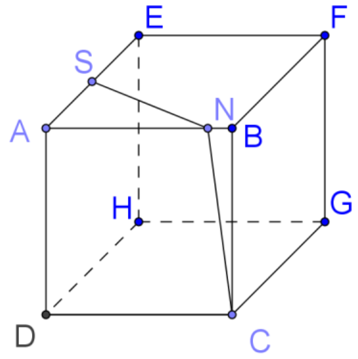
La fourmi paresseuse

Niveau : 2nde

Enoncé : Une fourmi arrive au pied d'un cube en bois de côté 3 cm. Alléchée par une odeur du sucre mais paresseuse, elle se demande quel est le plus court chemin pour atteindre l'objet de sa convoitise. Le sucre se situe au milieu de l'arête [AE] et la fourmi est au point C. En quel point de l'arête [AB] la fourmi doit-elle passer pour que le trajet soit le plus court possible ?



Objectifs : 1) Aborder la notion de variation de fonction et de minimum dans un cadre non algébrique.

ou

2) Travailler l'articulation entre géométrie plane et géométrie dans l'espace.

Prérequis : visualiser dans l'espace, Théorème de Pythagore, savoir utiliser la calculatrice pour faire un tableau de valeurs ou représenter une courbe, maîtriser l'utilisation du théorème de Thalès et la résolution d'équations.

Notions abordées et travaillées dans le problème :

1) notion de variable, notion de tableaux de valeurs, courbe représentative de fonction, notion de minimum d'une fonction, théorème de Pythagore,

2) patron de cube, théorème de Thalès, résolution d'équation.

Comment intégrer ce problème dans la progression : A partir de ce problème, on peut bâtir le cours pour :

- Aborder la notion de sens de variation d'une fonction.
- Aborder la notion de maximum et de minimum d'une fonction.
- Donner la démarche pour déterminer la valeur exacte ou approchée du minimum d'une fonction.

Ou bien bâtir le cours sur la géométrie dans l'espace en faisant des rappels:

- lien entre les longueurs réelles et les longueurs mesurées sur la figure.
- Utilisation des théorèmes de géométrie plane dans l'espace.

Durée indicative : 4 séances (1h de recherche, 1/2h d'analyse de productions, 1h de recherche, 1h d'analyse de productions et de bilan)

Matériel conseillé : quelques cubes éventuellement transparents

Ecueils et « déblocages »: pour ceux qui :

- ne démarrent pas :

  ⟶ essayer un chemin et trouver sa longueur.

- n'ont pas compris dans l'énoncé : « en quel point de l'arête [AB] ?»

  ⟶ leur demander de montrer un point de l'arête [AB] puis trois autres, leur demander combien il y a de points sur l'arête [AB], puis leur demander de reformuler la question avec leurs mots.

- ne prennent que des chemins passant par les arêtes

  → leur demander si la fourmi a l'interdiction de marcher sur les faces

- calculent des longueurs de quelques chemins (2, 3 ou 4) et concluent :

  → leur demander s'ils ont répondu au problème

  puis s'ils ont envisagé tous les chemins possibles

  puis qu'en est -il si la fourmi passe « un tout petit peu » à côté de votre point M ?

  puis les amener à dire qu'il est impossible de tous les tester et qu'il y a alors certainement une manière d'étudier en une seule fois tous les trajets possibles

- « passent tout droit » sans se rendre compte que le chemin C-S est à l'intérieur du cube et mesurent ce trajet en le traçant sur le cube en perspective

  → faire prendre conscience de leur erreur en distribuant par exemple un cube en plastique transparent

- mesurent la longueur SN sur le cube en perspective

  → leur proposer de mesurer ces chemins sur l'objet cube et sur la perspective de même taille (préparée par l'enseignant)

- pensent que : « lorsque le chemin CN s'allonge, le chemin NS diminue, alors ça se compense et que par conséquent tous les chemins ont la même longueur »

  → les faire comparer la longueur de 2 chemins.

« A ne pas faire » :

- Ne pas leur parler de patron ou de figure en vraie grandeur sans que cela ne vienne d'eux.

- Ne pas leur dire d'appeler x la longueur AN par exemple

Quel bilan avec les élèves : En conclusion de ce problème, l'enseignant et les élèves pourront, par exemple, généraliser une démarche qui répond à la question : comment déterminer la valeur exacte ou approchée du minimum d'une quantité?
L'analyse de la démarche permet de donner une vision d'ensemble aux élèves et elle peut se résumer ainsi :

- Détecter des quantités qui ne sont pas constantes (ici NB, CN et NS.)
- Repérer une configuration de l'espace où l'on peut utiliser les théorèmes de géométrie plane (ici le théorème de Pythagore) pour calculer les grandeurs qui dépendent de la variable choisie.
- Organiser par exemple les résultats dans un tableau de valeurs ou faire une représentation graphique pour visualiser les variations.
- Affiner la recherche du minimum en modifiant le pas du tableau de valeurs.
- Conclure par rapport au problème initial.

On pourra mettre en parallèle la démarche géométrique, qui peut permettre ici d'aboutir à la valeur exacte du minimum.

Elle peut se résumer ainsi :

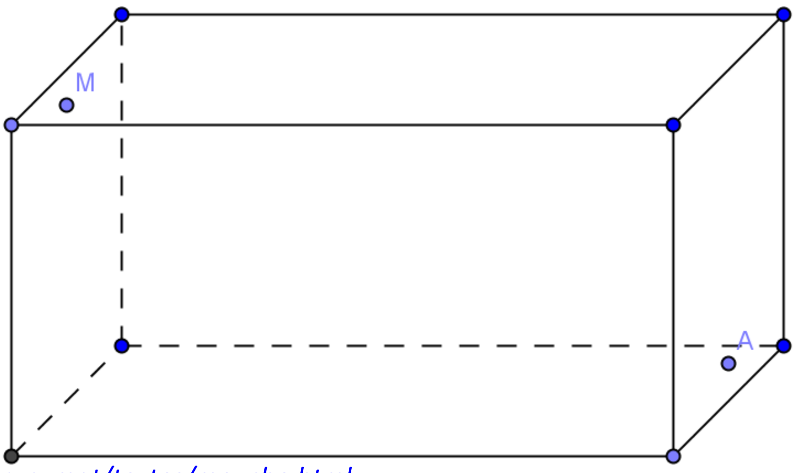
- Rappeler que pour une figure de l'espace, les grandeurs mesurées sur la figure ne correspondent pas toujours aux grandeurs réelles.
- Détecter des quantités qui ne sont pas constantes (ici NB, CN et NS.)
- Comprendre que « déterminer la longueur d'un chemin dans l'espace » revient à « calculer la longueur du chemin correspondant sur le patron du solide. »
- Rappeler que dans le plan, le plus court chemin est la ligne droite.
- Mettre le problème en équation.
- Conclure par rapport au problème initial.

Particularité du problème : ce problème a une entrée géométrique (qui aboutit à une solution géométrique approchée ou à une solution algébrique exacte du problème) et une entrée par les fonctions (pour avoir une solution numérique approchée du problème.)

Prolongements possibles

- Travailler la différence entre nombre rationnel et nombre décimal : Lorsqu'un encadrement par 2 décimaux distants de plus de 0,1 a été trouvé et leur suffit :
  ⟶ trouver 5 nombres dans cet intervalle. Combien y-a-t-il de nombres dans cet intervalle ? Sont-ils tous décimaux ?
- Problème de la mouche et de l'araignée

Dans une pièce fermée(de dimensions 3 sur 3 sur 7,5) comprenant, un plancher, 4 murs et un plafond, une mouche souhaite se reposer un peu. Posée sur le mur du fond (à 0,25m du plafond), elle repère une araignée, située à l'opposé de cette pièce sur le mur d'en face. (à 0,25 m du sol) Sachant que l'araignée marche à la vitesse de 30 mètres par minute, la mouche décide de dormir 20,5 secondes. Elle commence donc à dormir mais au bout d'exactement 20 secondes l'araignée mange la mouche ! Que s'est-il passé ?



http://xunor.free.fr/enigmes/araignee

visualisation de la solution :

http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/mouche.html

Réflexions autour de l'énoncé et compléments pour le professeur: Le choix de la position du point S sur le segment [AE] n'a aucune influence pour le raisonnement et donc la fixer évite d'introduire un paramètre dans les calculs. Cependant il faut éviter de mettre S trop près de E, car dans ce cas le chemin le plus court passe trop près du milieu de [AB] et les élèves ont alors parfois tendance à prendre le chemin passant par le milieu à la place du chemin le plus court.

La solution à laquelle on veut amener les élèves est de regarder le patron et de se rendre compte que le chemin le plus court sur le patron est le chemin le plus court sur la surface du cube. Les élèves rencontrent pour cela une difficulté double : conservation de la longueur par passage de 3D à 2D d'une part (pour se ramener à la recherche sur le patron) et la conservation de la longueur par passage du 2D à 3D d'autre part (pour se convaincre que le chemin trouvé sur le patron est bien celui recherché). Il ne faut pas sous-estimer cette difficulté.

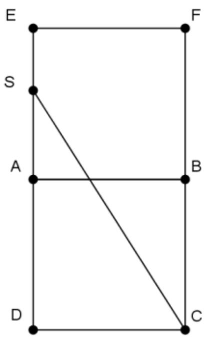
Mis à part cette difficulté qui est au cœur du travail mathématique de cette activité, il existe une difficulté géométrique que nous avons essayé d'évacuer en fixant le plus de paramètres possible.

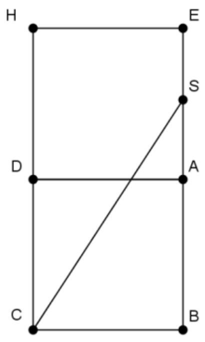
Le placement de la fourmi et de l'appât, la forme de la boite et la figure illustrant le problème ne sont pas choisis au hasard.

Dans l'énoncé on précise que la fourmi doit passer par le segment [AB]. Donc a priori on ne cherche pas le chemin le plus court dans l'absolu mais le chemin le plus court traversant [AB], ce qui permet d'éviter la discussion géométrique, très intéressante en soi, mais qui allonge le problème.

Le chemin le plus court n'est pas forcement unique. Dans la configuration présentée dans l'énoncé (ABCDEFGH est un cube, la fourmi part du point C et arrive sur le segment [AE]) il est relativement facile de voir que le chemin le plus court ne peut pas passer par la face EFGH.

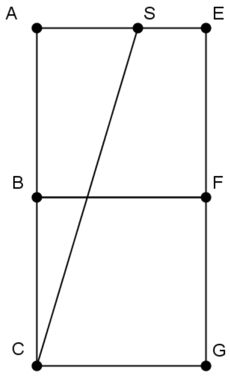
Par contre qu'on décide de passer d'abord par ABCD puis par ABFE ou qu'on décide de passer par la face ABCD puis par ADHE , on se retrouve dans la même configuration :

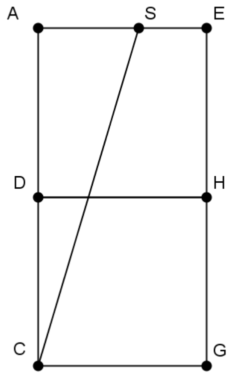




Donc le chemin le plus court passant par [AB] et le chemin le plus court passant par [AD] ont la même longueur.

De manière analogue on retrouve deux mêmes configurations si l'on passe par DCGH et ensuite par DHAE ou d'abord par BCFG et puis par ABFE :





Donc dans ce cas encore le chemin le plus court passant par [BF] et celui passant par [DH] sont de même longueur.

Comme ABCDEFGH est un cube, dans le deuxième cas le chemin sera plus grand. Mais si ABCDEFGH était un pavé droit, tel pourrait ne pas être le cas : si AB<AS le chemin le plus court de la deuxième configuration sera plus court que celui de la première configuration.

Cette complexité est due à la fois à la forme du solide, à la place du point de départ sur l'intersection de trois faces et à la place du point d'arrivée sur l'intersection de deux faces, ce qui crée plusieurs candidats plausibles pour le plus court chemin.