Loi géométrique tronquée : exemple de la désintégration d'un atome

Niveau :

Classe de première S

Extrait du programme officiel :

Modèle de la répétition d'expériences identiques et indépendantes à deux ou trois issues.	• Représenter la répétition d'expériences identiques et indépendantes par un arbre pondéré. • Utiliser cette représentation pour déterminer la loi d'une variable aléatoire associée à une telle situation.	Pour la répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat. La notion de probabilité conditionnelle est hors programme. On peut aussi traiter quelques situations autour de la loi géométrique tronquée. ◇ On peut simuler la loi géométrique tronquée avec un algorithme.

Type d'activité :

Il s'agit d'une activité guidée en classe mêlant probabilité et algorithmique, qui peut être une activité de synthèse à la partie du programme intitulée « Modèle de la répétition d'expériences identiques et indépendantes ».

Pré-requis :

- Avoir traité la partie du programme intitulée « Modèle de la répétition d'expériences identiques et indépendantes » et savoir calculer la moyenne et l'écart-type d'une série statistique.
- Avoir utilisé la calculatrice pour programmer des algorithmes.

Motivation de l'activité :

Cette activité propose un exemple de la loi géométrique tronquée.
Elle suit la recommandation du programme officiel qui est de simuler la loi géométrique tronquée à l'aide d'un algorithme.

Compétences travaillées :

L'activité propose un travail sur l'algorithmique (exécution à la main d'un algorithme, compréhension et modification de l'algorithme, programmation sur la calculatrice), étant donné que l'étude théorique est a priori difficile.
Elle peut se poursuivre par une étude théorique (en fin de première S ou en terminale S) nécessitant une modélisation par un arbre de probabilité, puis par l'introduction et l'étude d'une variable aléatoire. Dans cette étude apparaît le calcul de la somme des termes d'une suite géométrique ainsi que le calcul de la dérivée d'une fonction à l'aide de la formule de dérivation de $\frac{u}{v}$.

Remarque :

La situation étudiée est tirée du document « Ressources pour la classe de première générale et technologique, Statistiques et probabilités » page 13, avec une mise en application différente de celle proposée dans ce document.
Le document qui suit peut être adapté pour résoudre le problème avec un tableur ou avec un autre logiciel de programmation.

Texte de l'activité élève

La probabilité qu'un atome se désintègre par unité de temps, notée D, est de 0.07.
On décide d'observer cette désintégration en limitant le temps d'attente à 100 unités de temps.

On suppose qu'au début de l'expérience, l'atome n'est pas désintégré.

L'objectif est d'étudier le temps moyen d'attente avant désintégration.

Etude de la situation à l'aide d'un algorithme

On considère l'algorithme suivant, écrit en langage naturel :

```
Affecter la valeur 1 à la variable A
Tant que (NombreAléatoire > 0.07 ET A≤100) répéter
        Affecter la valeur A+1 à la variable A
Fin du Tant que
Afficher A
```

1) Remplir le tableau d'état des variables suivant en prenant successivement 0.3, 0.65, 0.456 et 0.01 comme valeurs renvoyées par l'instruction « NombreAléatoire ».

NombreAléatoire						
A						

Quelle est la valeur affichée par l'algorithme ? ______________________________

2) On admet que la fonction « NombreAléatoire » renvoie 0.0012.
Quelle est la valeur affichée par l'algorithme ? ______________________________

3) Que réalise cet algorithme ? Programmer le sur votre calculatrice et exécuter-le plusieurs fois.

____

4) Compléter l'algorithme précédent pour :
   - qu'il calcule 200 temps d'attentes ;
   - qu'il calcule le temps d'attente moyen de la série formée de ces 200 temps d'attente ;
   - qu'il calcule l'écart-type de la série formée de ces 200 temps d'attente.

```
______________________________________
______________________________________
______________________________________

    Affecter la valeur 1 à la variable A
    Tant que (NombreAléatoire > 0.07 ET A≤100) répéter
            Affecter la valeur A+1 à la variable A
    Fin du Tant que

______________________________________
______________________________________
______________________________________
______________________________________
______________________________________
```

5) Modifier le programme précédent et l’exécuter.
Que dire des temps d’attente moyens observés dans la classe ?

Que dire des écarts-types observés dans la classe ?

Remarques (à destination de l'enseignant) :

Plusieurs solutions sont possibles pour l'algorithme de la question 6).

On peut calculer moyenne et écart type « à la main », comme dans l'algorithme ci-dessous :

```
Affecter la valeur 0 à la variable M
Affecter la valeur 0 à la variable E
Pour I allant de 1 à 200 répéter
        Affecter la valeur 1 à la variable A
        Tant que (NombreAléatoire > 0.07 ET A≤100) répéter
                Affecter la valeur A+1 à la variable A
        Fin du Tant que
Affecter la valeur A + M à la variable M
Affecter la valeur A² + E à la variable E
Fin du Pour
Afficher M/200
Afficher √(E/200 - (M/200)²)
```

On peut aussi compléter des listes sur la calculatrice, puis utiliser les fonctionnalités statistiques de la calculatrice pour calculer les indicateurs statistiques, comme dans l'algorithme ci-dessous (on note Liste1(K) le $K^{\text{ième}}$ élément de la liste 1).

```
Pour K allant de 1 à 200 répéter
        Affecter la valeur K à Liste1(K)
        Affecter la valeur 0 à Liste2(K)
Fin du Pour

Affecter la valeur 0 à la variable E
Pour I allant de 1 à 200 répéter
        Affecter la valeur 1 à la variable A
        Tant que (NombreAléatoire > 0.07 ET A≤100) répéter
                Affecter la valeur A+1 à la variable A
        Fin du Tant que
Affecter Liste2(A) + 1 à Liste2(A)
Fin du Pour
Afficher les indicateurs statistiques de la série formée par Liste1 et Liste2
```

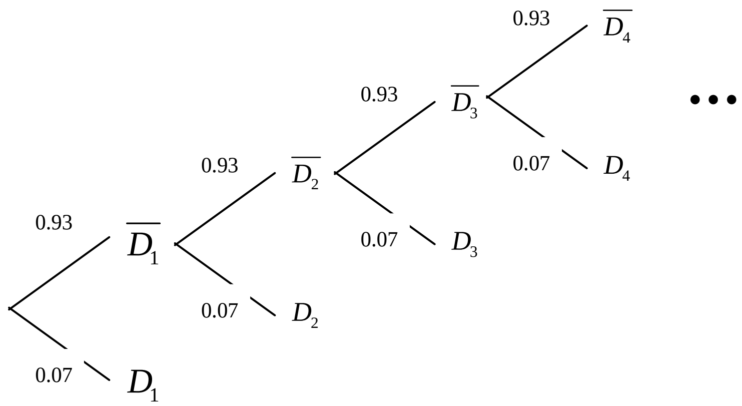
Cette méthode présente en outre l'avantage de pouvoir afficher sur la calculatrice la distribution des temps de désintégration.

Observation attendue à la question 5) :

On constate que les temps d'attente sont, individuellement, très imprévisibles. Cette observation est confirmée par un écart type important sur des séries de 200 simulations. En revanche, les temps d'attente moyens sur des séries de 200 simulations sont, quand à eux, stables autour de 14.
Cette stabilité suggère d'étudier la loi de probabilité de la variable aléatoire « temps d'attente ».

Etude de la situation théorique :

On peut représenter cette situation par l'arbre de probabilités inachevé ci-dessous :



On note T la variable aléatoire prenant comme valeurs le temps d'attente avant désintégration.
On pose par convention $T = 0$ quand l'atome n'est pas désintégré après 100 unités de temps.
Pour $k \in \{1,\cdots,100\}$, $P(T = k) = 0.93^{k-1} \times 0.07$.

Donc l'espérance de la variable aléatoire T est : $E(T) = \sum_{k=1}^{100} k \times 0.93^{k-1} \times 0.07$.

Pour calculer cette somme, on introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sum_{k=1}^{100} kx^{k-1}$.

On observe que cette fonction est la dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sum_{k=1}^{100} x^k$.

Or, pour $x \neq 1$, on sait calculer $g(x)$: $g(x) = \dfrac{x - x^{101}}{1-x}$.

Calculons, pour $x \neq 1$, $g'(x)$: $g'(x) = \dfrac{1-(101-100x)x^{100}}{(1-x)^2}$.

Appliquons cette formule avec $x = 0.93$: $f(0.93) = \dfrac{1-8\times 0.93^{100}}{0.07^2}$

On en déduit que : $E(T) = \dfrac{1-8\times 0.93^{100}}{0.07} \simeq 14.21$.
L'observation faite à l'aide de la simulation algorithmique est donc confirmée par ce résultat théorique.