QUI multiplié par 7 donne 3 ?

Activité extraite de la brochure de l'IREM « Découvrir de nouveaux nombres au collège » collection « Dans nos classes » n°2

Niveau : $4^{ème}$, $3^{ème}$ et 2^{nde}

Enoncé : Peux-tu trouver un nombre décimal qui, lorsqu'on le multiplie par 7, donne 3 ? Quelle est ta réponse ? Explique la méthode que tu as utilisée ?

Objectifs : prouver que certains nombres ne sont pas décimaux

Prérequis : notion de nombre décimal, comparaison de nombres décimaux, connaissance des limites de la calculatrice.

Notions abordées et travaillées dans le problème : multiplication et ordre, détermination du dernier chiffre après la virgule d'un produit, démonstration par l'absurde et par disjonction des cas.

Comment intégrer ce problème dans la progression : en 2^{nde} à n'importe quel moment de l'année mais de préférence avant d'introduire la notion d'intervalle

Durée indicative : 1h

Matériel : calculatrice

Ecueils et « déblocages »:

● Chercher uniquement parmi les nombres entiers pour répondre à la question.
  - ➢ Faire relire la question et expliciter la notion de nombre décimal pour amener l'élève à utiliser des nombres à virgule.

● Chercher à établir le résultat en compensant avec une autre opération. Par exemple, un élève a écrit $1\times7=7-4=3$.
  - ➢ Insister alors sur l'opération qui est à faire.

- Effectuer à la calculatrice la division de 3 par 7 puis multiplier le résultat obtenu par 7, obtenir 3 et donc penser avoir trouvé la réponse.
  - ➢ Proposer un contrôle de ce résultat à la main. Demander d'expliquer ce qui s'est passé, puis de poursuivre la recherche à la main ce qui devrait permettre de faire émerger des idées pour la mise en commun.

● Donner comme réponse 3/7 (certaines calculatrices de collège donnent cette réponse lorsqu'on pose la division de 3 par 7).
  - ➢ Demander si 3/7 est un nombre décimal, s'il peut s'écrire avec des chiffres après la virgule.

● Effectuer la division euclidienne de 3 par 7 (en d'autres termes utiliser l'algorithme dont les inconvénients ont été cités dans la brochure d'où est extraite cette activité).
  - ➢ Rappeler qu'on demande une preuve, ce qui renvoie à poser les multiplications successives.

Lorsque les élèves ont entamé leurs recherches dans la bonne direction, il faut :

● s'assurer qu'ils écrivent bien tous les essais faits à la calculatrice pour d'une part pouvoir optimiser leur recherche et d'autre part permettre au professeur de les aider.

● repérer les élèves qui font des essais totalement aléatoires, ce qui a peu de chance de leur permettre d'aboutir et qui risque de les décourager. Dans ce cas, on peut leur suggérer de classer leurs calculs en deux colonnes, selon que le nombre multiplié par 7 donne un résultat inférieur à 3 ou supérieur à 3. Cela peut toutefois ne pas être suffisant pour que ces élèves entreprennent une recherche méthodique, en essayant de préciser une décimale après l'autre (certains élèves essaient indifféremment des alternances de nombres à 2, 3, 4 …chiffres après la virgule).

La mise en commun

● Quand ?

Dans la classe, chacun ne suit pas le même parcours, une mise en commun est donc nécessaire pour que chacun prenne connaissance du travail fait par les autres. Il faudrait, pour qu'elle soit bénéfique à chaque élève, que chacun ait été amené à faire une multiplication à la main puisque ce sera le pivot de la preuve.

Cependant, le choix du moment sera lié à plusieurs paramètres :

¢ l'avancement de la recherche de chacun;

¢ l'ambiance de la classe. Les élèves ne peuvent maintenir cette activité indéfiniment et, si on sent un certain flottement, c'est peut-être le moment de faire le point !

● Comment ?

On fait passer au tableau

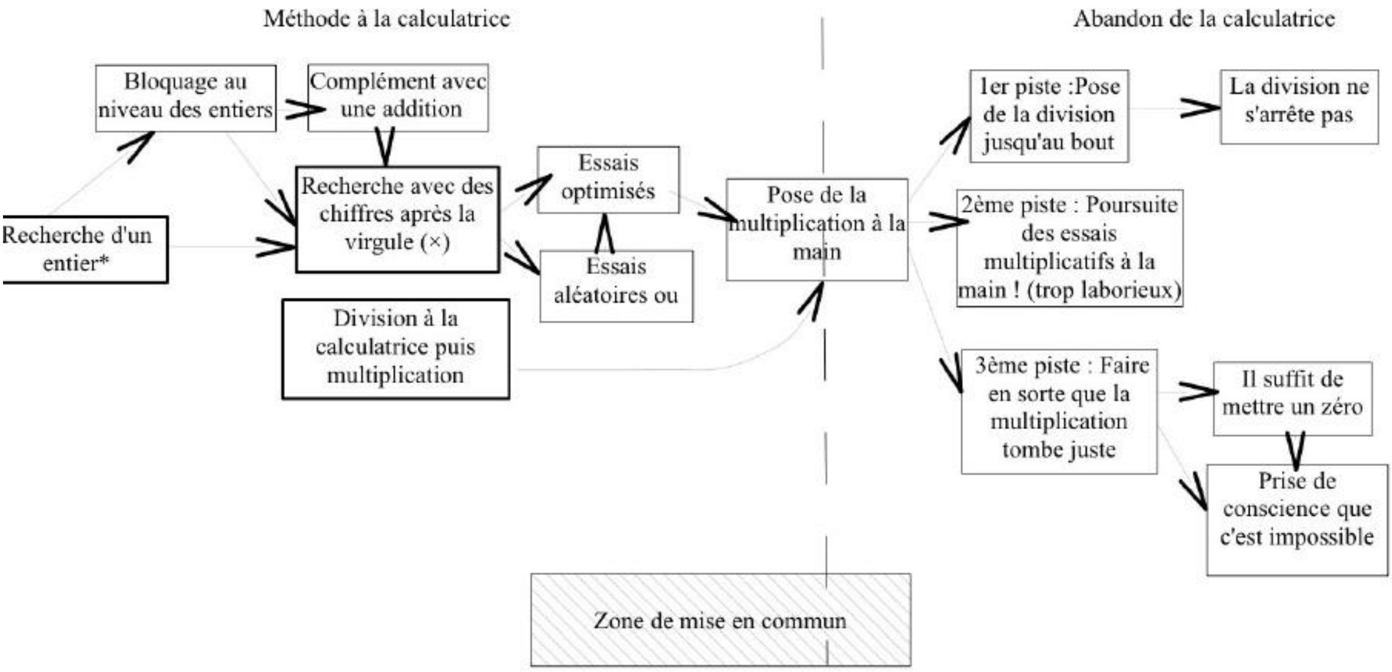
¢ un élève qui a procédé par essais multiplicatifs. Et on commente l'organisation des calculs

¢ un élève qui a procédé par division. On lui demande d'écrire la division puis de vérifier le résultat en faisant la multiplication à la calculatrice. Si l'élève obtient ainsi 3, on invalide la valeur proposée par la calculatrice en faisant poser la multiplication et en proposant de faire le calcul à la main (il suffit d'en faire une partie). On donne des explications sur l'affichage donné par la calculatrice (limite de la mémoire, arrondi).

On compare la méthode par essais-multiplicatifs avec celle de la division en rappelant le lien entre la multiplication et la division. On évoque l'optimisation possible de la méthode par essais multiplicatifs. On note que la méthode par division permet de déterminer les bons chiffres après la virgule alors que pour l'autre méthode on doit procéder par essais.

La conclusion à ce moment de la mise en commun est que personne n'a trouvé la réponse. Qu'allons-nous faire alors maintenant, au vu de ce qui a été dit ? Que proposez-vous ?

● Les propositions possibles apparaissent dans la partie de droite du schéma ci-dessous. On pourra suggérer aux élèves celles auxquelles ils n'ont pas pensé.



**Les cadres en gras représentent les entrées possibles dans l'activité. trois entrées possibles*

Remarque concernant la 3ème piste
Certaines calculatrices affichent pour 3:7 le nombre 0,428571429 et la multiplication posée donne

$$\begin{array}{r} 0{,}428571429 \\ \times 7 \\ \hline 3{,}000000003 \end{array}$$

L'idée que pour obtenir exactement 3 il suffit d'obtenir 0 à la place de 3 comme dernier chiffre après la virgule émerge rapidement, immédiatement suivie par l'idée qu'il suffit alors de remplacer le dernier chiffre 9 par 0 pour que « ça marche ». Cette idée a, lors d'une expérimentation, emporté l'adhésion de toute la classe. Les élèves se sont alors arrêtés, satisfaits, convaincus qu'ils avaient la solution du problème.
Dans cette situation, il faut vraiment insister pour les pousser à vérifier que leur « bonne réponse » ne convient pas et leur laisser le temps de s'en convaincre, avant de les inciter à poursuivre la recherche.

Quel bilan avec les élèves ? Aucun nombre décimal ne peut donner 3 lorsqu'on le multiplie par 7.

Lors de l'expérimentation : On peut demander aux élèves de compléter le tableau suivant à l'aide de leurs essais :

Nombre de chiffres après la virgule	Plus grand nombre décimal *trop petit*	Plus petit nombre décimal *trop grand*	Précision
0	0	1	à l'unité
1	0,4	0,5	au dixième
2	0,42	0,43	au centième
…	…	…	…

Le travail sur la précision de ces valeurs approchées peut être reporté à plus tard.

L'aspect périodique n'est pas non plus important à souligner à ce moment, et risque même de gêner le résultat auquel nous voulons parvenir puisque cela suggère une écriture illimitée de la réponse. On peut cependant remarquer qu'en posant la division, il n'est plus nécessaire à partir d'un moment de la continuer puisqu'une procédure de calcul se répète. Mais c'est tout.

La pose d'une multiplication à la main, nécessaire dès que l'on dépasse la précision de la calculatrice, fera prendre conscience qu'il est impossible qu'un nombre décimal multiplié par 7 donne 3 et mènera à la preuve qu'aucun nombre décimal ne convient (ceci est le résultat principal de l'activité et il n'est pas nécessaire d'évoquer à ce moment l'existence d'un nouveau nombre).

Preuve :

- Nous savons que $7 \times 0 = 0$ et $7 \times 1 = 7$.
  S'il existe un nombre décimal dont le produit par 7 est égal à 3, il est strictement compris entre 0 et 1.

Il a donc au moins un chiffre après la virgule.

- Mais un nombre et son produit par 7 ont le même nombre de chiffres après la virgule. En effet la multiplication par 7 du dernier chiffre après la virgule ne donne jamais 0 comme le montre le tableau ci-dessous

Dernier chiffre de a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dernier chiffre de 7a	7	4	1	8	5	2	9	6	3

- Le produit par 7 du nombre cherché aurait donc au moins un chiffre après la virgule. Or le résultat que l'on veut obtenir est un entier et n'a donc pas de chiffre après la virgule, d'où une contradiction.

<u>Prolongements possibles</u> : Trouver un nombre décimal qui, élevé au cube, donne 7

<u>Remarques pour le professeur</u> :

- **Il est nécessaire au début de cette activité de préciser ce qu'on appelle dans cette activité « nombre de chiffres après la virgule » :** c'est le nombre de chiffres figurant dans la partie décimale de l'écriture d'un nombre après avoir supprimé les 0 superflus. Exemple : 2,3500 = 2,35; il a donc 2 chiffres après la virgule.
- Dans la brochure d'où est extraite cette activité se trouvent, de façon très détaillée, un exemple d'expérimentation, des exercices permettant de travailler les prérequis, des remarques didactiques et des compléments « culturels » pour le professeur.