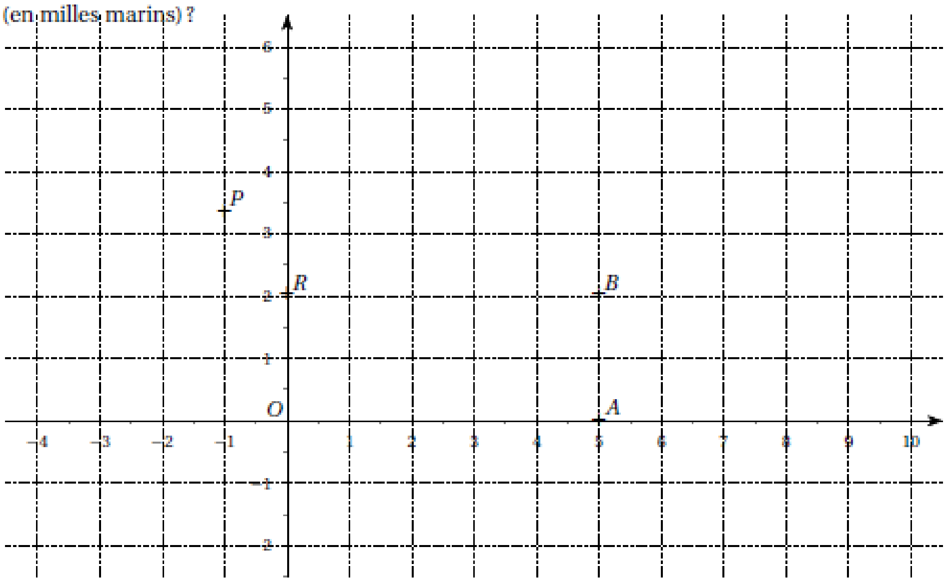
A BON PORT

Niveau : 2nde

Enoncé :

On considère un bateau, symbolisé par le point B dans le repère orthonormé ci-dessous. Une unité représente un mille marin (unité de mesure de distance dans la marine). On sait que les coordonnées de B sont $(5;2)$ et celles de O sont $(0;0)$. Un phare est représenté par le point $P\left(-1;\frac{10}{3}\right)$. Le point A représente le point d'amarrage du bateau et le point R un point de ravitaillement.

1. Quelle est la distance BP entre le bateau B et le phare P (en milles marins) ?
2. Une île se situe au niveau du point T de coordonnées $(151;89)$. Quelle est la distance entre le bateau et cette île (en milles marins) ?



Objectif : créer un besoin de recherche d'une formule pour calculer la distance entre deux points

Prérequis : lecture d'abscisse et d'ordonnée de points et placement de points à partir de ses coordonnées, théorème de Pythagore

Notions abordées et travaillées dans le problème : valeur exacte, valeur approchée, manipulation des nombres rationnels et des radicaux, notion de distance

Comment intégrer ce problème dans la progression : problème pour introduire la propriété sur la distance entre deux points dans un repère orthonormé

Durée indicative : une séance de 55 minutes environ pour la recherche et la rédaction du compte-rendu. Une séance pour le bilan et l'institutionnalisation de la formule.

Matériel : aucun**.**

A éviter : l'objectif étant que l'élève se rende compte par lui-même qu'il est nécessaire de calculer, on ne lui interdira pas de travailler avec des valeurs approchées (mesurer ou compter les carreaux)

Ecueils et « déblocage »:

- L'élève ne démarre pas.
  - Comment faisais-tu l'année dernière lorsque tu devais calculer une longueur ? Quels outils avais-tu à ta disposition ?
    - Suggérer de calculer dans un premier temps la longueur OB
  - « Je calcule les coordonnées du milieu de [PB] et je les multiplie par 2 pour avoir la longueur PB ». L'élève confondait le milieu avec la moitié de la longueur.
    - En calculant les coordonnées du milieu, tu obtiens les coordonnées d'un point, place-le. Quel est le lien avec la longueur PB ?
- L'élève mesure
  - Le laisser faire : la question 2 devrait lui permettre de se rendre compte de la nécessité d'un calcul.
- L'élève donne la formule sans les carrés.
  - Fais le dessin en prenant 1 cm comme unité de longueur sur chaque axe et mesure la longueur PB obtenue. Correspond-t-elle à ce que tu as trouvée ?
- L'élève donne la réponse sous forme de couple de nombres (p.ex. (6 ; 16/3)).
  - Quelle est la distance entre Lina (une élève) et toi ? Comment l'exprimes-tu ? Et dans la réponse que tu proposes ?

Quel bilan avec les élèves ?

Une fois trouvé un triangle rectangle adapté à la situation, le théorème de Pythagore permet de déterminer la distance entre deux points dans un repère orthonormé.

La méthode est longue, aussi le recours à une formule permet d'obtenir cette distance directement à partir des coordonnées des extrémités du segment.

Prolongement possible :

- trouver la formule du calcul de la distance BP en fonction des coordonnées de B et P
- demander la formule pour calculer la distance PB puis la comparer avec BP …

Quelques copies d'élèves :

<u>écrit 1</u>

1) La distance entre le bateau B et le phare P est (-6 ; 1,4).

Démarche :

-6 : on compte le nombre de carreau, comme c'est en arrière, le résultat sera négatif

1,40 : même chose qu'avant, sauf qu'on a mesuré à l'œil

ou

(-6, 1,4) sont les " coordonnées du trajet " et non pas la distance. On place un point G sur le graphique à -1,4 à côté de P.

Pour trouver la distance, on utilise le théorème de Pythagore.

$PB^2 = PG^2 + GB^2$

$PB^2 = 1,4^2 + 6^2$

$PB^2 = 1,96 + 36$

$PB^2 = 37,96$

$PB = \sqrt{37,96}$

PB = ~~37,96~~ 6,2 mille marin

La distance PB est d'environ 6,2 mille marin.

2) Les coordonnées de B sont (5;2), et T sont (151 ; 89).

On soustrait les abscisses avec les abscisses, les ordonnées avec les ordonnées.

151 - 5 = 146

89 - 2 = 87

Les coordonnées de T par rapport à B sont (146 ; 87).

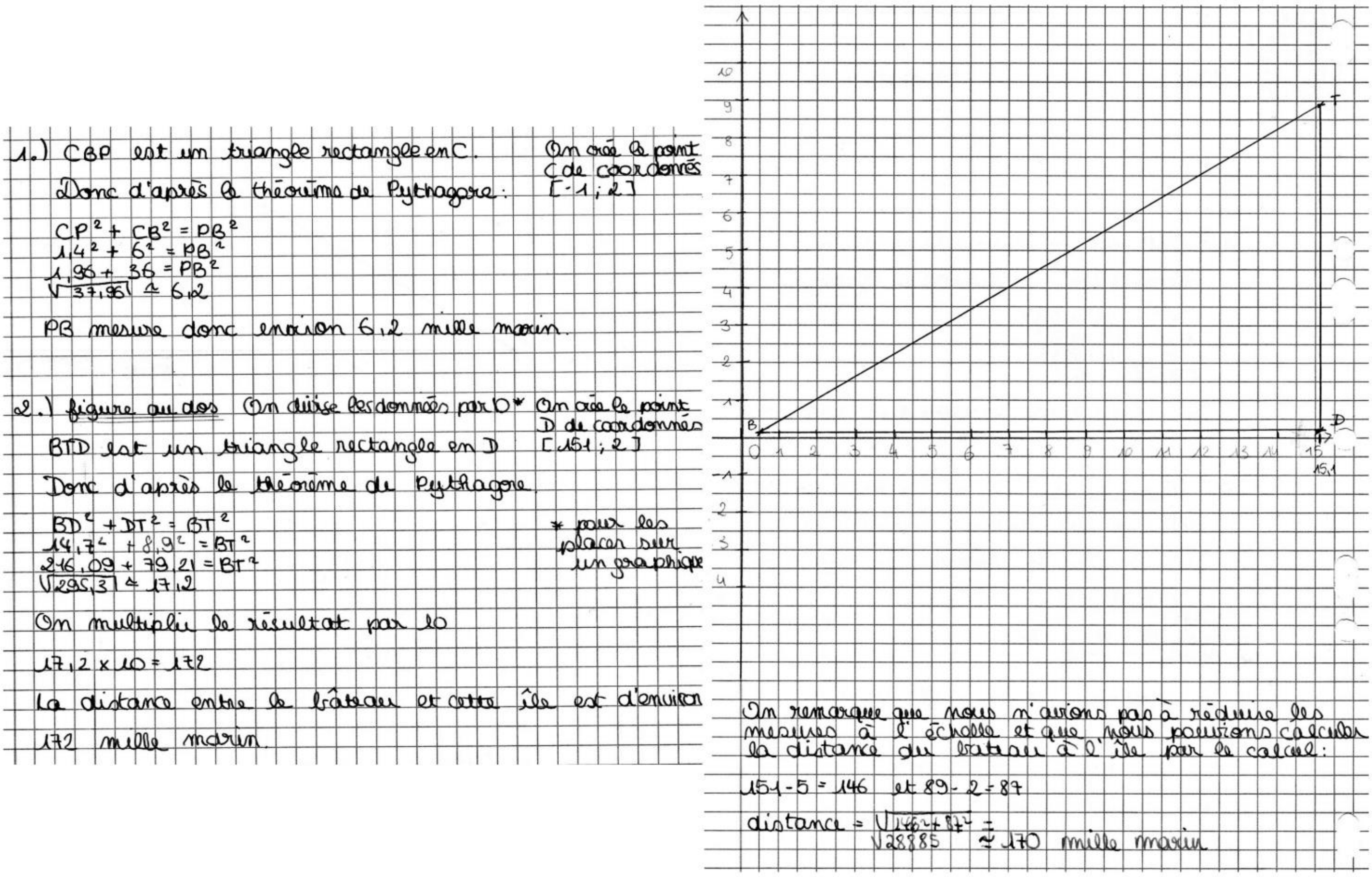
On a fait ce calcul, car on ne peut pas lire sur le graphique les coordonnés de ce point.

On place le point J à (0;2), on utilise le théorème de Pythagore pour trouver la distance entre le bateau et cette île.

$TB^2 = TJ^2 + JB^2$

Dans cet exemple, l'élève semble confondre distance et coordonnées et travaille avec des mesures approchées (prises sur le dessin). On pourrait être tenté de rectifier son erreur immédiatement, mais on voit bien par la suite que les coordonnées utilisées sont les coordonnées du vecteur du déplacement (notion qu'il découvre par lui-même) et qu'il exploite correctement le lien entre ce vecteur et la distance. Il est important de ne pas freiner les élèves dans leur première démarche, même si elle parait incorrecte de prime abord.

écrit 2


1.) CBP est un triangle rectangle en C.
Donc d'après le théorème de Pythagore :
$CP^2 + CB^2 = PB^2$
$1,4^2 + 6^2 = PB^2$
$1,96 + 36 = PB^2$
$\sqrt{37,96} \simeq 6,2$
PB mesure donc environ 6,2 mille marin.

On crée le point C de coordonnés [-1 ; 2]

2.) figure au dos On divise les données par 10*
BTD est un triangle rectangle en D
Donc d'après le théorème de Pythagore
$BD^2 + DT^2 = BT^2$
$14,7^2 + 8,9^2 = BT^2$
$216,09 + 79,21 = BT^2$
$\sqrt{295,3} \simeq 17,2$
On multiplie le résultat par 10
$17,2 \times 10 = 172$
La distance entre le bâteau et cette île est d'environ 172 mille marin.

On crée le point D de coordonnés [15,1 ; 2]

* pour les placer sur un graphique

On remarque que nous n'avions pas à réduire les mesures à l'échelle et que nous pouvions calculer la distance du bateau à l'île par le calcul :
151 - 5 = 146 et 89 - 2 = 87
distance = $\sqrt{146^2 + 87^2} = \sqrt{28885} \simeq 170$ mille marin

Dans cet écrit les élèves surmontent la difficulté en faisant un dessin à l'échelle. On peut penser que ça ne va pas les amener à la formule, mais on voit que cette démarche leur sert de palier pour arriver à la différence des coordonnées. Encore une fois il est important de laisser les élèves mener leur démarche jusqu'au bout.

écrit 3

*
1. Pour calculer la distance BP, il faut utiliser le théorème de Pythagore

$BP^2 = BF^2 + FP^2$

$= 6^2 + \left(\frac{10}{3} - 2\right)^2$

$= 36 + \left(\frac{10}{3} - 2\right)^2$

$= 36 + \left(\frac{10}{3} - \frac{2\times3}{1\times3}\right)^2$

$= 36 + \left(\frac{10}{3} - \frac{6}{3}\right)^2$

$= 36 + \left(\frac{4}{3}\right)^2$

$= \frac{36\times9}{1\times9} + \frac{16}{9}$

$= \frac{324}{9} + \frac{16}{9}$

$= \frac{340}{9}$ Or BP est supérieur à 0 $BP = \sqrt{\frac{340}{9}} \simeq 6{,}15$

La distance entre le phare et le bateau est de 6,15 milles marins.

* On nomme le point F de coordonnée $(-1;2)$, nous avons donc $BF = 6$ milles marins. Le segment $PF = \frac{10}{3} - 2 = \frac{4}{3}$

2. On nomme le point E de coordonnée $(151;2)$. Nous avon

$BE = 151 - 5 = 146$, et $TE = 89 - 2 = 87$

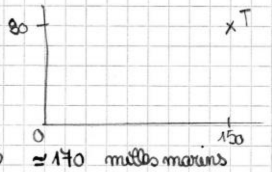
D'après le théorème de Pythagore, nous avons :

$BT^2 = BE^2 + TE^2$

$= 146^2 + 87^2$

$= 21316 + 7569$

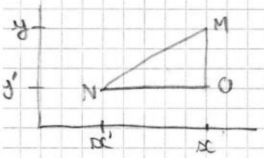
$= 28885$



Or $BT > 0$ $BT = \sqrt{28885} \simeq 170$ milles marins

La distance entre l'île et le bateau est d'environ 170 milles marins

3. Essai de généralisation



$M = (x;y)$

$N = (x';y')$

$O = (x;y')$

D'après le théorème de Pythagore, nous avons :

$MN^2 = OM^2 + ON^2$

$MN^2 = (y-y')^2 + (x-x')^2$

$MN = \sqrt{(y-y')^2 + (x-x')^2}$

C'est le travail d'un très bon groupe que l'on peut présenter à la classe comme exemple de rédaction rigoureuse et soignée.

Le point 3 de cette solution correspond à la question supplémentaire posée par l'enseignant (voir la rubrique « prolongement possible »).