Le bonhomme

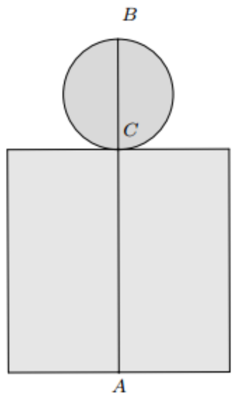
Niveau : 2nde (mais peut être donné dès la 3ème)

Enoncé :

À partir d'un segment $[AB]$ de longueur 10 cm et d'un point C variable sur ce segment, on construit un « bonhomme » comme visualisé sur le schéma ci-contre :

- la tête est le disque de diamètre $[BC]$;
- le tronc est un carré dont les côtés ont pour longueur AC.

Déterminer la position du point C sur le segment $[AB]$ pour que l'aire totale de cette figure soit minimale.



Objectif : représenter une quantité exprimée en fonction d'une autre quantité à l'aide d'une courbe, ou déterminer le minimum d'une quantité ou d'une fonction, ou comprendre ce que signifie qu'une quantité varie en fonction d'une autre quantité

Prérequis : aire d'un disque, aire d'un carré

Notions abordées et travaillées dans le problème : variable, tableau de valeurs, courbe, expression algébrique, minimum, variation

Comment intégrer ce problème dans la progression :

- Ce peut être un deuxième problème de recherche (après la statue de la liberté) pour illustrer la notion de fonction.
- Ce problème peut faire le bilan entre le problème sur les familles de points dans lequel l'objectif est de comprendre qu'une égalité entre les abscisses et ordonnées de points se traduit graphiquement par une courbe et le problème de la statue de la liberté pour lequel les variations d'une quantité en fonction d'une autre peuvent se voir par un tableau de valeurs ou une courbe.

A partir de ce problème, on peut bâtir le cours pour :

- compréhension d'une notion : expliquer ce que signifie qu'une quantité varie en fonction d'une autre quantité ; (d'autres problèmes de ce type auront été traités)
- compréhension d'une notion : voir cette dépendance fonctionnelle à travers trois registres : celui du tableau de valeurs, de la courbe, de l'expression
- savoir-faire : élaborer un tableau de variation à partir d'une courbe, décrire les variations d'une quantité à partir du tableau de valeurs ou de variation
- savoir-faire : apprendre les méthodes de résolution d'équation et d'inéquation de manière graphique

Durée indicative : 3 séances (55 mn, 40 mn et 55 mn)

Ecueils et « déblocage »:(questions ou problèmes des élèves en noir, réponse de l'enseignant en bleu)

- Que signifie : C point variable ? aire totale ? aire minimale ?

⟶quel est le verbe associé au mot variable, donner un synonyme ; qu'est-ce que cela signifie concrètement ?

⟶regarder dans le livre pour retrouver les propriétés des aires de figures

- Ne comprend pas l'énoncé

⟶Quel mot ? Quelle phrase ?

⟶Quelles sont les données de l'énoncé ?

⟶Qu'est ce qui est fixé ?

⟶Qui bouge ? Qui est-ce qui varie ?

- L'aire est toujours la même (l'aire du disque augmente et celle du carré diminue donc elles se compensent)

→ Demander des exemples, faire des figures pour « voir » ce qui se passe

→ Quelques exemples de figures (montrer figure avec GéoGebra)

- Comment peut-on conforter ou non l'avis de départ ?

→ Tester sur des positions différentes du point C

- Conclure sur trois calculs d'aire

→ Un autre groupe a trouvé une valeur plus petite pour l'aire

- Combien doit-on trouver de valeurs différentes pour être sûr qu'on a le minimum ?

→ Les renvoyer au problème de la statue de la liberté (question très intéressante qui devra être reprise lors du bilan)

- Calculs fastidieux de toutes ces valeurs ?

→ Pourquoi est-ce pénible ? car c'est répétitif, au lieu de refaire avec des valeurs différentes tous les calculs, ne pourrait-on pas trouver un moyen plus efficace ? Un moyen de ne le faire qu'une fois ? *Ne pas leur dire d'appeler d le diamètre et d'exprimer l'aire en fonction de d, tant que l'idée ne vient pas d'eux.*

- De nombreux calculs mais les données ne sont pas organisées pour conclure.

→ Comment « mieux visualiser » le fait que cette valeur semble être la plus petite ?

→ Comment représenter une grandeur qui varie en fonction d'une autre ?
On aimerait qu'ils proposent de traduire la situation par un tableau ou graphique : quelques relevés et regroupement des données, mais s'ils n'en n'ont pas l'idée ne pas la donner de suite, les laisser chercher un moyen plus efficace.

« A ne pas faire » :

- Ne pas leur dire d'utiliser une variable et d'étudier une fonction car c'est l'enjeu du problème.
- Ne pas leur dire de déterminer l'expression de l'aire en fonction d'une variable x qu'on leur donnerait

Quel bilan avec les élèves ?

- En conclusion de ce problème, l'enseignant et les élèves pourront, par exemple, généraliser une démarche qui répond à la question : comment étudier la dépendance d'une quantité en fonction d'une autre ? L'analyse de la démarche permet de donner une vision d'ensemble aux élèves et elle peut se résumer ainsi :
- Détecter les quantités qui ne sont pas constantes (l'aire, le diamètre ou rayon, le côté du carré)
- Regrouper différentes valeurs prises par les deux quantités (ici l'aire du bonhomme et le rayon du cercle (ou le diamètre ou le côté du carré)) et calculées dans un tableau de valeurs, de manière astucieuse afin de voir varier l'aire en fonction du rayon.
- Rechercher une manière plus rapide de calculer ces différentes valeurs en trouvant une expression de l'aire en fonction du rayon
- Visualiser dans un repère cette dépendance en plaçant des points dont l'abscisse est le rayon et dont l'ordonnée est l'aire
- Réfléchir à une manière de relier ces points
- Conclure par rapport au problème initial.

Lors de ce bilan, il est intéressant d'entamer une réflexion sur le choix de la variable.

Particularités du problème :

L'intérêt de ce problème par rapport à d'autres problèmes du même type est que :

- la position du point C n'est pas le milieu du segment [AB],
- par rapport à des problèmes comme ceux des aires des rectangles de périmètre fixé (aire de la baignade, clôture d'un champ…), la dépendance entre le côté du carré et le diamètre du cercle est plus intuitive et immédiate.

Bien évidemment d'autres problèmes peuvent conduire à l'étude des mêmes notions.

Prolongement possible :
Il ne s'agit pas d'un réel prolongement mais on peut demander aux élèves de construire la figure associée au problème sous GeoGebra mais en ayant au préalable introduit les notions nécessaires à cette construction à travers d'autres activités GeoGebra. (construction d'une figure qui n'est pas figée (par exemple construire un carré de côté variable et faire afficher son aire), utilisation d'un graphique et d'un tableur annexe)

Réflexion autour de l'énoncé :
La question pourrait aussi être : l'aire varie-t-elle en fonction de la position du point C ? si oui comment varie-t-elle ? si non que vaut-elle ?

Expérimentation :

<u>1ère séance</u> :

1ère étape (10mn) : un temps de travail individuel afin que les élèves entrent dans le problème, se posent des questions sur les données de l'énoncé sans être influencés par leurs camarades, prennent le temps de se confronter à l'énoncé. Sur leur copie, ils notent les difficultés de compréhension qu'ils rencontrent et le début de leur démarche. Le professeur s'autorise à réajuster les groupes fixés à l'avance suivant les démarches entreprises par les élèves.

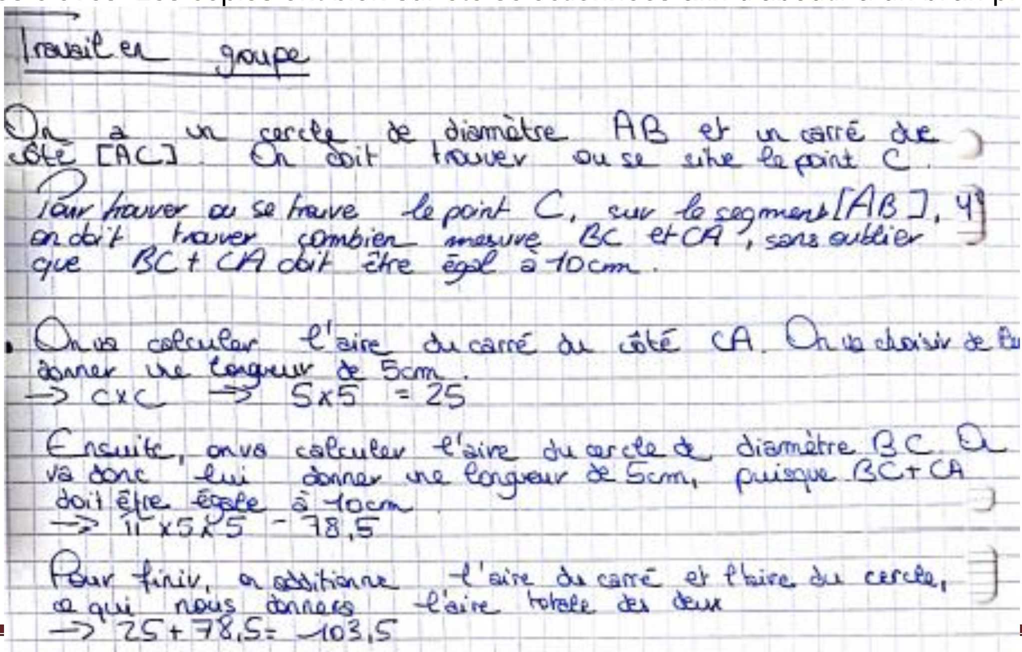
2ème étape (45mn) : un temps de recherche par groupe homogène de 3 : lors de ce travail, le professeur circule et débloque les élèves sans être directif et sans leur donner d'indications trop précises. (on proscrira par exemple : appelez x le diamètre et trouvez l'aire du bonhomme en fonction de la variable x ou encore : trouvez l'expression de l'aire du bonhomme, faites un tableau de valeurs, tracez une courbe… : ces indications induisent la démarche et orientent les élèves vers la méthode). Pour avoir une trace des aides données (et en tenir compte lors d'une éventuelle notation), on peut noter l'indication donnée sur la copie d'un des élèves du groupe par exemple.
Aucun bilan n'est fait à la fin de cette étape car en fonction des copies des élèves ce bilan peut être différent d'un groupe à l'autre.

L'objectif de ce problème est que les élèves comprennent la notion de quantités dépendantes et parviennent à l'exprimer mathématiquement par le biais de trois registres : le tableau de valeurs, la courbe, une expression algébrique. La démonstration du minimum n'est pas un but. Je ne pouvais espérer que l'objectif initial soit atteint par tous les élèves suite à ce problème. A ce stade de l'année ils n'avaient travaillé qu'un problème (statue de la liberté) dans lequel ils devaient exprimer une quantité en fonction d'une autre mais uniquement avec des mesures, ils ne pouvaient pas obtenir d'expression algébrique. Ce problème doit permettre de revoir ce qui a été vu au collège sur la notion de fonction et de faire un bilan sur ce qu'ils ont mémorisé.

<u>2ème séance</u> :

3ème étape (40 mn) : des écrits de recherche effectués par certains groupes sont donnés aux élèves et chacun individuellement doit critiquer ces copies (indiquer ce qu'il trouve intéressant et ce qui ne convient pas). Puis chaque copie est reprise avec l'ensemble de la classe et un bilan des critiques est effectué. Ceci est nommé écrit réflexif (car critique d'un écrit dans le but d'apprendre quelque chose) et pour les écrits 1 et 2 l'objectif est de dégager une méthode efficace. Ci-dessous une partie des copies à critiquer et le bilan commun fait par les élèves. Les copies ont bien sûr été sélectionnées afin d'aboutir à un bilan précis.

<u>1er écrit</u>



Travail en groupe

On a un cercle de diamètre AB et un carré de côté [AC]. On doit trouver où se situe le point C.

Pour trouver où se trouve le point C, sur le segment [AB], on doit trouver combien mesure BC et CA, sans oublier que BC + CA doit être égal à 10cm.

• On va calculer l'aire du carré du côté CA. On va choisir de lui donner une longueur de 5cm.
→ c×c → 5×5 = 25

Ensuite, on va calculer l'aire du cercle de diamètre BC. On va donc lui donner une longueur de 5cm, puisque BC+CA doit être égale à 10cm
→ π×5×5 = 78,5

Pour finir, on additionne l'aire du carré et l'aire du cercle, ce qui nous donnera l'aire totale des deux
→ 25+78,5 = 103,5

• On va ensuite tester avec une longueur de 7cm pour CA et une longueur de 3cm pour BC
—> aire du carré : 7x7 = 49
—> aire du cercle : 3,14 x 3 x 3 = 28,26

On remarque que en additionnant aire du carré + aire du cercle, on obti[ent] 77,26. Cette aire globale est plus petite que la précédente.

• Pour la suite des calculs, on va faire un tableau.

aire du carré	36 (6x6)	49	64	81	16
aire du cercle	50,25 (πx4x4)	28,26	12,56	3,14	113,04
TOTAL des deux	86,25	77,26	76,56	84,14	129,04

On en conclut que, le point C doit se trouver à 8 cm de A et à 2cm de B car aire du cercle + aire du carré est la plus petite.

Voici les remarques formulées par les élèves par rapport à ce travail

- sur la présentation :
  - *le fait que le point C se trouve à 8 cm du point A n'apparaît pas dans le tableau*
- du point de vue mathématique
  - *le tableau donne l'aire totale de la figure (ce qui n'est pas le cas dans tous les écrits).*
  - *les valeurs des aires sont incorrectes, ils ont confondu rayon et diamètre*

Beaucoup de groupes ont effectué ce genre de tableau dans lequel n'apparaît pas la dépendance de l'aire totale par rapport à une des longueurs (diamètre ou rayon ou côté du carré) et du coup le tableau seul ne permet pas de conjecturer la position du point C.

2ème écrit

En groupe : Pour trouver l'aire minimal on test plusieurs valeurs qui en les ~~additionnant~~ additionnent égal toujours 10cm. Puis on les compares et on trouves l'aire minimale.

On calcule l'aire du cercle :
On test avec BC = 4,5 = diamètre.
$\pi \times r \times r$
$\pi \times 2,25 \times 2,25 = \frac{81}{16}\pi \approx 15,9$

Aire du carré : on test avec AC = 5,5
$c \times c =$
$5,5 \times 5,5 = 30,25$

Combien de valeur doit-on comparer ?

πxrxr	π×0,25×0,25 = $\frac{1}{16}$π	π×0,5×0,5 = $\frac{1}{4}$π	π×1×1 = π	π×1,5×1,5 = $\frac{9}{4}$π	π×2×2 4π	π×2,5×2,5 = $\frac{25}{4}$π
C×C	9,5×9,5 = 90,25	9×9=81	8×8 = 64	7×7 = 49	6×6=36	5×5 = 25

la valeur total

On fait un tableau pour voir si ça augmente ou diminue

Aire total (cercle + l'aire du carré)	≈ 90,44	≈ 81,8	≈ 67,1	≈ 56,06	≈ 48,6	≈ 44,6
longueur AC	9,5	9	8	7	6	5

Dans le tableau les valeurs de l'aire total ne font que diminuer

Voici les remarques formulées par les élèves par rapport à ce travail

- sur la présentation :
  - *bien car ils expliquent la démarche*
  - *bien car ils concluent*
  - *le 1er tableau est illisible : il ne faut pas mettre les calculs dans le tableau*

- du point de vue mathématique
  - *le 2ème tableau donne l'aire totale de la figure et la longueur AC ce qui permet de relier la position de C à l'aire totale*
  - *la conclusion de ce groupe ne donne pas la position du point C*

L'objectif est de faire prendre conscience aux élèves que regrouper les valeurs calculées dans un tableau demande une réflexion quant aux quantités qui sont à présenter dans un ce tableau. Pour cela il faut

- tenir compte de la question qui donne des indications sur les quantités qui nous intéressent
- déterminer le nombre de valeurs à noter dans un tel tableau et surtout la « plage » (qu'on appellera ensemble de définition) de valeurs qui nous intéresse.

Pour les écrits des groupes 3 et 4, l'objectif n'est plus de faire la critique des démarches mais de trouver des éléments « nouveaux », intéressants pour avancer dans la recherche, ce sont des écrits réflexifs qui ont une fonction heuristique :

3ème écrit

Formule de l'aire du carré :
c^2

Formule de l'aire du cercle :
$\pi \times r^2$

Pour trouver l'aire totale, j'utilise : $c^2 + \pi \times r^2$.
Il faut trouver l'aire minimal.

aire du carré	aire du cercle	aire totale
$9^2 = 81$	$\pi \times 0,5^2 \simeq 0,8$	81,8
$8^2 = 64$	$\pi \times 1^2 \simeq 3,14$	67,14
$7^2 = 49$	$\pi \times 1,5^2 \simeq 7,1$	56,1
$6^2 = 36$	$\pi \times 2^2 \simeq 12,6$	48,6
$5^2 = 25$	$\pi \times 2,5^2 \simeq 19,6$	44,6
$4^2 = 16$	$\pi \times 3^2 \simeq 28,3$	44,3
$3^2 = 9$	$\pi \times 3,5^2 \simeq 38,5$	47,5
$2^2 = 4$	$\pi \times 4^2 \simeq 50,3$	54,3

Comme AB = 10 cm on prend AC = 9 cm et BC = 1 cm puis on applique les formules pour calculer les 2 aires :

aire du carré : $9^2 = 81$ cm^2 $\pi \times 0,5^2 \simeq 0,8$ cm^2

Puis on les additionne pour trouver l'aire totale puis on fait ça jusqu'à trouver la valeur totale la plus basse.

Conclusion : d'après le tableau, l'aire diminue puis remonte à partir d'un certain point. Ce point est là où l'aire est la plus basse.

C'est quand l'aire du carré = 16 cm^2 et l'aire du cercle = 28,3 cm^2 soit, l'aire totale minimale est 44,3 cm^2

4ème écrit

Ici, on considère que c'est le milieu de [AB]

L'aire du carré est de $25 cm^2$
L'aire du disque est de $\simeq 19,6$.
L'aire total : $25 + 19,6 \simeq 44,6$.

Conclusion : Si on considère que C est le milieu de [AB] alors l'air total de cette figure est : $44,6 cm^2$

formule $10-x$ = long carré x = diamètre

Mais si on considère que le diamètre est x alors on a longueur du carré est : $10-x$

diamètre du cercle (x)	5	4	3	2	1
longueur de carré ($10-x$)	5	6	7	8	9
Aire total de la figure environ cm^2	44,6	48,5	56	67,1	81,7

- Par rapport à ces deux écrits, l'idée est qu'ils se rendent compte qu'il y a un moyen d'être beaucoup plus rapide, que réécrire toutes les formules et refaire tous les calculs n'est pas forcément nécessaire :

Les écritures : aire totale = $\pi r^2 + c^2$ ainsi que $diamètre = x$ et $côté\ du\ carré = 10 - x$ ne permettent-elles pas d'arriver plus rapidement à établir le tableau de valeurs?

Le groupe qui a introduit x a expliqué l'égalité $côté\ du\ carré = 10 - x$ mais cette égalité a, pour la moitié des élèves, posé problème. Le choix du nom x a également été débattu et appeler d cette variable est tout aussi pertinent.

Nous avons aussi discuté sur le choix de la quantité prise comme variable : par exemple appeler x le côté du carré est tout aussi pertinent que d'appeler x le diamètre ou le rayon justement. Cependant dans les écrits qui ont suivi, certains groupes ont gardé x comme variable, sans doute parce que cela les rassurait de voir qu'ils obtenaient la même expression que celle du groupe présenté et peut-être aussi parce qu'ils ne sont pas encore suffisamment mûrs pour oser prendre ce type d'initiative. Lors des problèmes qui ont suivi, une des difficultés des élèves a été de choisir cette variable, certains élèves nomment x une certaine longueur puis dans l'expression qui suit, x représente une tout autre longueur. Les élèves voient en x quelque chose d'inconnu mais ne voient pas qu'il s'agit d'une inconnue représentant une quantité précise. Il faudra donc retravailler encore sur le sens de la notion mathématique d'inconnue.

A ce moment j'ai rappelé (mais on peut aussi l'introduire ici) l'utilisation de la calculatrice qui permet d'obtenir un tableau de valeurs avec un pas à fixer, dès qu'on possède une égalité qui exprime une quantité en fonction d'une autre. (lors du problème « famille de courbes » les coordonnées de certains points avaient été obtenues ainsi lors de la correction).

- De plus, l'idée de ce problème de recherche est d'exprimer la dépendance entre deux quantités dans le langage algébrique, par des tableaux et par un graphique, c'est pourquoi en leur demandant « Comment peut-on visualiser cette quantité minimum autre part que dans un tableau ? », en se référant au problème de la statue de la liberté, les élèves ont rapidement suggéré de représenter cette dépendance par un graphique.

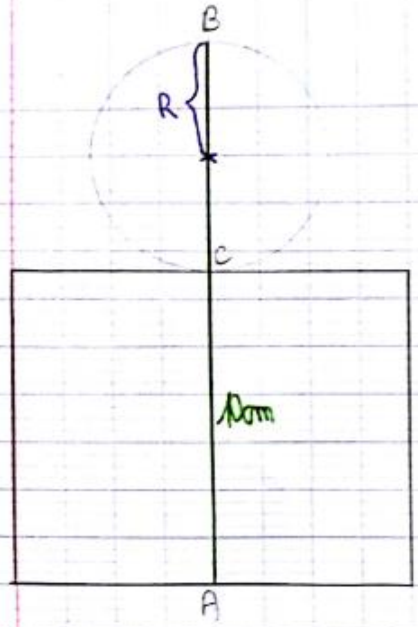
3ème séance :

4ème étape : (40 mn) les élèves sont à nouveau en groupes (même groupes qu'au départ) et ont réécrit ou complété leur recherche en s'aidant des remarques.

Copies du deuxième travail en groupes, après critique des premiers écrits

5ème écrit

Groupe :



cercle : $\pi \times r^2$

aire carré : $c \times c$

On choisit le diamètre comme variable et on calcul tout en fonction de celui-ci.

cercle : $\pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^2$

aire cercle : $10-d$

Donc l'aire du bonhomme est égale à :

$\pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^2 + (10-d)^2$

Quand on utilise la calculatrice, on doit faire : obtion TABLE, taper l'équation afin d'avoir le tableau de valeur.

diamètre	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
aire	100	90,4	81,8	74	67,1	61,2	56,1	51,9	48,6	46,2

diamètre	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	10
aire	44,6	44	44,3	45,4	47,5	50,4	54,3	59	64,6	78,5

6ème écrit

groupe d'élèves ayant des difficultés

1) On cherche l'expression de l'aire en fonction du diamètre.

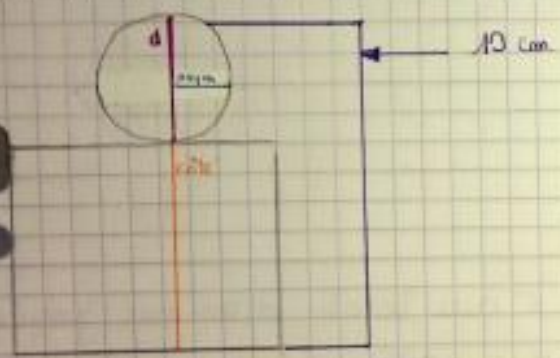
Aire du carré = c^2 10 - d

Aire du cercle = πr^2

ce sont des formules : du carré et du cercle.

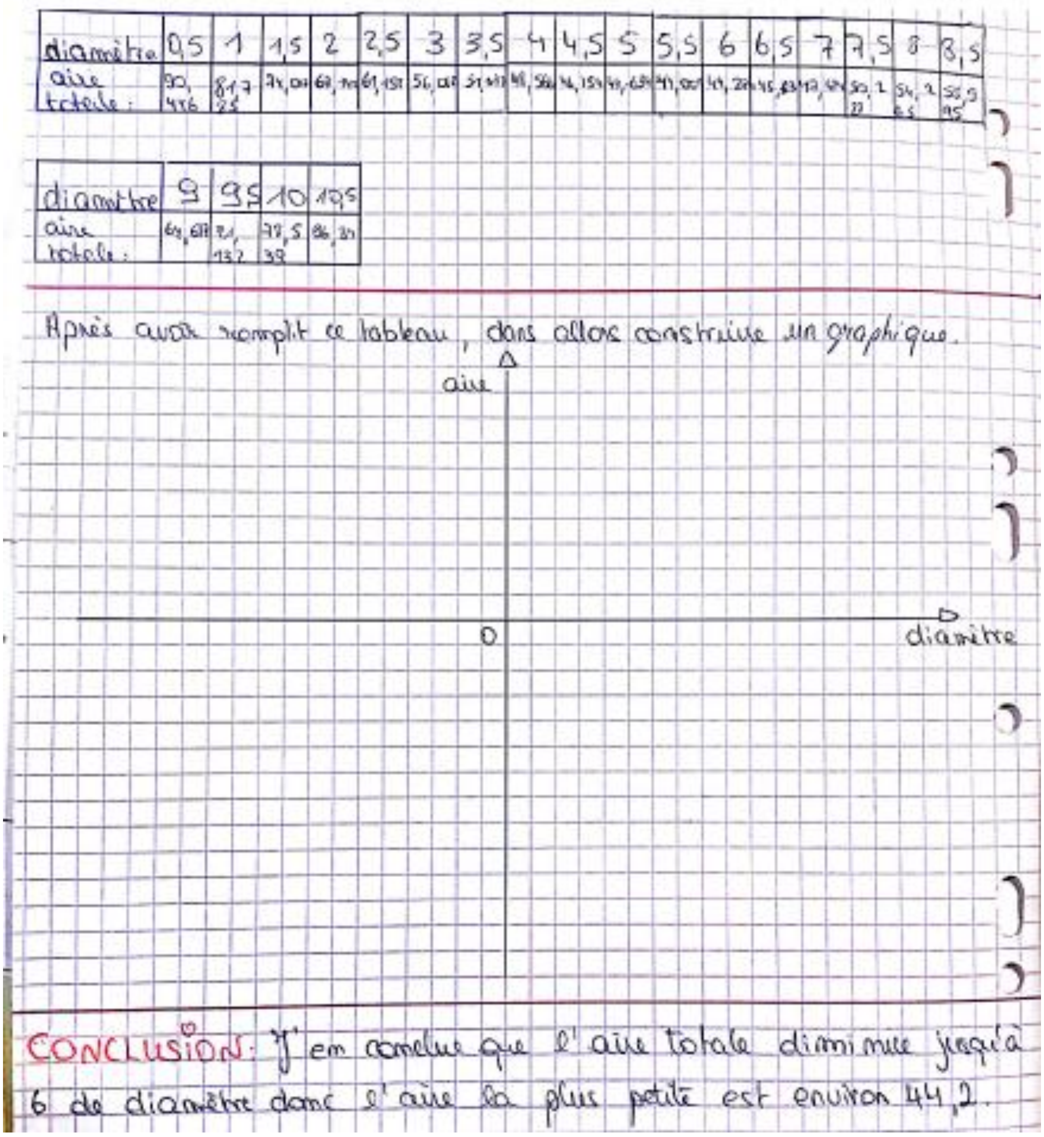
Shéma du bonhome :

Le cercle représente sa tête, et le carré son tronc. Dans ce shéma, dans le bonhomme : on va inscrire le côté le rayon ainsi que le diamètre.



Pour calculer la hauteur en utilisant la formule : 10 - d.

On aditionne la formule pour calculer l'aire du cercle avec la formule 10 - d : $\pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (10 - d)^2$ et on la rentre dans notre calculatrice afin de construire un tableau



diamètre	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5
aire totale :	90,476	81,725	74,0[illegible]	67,[illegible]	61,151	56,0[illegible]	51,[illegible]	48,[illegible]	46,15[illegible]	44,6[illegible]	44,00[illegible]	44,2[illegible]	45,63[illegible]	47,[illegible]	50,2[illegible]	54,2[illegible]	55,[illegible]95

diamètre	9	9,5	10	10,5
aire totale :	64,67[illegible]	71,137	77,539	86,3[illegible]

Après avoir remplit ce tableau, dans allons construire un graphique.

CONCLUSION : J'en conclue que l'aire totale diminue jusqu'à 6 de diamètre donc l'aire la plus petite est environ 44,2.

Remarque : ce groupe n'a pas eu le temps de placer les points et tracer la courbe.

5ème étape : elle peut avoir lieu dès que les copies sont ramassées ou à la séance suivante :

Un bilan, sous forme de cours, sur l'expression d'une quantité en fonction d'une autre est établi et rappelle les trois registres étudiés ici permettant d'exprimer une quantité en fonction d'une autre : registre des tableaux, registre graphique et le registre algébrique avec l'expression de l'aire en fonction d'une seule variable.