une association reviennent du casino et s'asseyent autour d'une table ronde pour faire le point. Au cours de la soirée, l'association a gagné mille euros. Le président en a gagné soixante. Il désire connaître les gains et les pertes de chacun des membres et constate que six personnes assises l'une à côté de l'autre autour de la table n'ont, à elles six, jamais gagné davantage que lui.

Pouvez-vous aider le président dans sa tâche ?

Rallye mathématique d'Alsace 2004

10 mars 2004

Classe de Terminale
31ème édition

Exercice 1

Le triangle millésimé

On forme un tableau triangulaire d'entiers de la manière suivante :

0	1	2	3	….	…..	…..	2001		2002		2003		2004
1	3	5	7	…..	…..	…..	4003		4005		4007		
4	8	12	….	…..	…..	…..	…..	8008		8012			
12	20	….	…..	…..	…..	…..	…..	16020					
…	….	….	…..	…..	……..	…….	…….						

Chaque entier du tableau est la somme des deux entiers de la ligne précédente qui " l'encadrent ".

Montrer que les entiers situés au sommet de ce triangle sont tous les trois divisibles par 2004

Exercice 2

L'aire minimale

Deux demi-droites du plan sont perpendiculaires et de même origine O.

On considère un point M dans le quart de plan qu'elles définissent et une droite D passant par M. La droite D coupe les demi-droites en deux points A et B.

Comment choisir la droite D pour que l'aire du triangle OAB soit minimale ?

Exercice 3

La sphère et les cubes

Au moyen de 216 petits cubes de 1 cm de côté, on construit un grand cube de 6 cm de côté. On note O son centre.

Combien la sphère de centre O et de diamètre 6 cm contient-elle de petits cubes entiers ?

Rallye mathématique d'Alsace 2005

23 mars 2005

Classe de Terminale

32ème édition

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également leur adresse postale et leur mail éventuel ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Exercice 1

n personnes sont assises autour d'une table. Elles se lèvent et se rasseyent de telle manière que deux personnes assises côte-à-côte auparavant soient maintenant séparées par deux convives.
Pour quelles valeurs de n ce scénario est-il possible ?
On pourra commencer par étudier les cas $n=15$ et $n=16$.

Exercice 2

A quelle condition sur quatre points A, B, C et D du plan existe-t-il un point P tel que les aires des triangles PAB, PBC, PCD et PAD soient égales?

Exercice 3

Quel est le plus grand nombre d'éléments que peut contenir un ensemble d'entiers compris entre 1 et 4010 dont aucun élément n'est divisible par un autre?

Rallye mathématique d'Alsace 2006
29 mars 2006

Classe de Terminale
33ème édition

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également leur adresse postale et leur mail éventuel ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Exercice 1

A l'intérieur d'un triangle équilatéral ABC, il y a un point M tel que MA=3, MB=4 et MC=5. Quelle est la longueur d'un côté de ce triangle ?

Exercice 2

On prend 5012 entiers naturels non nuls, distincts, tous inférieurs ou égaux à 4024036. On forme toutes les différences possibles entre deux de ces nombres. Montrer qu'au moins trois de ces différences sont égales.

Exercice 3

On dispose d'une calculatrice qui n'effectue qu'une opération $*$ définie par :

pour tout réel a et tout réel non nul b , $a*b=1-\frac{a}{b}$.

Par exemple, le résultat de $(1*2)*3$ est $\frac{5}{6}$ et celui de $1*(2*3)$ est -2.

Que doit-on taper pour obtenir la valeur du quotient $\frac{a}{b}$ pour b non nul ?
Et pour celle du produit ab pour b non nul ?

Rallye mathématique d'Alsace 2007
28 mars 2007

Classe de Terminale
34ème édition

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également leur adresse postale et leur mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Exercice 1

Une cagnotte contient autant de pièces de 1 € et de 2 € que nécessaire.
On tire des pièces l'une après l'autre en tenant compte de l'ordre jusqu'à obtention d'une somme désirée.

1. De combien de manières obtient-on ainsi une somme de 5 € ?
2. De combien de manières obtient-on ainsi une somme de 34 € ?
3. Proposer une généralisation pour obtenir ainsi une somme de N € ?

Exercice 2

Dans cet exercice ABC est un triangle donné, G son centre de gravité et O le centre de son cercle circonscrit.

1. Démontrer que parmi tous les points M intérieurs au triangle ABC, le point G est le seul à vérifier les égalités :

$$\text{Aire (MAB)} = \text{Aire (MBC)} = \text{Aire (MAC)}$$

2. On suppose que les trois angles du triangle ABC sont aigus.
De manière analogue, trouver une relation liant les aires des triangles MAB, MBC, MAC et les angles du triangle ABC (avec M intérieur au triangle ABC) vérifiée seulement par le point O.

Exercice 3

Sur une très longue table sont disposés à intervalles réguliers 2007 gâteaux différents. Le long de cette table se trouvent alignés 2007 enfants gourmands, à intervalles réguliers égaux à ceux qui séparent les gâteaux. Chaque enfant se trouve en face de son gâteau préféré.
Un plaisantin change des gâteaux de place…

Montrer que deux au moins de ces enfants se trouvent à la même distance de leur gâteau préféré.

Rallye mathématique d'Alsace 2008
5 mars 2008

Classe de Terminale
35ème édition

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également leur adresse postale et leur mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Exercice 1

Le nombre 31 a pour carré 961 ; si on enlève les deux derniers chiffres de ce carré, on obtient le nombre 9 qui est lui-même un carré. Il en est de même pour le nombre 60.

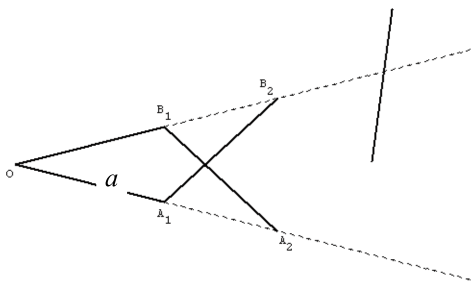
Trouver tous les nombres entiers strictement supérieurs à 9 qui vérifient la même propriété.

Exercice 2

On construit une suite de chiffres de proche en proche de la manière suivante : on part de deux chiffres a et b. Le troisième, disons c, est le chiffre des unités de la somme a+b. Le quatrième est le chiffre des unités de la somme b+c. On continue ainsi le processus.

1. Montrer que si l'on connaît deux termes consécutifs d'une telle suite alors on peut calculer tous les termes de la suite.
2. Quelles sont les deux premiers termes de la suite telle que le 2007 ^{ième} terme vaut 2 et le 2008 ^{ième} terme vaut 6 ?
3. Montrer qu'une suite construite par ce processus est toujours périodique.

Exercice 3



On dispose de 5 allumettes, toutes de même longueur, disposées comme indiqué sur le dessin.
La cinquième allumette n'a pas encore trouvé sa place.
Trouver la valeur a de l'angle $\widehat{A_1OB_1}$ pour que cette cinquième allumette relie exactement A_2 et B_2 .

Les points O, A_1 et A_2 sont alignés.

Les points O, B_1 et B_2 sont alignés.

On dispose à présent de 7 allumettes que l'on croise comme précédemment, ce qui définit les points A_3 et B_3 , avec les points O, A_1 , A_2 et A_3 alignés de même que O, B_1 , B_2 et B_3

Quelle serait alors la valeur a de l'angle $\widehat{A_1OB_1}$ pour que la septième allumette relie exactement A_3 et B_3 ?

Et si on disposait de $2\,n$ + 1 allumettes avec n entier naturel non nul ?

RALLYE 2009 DES CLASSES DE TERMINALES

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

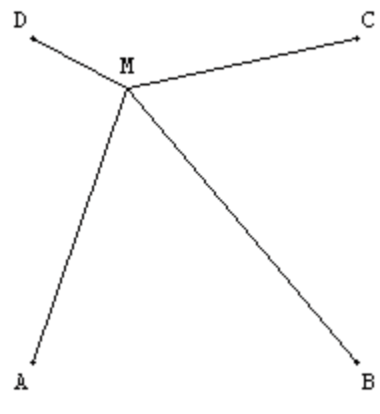
Exercice 1 :

Un esquimau rencontre un explorateur et lui dit : « tu peux trouver sans hésitation mon âge A, la longueur L de mon traîneau en centimètres et le nombre n de chiens de mon attelage sachant que mon âge est supérieur ou égal au double du nombre de chiens, le traîneau mesure entre 2 et 3 mètres, le produit des 3 nombres cherchés vaut 50127 et la longueur du traîneau en centimètres est supérieure ou égale à 7 fois mon âge ».
L'esquimau a-t-il raison ?

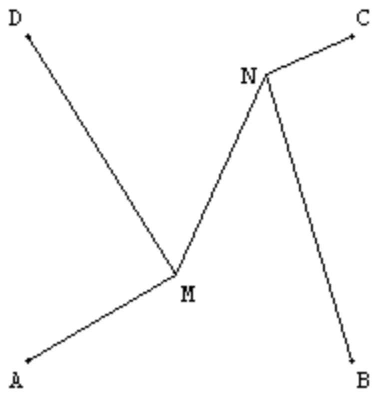
Exercice 2 :

On envisage de créer un réseau routier pour relier 4 villes A, B, C et D situées aux sommets d'un carré de longueur a.
On souhaite construire un réseau de longueur minimale.

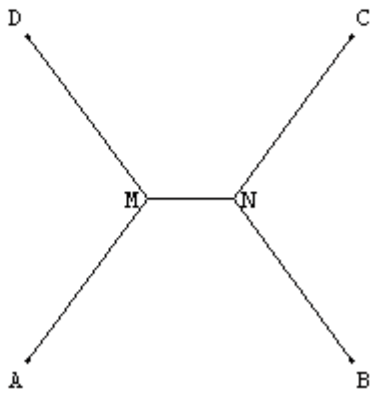
1) Dans un premier temps, on considère les réseaux à un seul nœud comme indiqué ci-dessous. Comment choisir M pour avoir la longueur minimale ? Quelle est cette longueur l ?



2) Une exploration sur ordinateur laisse à penser qu'un réseau à 2 nœuds (voir figure ci-dessous) peut fournir un meilleur résultat que celui obtenu précédemment.



a) Justifier celà.
b) Parmi les réseaux symétriques à 2 nœuds (voir la figure ci-dessous), quel est celui qui a la longueur minimale ? Quelle est cette longueur ?



<u>Exercice 3 :</u>

On dispose d'un échiquier rectangulaire comportant 3 lignes et n colonnes.
Une tour est placée sur la case inférieure gauche et on l'amène sur la case supérieure gauche de la manière suivante : elle peut passer d'une case à une case contiguë (côté commun)mais ne peut pas repasser par une case qu'elle a déjà occupée auparavant (sa trajectoire est dite « auto-évitante »).
On note R(n) le nombre de chemins possibles sur un tel échiquier.

1) Déterminer R(n) pour n=1,2 et 3.
2) Déterminer R(4) et R(5).
3) Proposer une méthode pour déterminer R(2009).

RALLYE 2010 DES CLASSES DE TERMINALES

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

Exercice 1 :

Une boîte contient 19 petits poids de masse 1g, 2g, 3g, …, 19g.
Parmi ces 19 poids, l'un est en or, 9 sont en argent et 9 sont en bronze.
La masse totale des poids en argent est de 90 g supérieure à celle des poids en bronze.
Quelle est la masse du poids en or ?

Exercice 2 :

On considère l'entier naturel ayant 3^{2010} chiffres tous égaux à 1.
Montrer qu'il est divisible par 3^{2010} mais pas par 3^{2011}.

Exercice 3 :

On considère un triangle ABC dont tous les angles sont aigus.
On place un point A' sur le segment [BC], un point B' sur le segment [AC], et un point C' sur le segment [AB].
Comment les choisir pour que le triangle A'B'C' soit de périmètre minimal ?

RALLYE 2011

CLASSES DE TERMINALE

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

Exercice 1 :

On écrit tous les entiers naturels dans l'ordre de 0 à 2011.
On barre 0 puis de proche en proche on barre tout entier qui peut s'écrire comme somme de deux entiers distincts non encore barrés.

1. 2010 sera-t-il barré ?
2. Qu'en est-il de 2011 ?
3. On recommence le processus en barrant cette fois de proche en proche tout entier pouvant s'écrire comme somme de plusieurs (donc au moins deux) entiers distincts non encore barrés.
   2010 sera-t-il barré ? 2011 ?

Exercice 2 :

Claudine dit à Patrick : « J'ai trouvé trois entiers naturels tels que chacun d'entre eux divise la somme des trois. Si je te dis que l'un de ces nombres est 51, trouveras-tu les deux autres ? »

Patrick répond : « Non, car il y a 4 solutions à ton problème. »

Ce à quoi Claudine renchérit : « Ah! Et si je précise que 51 n'est pas le plus petit des trois nombres ? »

« Alors je les connais ! » s'exclame Patrick.

Quels sont ces trois nombres ?
Quelles sont les quatre solutions auxquelles pensait tout d'abord Patrick ?

Exercice 3 :

Pour tout entier naturel n, $f(n)$ est donné par :
$f(n) = n - 2010$ si $n > 3000$ et $f(n) = f(f(n+2011))$ si $n \leq 3000$.

Que vaut $f(0)$?

Rallye mathématique d'Alsace 2012
14 mars 2012

Classe de Terminale
39ème édition

Aucun élève ne quittera le centre d'épreuves sans avoir remis une copie, même blanche, où figureront les noms, prénoms, classe et établissement du ou des auteurs de la copie. Ils indiqueront également leur adresse postale et leur mail ainsi que le nom de leur professeur de mathématiques.

Les candidats sont invités à indiquer sur leur copie tous les éléments de réponse qu'ils jugent pertinents, même si leur solution n'a pas entièrement abouti.

Exercice 1

Dans un plan sont placés 66 points distincts.
On trace toutes les droites déterminées par deux de ces points et on en compte 2012 distinctes.

Justifiez que parmi ces 66 points, 4 au moins sont alignés.

Exercice 2

Mon code secret de téléphone portable est composé de quatre chiffres différents et tous non nuls.

Quand j'effectue la somme de tous les nombres possibles que je peux former avec deux de ces quatre chiffres, et que je la multiplie par 7, je retrouve mon code.

Quel est mon code ?

Exercice 3

Dans une cour carrée de 37 mètres de côté sont posées, à plat sur le sol, 150 boites cubiques de coté 1 mètre.

Montrer que, sans bouger les boîtes, il reste de la place dans la cour pour y déposer sur sa base un tonneau cylindrique de rayon 1 mètre.