

# Problèmes inverses, applications à l'imagerie médicale

Camille Pouchol

*MAP5, Université Paris Cité*

**IREM de France et de Navarre, mercredi 31 janvier 2024**



1. Définition informelle d'un problème inverse et exemples

2. Problèmes inverses mal posés

3. Méthodes de résolution

1. Définition informelle d'un problème inverse et exemples

2. Problèmes inverses mal posés

3. Méthodes de résolution

## Qu'est-ce qu'un *problème direct* ?

Définition **informelle** : "à partir des causes, déterminer les effets".

Définition plus **formelle** :

- ◇ on dispose d'un modèle (sous forme d'une équation),
- ◇ on connaît les paramètres impliqués.

Résoudre le problème direct, c'est en déterminer les solutions, de manière théorique... et/ou numérique.

Exemple : modèle physique d'une masse ponctuelle en chute libre

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) &= -g, \\ z(0) &= h, \\ \dot{z}(0) &= v_0, \end{cases} \quad (1)$$

Le problème direct se résout<sup>1</sup> par

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h.$$

---

<sup>1</sup>Niveau Terminale

## Qu'est-ce qu'un *problème direct* ?

Définition **informelle** : "à partir des causes, déterminer les effets".

Définition plus **formelle** :

- ◇ on dispose d'un modèle (sous forme d'une équation),
- ◇ on connaît les paramètres impliqués.

Résoudre le problème direct, c'est en déterminer les solutions, de manière théorique... et/ou numérique.

Exemple : modèle physique de l'évolution de la température  $u(t, x)$  dans une barre fine

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & t > 0, x \in [0, L], \\ u(t, 0) = u(t, L) = u_b, & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in [0, L], \end{cases}$$

Le problème direct se résout<sup>1</sup> numériquement (et théoriquement).

---

<sup>1</sup>Niveau M1 : méthodes numériques pour les équations aux dérivées partielles.

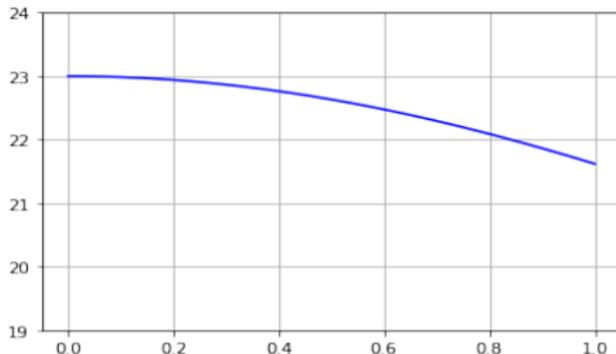
## Qu'est-ce qu'un *problème direct* ?

Définition **informelle** : "à partir des causes, déterminer les effets".

Définition plus **formelle** :

- ◇ on dispose d'un modèle (sous forme d'une équation),
- ◇ on connaît les paramètres impliqués.

Résoudre le problème direct, c'est en déterminer les solutions, de manière théorique... et/ou numérique.



## Qu'est-ce qu'un *problème inverse* ?

Définition **informelle** : "à partir des effets, déterminer les causes".

Définition plus **formelle** :

- ◇ on dispose d'un modèle (sous forme d'une équation),
- ◇ on en connaît (partiellement ou totalement) les solutions.

Résoudre le problème inverse : remonter à certains paramètres d'intérêt.

◇ modèle physique d'une masse ponctuelle en chute libre.

Connaissant  $z_1 = z(t_1)$ , déterminer les données initiales  $v_0$  et  $h$ .

$$z_1 = -\frac{1}{2}gt_1^2 + v_0t_1 + h$$

## Qu'est-ce qu'un *problème inverse* ?

Définition **informelle** : "à partir des effets, déterminer les causes".

Définition plus **formelle** :

- ◇ on dispose d'un modèle (sous forme d'une équation),
- ◇ on en connaît (partiellement ou totalement) les solutions.

Résoudre le problème inverse : remonter à certains paramètres d'intérêt.

- ◇ modèle physique d'une masse ponctuelle en chute libre.

Connaissant  $z_1 = z(t_1)$ ,  $z_2 = z(t_2)$ , déterminer les données initiales  $v_0$  et  $h$ .

$$z_1 = -\frac{1}{2}gt_1^2 + v_0t_1 + h, \quad z_2 = -\frac{1}{2}gt_2^2 + v_0t_2 + h$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ v_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}gt_1^2 \\ -\frac{1}{2}gt_2^2 \end{pmatrix}$$

## Qu'est-ce qu'un *problème inverse* ?

Définition **informelle** : "à partir des effets, déterminer les causes".

Définition plus **formelle** :

- ◇ on dispose d'un modèle (sous forme d'une équation),
- ◇ on en connaît (partiellement ou totalement) les solutions.

Résoudre le problème inverse : remonter à certains paramètres d'intérêt.

- ◇ modèle physique d'une masse ponctuelle en chute libre.

Connaissant  $z_1 = z(t_1)$ ,  $z_2 = z(t_2)$ , déterminer les données initiales  $v_0$  et  $h$ .

$$z_1 = -\frac{1}{2}gt_1^2 + v_0t_1 + h, \quad z_2 = -\frac{1}{2}gt_2^2 + v_0t_2 + h$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ v_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}gt_1^2 \\ -\frac{1}{2}gt_2^2 \end{pmatrix}$$

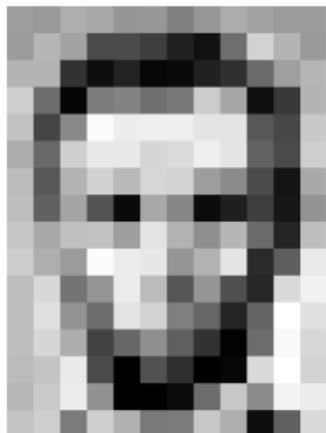
- ◇ modèle physique de l'évolution de la température dans une barre.

Connaissant la fonction  $x \mapsto u(t_1, x)$ , déterminer la donnée initiale  $x \mapsto u_0(x)$ .

# Problèmes inverses : imagerie médicale

Les problèmes inverses apparaissent naturellement en chimie, biologie, géosciences, etc, et notamment en **imagerie médicale**.

But de l'imagerie médicale : reconstruire une **image** d'une zone d'intérêt.



187	183	174	168	160	152	129	161	172	161	155	156
155	182	163	74	75	62	33	17	110	210	180	154
180	180	50	14	54	6	10	33	45	105	159	181
206	109	5	124	131	111	120	204	166	15	56	180
194	58	137	251	237	239	239	228	227	87	71	201
172	105	207	233	233	214	220	239	228	94	74	206
188	88	179	209	185	215	211	158	139	75	20	169
189	97	165	84	10	168	134	11	31	62	22	148
199	148	191	193	158	227	178	143	182	106	36	190
205	174	155	252	236	231	149	178	228	43	95	234
190	216	116	149	236	187	85	150	79	38	218	241
190	224	147	108	227	210	127	102	95	101	255	224
190	214	173	66	103	143	95	50	2	109	249	215
187	196	235	75	1	81	47	0	6	217	255	211
183	202	237	145	0	0	12	108	200	138	243	236
195	206	123	207	177	121	123	200	175	19	96	218

187	183	174	168	160	152	129	161	172	161	155	156
155	182	163	74	75	62	33	17	110	210	180	154
180	180	50	14	34	6	10	33	48	106	159	181
206	109	5	124	131	111	120	204	166	15	56	180
194	58	137	251	237	239	239	228	227	87	71	201
172	105	207	233	233	214	220	239	228	94	74	206
188	88	179	209	185	215	211	158	139	75	20	169
189	97	165	84	10	168	134	11	31	62	22	148
199	148	191	193	158	227	178	143	182	106	36	190
205	174	155	252	236	231	149	178	228	43	95	234
190	216	116	149	236	187	85	150	79	38	218	241
190	224	147	108	227	210	127	102	95	101	255	224
190	214	173	66	103	143	95	50	2	109	249	215
187	196	235	75	1	81	47	0	6	217	255	211
183	202	237	145	0	0	12	108	200	138	243	236
195	206	123	207	177	121	123	200	175	19	96	218

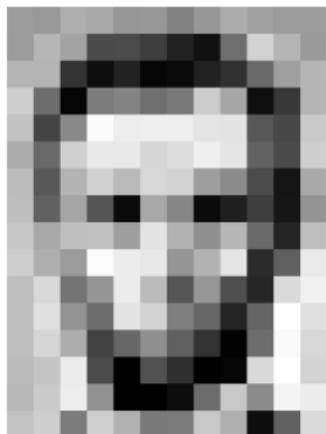
Qu'est-ce qu'une image... ? Ici  $12 \times 16$  pixels : vecteur de  $\mathbb{R}^{192}$ .

**Vision discrète** : mathématiquement (et informatiquement), une **image** est un **vecteur** contenant autant de valeurs que le nombre de pixels.

# Problèmes inverses : imagerie médicale

Les problèmes inverses apparaissent naturellement en chimie, biologie, géosciences, etc, et notamment en **imagerie médicale**.

But de l'imagerie médicale : reconstruire une **image** d'une zone d'intérêt.

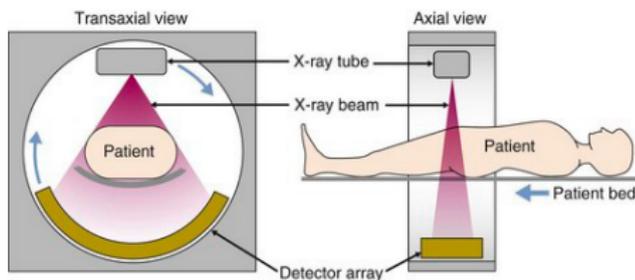


157	153	174	168	150	152	129	151	172	161	155	156
155	182	163	74	75	62	33	17	110	210	180	154
180	180	50	14	84	6	10	33	48	106	159	181
206	109	5	124	131	111	120	204	166	15	56	180
194	58	137	251	237	239	239	228	227	87	71	201
172	105	207	233	233	214	220	239	228	94	74	206
188	88	179	209	185	215	211	158	139	75	20	169
189	97	165	84	10	168	134	11	91	62	22	148
199	168	191	193	158	227	178	143	182	104	36	190
205	174	155	252	236	231	149	178	228	43	95	234
190	216	116	149	236	187	86	150	79	38	218	241
190	224	147	108	227	210	127	102	96	101	255	224
190	214	173	66	103	143	96	50	2	109	249	215
187	196	235	75	1	81	47	0	6	217	255	211
183	202	237	145	0	0	12	108	200	138	243	236
195	206	123	207	177	121	123	200	175	13	96	218

187	183	174	168	150	152	129	151	172	161	155	156
155	182	163	74	75	62	33	17	110	210	180	154
180	180	50	14	34	6	10	33	48	106	159	181
206	109	5	124	131	111	120	204	166	15	56	180
194	58	137	251	237	239	239	228	227	87	71	201
172	105	207	233	233	214	220	239	228	94	74	206
188	88	179	209	185	215	211	158	139	75	20	169
189	97	165	84	10	168	134	11	91	62	22	148
199	168	191	193	158	227	178	143	182	104	36	190
205	174	155	252	236	231	149	178	228	43	95	234
190	216	116	149	236	187	86	150	79	38	218	241
190	224	147	108	227	210	127	102	96	101	255	224
190	214	173	66	103	143	96	50	2	109	249	215
187	196	235	75	1	81	47	0	6	217	255	211
183	202	237	145	0	0	12	108	200	138	243	236
195	206	123	207	177	121	123	200	175	13	96	218

Qu'est-ce qu'une image... ? Ici  $12 \times 16$  pixels : vecteur de  $\mathbb{R}^{192}$ .

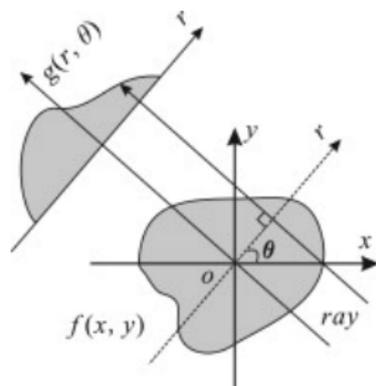
**Vision continue** : mathématiquement, une **image** peut-être vue comme une **fonction**  $f$  de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , qui à chaque  $(x, y)$  de  $\Omega$  associe un réel  $f(x, y)$ .



## Un scanner et une représentation (très) schématique

**Principe** du CT scan : envoi de rayons X d'énergie connue, selon de nombreuses directions.

**Données** : énergie atténuée mesurée par des détecteurs en "sortie" du corps.



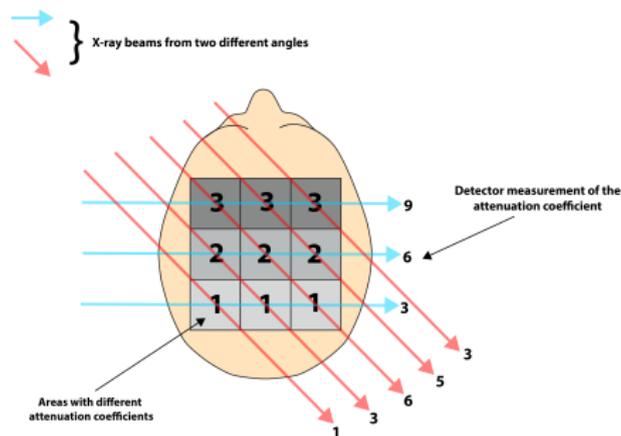
**Transformée de Radon.**

**Inconnue** : l'atténuation en chaque point du corps, vue comme une fonction  $f$  de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

**Données** : l'intégrale de  $f$  selon certaines lignes  $L$ , i.e.,  $\int_L f$ .

**Transformée de Radon**  $g = \mathcal{R}f$  de  $f$ , fonction de  $(r, \theta)$ ,

$$\mathcal{R}f(r, \theta) = \int_{\mathbb{R}} f(x(s), y(s)) ds, \quad (x(s), y(s)) = (r \cos(\theta) - s \sin(\theta), r \sin(\theta) + s \cos(\theta)).$$



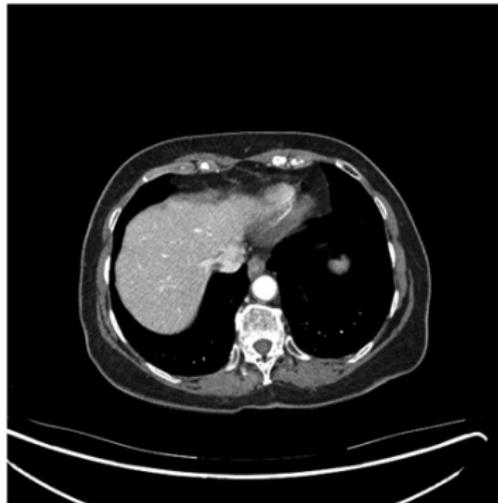
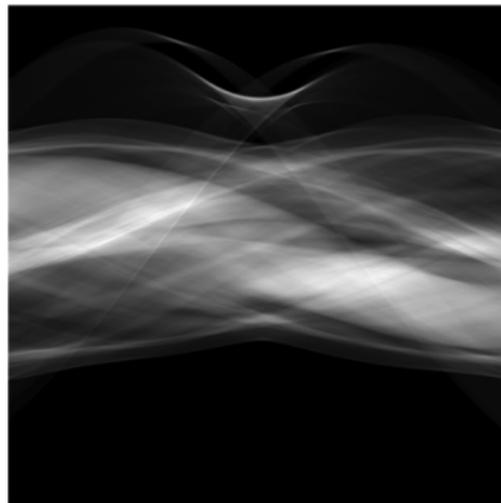
Un cerveau très pixellisé.

**Inconnue** : l'atténuation en un certain nombre de pixels, vecteur  $x$  de  $\mathbb{R}^p$ .

**Données** : la somme  $y_i$  des valeurs des pixels rencontrés pour chacune des  $n$  lignes  $L_i$  d'angle  $\theta_i$  et de distance à l'origine  $r_i$ , soit un vecteur  $y$  de  $\mathbb{R}^n$ .

**Relation** :  $y = Ax$ , où  $A$  est une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  connue.

Paramètres typiques :  $p = 512 \times 512 \times 100 \approx 3 \cdot 10^8$ ,  $n \approx 1 \cdot 10^9$ .



**Un sinogramme et la reconstruction correspondante**

Modélisation commune aux problèmes jusqu'ici rencontrés :

- ◇ Des **données** (les "effets")  $y$
- ◇ Une **inconnue** (les "causes")  $x$
- ◇ Un **modèle linéaire** de la forme

$$Ax = y$$

avec  $A$  une application **connue**.

Souvent, deux visions toutes deux fécondes :

- ◇ vision **discrète**

$$y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p, \quad A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}).$$

- ◇ vision **continue** :  $x$  et  $y$  sont des **fonctions** (alors souvent notées  $f$  et  $g$ ), on parle d'*opérateur*  $A$ , la relation est donc

$$Af = g.$$

1. Définition informelle d'un problème inverse et exemples

2. Problèmes inverses mal posés

3. Méthodes de résolution





# Pourquoi on se dit qu'en fait, ça peut aller

Manipulation enfantine :

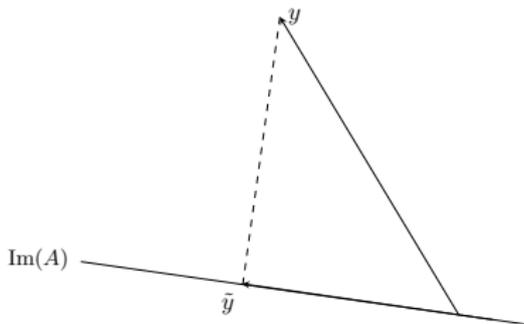
$$Ax = y \quad \Longrightarrow \quad (A^T A)x = A^T y.$$

Si la matrice **carrée**  $A^T A$  est inversible, on obtient le candidat appelé *pseudo-inverse de Moore-Penrose*

$$x = (A^T A)^{-1} (A^T y).$$

**Interprétation** : dans le cas surdéterminé,

$x$  résout  $Ax = \tilde{y}$ ,  $\tilde{y}$  = projection de  $y$  sur  $\text{Im}(A) = \{Ax, x \in \mathbb{R}^p\}$ .



## Pourquoi on se dit qu'en fait, ça peut aller

Manipulation enfantine :

$$Ax = y \quad \Longrightarrow \quad (A^T A)x = A^T y.$$

Si la matrice **carrée**  $A^T A$  est inversible, on obtient le candidat appelé *pseudo-inverse de Moore-Penrose*

$$x = (A^T A)^{-1} (A^T y).$$

**Interprétation** : dans le cas sous-déterminé,

$x$  = plus "petite" solution de  $Ax = y$ .

# Pourquoi finalement, ça peut vraiment être catastrophique (1)

Cas le plus favorable :  $A$  est carrée et inversible.

On trouve l'inconnue  $x$  à partir des données  $y$  via

$$x = A^{-1}y.$$

Exemple, avec

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 11 \\ 1 & 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}, \quad x_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vraies données et données "bruitées"

$$y_r = Ax_r = \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \\ 16 \\ 19 \end{pmatrix}, \quad y_\varepsilon = \begin{pmatrix} 14.9 \\ 16.1 \\ 16.1 \\ 18.9 \end{pmatrix}.$$

On calcule alors

$$x = A^{-1}y_\varepsilon \approx \begin{pmatrix} 0.994 \\ 1.001 \\ 0.977 \\ 1.015 \end{pmatrix}.$$

## Pourquoi finalement, ça peut vraiment être catastrophique (2)

Cas le plus favorable :  $A$  est carrée et inversible.

On trouve l'inconnue  $x$  à partir des données  $y$  via

$$x = A^{-1}y.$$

Exemple, avec

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 11 & 10 \\ 2 & 6 & 5 & 2 \\ 8 & 11 & 3 & 8 \\ 6 & 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad x_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vraies données et données "bruitées"

$$y_r = Ax_r = \begin{pmatrix} 29 \\ 15 \\ 30 \\ 24 \end{pmatrix}, \quad y_\varepsilon = \begin{pmatrix} 29.1 \\ 14.9 \\ 30.1 \\ 23.9 \end{pmatrix}.$$

On calcule alors

$$x = A^{-1}y_\varepsilon \approx \begin{pmatrix} 6.222 \\ 0.133 \\ 1.633 \\ -3.256 \end{pmatrix} !!$$

## Problème inverse mal posé

Définition informelle : on dit qu'un problème inverse défini par une matrice (ou un opérateur)  $A$  est *mal posé* si l'une au moins des conditions suivantes est satisfaite

- ◇ il y a **plusieurs solutions** au problème  $Ax = y$ ,
- ◇ il n'y a **aucune solution** au problème  $Ax = y$ ,
- ◇ de **grandes variations** dans les **causes**  $x$  induisent de **petites variations** dans les **effets**  $y$ .

Notations et modélisation adaptées à la situation :

- ◇  $x_r$  l'inconnue,
- ◇ les données parfaites  $y_r = Ax_r$ , s'il n'y avait ni erreurs de mesures, ni erreurs de modèle, ni stochasticité, *i.e.*, sans **bruit**,
- ◇ les données bruitées  $y_\varepsilon \approx y_r$ .

$\varepsilon$  décrit le niveau de bruit, avec l'hypothèse que

$$y_\varepsilon = y_r + \varepsilon z, \quad \|z\| \leq 1.$$

## Un exemple parlant : la dérivation

On mesure la position d'un objet à  $n$  instants régulièrement espacés de  $\Delta t$  sur un intervalle de temps, mettons  $[0, 1]$ .

- ◇ **Données** : la **position**  $y_i$  aux temps  $i\Delta t$ ,  $i = 1, \dots, n$  ( $y_0 = 0$ ).
- ◇ **Inconnue** : la **vitesse** aux temps  $i\Delta t$ , notée  $x_i$
- ◇ **Tentative** :

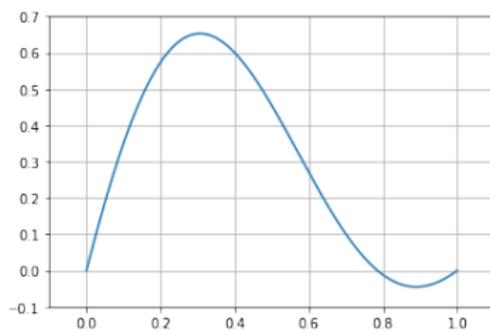
$$x_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t}. \quad (3)$$

## Un exemple parlant : la dérivation

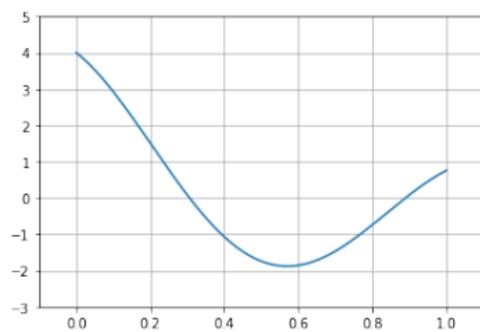
On mesure la position d'un objet à  $n$  instants régulièrement espacés de  $\Delta t$  sur un intervalle de temps, mettons  $[0, 1]$ .

- ◇ **Données** : la **position**  $y_i$  aux temps  $i\Delta t$ ,  $i = 1, \dots, n$  ( $y_0 = 0$ ).
- ◇ **Inconnue** : la **vitesse** aux temps  $i\Delta t$ , notée  $x_i$
- ◇ **Tentative** :

$$x_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t}. \quad (3)$$



Signal "parfait"  $y_r = Ax_r$ .



Ce qu'on doit trouver,  $x_r$ .

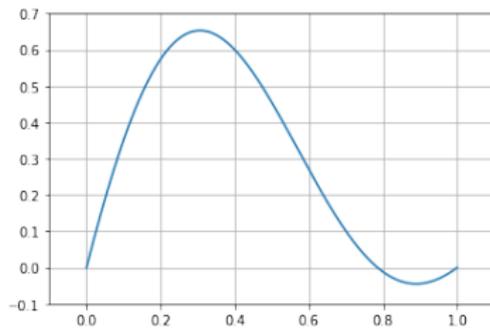
## Un exemple parlant : la dérivation

On mesure la position d'un objet à  $n$  instants régulièrement espacés de  $\Delta t$  sur un intervalle de temps, mettons  $[0, 1]$ .

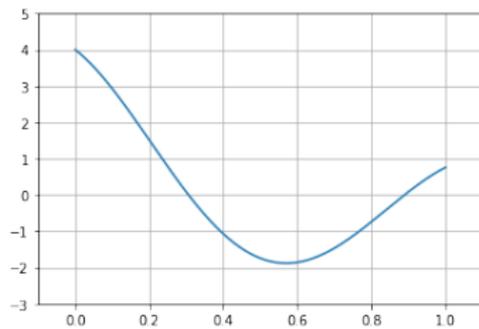
- ◇ **Données** : la **position**  $y_i$  aux temps  $i\Delta t$ ,  $i = 1, \dots, n$  ( $y_0 = 0$ ).
- ◇ **Inconnue** : la **vitesse** aux temps  $i\Delta t$ , notée  $x_i$
- ◇ **Tentative** :

$$x_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t}. \quad (3)$$

Essayons voir, avec  $n = 100$ .



Signal "parfait".



Reconstruction avec (3).

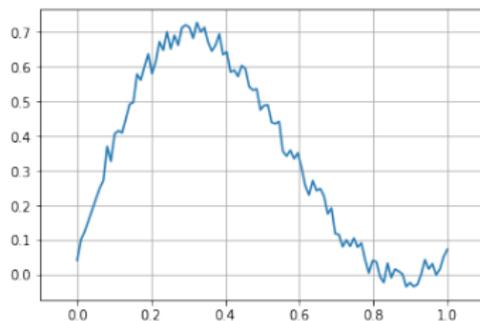
## Un exemple parlant : la dérivation

On mesure la position d'un objet à  $n$  instants régulièrement espacés de  $\Delta t$  sur un intervalle de temps, mettons  $[0, 1]$ .

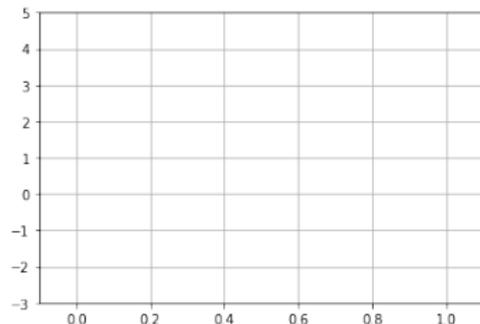
- ◇ **Données** : la **position**  $y_i$  aux temps  $i\Delta t$ ,  $i = 1, \dots, n$  ( $y_0 = 0$ ).
- ◇ **Inconnue** : la **vitesse** aux temps  $i\Delta t$ , notée  $x_i$
- ◇ **Tentative** :

$$x_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t}. \quad (3)$$

Essayons voir, avec  $n = 100$ .



Signal  $y_\varepsilon$  avec bruit  $\varepsilon = 0.08$ .



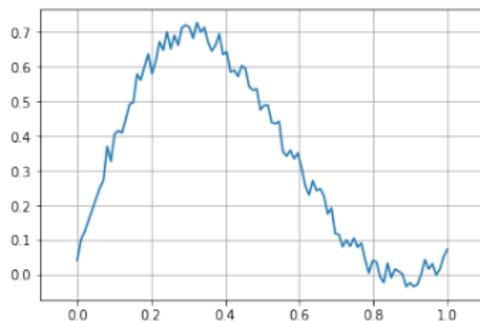
## Un exemple parlant : la dérivation

On mesure la position d'un objet à  $n$  instants régulièrement espacés de  $\Delta t$  sur un intervalle de temps, mettons  $[0, 1]$ .

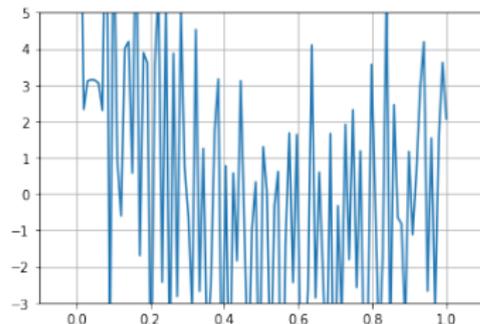
- ◇ **Données** : la **position**  $y_i$  aux temps  $i\Delta t$ ,  $i = 1, \dots, n$  ( $y_0 = 0$ ).
- ◇ **Inconnue** : la **vitesse** aux temps  $i\Delta t$ , notée  $x_i$
- ◇ **Tentative** :

$$x_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t}. \quad (3)$$

Essayons voir, avec  $n = 100$ .



Signal  $y_\varepsilon$  avec bruit  $\varepsilon = 0.08$ .



Reconstruction avec (3).

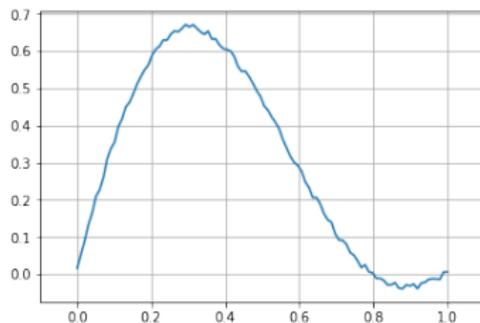
## Un exemple parlant : la dérivation

On mesure la position d'un objet à  $n$  instants régulièrement espacés de  $\Delta t$  sur un intervalle de temps, mettons  $[0, 1]$ .

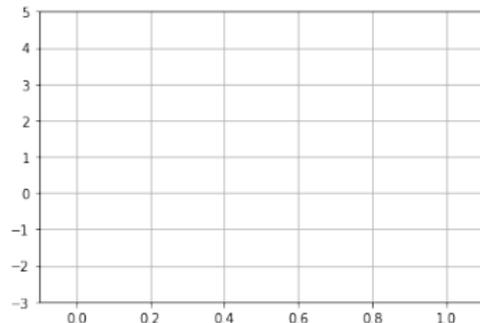
- ◇ **Données** : la **position**  $y_i$  aux temps  $i\Delta t$ ,  $i = 1, \dots, n$  ( $y_0 = 0$ ).
- ◇ **Inconnue** : la **vitesse** aux temps  $i\Delta t$ , notée  $x_i$
- ◇ **Tentative** :

$$x_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t}. \quad (3)$$

Essayons voir, avec  $n = 100$ .



Signal  $y_\varepsilon$  avec bruit  $\varepsilon = 0.02$ .



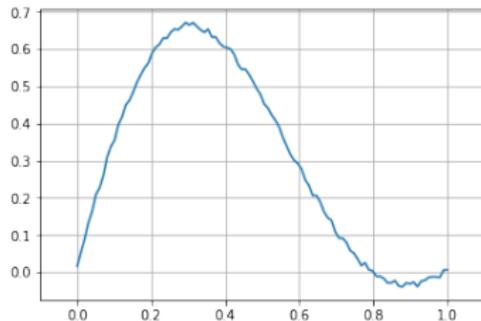
## Un exemple parlant : la dérivation

On mesure la position d'un objet à  $n$  instants régulièrement espacés de  $\Delta t$  sur un intervalle de temps, mettons  $[0, 1]$ .

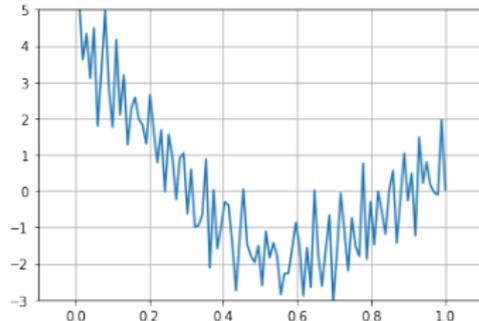
- ◇ **Données** : la **position**  $y_i$  aux temps  $i\Delta t$ ,  $i = 1, \dots, n$  ( $y_0 = 0$ ).
- ◇ **Inconnue** : la **vitesse** aux temps  $i\Delta t$ , notée  $x_i$
- ◇ **Tentative** :

$$x_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t}. \quad (3)$$

Essayons voir, avec  $n = 100$ .



Signal  $y_\varepsilon$  avec bruit  $\varepsilon = 0.02$ .



Reconstruction avec (3).

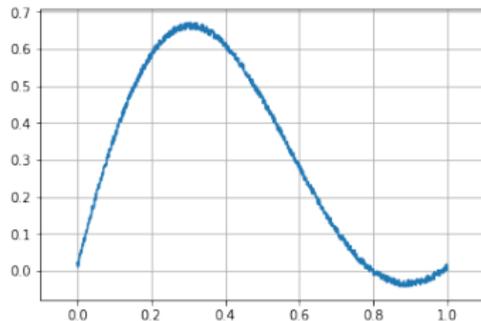
## Un exemple parlant : la dérivation

On mesure la position d'un objet à  $n$  instants régulièrement espacés de  $\Delta t$  sur un intervalle de temps, mettons  $[0, 1]$ .

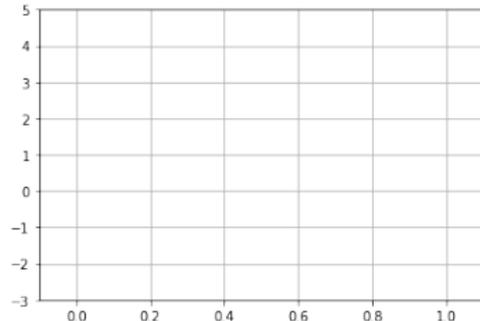
- ◇ **Données** : la **position**  $y_i$  aux temps  $i\Delta t$ ,  $i = 1, \dots, n$  ( $y_0 = 0$ ).
- ◇ **Inconnue** : la **vitesse** aux temps  $i\Delta t$ , notée  $x_i$
- ◇ **Tentative** :

$$x_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t}. \quad (3)$$

Essayons voir, avec  $n = 1000$ .



Signal  $y_\varepsilon$  avec bruit  $\varepsilon = 0.02$ .



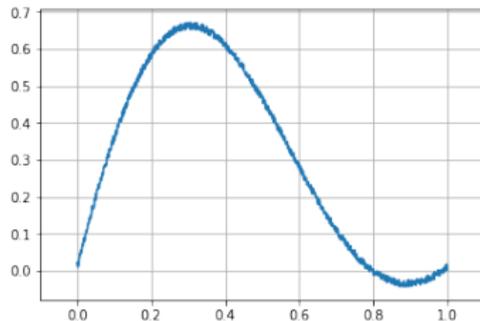
## Un exemple parlant : la dérivation

On mesure la position d'un objet à  $n$  instants régulièrement espacés de  $\Delta t$  sur un intervalle de temps, mettons  $[0, 1]$ .

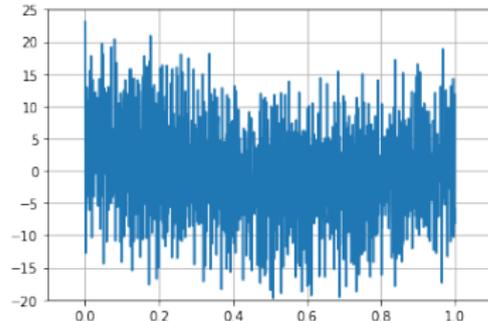
- ◇ **Données** : la **position**  $y_i$  aux temps  $i\Delta t$ ,  $i = 1, \dots, n$  ( $y_0 = 0$ ).
- ◇ **Inconnue** : la **vitesse** aux temps  $i\Delta t$ , notée  $x_i$
- ◇ **Tentative** :

$$x_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t}. \quad (3)$$

Essayons voir, avec  $n = 1000$ .



Signal  $y_\varepsilon$  avec bruit  $\varepsilon = 0.02$ .



Reconstruction avec (3).

La dérivation peut être vue comme le problème inverse... de l'intégration !

Version **continue** : soit

$$A : f \mapsto g = Af, \quad \forall x \in [0, 1], \quad g(x) = \int_0^x f(u) du$$

Connaissant les données  $g$ , chercher  $f$  tel que  $Af = g$ , **c'est bien chercher à dériver  $g$ .**

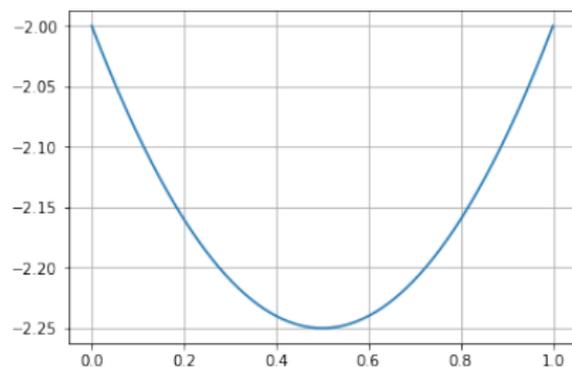
# La dérivation comme problème inverse : en continu

La dérivation peut être vue comme le problème inverse... de l'intégration !

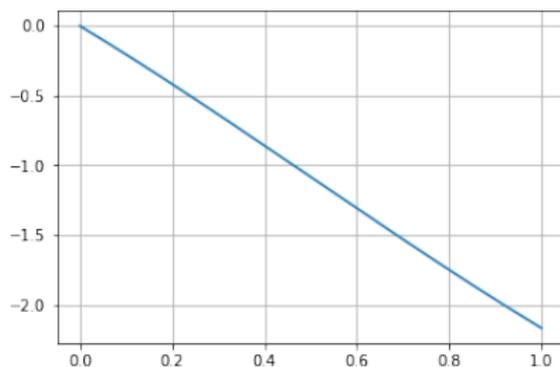
Version **continue** : soit

$$A : f \mapsto g = Af, \quad \forall x \in [0, 1], \quad g(x) = \int_0^x f(u) du$$

Connaissant les données  $g$ , chercher  $f$  tel que  $Af = g$ , c'est bien chercher à dériver  $g$ .



Une fonction  $f_1$ .



La fonction  $g_1 = Af_1$  correspondante.

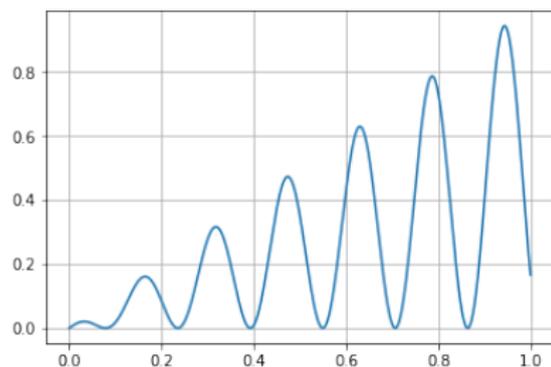
# La dérivation comme problème inverse : en continu

La dérivation peut être vue comme le problème inverse... de l'intégration !

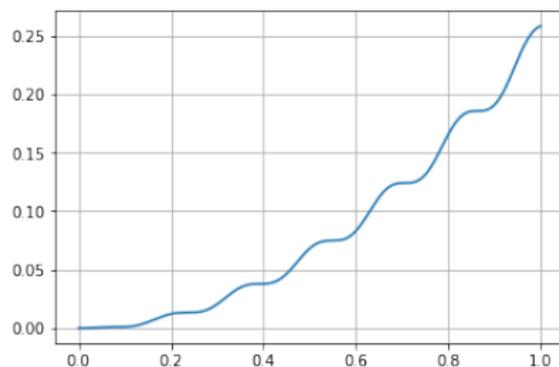
Version **continue** : soit

$$A : f \mapsto g = Af, \quad \forall x \in [0, 1], \quad g(x) = \int_0^x f(u) du$$

Connaissant les données  $g$ , chercher  $f$  tel que  $Af = g$ , **c'est bien chercher à dériver  $g$** .



Une fonction  $f_2$ .



La fonction  $g_2 = Af_2$  correspondante.

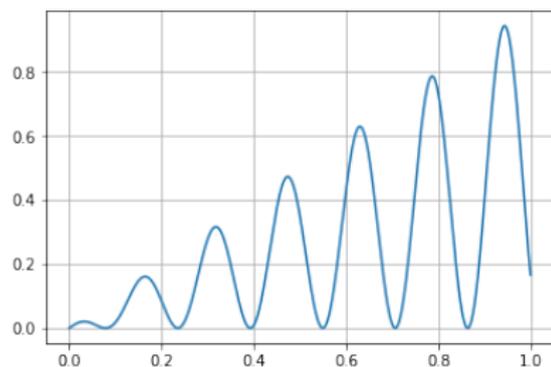
# La dérivation comme problème inverse : en continu

La dérivation peut être vue comme le problème inverse... de l'intégration !

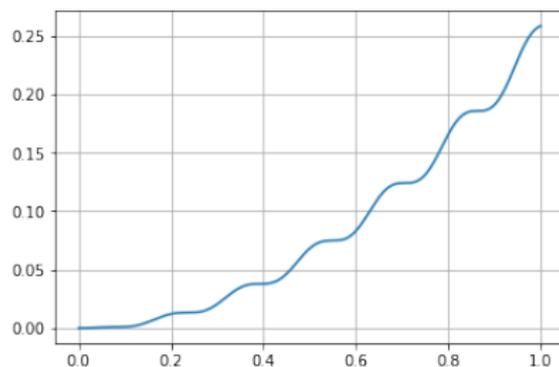
Version **continue** : soit

$$A : f \mapsto g = Af, \quad \forall x \in [0, 1], \quad g(x) = \int_0^x f(u) du$$

Connaissant les données  $g$ , chercher  $f$  tel que  $Af = g$ , **c'est bien chercher à dériver  $g$** .



Une fonction  $f_2$ .



La fonction  $g_2 = Af_2$  correspondante.

## La dérivation comme problème inverse : en discret

En discret, on discrétise l'intervalle  $[0, 1]$  via  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Delta t = \frac{1}{n}$ .

- ◇ l'inconnue est un vecteur  $x_r = (x_1, \dots, x_n)$
- ◇ on a le modèle  $y_i = \Delta t (x_1 + \dots + x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , soit  $y_r = Ax_r$  et

$$A = \Delta t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

et on observe les données  $y_\varepsilon \approx y_r$ .

$A$  est inversible d'inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{calculer } x_i = \frac{(y_\varepsilon)_i - (y_\varepsilon)_{i-1}}{\Delta t} \iff \text{c'était poser } x = A^{-1}y_\varepsilon!$$

## À quel point le problème est-il mal posé ? Vision discrète.

Soit  $A$  telle que la matrice  $A^T A$  est inversible.

$$A^T A \text{ symétrique réelle} \implies A^T A \text{ diagonalisable.}$$

Notation : on ordonne ses valeurs propres (les **valeurs singulières** de  $A$ )

$$\sqrt{\sigma_{\min}(A)} \leq \dots \leq \sqrt{\sigma_{\max}(A)}$$

Enfin, on définit le **conditionnement** de  $A$

$$\kappa(A) := \frac{\sigma_{\max}(A)}{\sigma_{\min}(A)}$$

On note  $x = (A^T A)^{-1} A^T y_\varepsilon$  (où  $y_\varepsilon = y_r + \varepsilon z = Ax_r + \varepsilon z$ ) et alors on a le

Résultat **fondamental** :

$$\|x - x_r\| \leq \kappa(A) \|y_\varepsilon - y\| \leq \kappa(A) \varepsilon.$$

Mal posé :  $\kappa(A)$  est grand. Plus il est grand, plus le problème est mal posé.

Dans le cas de la dérivation  $\kappa(A) \approx \frac{C}{\Delta t} = C n \dots$  dépend de la discrétisation !

## À quel point le problème est-il mal posé ? Vision continue.

Mal posé : l'opérateur  $A$  est **compact**<sup>1</sup>

Cadre fonctionnel : espaces de **Hilbert**

### Théorème

Si  $A$  est compact, il existe alors une suite de **valeurs singulières**  $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$  :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \exists f_k \neq 0, \quad A^T A f_k = \sigma_k^2 f_k.$$

De plus, la suite  $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$  **tend vers 0 en**  $+\infty$ .

La vitesse de convergence de  $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$  vers 0 décrit à quel point le problème est mal posé.

**Formellement**, pour  $g_\varepsilon = A f_r + \varepsilon f_k$ , alors  $f := (A^T A)^{-1} A g_\varepsilon$  satisfait  $f - f_r = \sigma_k^{-1} \varepsilon f_k$  et donc

$$\|f - f_r\| = \sigma_k^{-1} \varepsilon.$$

l'erreur de taille  $\varepsilon$  est amplifiée d'un facteur  $\sigma_k^{-1}$  le long de  $f_k$  !

<sup>1</sup>Niveau M1/M2 : analyse fonctionnelle.

## Exemple de la dérivation

$$\forall x \in [0, 1], \quad Af(x) = \int_0^x f(u) du, \quad A^T f(x) = \int_x^1 f(u) du.$$

**Résultat :**  $A$  est compact.

Calcul des  $\sigma_k$  : on cherche  $f \neq 0$ ,  $\sigma$  tels que

$$A^T Af = \sigma^2 f \iff \int_1^x (Af)(u) du = \sigma^2 f(x) \implies f(1) = 0.$$

On dérive successivement

$$\sigma^2 f'(x) = -Af(x) = -\int_0^x f(u) du \implies f'(0) = 0.$$

$$\sigma f''(x) + f(x) = 0 \implies f(x) = A \cos\left(\frac{1}{\sigma}x\right) + B \sin\left(\frac{1}{\sigma}x\right).$$

$$f'(0) = 0 \implies B = 0, \quad f(1) = 0 \implies \exists k \in \mathbb{N}, \frac{1}{\sigma} = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

$$\sigma_k = \frac{2}{\pi} \frac{1}{2k+1}, \quad \text{on dit que problème est } \textit{mal posé d'ordre 1}.$$

## Exemple de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & t > 0, x \in [0, 1], \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, & t > 0, \\ u(0, x) = f(x), & x \in [0, 1], \end{cases}$$

**Problème inverse** : remonter à la donnée initiale  $f$  à partir de  $u(T, \cdot)$ .

Résolution "explicite" du **problème direct** par séries de Fourier

$$Af(x) = u(T, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k(f) \sin(k\pi x) e^{-Dk^2\pi^2 T}$$

**Résultat** :  $A$  est compact.

Repose précisément sur le fait que les fonctions  $f_k : x \mapsto \sin(k\pi x)$  sont des vecteurs propres pour  $A$

$$Af_k = e^{-Dk^2\pi^2 T} f_k.$$

$\sigma_k = e^{-\pi^2 D T k^2}$ , on dit que problème est *sévèrement mal posé*.

1. Définition informelle d'un problème inverse et exemples

2. Problèmes inverses mal posés

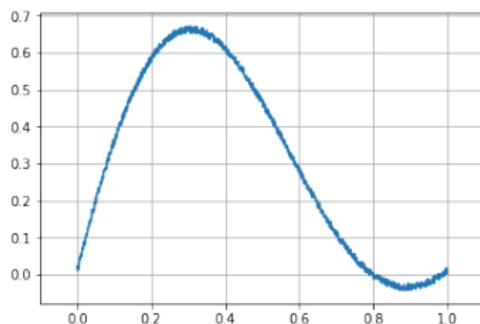
3. Méthodes de résolution

**Idée** : même méthode d'inversion  $x_i = \frac{(y_\varepsilon)_i - (y_\varepsilon)_{i-1}}{\Delta t}$  , mais après **régularisation** du signal.

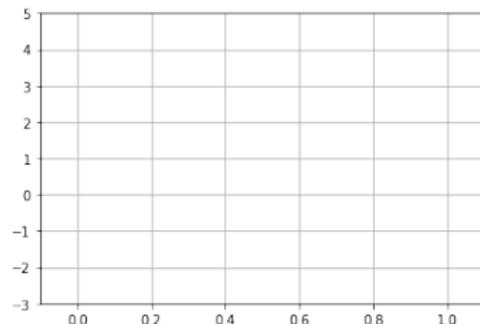
# Régularisation du signal

**Idée** : même méthode d'inversion  $x_i = \frac{(y_\varepsilon)_i - (y_\varepsilon)_{i-1}}{\Delta t}$  , mais après **régularisation** du signal.

Exemple avec  $n = 1000$ ,  $\varepsilon = 0.02$ .



Signal  $y_\varepsilon$  avec bruit  $\varepsilon = 0.02$ .

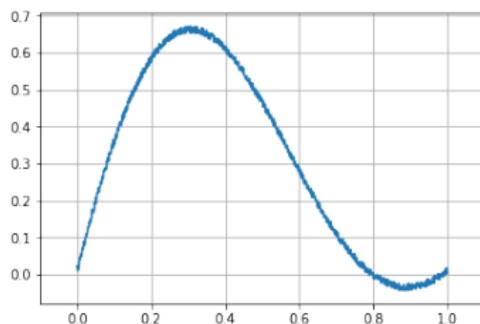


Reconstruction.

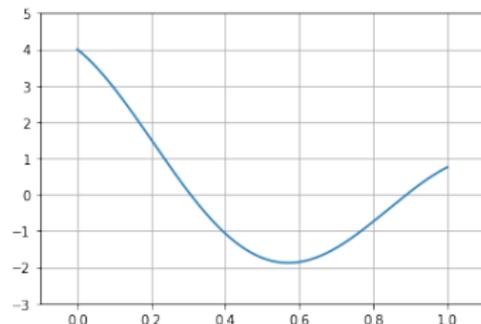
# Régularisation du signal

**Idée** : même méthode d'inversion  $x_i = \frac{(y_\varepsilon)_i - (y_\varepsilon)_{i-1}}{\Delta t}$  , mais après **régularisation** du signal.

Exemple avec  $n = 1000$ ,  $\varepsilon = 0.02$ .



Signal  $y_\varepsilon$  avec bruit  $\varepsilon = 0.02$ .

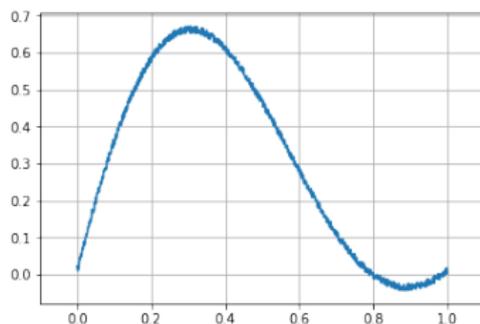


Ce qu'on cherche.

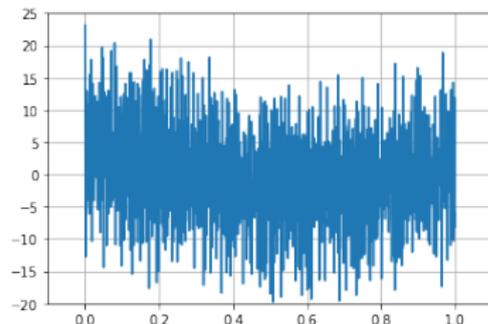
# Régularisation du signal

**Idée** : même méthode d'inversion  $x_i = \frac{(y_\varepsilon)_i - (y_\varepsilon)_{i-1}}{\Delta t}$  , mais après **régularisation** du signal.

Exemple avec  $n = 1000$ ,  $\varepsilon = 0.02$ .



Signal  $y_\varepsilon$  avec bruit  $\varepsilon = 0.02$ .

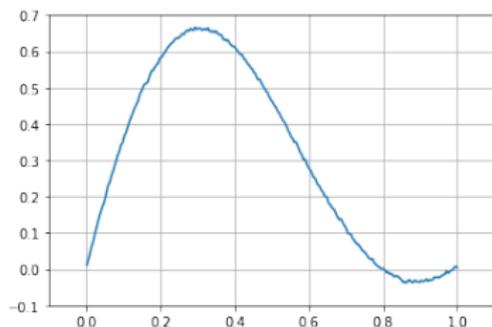


Ce qu'on trouvait en inversant.

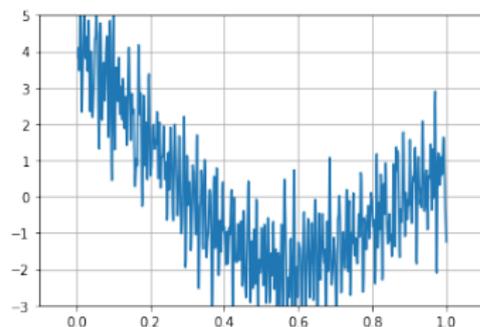
# Régularisation du signal

**Idée** : même méthode d'inversion  $x_i = \frac{(y_\varepsilon)_i - (y_\varepsilon)_{i-1}}{\Delta t}$  , mais après **régularisation** du signal.

Exemple avec  $n = 1000$ ,  $\varepsilon = 0.02$ .



Signal  $y_\varepsilon$  régularisé avec  $\lambda = 10$ .

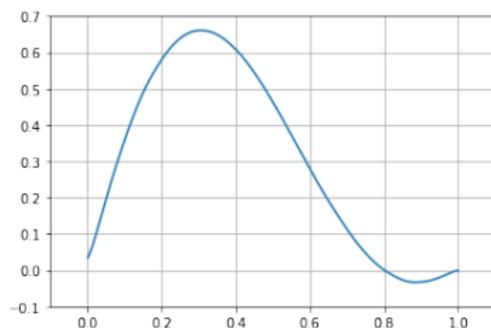


Reconstruction par inversion.

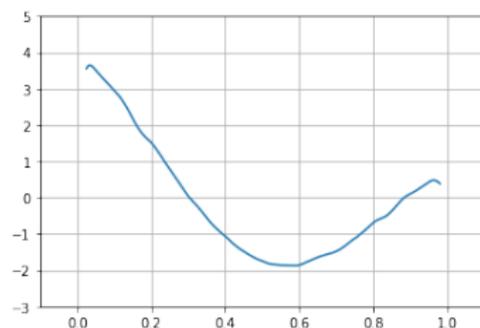
# Régularisation du signal

**Idée** : même méthode d'inversion  $x_i = \frac{(y_\varepsilon)_i - (y_\varepsilon)_{i-1}}{\Delta t}$  , mais après **régularisation** du signal.

Exemple avec  $n = 1000$ ,  $\varepsilon = 0.02$ .



Signal  $y_\varepsilon$  régularisé avec  $\lambda = 100$ .

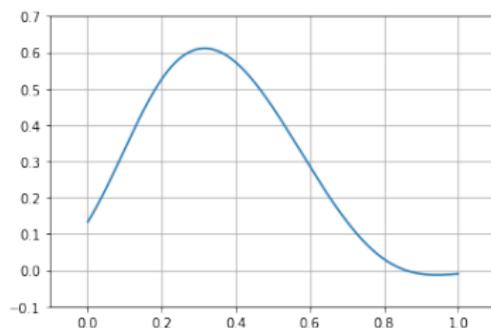


Reconstruction par inversion.

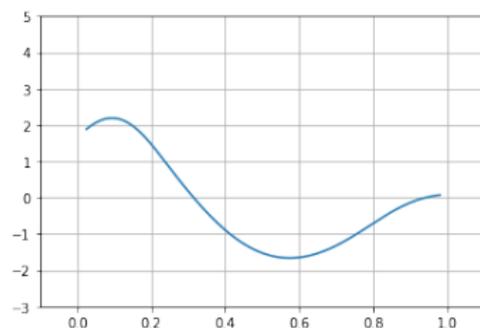
# Régularisation du signal

**Idée** : même méthode d'inversion  $x_i = \frac{(y_\varepsilon)_i - (y_\varepsilon)_{i-1}}{\Delta t}$  , mais après **régularisation** du signal.

Exemple avec  $n = 1000$ ,  $\varepsilon = 0.02$ .



Signal  $y_\varepsilon$  régularisé avec  $\lambda = 500$ .



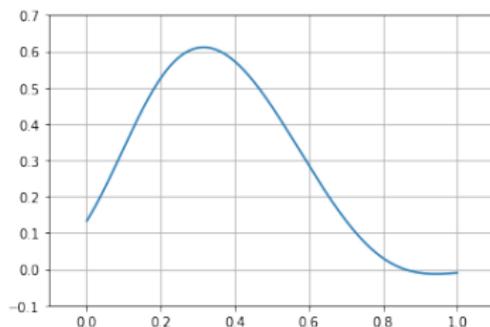
Reconstruction par inversion.

# Régularisation du signal

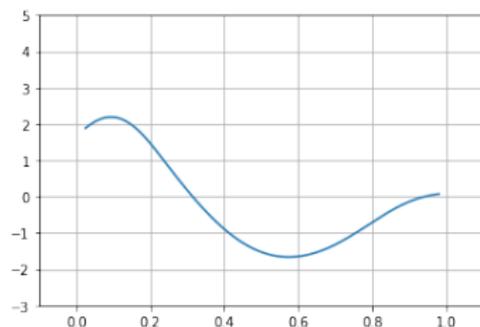
**Idée** : même méthode d'inversion  $x_i = \frac{(y_\varepsilon)_i - (y_\varepsilon)_{i-1}}{\Delta t}$  , mais après **régularisation** du signal.

**Conclusion** : il existe un niveau de régularisation **optimal**  $\lambda(\varepsilon)$ , **qui dépend du bruit**.

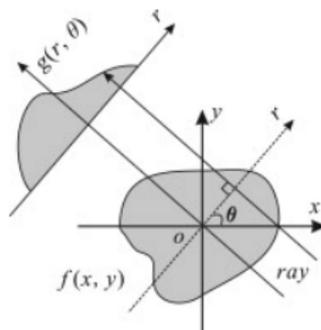
Exemple avec  $n = 1000$ ,  $\varepsilon = 0.02$ .



Signal  $y_\varepsilon$  régularisé avec  $\lambda = 500$ .



Reconstruction par inversion.



## Transformée de Radon

**Données** : l'intégrale de  $f$  selon certaines lignes  $L$ , i.e.,  $\int_L f$ .

**Transformée de Radon**  $\mathcal{R}f$  de  $f$ , fonction de  $(r, \theta)$ ,

$$\mathcal{R}f(r, \theta) = \int_{\mathbb{R}} f(x(s), y(s)) ds, \quad (x(s), y(s)) = (r \cos(\theta) - s \sin(\theta), r \sin(\theta) + s \cos(\theta)).$$

Formule de *reconstruction par rétroprojection filtrée* pour l'**inversion** de  $g = \mathcal{R}f$ .

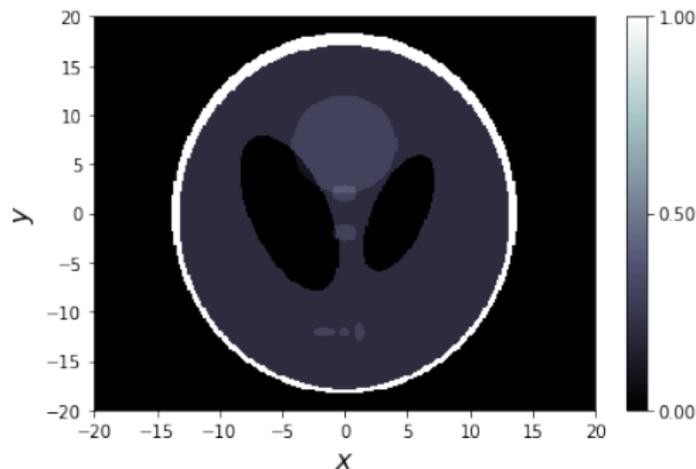
$$(\mathcal{R}^{-1}g)(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (m * g(\cdot, \theta))(x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) d\theta, \quad (4)$$

où  $\mathcal{F}m = \omega \mapsto |\omega|$ .

Formule de *reconstruction par rétroprojection filtrée* pour l'**inversion** de  $g = \mathcal{R}f$ .

$$(\mathcal{R}^{-1}g)(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (m * g(\cdot, \theta))(x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) d\theta, \quad (4)$$

où  $\mathcal{F}m = \omega \mapsto |\omega|$ .

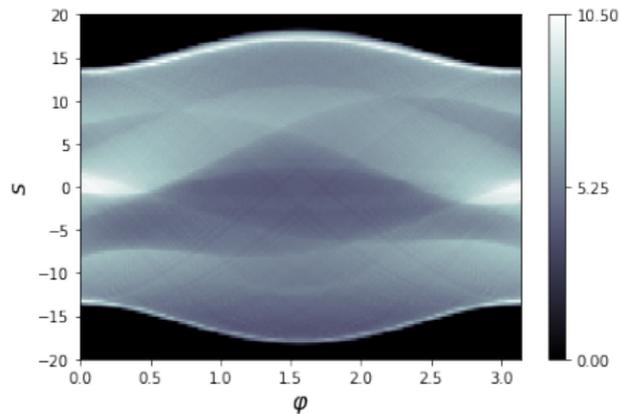


**L'image qu'on va vouloir reconstruire**

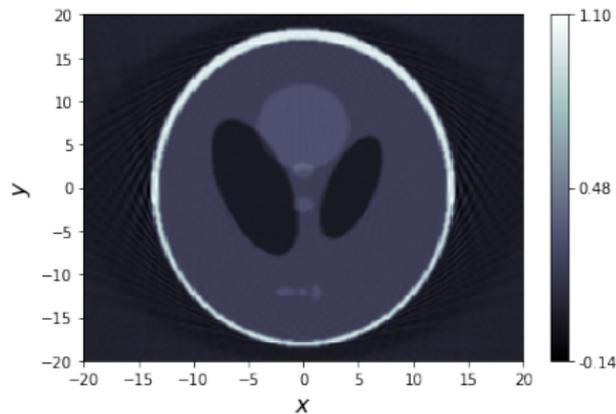
Formule de *reconstruction par rétroprojection filtrée* pour l'**inversion** de  $g = \mathcal{R}f$ .

$$(\mathcal{R}^{-1}g)(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (m * g(\cdot, \theta))(x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) d\theta, \quad (4)$$

où  $\mathcal{F}m = \omega \mapsto |\omega|$ .



Signal "parfait"  $y_r$ .

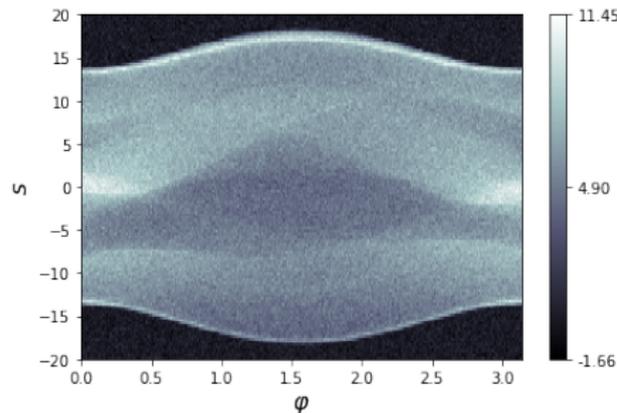


Reconstruction par (4).

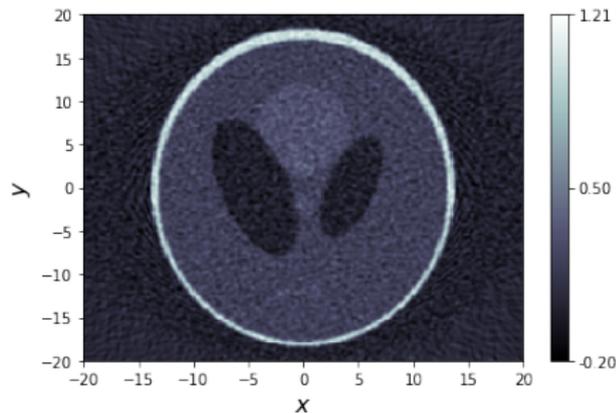
Formule de reconstruction par rétroprojection filtrée pour l'inversion de  $g = \mathcal{R}f$ .

$$(\mathcal{R}^{-1}g)(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (m * g(\cdot, \theta))(x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) d\theta, \quad (4)$$

où  $\mathcal{F}m = \omega \mapsto |\omega|$ .



Signal  $y_\varepsilon$  avec bruit  $\varepsilon = 0.5$ .

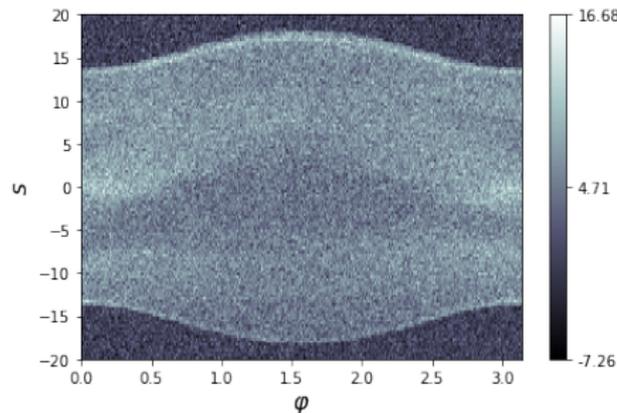


Reconstruction par (4).

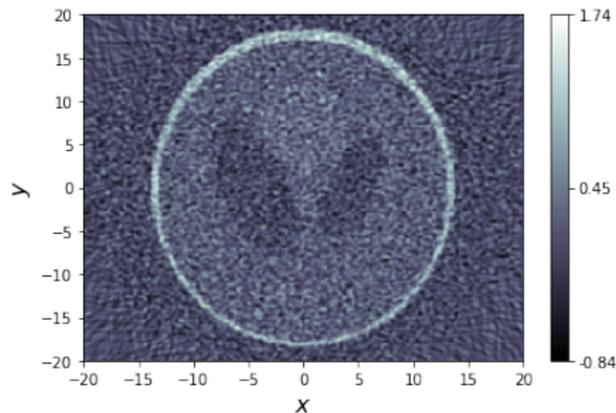
Formule de *reconstruction par rétroprojection filtrée* pour l'*inversion* de  $g = \mathcal{R}f$ .

$$(\mathcal{R}^{-1}g)(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (m * g(\cdot, \theta))(x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) d\theta, \quad (4)$$

où  $\mathcal{F}m = \omega \mapsto |\omega|$ .



Signal  $y_\varepsilon$  avec bruit  $\varepsilon = 2$ .



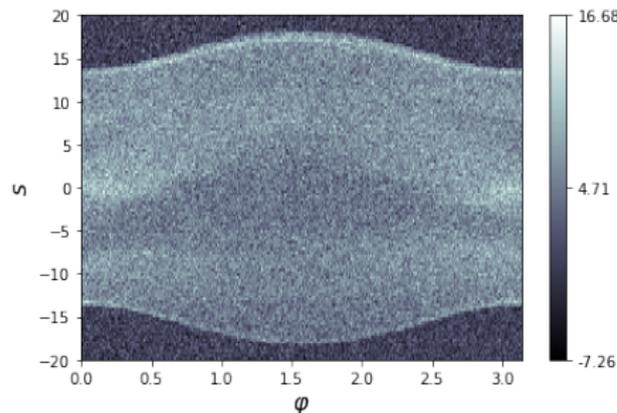
Reconstruction par (4).

Formule de *reconstruction par rétroprojection filtrée* pour l'**inversion** de  $g = \mathcal{R}f$ .

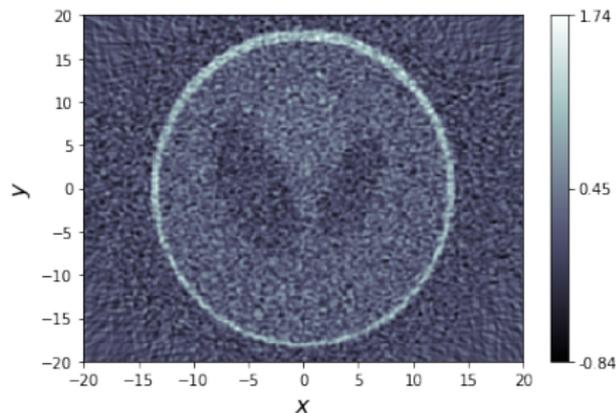
$$(\mathcal{R}^{-1}g)(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (m * g(\cdot, \theta))(x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) d\theta, \quad (4)$$

où  $\mathcal{F}m = \omega \mapsto |\omega|$ .

**Résultat** : le problème est mal posé d'ordre  $\frac{1}{2}$ .



Signal  $y_\varepsilon$  avec bruit  $\varepsilon = 2$ .



Reconstruction par (4).

**Méthode de régularisation** : dans

$$(\mathcal{R}^{-1}g)(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (m * g(\cdot, \theta))(x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) d\theta,$$

remplacer  $m$  par  $m_\lambda$  définie par (**filtrage** des hautes fréquences)

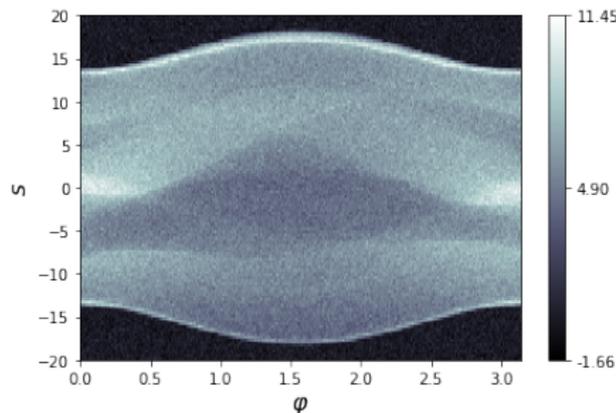
$$\mathcal{F}m_\lambda = \omega \mapsto |\omega| \mathbb{1}_{|\omega| \leq \frac{1}{\lambda}}.$$

Méthode de régularisation : dans

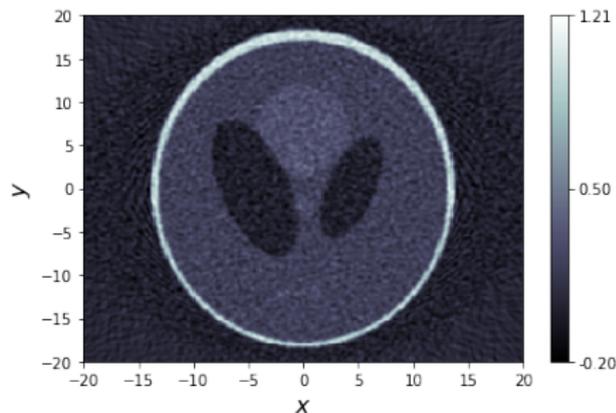
$$(\mathcal{R}^{-1}g)(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (m * g(\cdot, \theta))(x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) d\theta,$$

remplacer  $m$  par  $m_\lambda$  définie par (filtrage des hautes fréquences)

$$\mathcal{F}m_\lambda = \omega \mapsto |\omega| \mathbb{1}_{|\omega| \leq \frac{1}{\lambda}}.$$



Signal  $y_\epsilon$  avec bruit  $\epsilon = 0.5$ .



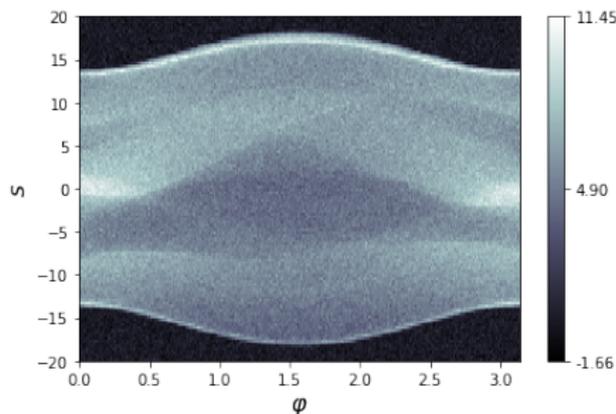
Reconstruction sans régularisation.

Méthode de régularisation : dans

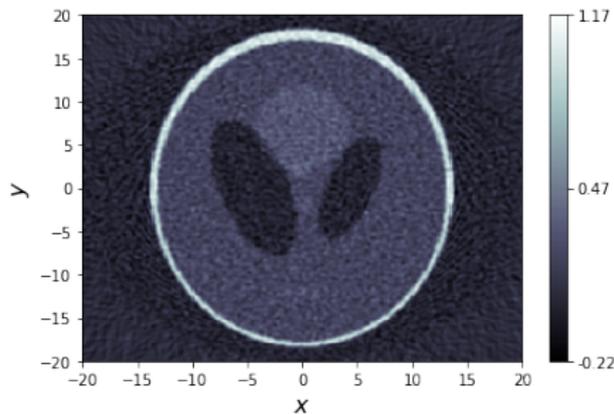
$$(\mathcal{R}^{-1}g)(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (m * g(\cdot, \theta))(x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) d\theta,$$

remplacer  $m$  par  $m_\lambda$  définie par (filtrage des hautes fréquences)

$$\mathcal{F}m_\lambda = \omega \mapsto |\omega| \mathbb{1}_{|\omega| \leq \frac{1}{\lambda}}.$$



Signal  $y_\varepsilon$  avec bruit  $\varepsilon = 0.5$ .



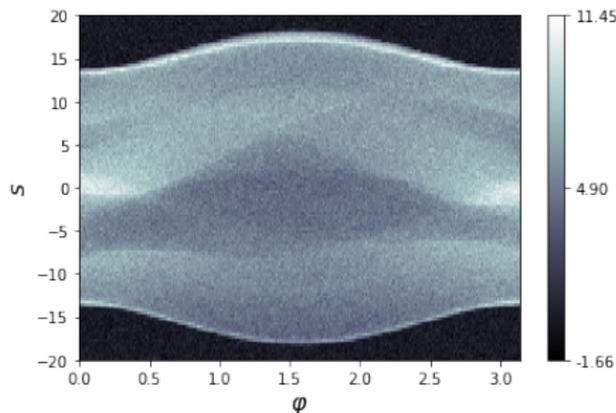
Reconstruction avec rég.  $\lambda = 10^{-2}$ .

Méthode de régularisation : dans

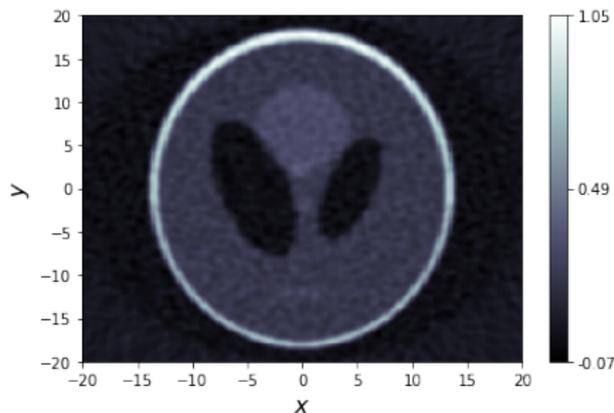
$$(\mathcal{R}^{-1}g)(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (m * g(\cdot, \theta))(x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) d\theta,$$

remplacer  $m$  par  $m_\lambda$  définie par (filtrage des hautes fréquences)

$$\mathcal{F}m_\lambda = \omega \mapsto |\omega| \mathbb{1}_{|\omega| \leq \frac{1}{\lambda}}.$$



Signal  $y_\varepsilon$  avec bruit  $\varepsilon = 0.5$ .



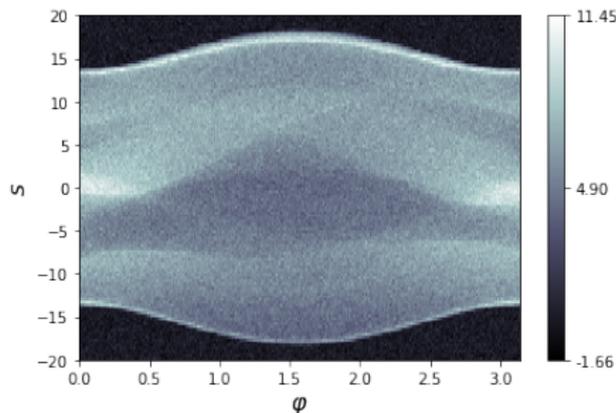
Reconstruction avec rég.  $\lambda = 1$ .

Méthode de régularisation : dans

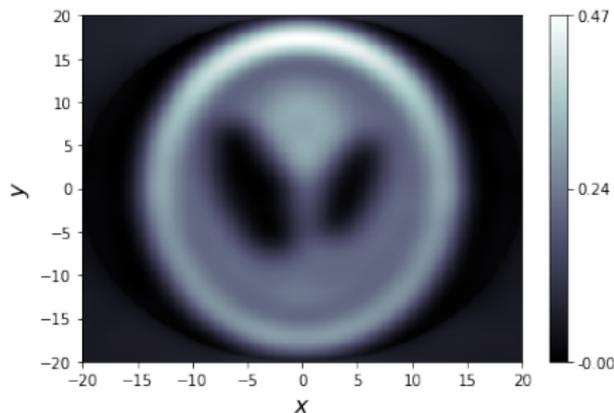
$$(\mathcal{R}^{-1}g)(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (m * g(\cdot, \theta))(x \cos(\theta) + y \sin(\theta)) d\theta,$$

remplacer  $m$  par  $m_\lambda$  définie par (filtrage des hautes fréquences)

$$\mathcal{F}m_\lambda = \omega \mapsto |\omega| \mathbb{1}_{|\omega| \leq \frac{1}{\lambda}}.$$



Signal  $y_\varepsilon$  avec bruit  $\varepsilon = 0.5$ .



Reconstruction avec rég.  $\lambda = 5$ .

Idee de base : chercher  $x$  qui résout le problème d'**optimisation**

$$\min_x \|Ax - y_\varepsilon\|^2 \quad (5)$$

C'est-à-dire, dans le cas discret,

$$\min_{x \in \mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^p ((Ax)_i - (y_\varepsilon)_i)^2.$$

Si  $A^T A$  est inversible, l'unique solution à ce problème est  $x^* = (A^T A)^{-1}(A^T y_\varepsilon)$  !

Les choses paraissent donc doublement stupides :

1. on a écrit de manière compliquée un problème dont on connaissait la solution pourtant simple,
2. la solution, on l'a vu, n'est de toute façon pas satisfaisante

et pourtant

1. en pratique **numérique**, on n'essaie **jamais** de calculer l'inverse d'une matrice, on essaie bien de résoudre des problèmes quadratiques de type (5),
2. cette approche va nous donner des idées pour obtenir un résultat plus satisfaisant.

Champ mathématique : l'**optimisation**.

Résoudre

$$\min_x f(x),$$

c'est-à-dire

Trouver  $x^*$  tel que  $f(x^*) = \min_x f(x)$ .

Comment minimise-t-on une fonction ?

Ce qu'il ne faut pas faire : **la recherche exhaustive**.

si  $x$  est un vecteur de dimension même petite,  $x \in \mathbb{R}^{10}$ , et qu'on veut essayer les valeurs entre 0 et 1 avec un pas de  $10^{-2}$ , on a  $100^{10} = 10^{20}$  calculs à faire !

## Quelques mots sur l'optimisation (2)

**Algorithmes** d'optimisation : construire une **suite**  $(x_n)$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x^*, \quad \text{où} \quad f(x^*) = \min_x f(x).$$

Algorithmes de *gradient* : depuis  $x_n$ , regarder dans quelle direction  $f$  décroît le plus (donnée par  $-\nabla f(x_n)$ ), et effectuer un petit pas dans cette direction.

Exemple, avec un pas  $\rho > 0$ :

$$x_{n+1} = x_n - \rho \nabla f(x_n).$$

Deux espoirs contradictoires.

◇ **convergence rapide** : peu d'itérations

$$\|x_n - x^*\| = o(c^n), \quad 0 < c < 1 \quad \text{ou} \quad o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad \alpha \text{ grand}$$

◇ **itérations peu coûteuses** : chaque itération ne prend pas beaucoup de temps.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^p} \|Ax - y_\varepsilon\|^2 \quad (6)$$

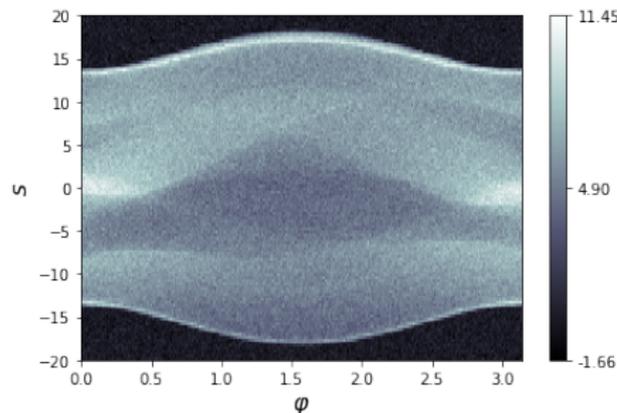
Pour résoudre (6), *algorithme de Landweber* (i.e., de gradient avec pas "optimal")

$$x_{n+1} = x_n - \omega A^T (Ax_n - y_\varepsilon), \quad \omega = \frac{1}{\|A\|^2}.$$

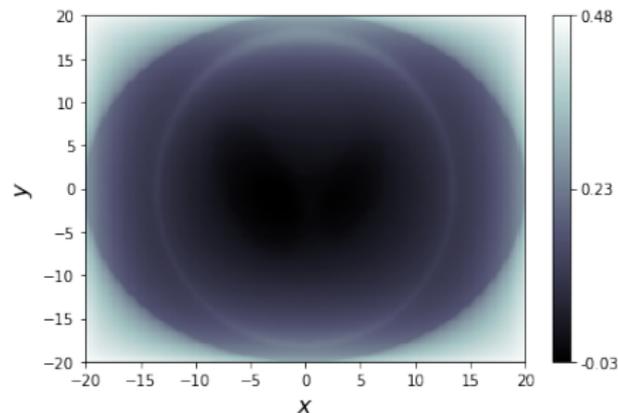
$$\min_{x \in \mathbb{R}^p} \|Ax - y_\varepsilon\|^2 \quad (6)$$

Pour résoudre (6), *algorithme de Landweber* (i.e., de gradient avec pas "optimal")

$$x_{n+1} = x_n - \omega A^T (Ax_n - y_\varepsilon), \quad \omega = \frac{1}{\|A\|^2}.$$



Signal  $y_\varepsilon$  avec bruit  $\varepsilon = 0.5$ .

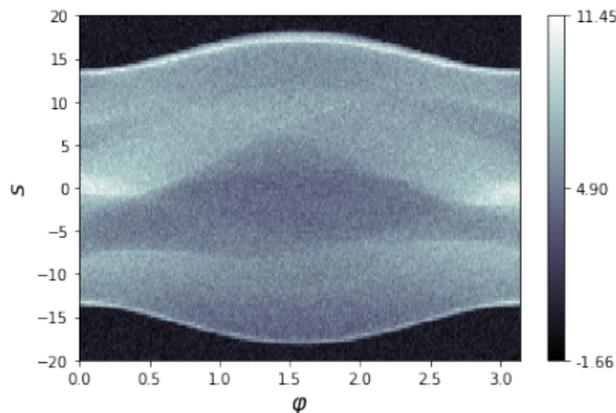


Reconstruction  $x_n$  avec  $n = 1$ .

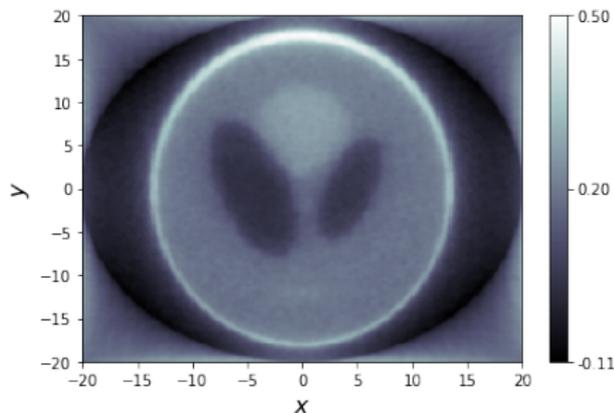
$$\min_{x \in \mathbb{R}^P} \|Ax - y_\varepsilon\|^2 \quad (6)$$

Pour résoudre (6), *algorithme de Landweber* (i.e., de gradient avec pas "optimal")

$$x_{n+1} = x_n - \omega A^T (Ax_n - y_\varepsilon), \quad \omega = \frac{1}{\|A\|^2}.$$



Signal  $y_\varepsilon$  avec bruit  $\varepsilon = 0.5$ .

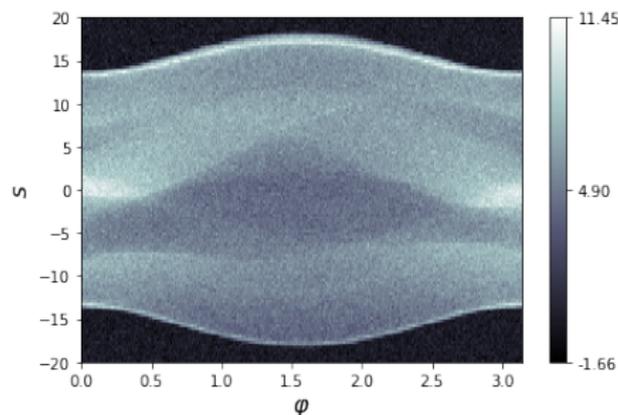


Reconstruction  $x_n$  avec  $n = 10$ .

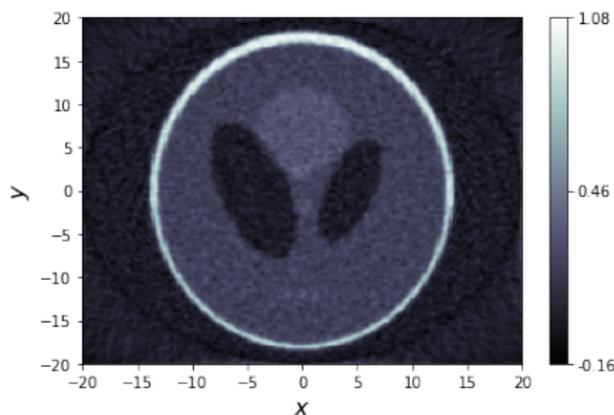
$$\min_{x \in \mathbb{R}^P} \|Ax - y_\varepsilon\|^2 \quad (6)$$

Pour résoudre (6), *algorithme de Landweber* (i.e., de gradient avec pas "optimal")

$$x_{n+1} = x_n - \omega A^T (Ax_n - y_\varepsilon), \quad \omega = \frac{1}{\|A\|^2}.$$



Signal  $y_\varepsilon$  avec bruit  $\varepsilon = 0.5$ .

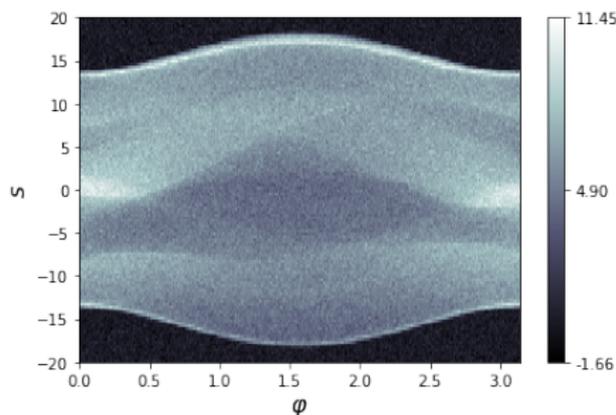


Reconstruction  $x_n$  avec  $n = 100$ .

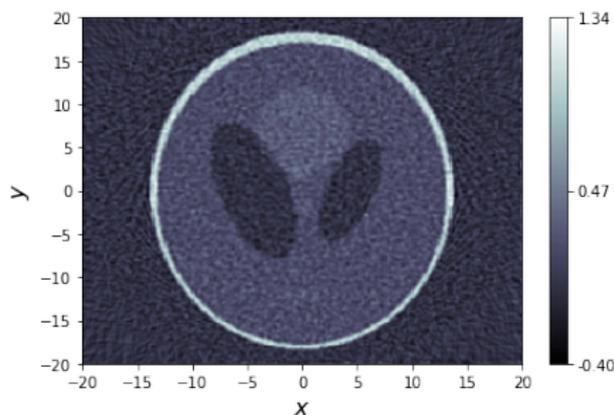
$$\min_{x \in \mathbb{R}^P} \|Ax - y_\varepsilon\|^2 \quad (6)$$

Pour résoudre (6), *algorithme de Landweber* (i.e., de gradient avec pas "optimal")

$$x_{n+1} = x_n - \omega A^T (Ax_n - y_\varepsilon), \quad \omega = \frac{1}{\|A\|^2}.$$



Signal  $y_\varepsilon$  avec bruit  $\varepsilon = 0.5$ .



Reconstruction  $x_n$  avec  $n = 500$ .

## Régularisation par ajout d'un terme d'a priori

On veut utiliser une **information a priori** : par exemple

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, |x_i| \leq M \iff \|x\|_\infty \leq M$$

On tente

$$\min_{x \in \mathbb{R}^p, \|x\|_\infty \leq M} \|Ax - y_\varepsilon\|^2.$$

Équivalent à

$$\min_{x \in \mathbb{R}^p} \|Ax - y_\varepsilon\|^2 + \lambda \|x\|_\infty^2.$$

avec  $\lambda$  dépendant de  $M$ .

Plus généralement

$$\min_{x \in \mathbb{R}^p} \|Ax - y_\varepsilon\|^2 + \lambda R(x).$$

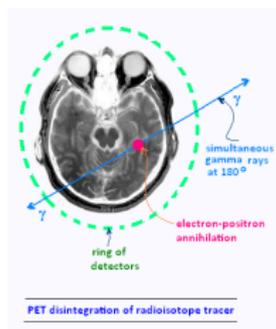
avec  $R$  une fonction **qui incorpore l'a priori** sur  $x$ .

- ◇ **optimisation**, toujours en lien avec les tailles typiques en jeu
- ◇ **probabilités/statistiques** : modèle de bruit et problème de minimisation associé
- ◇ profite des avancées récentes en **apprentissage profond** ("deep learning")
- ◇ toujours en mouvement avec de **nouveaux problèmes** qui émergent

# Tomographie par émission de positons en quelques mots

TEP ou PET scan : modalité d'**imagerie médicale**.

- ◇ **injection** d'un radiotracteur,
- ◇ **désintégration** de celui-ci dans les tissus, par émission d'un positon,
- ◇ après une courte distance, **interaction** avec un électron résultant en l'émission de deux photons en directions opposées,
- ◇ **détection** simultanée par une paire de détecteurs.



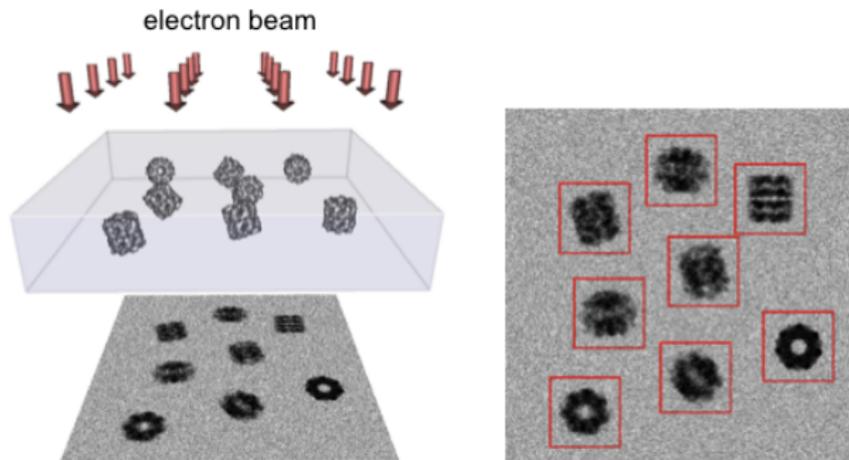
La physique du PET scan.

**Modèle** :  $y_i =$  variable aléatoire de *Poisson* de moyenne  $(Ax)_i$ , avec indépendance

# Cryo-microscopie électronique en quelques mots

Cryo-EM : technique de microscopie pour la **structure de biomolécules**.

- ◇ **figement** d'un grand nombre de molécules dans une fine glace amorphe,
- ◇ **bombardement** de la couche de glace par des électrons,
- ◇ **détection** des électrons sur des *micrographes*.



**Le principe de la cryo-microscopie électronique.**