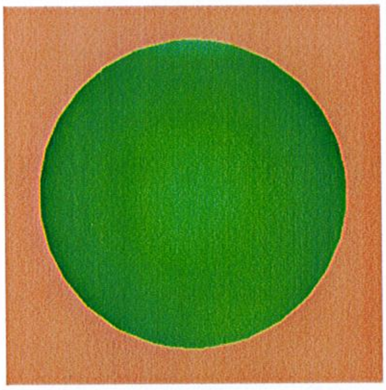
LEONHARD EULER

*** 1707 (Bâle) — † 1783 (Saint-Petersbourg)**

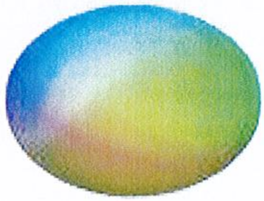
Pastel de Emanuel Handmann, 1753 (Kunstmuseum, Bâle)

Le genre d'une surface = le nombre de « trous »

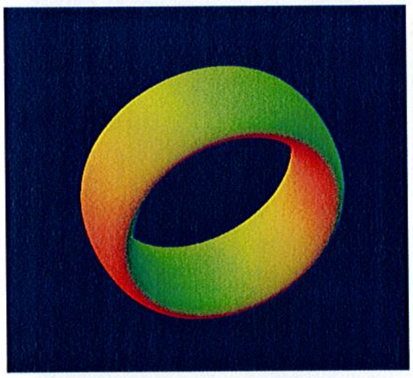
Surfaces de genre 0 :



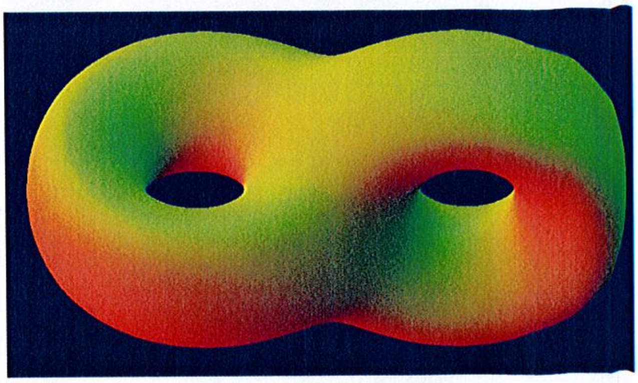
Sphère



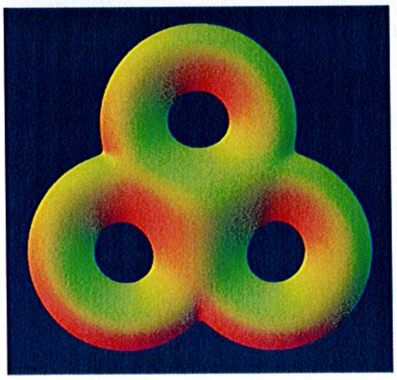
Ellipsoide



Une surface de genre 1 : le tore



Une surface de genre 2



Une surface de genre 3

LA RELATION D'EULER

Théorème : Soit P un polyèdre convexe. Soit

s le nombre de sommets de P,

a le nombre d'arêtes de P,

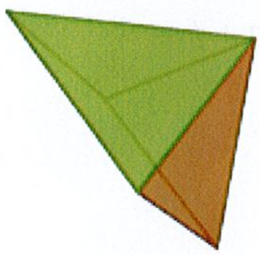
f le nombre de faces de P.

La relation suivante, dite *relation d'Euler,* est alors vérifiée :

$$s - a + f = 2$$

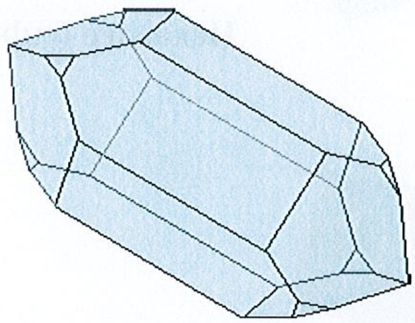
Exemples :

la pyramide carrée



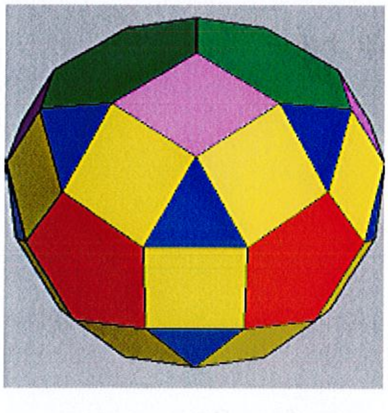
$s = 5$, $a = 8$, $f = 5$ et $s - a + f = 2$

un polyèdre cristallographique : le quartz



$s = 32$, $a = 46$, $f = 16$ et $s - a + f = 2$

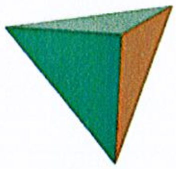
le rhombicosidodécaèdre



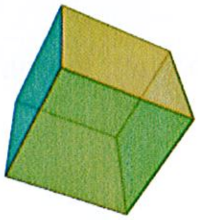
$s = 60$, $a = 120$, $f = 62$ et $s - a + f = 2$

Exercice : **les cinq solides de Platon**

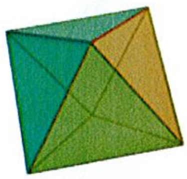
Il n'existe que <u>cinq</u> polyèdres réguliers convexes : on les appelle les *solides de Platon*. Il s'agit du *tétraèdre*, du *cube*, de l'*octaèdre*, du *dodécaèdre* et de l'*icosaèdre*. Vérifiez la relation d'Euler pour chacun de ces polyèdres.



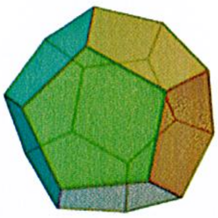
Tétraèdre $s = 4, a = 6, f = 4, \quad s - a + f = 2$



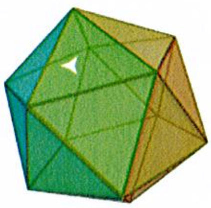
Hexaèdre (cube) $s = 8, a = 12, f = 6, \quad s - a + f = 2$



Octaèdre $s = 6, a = 12, f = 8 \quad s - a + f = 2$

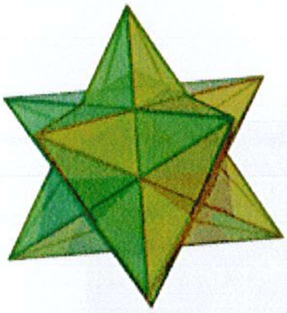


Dodécaèdre $s = 20, a = 30, f = 12 \; s - a + f = 2$



Icosaèdre $s = 12, a = 30, f = 20 \quad s - a + f = 2$

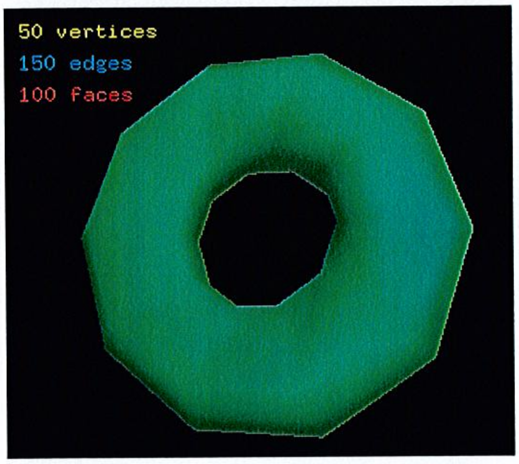
Un contre-exemple : le petit dodécaèdre étoilé

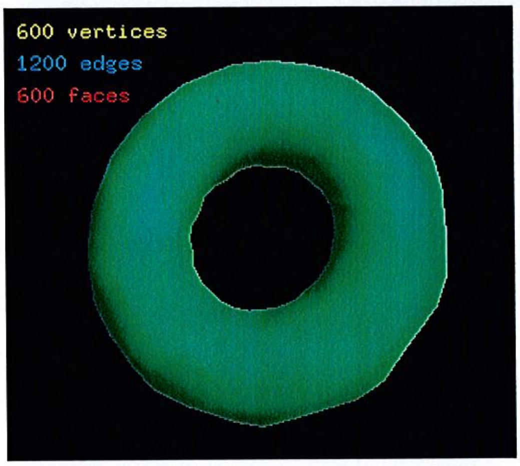


Ce solide est *non convexe* $s = 12$, $a = 30$, $f = 12$

$$s - a + f = -6$$

Pour une surface Σ lisse et fermée quelconque, on *triangule* Σ, i.e. on trace sur Σ un graphe de sorte que chacune des faces soit un triangle (éventuellement déformé, ce qui n'a pas d'importance en topologie),





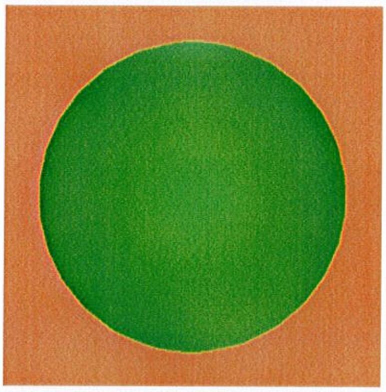
puis on compte les nombres s de sommets, a d'arêtes et f de faces et on calcule la somme alternée

$$\chi = s - a + f$$

Théorème : L'entier χ est indépendant de la triangulation choisie. Il est appelé *caractéristique d'Euler-Poincaré* de Σ. Il est lié au genre g de la surface par la formule

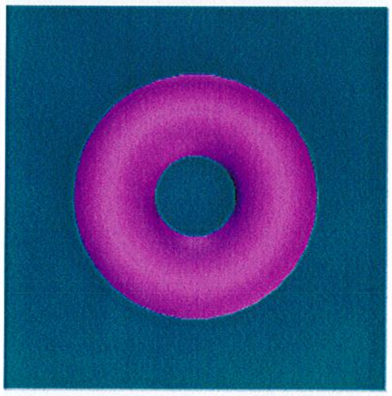
$$\boxed{\chi = 2 - 2g}$$

Exemples : pour la sphère



$\chi = 2$ et $g = 0$.

pour le tore



$\chi = 0$ et $g = 1$.

Avantage : cela peut être réalisé pour n'importe quelle surface, même très compliquée !